**الشكل العام للنموذج الرياضي:**

يتكون الشكل العام للنموذج الرياضي من؛

**أ- دالة الهدف :**

$$( MIN\ C\ /MAXZ \} = C1\ X1+ C2\ X2 + C\ 3\ X\ 3 + \ldots\ldots + C\ M\ X\ M$$

- في حالة MAXZ فإن C 1, C 2, C 3, ...... C M تمثل مثلا ربح الوحدة المحقق.
- في حالة MIN C فإن C 1, C 2, C 3, ...... C M تمثل التكلفة للوحدة.

**ب – القيود :**

$$A1X1+A2X2+\ldots\ldots+ANXN \leq\geq B1$$

$$A'1X1+A'2X2+\ldots\ldots+A'NXN \leq\geq B'$$

A1,A1…., A'1,A'2…: تدعى المعاملات التقنية أو المعاملات الفنية وهي التي تحدد القيود الخاصة بالبرمجة الخطية.

B: عدد الوحدات المتاحة من المورد الأول ، 'B : عدد الوحدات المتاحة من المورد الثاني.

**جـ: شرط عدم السلبية:**

$$X1\geq 0,\ X2\geq 0\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ XN\geq 0$$

وعموما: يأخذ **النموذج الرياضي ثلاثة أشكال:**

1) **الشكل العام:** هو النموذج الرياضي الذي نجد فيه قيودا بجميع أشكال المتراجحات والمعادلات.

2) **الشكل المعياري:** سيتم توضيحه أثناء حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة الجداول.

3) **الشكل النموذجي أو النظامي:** نجد ان شكل المتراجحات أو اتجاهها هو نفسه بالنسبة لجميع القيود (المثال السابق).

**مثال:**

نفترض لدينا مؤسسة معينة تنتج منتوجين طاولات وكراسي. للإنتاج تحتاج المؤسسة إلى مواد أولية ولتكن المادتين الخشب والحديد. لدينا المعلومات الخاصة بالعملية الانتاجية؛

- لانتاج كرسي نحتاج الى 1م خشب و 4 م$^2$ حديد.
- لانتاج طاولة نحتاج الى 3م خشب و 10 م$^2$ حديد.
- كل طاولة تحقق ربحا بقيمة 5دج وكل كرسي يحقق ربحا بقيمة 2 دج.

<u>**السؤال**</u>: كم يجب أن تنتج من الطاولات والكراسي لنحقق أقصى ربح ؟

يبدو للوهلة الأولى أننا سنكون توليفات مثلا (2 ط ,5 كـــ) أو (100 ط , 100كـــ) ومايقابلها من أرباح ولكن هذه الطريقة غير ممكنة وغير عملية . لذا لحل هذا المشكل – نستعمل طريقة رياضية هي البرمجة الخطية وذلك في ظل قيود معينة **مثل:** محدودية المادة الأولية في هـــذا المثال.

لهذا السبب الأخير فإننا نحتاج إلى معلومات أخرى فيما يخص المواد ولحل أية مســـالة فـــي البرمجة الخطية او في بحوث العمليات عموما يجب أن نكون ما يسمى بـــالنموذج الرياضـــي وهي ترجمة وتحويل المشكل إلى أرقام ورموز وعلاقات رياضية.

**ولتكوين النموذج الرياضي** نحتاج إلى ثلاثة عناصر:

**معرفة الهدف** الذي نبحث عنه أو تكوين دالة الهدف، والهدف هو تحقيق أكبر ربـــح (نرمـــز بأعظم ربح بالرمز MAX Z , ولأقل تكلفة بالرمز MIN C )

أي MAXZ =؟ , MIN C =?

الربح = الربح الناتج عن الطاولات + الربح الناتج عن الكراسي

* الربح الناتج عن الطاولات = ربح الطاولة * عدد الطاولات .

* الربح الناتج عن الكراسي = ربح الكراسي * عدد الكراسي .

ليكن X1 عدد الطاولات , X2 عدد الكراسي، أي:

$$MAXZ = 5\ X1 + 2\ X2$$

**القيود:**

– قيد الخشب (عدد الوحدات المستخدمة من الخشب للطاولة * عدد الطاولات + عدد الوحدات المستخدمة للكرسي *عدد الكراسي ) ≥ 100م$^2$.

أي : $3\ X1 + X2 \leq 100$

– قيد حديد : (عدد الوحدات المستخدمة من الحديد للطاولةX عدد الطاولات + عدد الوحدات المستغلة للكرسيX عدد الكراسي ) ≥ 100م$^2$ .

أي : $10\ X\ 1 + 4\ X\ 2 \leq 100$

**شرط عدم السلبية:**

فالشرط ألا نجد قيما سالبة فيما يخص عدد الوحدات المنتجة ؛

أي : $X2 \geq 0$ و $X1 \geq 0$

ومنه يتكون النموذج الرياضي كما يأتي:

1 – دالة الهدف : $MAXZ = 5\ X1 + 2\ X\ 2$

2– القيود : $10\ X1 + 4\ X2 \leq 100$

$3\ X\ 1 + X\ 2 \leq 100$

3– شرط عدم السلبية : $X1 \geq 0\ ,\ X2 \geq 0$

**<u>المثال 1</u>** :

تنتج مؤسسة معينة منتوجين Y ,X بحيث تكلفة X 5دج /وحدة وتكلفة Y 6 دج / للوحدة. يحتاج X إلى 3 وحدة من المادة E ووحدتين من المادة الأوليةF . بينما يحتاج Y إلى 1,5 وحدة من E و5 وحدات منF. اذا علمنا أن مخزون المؤسسة من المادة E هو 500 وحدة

و من المادة F 600 وحدة ، كم يجب ان تنتج المؤسسة من المنتوج X و المنتــوج Y بحيــث تكون التكلفة في حدها الأدنـــى ؟

**المثال 2:**

تقوم مؤسسة بإنتاج منتوجين X و Y بحيث تحقق من بيع X : 10 دج /للوحدة ، وتحقــق من بيع Y : 21 دج /للوحدة. علما أنهما سيمران على ثلاثة أقسام إنتاجية ليتم تصنيعهما. لكن الوقت المستغل بالنسبة لكل منتوج يختلف من قسم إلى اخر بالنسبة لكل منتوج . وذلك حســب الجدول التالي :

| | القسمA | القسمB | القسمC |
|---|---|---|---|
| X | 4 | 5 | 3 |
| Y | 2 | 5 | 4 |

علما أن ساعات العمل المتاحة في القسم A هي 200 ساعة و في القسم B هي 150 ساعة وفي القسم C 100 ساعة. ماهو عدد الوحدات اللازم انتاجها من كل منتوج بحيث يكون الربح في حده الأقصى. ( تكوين النموذج الرياضي فقط).

**1- طريقة الجداول: SIMPLEX :**

يتم الحل في هذه الطريقة بالجداول. يجب تحويل النموذج المتوفر لدينا (العام أو النموذجي) إلى النموذج المعياري.

يجب أن نضيف ما يسمى بمتغيرات الإنحراف في القيود. يمثل الجدول الأول جدول حالة عدم الإنتاج. وتتم التحسينات حتى نتحصل على أعظم ربح أو أقل تكلفة.

ملاحظة: متغيرات الإنحراف هي ثلاثة أشكال:

- متغيرات فوارق إذا كانت المتراجحة من الشكل أقل أو يساوي $\leq$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + A_1 = B \quad \Rightarrow \quad a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \leq B$$

- متغيرات الزيادة ومتغيرات اصطناعية إذا كانت المتراجحة من الشكل أكبر أو يساوي $\leq$

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \geq B \;\; \Rightarrow \quad a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n - A_1 + A_2 = B$$

- متغيرات اصطناعية ( خيالية) إذا كانت القيود من النوع مساواة (=)

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + A_1 = B \Rightarrow \quad [(a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = B]$$

وتصبح دالة الهدف، مثلا، في حالة نموذج نظامي يحتوي على المتراجحات من الشكل أقل أو يساوي $\leq$ كما يلي:

$$\Rightarrow \quad Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n + 0A_1 + 0A_2 + \ldots + 0A_k$$

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$$

أما بالنسبة لشرط عدم السلبية، فيكتب؛

$$X_1,\ \ X_2, \ldots.\ \ A_2,\ A_1,\ \ldots,\ \ A_k \geq 0$$

## مثال(1)

2X1+2X2≤ 20
3X1+X2≤ 30

2X1+2X2+**A1**=20/ (0≤A1≤20)
3X1+X2+**A2**=30/ (0≤A2≤30)

## مثال (2)

2X1+2X2≥20
3X1+X2≥ 30

2X1+2X2-**A1+A3** =20 / (0≤A1)
3X1+X2-**A2+A4** =30 / (0≤A2)

## مثال(3)

2X1+2X2=20
3X1+X2=30

2X1+2X2+**A1**=20
3X1+X2+**A2**=30

يجب وضع هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل (صفر) لمتغيرات الفوارق أو متغيرات الزيادة، والمعامل(م) للمتغيرات الاصطناعية.

ونعدل أيضا في الشرط الثالث ( عدم السلبية): x1,x2, A1,A2 ≥0

| معاملات المتغيرات في دالة الهدف | الكميات | المتغيرات | معاملات دالة الهدف |
|---|---|---|---|
| متغيرات دالة الهدف | | | |
| مصفوفة المشكلة المراد حلها | | | |
| سطر التقييم | قيمة دالة الهدف | | |

في المثال السابق، مادامت المتراجحات من النوع ≥ نضيف:

2x1+2x2+A1=20/ (0≤A1≤20)

3x1+x2+A2=30/ (0≤A2≤30)

يجب وضع هذه المتغيرات في دالة الهدف:

Max z= 4x1+5x2+0A1+0A2

ونعدل أيضا في الشرط الثالث (عدم السلبية) x1,x2, A1,A2 ≥0

الجدول الأول: جدول حالة عدم الإنتاج ومنه تتم التحسينات حتى نتحصل على أعظم ربح.

من خلال جدول السمبلكس الأولي، لدينا حالة عدم انتاج أي كل قيم المتغيرات : $X_1$، $X_2$، .... $X_n$ مساوية للصفر. ووجود $A_1$، $A_2$، .... $A_k$ في عمود الكميات يدل على أن كل الطاقات غير مستغلة (عاطلة). أما قيمة $(Z)$ المعدومة فهي تعني أن الربح وفقا لهذا الحل سيكون صفرا. وأما معاملات دالة الهدف الموجودة على يمين $(Z)$ في الجدول فهي تمثل صافي الربح الناجم عن : $X_1$، $X_2$، .... $X_n$.

| معاملات دالـــة الهدف | المتغيرات | الكميات | 4 | 5 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **X1** | **X2** | **A1** | **A2** |
| **0** | A1 | 20 | **2** | 2 | **1** | **0** |
| **0** | A2 | 30 | **3** | 1 | **0** | **1** |
| **Z= 0** | | | **4−** | **5−** | **0** | **0** |

بالنسبة لسطر التقييم الموجود على يمين $(Z)$ فإن قيمه تحسب بالطريقة التالية :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| قيمة سطر التقييم | = | معامل المتغير المقابل لهذه القيمة في دالة الهدف | − | جداء عمود المصفوفة لهذه القيمة مع عمود المعاملات المقابلة لها |

على سبيل المثال : القيمة (-4) الموجودة في سطر التقييم =

(معامل المتغير المقابل لهذه القيمة في دالة الهدف) −

$$C_1 = 0 - C_1 = [(0 \times a_{21}) + (0 \times a_{11})]$$

$$= [(0 \times 2) + (0 \times 3)] = -2$$

أما قيمة $(Z)$ في نفس الجدول فتحسب عن طريق جداء عمود الكميات بعمود المعاملات.

$$0 = (0 \times 20) + (0 \times 30) = Z$$

**Z=Σ (الكميات * معاملات دالة الهدف)**

**سطر التقييم = (العمود الاول * قيم x1 )- المتغيرات لـ x1**

**اختبار مثالية الحل** : يتم من خلال هذه الخطوة القيام باختبار بسيط لمعرفة ما إذا كان الحل المتوصل إليه أمثلا أم لا. ففي حالة تعظيم الربح $Max(Z)$، إذا كانت كل القيم الموجودة في سطر التقييم هي قيم صفرية أو موجبة فإن الحل الموجود يكون حلا أمثلا، وإذا كانت قيمة واحدة أو أكثر سالبة فإن الحل لا يعد أمثلا. أما في حالة تقليل التكاليف $Min(C)$، إذا كانت كل القيم الموجودة في سطر التقييم هي قيم صفرية أو سالبة فإن الحل يكون أمثلا، وإذا كانت قيمة واحدة أو أكثر ذات قيمة موجبة فإن الحل لا يعد أمثلا.

إذا وجدت هناك قيمة سالبة في سطر التقييم فان هذا الحل ليس أحسن حل، بل يجب تحسينه.

**تحسين الحل** : عند وجود قيم سالبة في الصف الأخير في حالة التعظيم يعني ذلك أن الحل ليس أمثلا، ومعنى ذلك أن أي تغيير في قيم كل من : $X_1$، $X_2$، ...، $X_n$ يترتب عليه زيادة الأرباح، وهذا ما يستدعي البحث عن حل أفضل وذلك من خلال إدخال المتغير الذي يعطي أكبر عائد ممكن إلى الحل وبافتراض أن $C_2$ هو الأكبر بالقيمة المطلقة في سطر التقييم الذي يمثل المتغير $X_2$ فذلك يعني أنه يجب إدخال $X_2$ في الحل قبل أي متغير آخر، وبذلك يسمى العمود الذي يقابل أكبر عائد $(C_2)$ بالعمود الأمثل.

بعد تحديد المتغير الداخل، يتم تحديد المتغير الخارج وذلك بقسمة عناصر عمود الكميات على عناصر العمود الأمثل، ويكون المتغير المقابل لأقل قيمة موجبة ناجمة عن عملية القسمة تلك هو المتغير الذي يجب استبداله وإدخال المتغير الداخل محله. وليكن المتغير الخارج هو : $A_2$، وبالتالي يحل المتغير $X_2$ محل المتغير $A_2$.

بعد تحديد المتغير الخارج تأتي مرحلة إيجاد قيم الصف الجديد المترتب على عملية الاستبدال وذلك بقسمة جميع عناصر الصف المستبدل على المحور (نقطة تقاطع العمود الأمثل مع صف المتغير الخارج) ليصبح الجدول كمايلي :

يتم ذلك باختيار أقل قيمة سالبة (-5) ( أكبر قيمة مطلقة في القيم السالبة). فالقيمة التي سيتم اختيارها ستحدد ما يدعى المتغيرة الداخلة وهي x2، ثم تحدد ما يسمى بالمتغيرة الخارجة.

يتم تحديد هذه المتغيرات الخارجة من خلال قسمة العمود الخاص بالكميات على عمود معاملات المتغيرة الداخلة واختيار أقل قيمة منها.

( $\frac{20}{2}$ =10) ، ( $\frac{30}{1}$ =30) أي القيمة 10 ، وهي توافق المتغيرة A1 ، تدعى A1 بالمتغيرة الخارجة. ثم نعيد اعداد الجدول.

تدعى نقطة التقاء سطر المتغيرة الخارجة بعمود المتغيرة الداخلة بالمحور (pivot).

تصبح قيمة المحور في الجدول الجديد عبارة عن واحد(1) وبقية عناصر عموده هي أصفارا، أما السطر الخاص بالمحور فيتم الحصول عليه من خلال السطر القديم بعد قسمته على قيمة المحور.

بالنسبة للعمود الأمثل يصبح كله أصفار عدا قيمة المحور التي تستبدل بـــ : 1 كما سبق وأن حسبت. أما باقي القيم الموجودة في الجدول فتحسب بالصيغة التالية :

$$\text{القيمة الجديدة} = \text{القيمة القديمة} - \frac{\text{جداء القيمتين المقابلتين لها}}{\text{قيمة المحور}}$$

فمثلا القيمة الجديدة لـ : $a_{11}$ في الجدول الموالي لجدول الحل المبدئي هي :

$$a_{11} - \frac{a_{21} \times a_{12}}{a_{22}}$$

أي لحساب باقي القيم نستعمل العلاقة:

القيمة القديمة – قيمة عنصر سطر المحور x قيمة عنصر عمود المحور / المحور

وبهذا يصبح الجدول كالآتي :

| معـــاملات دالـــة الهدف | المتغيرات | الكميات | 4<br>X1 | 5<br>X2 | 0<br>A1 | 0<br>A2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | X2 | 10 | 1 | 1 | 1/2 | 0 |
| **0** | A2 | 20 | 2 | 0 | -1/2 | 1 |
| **Z = 50** | | | 1 | 0 | 5/2 | 0 |

بعد حساب قيم سطر التقييم، إذا وجد أن كل القيم صفرية أو موجبة (حالة تعظيم الأرباح) فإن ذلك يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل. أما إذا كانت هناك قيمة أو أكثر سالبة في هذا السطر فإنه لا بد من البحث عن حل أفضل وذلك بإتباع نفس الخطوات التي سبق ذكرها.

يتم شرح هذا الحل من خلال :

الربح إنتقل إلى 50 لأن هناك إنتاج X2=10 .

A2=20 معناه نذهب للقيد الثاني وهو خاص بالمادة الأولية الثانية هـذا يعنـي أن 20 وحدة من المادة الأولية الثانية لم يتم إستغلالها، لدينا :

X1=0 , X2=10

2X1+2X2+A1=20

3X1+X2+A2=30

نعوض بقيم $X1 , X2$ المتحصل عليها في الحل؛

$$2(0)+2(10)+A1=20 \Rightarrow A1=0$$

أي المورد الأول مستغل تماما في المنتوج الثاني.

$$3(0)+10+A2=30 \Rightarrow A2=20$$

أي الكمية غير المستغلة في المورد الثاني والباقية هي 20وحدة.