حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلاكس:

في حالة وجود أكثر من متغيرين في المشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية، لذلك يتم تقديم طريقة أخرى و المسماة طريقة السمبلاكس *Simplexe* التي ابتكرها الرياضي *George Dantzig* عام 1947، وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية.

أولا- حالة التعظيم: (والقيود من نوع أصغر أو يساوي ≤)

يعتبر النموذج الرياضي الذي تكون فيه دالة الهدف من نوع تعظيم (*Max*) وكل القيود من نوع أصغر أو يساوي هي **الصيغة القانونية**، وهذا ما سنتناوله كمدخل للحل وفق طريقة السمبلاكس، للتعرف على خطواتها في نموذج رياضي قانوني.

* خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلاكس:

تعد طريقة السمبلاكس من أهم طرق حل نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات التي تحتويها المشكلة، و هي طريقة تتابعية، تكرارية تنطلق من حل ابتدائي ممكن مروراً بحل أفضل وصولا إلى حل أمثل، مما يجعلنا نطلق عليها مصطلح خوارزمية السمبلاكس. و فيما يلي خطوات ومراحل تطبيق السمبلاكس مطبقة على المثال التالي:

مثال :

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 70\,x_1 + 40\,x_2 + 60\,x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1-1- كتابة النموذج المعطى على الشكل المعياري: (الشكل المعياري هو النموذج الذي جميع قيوده مساواة)، لذلك يتم في هذه الخطوة تحويل المتراجحات (القيود) إلى مساواة:

قيود من نوع أصغر أو يساوي تحول بإضافة متغيرات جديدة (Ei) إلى الطرف الأول من القيد، تسمى هذه المتغيرات: متغيرات الفرق أو الفجوة، وهي تمثل الفرق بين الطرف الثاني (الأكبر) والطرف الأول (الأصغر)، لذلك فهي تضاف إلى الطرف الأصغر ليصبح يساوي الطرف الأكبر. واقتصاديا تمثل متغيرات الفرق (Ei) الكميات المتبقية من الموارد أو هي الطاقات العاطلة.

لذلك تصبح القيود كما يلي:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 + \boldsymbol{E_1} = 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3 + \boldsymbol{E_2} = 800 \\ x_1+3x_2+x_3 + \boldsymbol{E_3} = 400 \end{cases}$$

1- 2- إضافة المتغيرات الجديدة إلى دالة الهدف:

في طريقة السمبلاكس يجب إظهار كل المتغيرات في دالة الهدف، لذلك وجب إضافة المتغيرات الجديدة (Ei) إلى دالة الهدف بمعامل (0) لمنع تأثير هذه المتغيرات على دالة الهدف، والتي تصبح كما يلي:

$$Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3+\boldsymbol{0E_1+0E_2+0E_3}$$

1-3- شرط عدم السلبية:

بما أن المتغيرات الجديدة (Ei) تعبر عن الكميات الباقية أو الطاقات العاطلة فإنها يجب أن تكون موجبة أو معدومة، أي : $Ei \geq 0$. لأن الكميات المادية لا تكون سالبة.

$$E_1, E_2, E_3 \geq 0$$

وبالتالي يصبح النموذج الرياضي المعدل (بعد التعديل) كما يلي:

$$Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3+0E_1+0E_2+0E_3$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 + \boldsymbol{E_1} = 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3 + \boldsymbol{E_2} = 800 \\ x_1+3x_2+x_3 + \boldsymbol{E_3} = 400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ E_1, E_2, E_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- 4- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

- تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول و الثاني متغيرات النموذج (متغيرات القرار، متغيرات الفجوة)، حيث تكتب في السطر الأول معاملات هذه المتغيرات (C_j) في دالة الهدف و في السطر الثاني تكتب المتغيرات؛
- تكتب في العمودين الأول و الثاني (على اليسار) متغيرات الحل المتحصل عليها من الانطلاقة في طريقة السمبلاكس، حيث انتاج = 0، وبالتالي يتبقى متغيرات الفجوة (الفرق) مع معاملاتها (C_j)في دالة الهدف؛
- في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛
- في العمود Q عمود الكميات تتم كتابة الموارد المتاحة (الطرف الثاني من القيود الوظيفية)؛
- في السطر $Z_j = \sum C_j\, x_j$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(0\times400)+(0\times800)+(0\times1000)= 0$، و ذلك للحصول على القيمة Z_j وهكذا؛
- في السطر الأخير والذي يسمى سطر التقييم: يتم إيجاد القيم كما يلي:
  - بالنسبة للقيمة التي في العمود الأول (عمود X_1):

(مجموع ضرب قيم المعاملات C في قيم العمود X1 (كل قيمة بما يقابلها) – معامل X_1

$(0 \times 4) + (0 \times 2) + (0 \times 1) - 70 = -70$

  - وهكذا بالنسبة لبقية القيم:

- $(0 \times 2) + (0 \times 2) + (0 \times 3) - 40 = -40$
- $(0 \times 4) + (0 \times 1) + (0 \times 1) - 60 = -60$
- $(0 \times 1) + (0 \times 0) + (0 \times 0) - 0 = 0$
- $(0 \times 0) + (0 \times 1) + (0 \times 0) - 0 = 0$
- $(0 \times 0) + (0 \times 0) + (0 \times 1) - 0 = 0$

- ويكون جدول السمبلاكس الأولي كما يلي:

C	V	Q	70	40	60	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
0	E_1	1000	4	2	4	1	0	0
0	E_2	800	2	2	1	0	1	0
0	E_3	400	1	3	1	0	0	1
$Z_j = \sum C_j\, x_j$ Z = 0*1000 + 0*800 + 0*400 Z = 0			-70	-40	-60	0	0	0

1- 4- أمثلية الحل:

في حالة التعظيم : لكي يكون الحل أمثل يجب أن تكون كل قيم سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر.

في مثالنا ليست كل القيم أكبر أو تساوي 0، فهناك قيم سالبة هي : -70، -40، -60. لذلك فالحل غير أمثل، مما يستدعي القيام بالخطوة الموالية وهي عملية تحسين الحل.

1-5- خطوات عملية تحسين الحل:

أ- تحديد المتغيرة الداخلة إلى عمود الحل: المتغيرة الداخلة هي تلك المتغيرة المقابلة لأقل قيمة سالبة في سطر التقييم (وهي أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) ، و يشار إليها بسهم ودائرة خضراء في الجدول، و في مثالنا هذا هي المتغيرة x_1 ذات المعامل Z=-70 (أقل معامل سالب في هذه الحالة من بين: (-70 ، -40 ، -60).

ب- تحديد المتغيرة الخارجة: يتم تحديدها في الجدول كما يلي:

- نقوم بقسمة قيم الكميات Q (1000, 800, 400) على قيم عمود المتغيرة الداخلة (4, 2, 1) x_1. كل قيمة على القيمة المقابلة لها. (4/1000 و 2/800 و 1/400)
- فنحصل على القيم (250 ، 400 ، 400). و بناءً على ذلك فإن المتغيرة الخارجة هي التي تقابل **أقل حاصل قسمة موجب**، و يشار إليها في الجدول بسهم ودائرة حمراء، و في مثالنا هذا تمثل E_1 المتغيرة الخارجة.

ج- تحديد عنصر الارتكاز: يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة ويشار إليه بشكل معين أزرق في الجدول، و في مثالنا هو 4.

د- تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

C	V	Q	70	40	60	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
70	x_1	250	1	1/2	1	1/4	0	0
0	E_2	300	0	1	-1	-1/2	1	0
0	E_3	150	0	5/2	0	-1/4	0	1
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 70*250 + 0*300 + 0*150 Z = 17500			0	-5	10	70/4	0	0

– يتم تشكيل جدول السمبلكس الثاني بإدخال المتغيرة الداخلة x_1 مكان المتغيرة الخارجة E_1 ؛ وحساب القيم الجديدة كما يلي:

- **المصفوفة الأحادية:** تتشكل المصفوفة الأحادية في كل جداول السمبلاكس ووجودها ضروري للحل وفق هذه الطريقة، فهي تحدد المتغيرات التي تكون عمود الحل (V)، لذلك نضع الأرقام 1 ، 0 حسب المتغيرات التي تشكل المصفوفة الأحادية.
- **قيم التي تشكل سطر الارتكاز:** تقسم قيم السطر الذي يوجد به عنصر الارتكاز (1000، 4، 2، 4، 1، 0، 0) على عنصر الارتكاز (4)، وتوضع في الجدول الجديد السطر الأول.
- **باقي قيم الجدول:** تحسب كلها بالاعتماد على عنصر الارتكاز كما يلي:

– حساب قيمة الكميات Q: القيمة المقابلة للقيمة 800 هي :

$$800 - (1000 * 2 / 4) = 300$$

القيمة المقابلة للقيمة 400 هي:

$$400 - (1000 * 1 / 4) = 150$$

وبنفس الطريقة حساب بقية القيم.

هـ– ثم التأكد من أمثلية الحل مرة أخرى بالنسبة للجدول الجديد:

تذكير:

في حالة التعظيم: لكي يكون الحل أمثل يجب أن تكون كل قيم سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر.

في الجدول الجديد لدينا قيمة سالبة في سطر التقييم: -5.

وبالتالي الحل غير أمثل، مما يستدعي القيام بعملية التحسين مرة أخرى.

1- 6-تشكيل جدول السمبلكس الثالث:

تمثل x_2 المتغيرة الداخلة في هذه الحالة لأنها توافق أقل قيمة سالبة و E_3 هي المتغيرة الخارجة لأنها توافق أدنى قيمة لقسمة عمود الكميات على عمود المتغيرة الداخلة، و عليه فإن نقطة تقاطع سطر الارتكاز (المتغيرة الخارجة) و عمود الارتكاز (المتغيرة الداخلة) تمثل نقطة الارتكاز 5/2.

C	V	Q	70	40	60	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	E_3
70	x_1	220	1	0	1	3/10	0	-1/5
0	E_2	240	0	0	-1	-2/5	1	-2/5
40	x_2	60	0	1	0	-1/10	0	2/5
$Z_j = \sum C_j x_j$ Z = 70*220 + 0*240 + 40*60 Z = 17800			0	0	10	17	0	2

بما أن كل قيم سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر فالحل أمثل.

والحل الأمثل هو:

$$x_1=220, \quad x_2=60, \quad E_2=240, \quad x_3=0, \quad E_1=0, \quad E_3=0 \quad \Rightarrow \quad Z = 17800$$

شرح الحل الأمثل:

تنتج المؤسسة 220 وحدة من المنتج الأول ($x_1=220$)، و 60 وحدة من المنتج الثاني ($x_2=60$)، ولا تنتج المنتج الثالث ($x_3=0$).

باستهلاك تام للموردين الأول والثالث ($E_1=0$، $E_3=0$). وتتبقى 240 وحدة من المورد الثاني ($E_2=240$).

لتحقيق أعظم ربح وقدره: 17800 دج