جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية
و علوم التسييـــر

قسم مجال العلوم الاقتصادية والتسيير
و العلوم التجارية *LMD-SEGC*
السنـــة الأولـــى

مُحاضراتٌ في مِقياسِ

الإحْصَـــاءِ الرِّياضِيّ.

المحورُ الرابع: التوزيعاتُ الاحتمالية (تابع).

الجزء الثاني: التوزيع الاحتمالي المستمر.

إعداد الدكتور هاشمي عبابسة.

h.ababsa@univ-biskra.dz

statdesc2018@gmail.com

المحور الرابع: التوزيعات الاحتمالية.

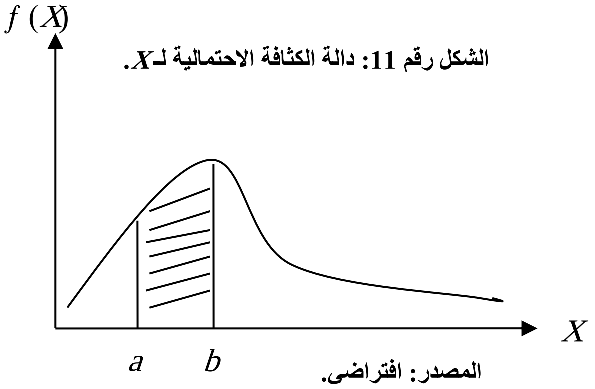
الجزء الثاني: التوزيع الاحتمالي المستمر.

2. التوزيعات الاحتمالية المتصلة: (المستمرة) إذا كان لدينا متحول عشوائي متصل وكانت لدينا الدالة f تحقق الشرطين الآتيين: $f(x) \geq 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ فإنه يمكن اعتبار الدالة f " **دالة كثافة احتمالية**" للمتغير X .

انطلاقا من هذا، بإمكاننا أن نحسب احتمال أن يقع X بين قيمتين a وb كما يلي:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx$$

الشكل رقم 11: دالة الكثافة الاحتمالية لـX.



المصدر: افتراضى.

لاحظ أنه تم استخدام مصطلح " **كثافة الاحتمال** " بدلا عن مصطلح " **قيمة الاحتمال** " في المتغير المتقطع، ولذلك فإن احتمال أن يساوي المتغير X قيمة بعينها a مثلاً هذا الاحتمال يساوي " **صفر** " لأنه لا توجد كثافة أو مساحة بين a و نفسها ولهذا يمكن أن نستخدم الرمزين > أو ≤ (وكذلك < أو ≥) الاستخدام نفسه.

مثال03: *تعرف الدالة f كما يلي:*

$$f(X) = \begin{cases} C \cdot x^2 & \ldots\ldots\ 0 < X < 3 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad / \quad C \in \mathbb{R}$$

المطلوب:

1) *أوجد قيمة العدد " C" لتكون f دالة كثافة احتمالية.*

2) *أحسب $P(1<x<2)$.*

الجواب:

1) *إيجاد قيمة العدد " C" لتكون f دالة كثافة احتمالية: لتكون f دالة كثافة احتمالية لا بد من توافر الشرطين الأساسيين:*

- $f(x) \geq 0$ ………….. (1)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$…….(2)

$$(2) \Leftrightarrow \left(\int_0^3 Cx^2dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(C\int_0^3 x^2dx = 1\right) \Leftrightarrow \left(C.\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 = 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(C\frac{3^3}{3} = 1\right) \Leftrightarrow (9C = 1) \Leftrightarrow \left(C = \frac{1}{9}\right).$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(f(x) = \frac{1}{9}x^2 \geq 0\right) \text{(محقق)}.$$

ومنه تصبح دالة الكثافة الاحتمالية معرفة على النحور الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<X<3\\ 0, & sinon\end{cases}$$

2) حساب $P(1<X<2)$

$$P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{9}\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{9}.\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{1}{9}\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)$$

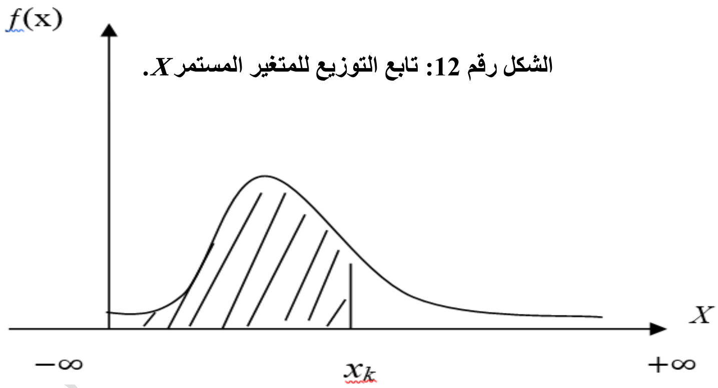
$$=\left(\frac{8}{27}-\frac{1}{27}\right)=\mathbf{\frac{7}{27}}$$

➢ تابع التوزيع للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان X متغيراً عشوائيا متصلاً محدداً بدالـــــة الكثافة f , فإنه يمكننا تحديد تابع التوزيع " F " كما يلي :

$$\boxed{F(x_k)=P(x\le x_k)=P(-\infty<x\le x_k)=\int_{-\infty}^{x_k}f(x_i)\,dx_i} \qquad / \ i\le k$$

وهذا يعني: احتمالَ أن يأخذ المتحول العشوائي X قيمة أصغر من أو تساوي القيمة x_k، وهو ما تعكسه المساحة المضللة في الشكل الآتي :



الشكل رقم 12: تابع التوزيع للمتغير المستمر X.

المصدر: افتراضي.

مثال04:

1) أوجد تابع التوزيع لدالة الكثافة f في المثال السابق.

2) باستخدام تابع التوزيع، أعد حساب الاحتمال $P\ (1\le X\le 2)$.

الجواب:

1) إيجاد تابع التوزيع لدالة الكثافة f في المثال السابق:

- **عندما $-\infty<x_k<0$**

$$F(x_k)=\int_{-\infty}^{x_k} f(x)dx=0$$

- **عندما $0<x_k<3$**

$$F(x_k)=\int_{-\infty}^{x_k} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{x_k} f(x)dx$$

$$= 0 + \int_0^{x_k} \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{9}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^{x_k} = \frac{1}{9}\left(\frac{{x_k}^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{\boldsymbol{x_k}^3}{\mathbf{27}}$$

- **عندما $3 \leq x_k < +\infty$**

$$F(x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \int_3^{+\infty} f(x)dx$$
$$= 0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$$

$$\mathrm{F}(x_k) = \begin{cases} 0 \ \left(\text{حدث مستحيل}\right) & -\infty < x_\mathrm{k} < 0 \\ \frac{{x_k}^3}{27} & 0 \leq x_k < 3 \\ 1 & 3 \leq x_k < +\infty \end{cases}$$

2) باستخدام تابع التوزيع، إعادة حساب الاحتمال $P\ (1 \leq X \leq 2)$

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{27}}$$

➢ **خواص تابع التوزيع: (للمتغير المتقطع أو المستمر).**

1) تابع التوزيع دوما موجب $F(x_k) \geq 0$

2) تابع التوزيع دوما متزايد، أي أنه إذا كان لدينا عددين حقيقيين x_2, x_1 حيث $x_2 > x_1$ فإن $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3) تابع التوزيع عند ($-\infty$) معدوم، أي : $F(-\infty) = 0$ ، و هو يمثل احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي قيماً أصغر من أي عدد حقيقي من فضاء الإمكانيات، وهذا طبعاً أمرٌ مستحيل .

4) تابع التوزيع عند ($+\infty$) يساوي 1 أي : $F(+\infty) = 1$ ، وهذا يمثل احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي أيَّ قيمة ممن قيم فضاء الإمكانيات وهذا قطعا أمر أكيد .

5) ومن الخاصيتين 3 و 4 , فإن $0 \leq F(x_k) \leq 1$ لأن $F(x_k)$ ليس إلا احتمالا في النهاية.

6) إذا كان تابع التوزيع قابلاً للانشقاق في مجال تعريفه، فإن مشتقته بالنسبة إلى X تساوي دالة الكثافة، أي: $\acute{F}(x) = f(x)$.