République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE Biologie

Par

Dr: Chine Amel

Module: Biostatistiques

Niveau: L2

2023-2024

Chapter 1

Lois de probabilités : loi Normale, Student et Fisher

1.1 Notions de base

Avant de parler sur les lois de probabilités il faut d'abord parler sur quelques définitions de base sur l'expérience aléatoires et ses résultats et comment calculer une probabilité.

1.1.1 Expérience aléatoire, ensemble fonadamental, évènement et probabilité

Definition 1 *Une expérience aléatoire c'est une experience qui a plusieurs résultats, mais on ne peut pas prédire exactement lesquels d'entre eux seront obtenus. Les résultats d'une telle expérience sont dus au hasard.*

Example 2 *Le lancement d'une pièce de monnaie. Nous savons bien que la pièce a deux faces: pile ou face, mais nous pouvons pas prévoire que nous aurons définitivement face*

Example 3 *Lancement les dés. Un dé à 6 faces de 1 à 6. On peut avoir 1 mais pas certainement. La même chose pour les autres faces.*

Definition 4 *L'ensemble fondamental, noté* Ω,*est l'ensemble qui contient tous les résultas possibles d'une expérience aléatoire.*

Definition 5 *l'évènement c'est un sous ensemble de l'ensemble fondamental* Ω. *On a trois types des évènements:*

1. *l'évènement élémentaire : contient un seul résultat d'une experience aléatoire.*

2. *Un évènement sur contient tous les résultats possibles d'une experience aléatoire c'est l'ensemble* Ω.

3. *Un événement impossible est un événement qui ne peut être réalisé; c'est-à-dire ses résultats n'appartiennent pas à l'ensemble fondamental.*

Remark 6

1. *l'évènement est noté par: A, B, C,.....*

2. *les éléments de* Ω *ou d'un évènement sont notés:* $\omega_1, \omega_2, ...$

Example 7 *Si on lance un dé, alors :*

1. *L'ensemble fondamental:*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. L'évènement A: $\ll$*btenir un nombre pair*$\gg$ *est:*

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

3. L'évènement B: $\ll$*obtenir un nombre impair*$\gg$ *est:*

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

4. L'évènement élémentaire C: $\ll$*obtenir le nombre* $4 \gg$ *est:*

$$C = \{4\}.$$

5. L'évènement impossible D: $\ll$*obtenir le nombre* $7 \gg$ *est:*

$$D = \varnothing.$$

Definition 8 *La probabilité est une application de l'ensemble* Ω *à l'ensemble* $[0, 1]$ *qui associe à chaque évenement* A *une probabilité* $P(A)$

$$P: \begin{array}{l} \Omega \rightarrow [0,1] \\ A \longmapsto P(A). \end{array}$$

où:

$$P(A) = \frac{\text{Nombre des cas favorables}}{\text{Nombre des cas possibles}} = \frac{Card\ (A)}{Car\ (\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

et: $Card\ (A)$: nombre des éléments de A, *Cardinal* de Ω : nombre des éléments de Ω.

1. Pour tout évènement $A : 0 \leq P(A) \leq 1$.

2. Pour l'évènement sur: $P(\Omega) = 1$.

3. Pour l'évènement impossible: $P(\varnothing) = 0$,

4. Soient A, B deux évènements dans Ω, alors:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5. Si $A \cap B = \varnothing$, alors:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

6. Soient A, B deux évènements dans Ω,Si $B \subset A$, alors:

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

   où $A - B$: l'ensemble A sauf l'ensemble B

7. Soit $\overline{A}$ est le complémentaire de A, alors:

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Démonstration:

On sait que:

$$\Omega = A \cup \overline{A}.$$

Alors:

$$P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right)$$

D'aprés la proposition 4:

$$P(\Omega) = P\left(A \cup \overline{A}\right)$$
$$= P(A) + P\left(\overline{A}\right) - P\left(A \cap \overline{A}\right)$$

et car: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, alors

$$P(\Omega) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) - P(\varnothing)$$
$$= P(A) + P\left(\overline{A}\right) - 0$$
$$= P(A) + P\left(\overline{A}\right).$$

et car $P(\Omega) = 1$, alors

$$P(\Omega) = 1 = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$$

Alors

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Example 9 *Reprenons l'exemple 7, alors :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \text{ alors } |\Omega| = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ alors } |A| = 3,$$

alors

$$P(A) = \frac{Nombre\ des\ cas\ favorables}{Nombre\ des\ cas\ possibles}$$
$$= \frac{Card\ (A)}{Card\,(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \in [0, 1].$$

De même, pour B :≪ *obtenir un nombre impair*≫

$$B = \{2, 4, 6\}, \textit{alors } |B| = 3,$$

alors:

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\textit{Nombre des cas favorables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{Card\ (B)}{Card\,(\ \Omega)} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \in [0, 1]. \end{aligned}$$

et pour l'évènement élémentaire C*:*≪*obtenir le nombre* 4 ≫ *est:*

$$C = \{4\} \textit{ alors:} |C| = 1.$$

donc:

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\textit{Nombre des cas favorables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} \\ &= \frac{Card\,(C)}{Card\,(\Omega)} = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Example 10 *On lance un dé deux fois. On note par* A *l'évènement suivante* A :≪*obtenir une somme égale à un nombre pair*≫, *et par* B *l'évènement suivante* B : ≪*obtenir une somme* <6≫ .

Premièrement on détermine l'ensemble fondamental Ω :

L'ensemble total c'est

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$= \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$

$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$

$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$$

$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$

$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$

$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Alors le cardinal de Ω *c'est*

$$|\Omega| = 6^2 = 36.$$

Pour l'évènement A : ≪*obtenir une somme égale à un nombre pair*≫, *alors*

$$A = \{(1,1)\,(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6$$

La probabilité de réussite l'évènement A *c'est:*

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre des cas favorables}}{\textit{Nombre des cas possibles}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} \in [0,1]$$

Soit B :≪ *obtenir la somme* <6≫, *alors:*

$$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\ \ ,(2,1),$$

$$(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

La probabilité de réussite l'évènement B *c'est:*

$$P(B) = \frac{\text{Nombre des cas favorables}}{\text{Nombre des cas possibles}} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{10}{36} \in [0,1].$$

Proposition 11 *Soient* A, B *deux évènements dans* Ω :

1. *On dit que* A *et* B *sont disjoints si et seulement si*

$$A \cap B = \varnothing.$$

Definition 12 1. *et dans ce cas:*

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0.$$

2. *On dit que* A *et* B *sont indépendants si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Les événements A *et* B *sont indépendants, ce qui signifie que la réalisation de* A *n'affecte pas la réalisation de l'événement* B*. Et vice versa. Par exemple, lorsque nous lançons un dé deux fois, obtenir 1 au premier lance ne signifie pas nécessairement que nous obtenons également 1 au deuxième lance.*

1.2 Probabilités conditionnelles

Pour bien comprendre la probabilité conditionnelle on prend les exemples suivants:

Example 13 *Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouge. On tire deux boules avec remise*

- *Déterminer l'ensemble fondamentale*
- *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage*
- *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage*
- *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au premier et au deuxième tirage*

Réponse:

- *L'ensemble fondamentale:*

$$\Omega = \{BB, BR, RB, RR\}$$

- *Soit:* B_i : ≪*La boule blanche tirée au* $i^{ème}$ *tirage soit blanche*≫ . *Donc:* $P(B_1) = \frac{\text{Nombre des boules blanches}}{\text{Nombre des boules rouges et blanches}} = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}$.
- *Aussi* $P(B_2) = \frac{\text{Nombre des boules blanches}}{\text{Nombre des boules rouges et blanches}} = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}$.
- *On remarque que le deuxième tirage ne dépend pas au premier tirage parce qu'on a fait un tirage avec remise alors la probabilité de tirer une boule blanche au premier et au deuxième tirage*

$$P(B_1 \times B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{25}{81}$$

Example 14 *On prend le même exemple 13 mais avec un tirage sans remise.*

- *On obtient le même ensemble fondamentale:*

$$\Omega = \{BB, BR, RB, RR\}$$

- *La probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage est:*

$$P(B_1) = \frac{\textit{Nombre des boules blanches}}{\textit{Nombre des boules rouges et blanches}} = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}.$$

- *Pour calculer la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage: et car la boule tirée au premier tirage n'est pas remise dans l'urne alors le deuxième tirage est dépend du premier,*

c'est à dire on peut pas dire que: $P(B_2) = \frac{4}{8}$ *(la première boule est blanche) parce que si au premier tirage on obtient une boule rouge dans ce cas::*$P(B_2) = \frac{5}{8}$*. On a deux possibilités soit la premiere boule est blanche soit rouge et on écrit:* $P(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{8}$ *et* $P(B_2 \mid R_1) = \frac{5}{8}$ *(Cet écriure c'est la probabilité conditionnelle)*

Dans ce cas la l'évènement s'écrit:

$$B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap B_2)$$

- *et pour calculer la probabilité:*

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

Dans ce cas $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1) \times P(B_2)$ *car le deuxième tirage dépend au premier. la même chose pour* $P(R_1 \cap B_2)$*. Pour*

Definition 15 *Soient* A*, et* B *deux évènements de* Ω*, avec* $P(B) \neq 0$*, la probabilité de l'évènement* A *se réalise sachant que l'évènement* B *est réalisé, et on écrit* $P(A \mid B)$ *est définit par:*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Proposition 16 *Soient A, et B deux évènements de Ω, avec $P(B) \neq 0$, alors:*

1.
$$0 \leq P(A \mid B) \leq 1$$

2.
$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$$

3. *Si A, et B sont indépendants alors:*
$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} \\ &= P(A) \end{aligned}$$

4. *Soit $\bar{A}$ est le complémentaire de A alors:*
$$\begin{aligned} P\left(\bar{A} \mid B\right) &= \frac{P\left(\bar{A} \cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{P((\Omega - A) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((\Omega \cap B) - (A \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \text{ car } (A \cap B) \subset B \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

   donc:
$$P\left(\bar{A} \mid B\right) = 1 - P(A \mid B)$$

5. *Soient* A, B *et* C *trois évènements de* Ω, *avec* $P(C) \neq 0$ *et* A *et* B *sont indépendants, alors:*

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \mid C) &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(\emptyset)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\
&= P(A \mid C) + P(B \mid C)
\end{aligned}$$

Example 17 *On revient à l'exemple 14, utilisant la proposition 2:*

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P((B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap B_2)) \\
&= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) \\
&= P(B_1) \times P(B_2 \mid B_1) + P(R_1) \times P(B_2 \mid R_1) \\
&= \left(\frac{5}{9} \times \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{9} \times \frac{5}{8}\right) \\
&= \frac{20}{72} + \frac{20}{72} \\
&= \frac{40}{72}
\end{aligned}$$

1.2.1 Théorème de Bayes

Definition 18 *Soient* $A_1, ..., A_n$ *des partitions de* Ω *(c'est à dire:* $A_i \neq \emptyset$ *pour tout* i*,* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour tout* $i \neq j$ *et* $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*) et* E *un évènement où*

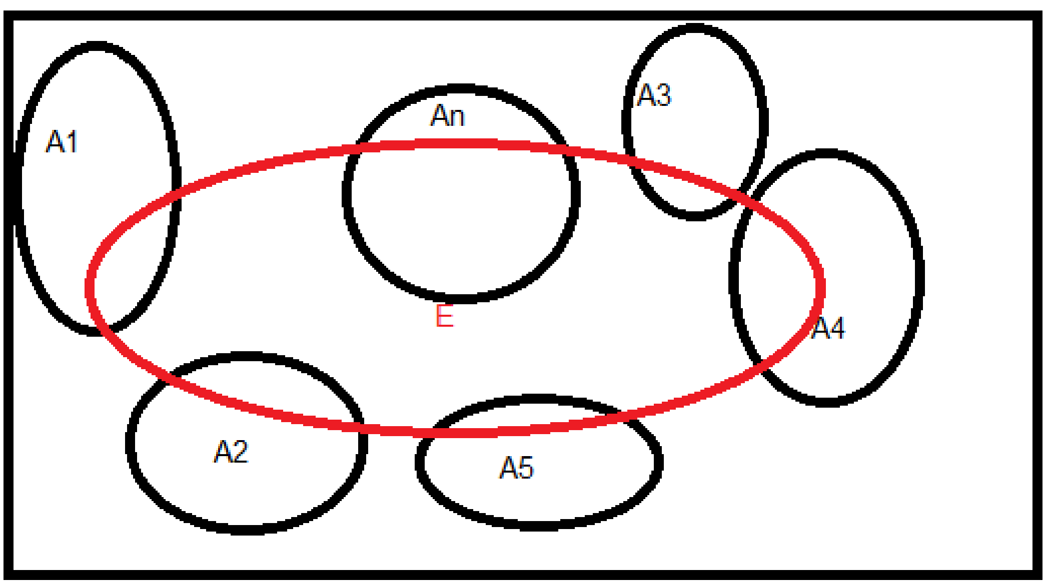
$$E = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) .... \cup (B \cap A_n)$$

alors la probabilité de A_i *se réalise sachant que* E *est réalisé est le nombre:*

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(A_i)P(E \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i)} (\text{ deuxième formule de Bayes})$$

où:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i) (\text{ c'est la première formule de Bayes})$$



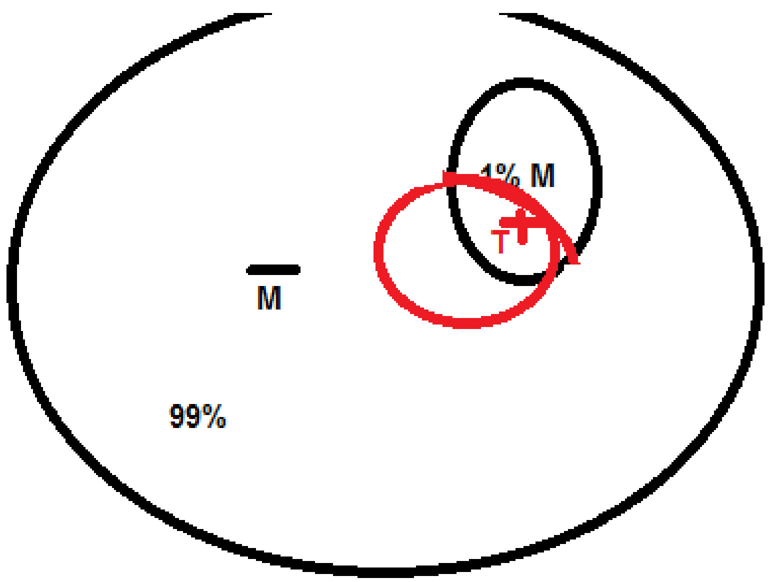
Proposition 19 *Soient* $A_1, ..., A_n$ *des partitions de* Ω *(c'est à dire:* $A_i \neq \emptyset$ *pour tout* i*,* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour tout* $i \neq j$ *et* $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*) et* E *un évènement et*

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(A_i)P(E \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i)} (\text{ deuxième formule de Bayes})$$

alors:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid E) = P(A_1 \mid E) + P(A_2 \mid E) + ... + P(A_n \mid E) = 1$$

Example 20 *Dans ceratain population une maladie touche 1% des personnes On dispose de tests de dépistage de la maladie. Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité 0. 99. Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 0.05. On choisit une personne au hazard et on constate que le test est positif. On veut déterminer si cette personne est malade*



Premièrement on détermine les évènements:

Soit M l'évènement, "la personne a contracté la maladie"

Soit $\bar{M}$ l'évènement, "la personne n'a pas contracté la maladie"

Soit T^+ l'évènement "le test est positif". Alors on a les probabilités suivantes:

$$P(M) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$P(T^+ \mid M) = 0.99 \text{ et } P(T^+ \mid \bar{M}) = 0.05$$

La probabilité que la personne est malade sachant que le test est positif est:

$$\begin{aligned} P(M \mid T^+) &= \frac{P(M)P(T^+ \mid M)}{\big(P(M)P(T^+ \mid M)\big) + \big(P(\bar{M})P(T^+ \mid \bar{M})\big)} \\ &= \frac{0.01 \times 0.99}{(0.01 \times 0.99) + (0.99 \times 0.05)} \\ &= 0.166\,67 \end{aligned}$$

c'est à dire 16.67% le test soit positif pour les personnes malades et 83.3% le test soit positif pour les personnes malades. Alors on constate que ce test n'est pas fiable pour le diagnostique de cette maladie.

Example 21 *Nous avons deux urnes. Le premier urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges et le deuxième urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges.*

On tire une boule et on constate qu'elle est rouge. Quelle est la probabilités que la boule est tirée de l'urne 1.

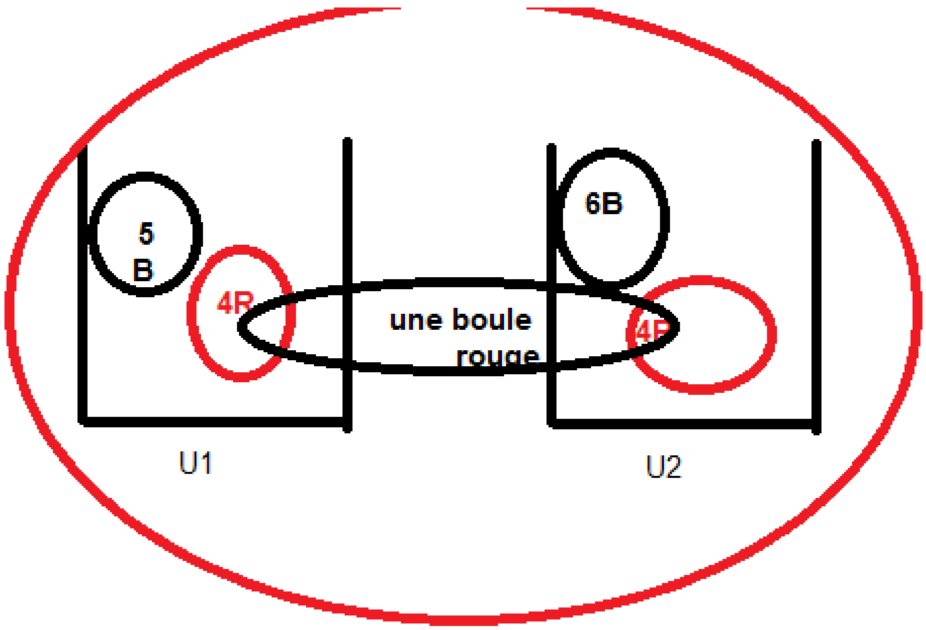
Solution 22 *On a les évènements suivants:*

U_1 : *"Choisir l'urne 1",*

U_2 : *"Choisir l'urne 2",*

R : *"la boule tirée soit rouge"*

B : *" la boule tirée soit blanche."*



1. *La probabilité de choisir l'urne U_1 est:* $P(U_1) = \frac{1}{2} = P(U_2)$ *(la probabilité de choisir l'urne U_2)*

2. *la probabilité $P(R\,|U_1\,)$:c'est la probabilité que la boule tirée est rouge sachant qu'il est tirée du l'urne U_1, alors:*

$$P(R\,|U_1\,) = \frac{5}{9}.$$

3. *la probabilité $P(R\,|U_1\,)$:c'est la probabilité que la tirée est rouge sachant qu'il est tirée du l'urne U_1, alors:*

$$P(R\,|U_2\,) = \frac{4}{10}.$$

4. *La probabilité que la boule tirée provient de l'urne U_1 sachant que la boule est rouge*

est:(d'aprés la formule de Bayes 02)

$$\begin{aligned} P(U_1 | R) &= \frac{P(U_1) P(R | U_1)}{P(U_1) P(R | U_1) + P(U_2) P(R | U_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{10}\right)} \\ &= \frac{25}{43} = 0.581. \end{aligned}$$

C'est à dire $58,1\%$ *que la boule rouge tirée provient de l'urne 1 et pour* $P(U_2 | R)$ *on applique la probabilité d'èvènement complémentaire:*

$$\begin{aligned} P(U_2 | R) &= 1 - P(U_1 | R) \\ &= 1 - \frac{25}{43} \\ &= \frac{18}{43} = 0.418. \end{aligned}$$

alors $41,8\%$ *que la boule rouge tirée et provient de l'urne* 2.