

Solution de l'Interrogation 1

Soit (X_1, \dots, X_{35}) un échantillon d'une population X normale centrée de variance σ^2 .

On s'intéresse à tester les deux hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq 4 \\ H_1 : \sigma^2 < 4 \end{cases} .$$

1- Montrer que le rapport de vraisemblance associé à l'échantillon ci-dessus est décroissant par rapport à une statistique $t = t(x_1, \dots, x_{35})$ qu'on demande à la déterminer.

2- Construire le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification $\alpha = 0.05$, associé à cette statistique.

3- Déterminer le risque du premier espèce et le risque de deuxième espèce.

4. Déterminer la dimension de ce test.

5. Tracer le graphe de la fonction puissance.

Remarque: $\mathbf{E}[Z] = 0 = \mathbf{E}[Z^3]$, $\mathbf{E}[Z^2] = 1$, et $\mathbf{E}[Z^4] = 3$, où $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$.

Solution. 1) Nous allons appliquer la méthode du test de *rapport de vraisemblance monotone (croissant ou décroissant)*. Soit $\sigma_1 > \sigma_2$ et écrivons

$$\frac{L_{\sigma_1}}{L_{\sigma_2}} = \frac{\prod_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_1}\right)^2\right\}}{\prod_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_2}\right)^2\right\}} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{35} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \sum_{i=1}^{35} x_i^2\right\} .$$

On pose $t := -\sum_{i=1}^{35} x_i^2$, $b := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)$ et $d := \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{35} > 0$. Il est clair que la fonction $t \rightarrow \frac{L_{\sigma_1}}{L_{\sigma_2}}(t) = d \exp(-bt)$ est décroissante en t , (car $\sigma_1 > \sigma_2$ implique $b > 0$). Alors la loi de la v.a, X possède un rapport de vraisemblance décroissant en $t = -\sum_{i=1}^{35} x_i^2$.

2) En appliquant la proposition 3, le test upp est

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } -\sum_{i=1}^{35} x_i^2 \geq c \\ 0 & \text{si } -\sum_{i=1}^{35} x_i^2 < c \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{35} x_i^2 \leq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{35} x_i^2 > k \end{cases}$$

où $k = -c$. La constante k est définie par $\mathbf{P}_{\sigma^2=4}\left(\sum_{i=1}^{35} X_i^2 \leq k\right) = 0.05$. Notons que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 4)$ alors la v.a.

$\sum_{i=1}^{35} (X_i/2)^2 \rightsquigarrow \chi_{35}^2$, ce pendant la table statistique 3 offre que des quantiles pour des degrés de liberté inférieurs 30.

Comme $n = 35 > 30$, on peut appliquer le théorème centrale limite (TCL). Ecrivons

$$\begin{aligned} 0.05 &= \mathbf{P}_{\sigma^2=4} \left(\sum_{i=1}^{35} X_i^2 \leq k \right) \\ &= \mathbf{P}_{\sigma^2=4} \left(\frac{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} X_i^2 - \mathbf{E}[X_1^2]}{\sqrt{\mathbf{Var}[X_1^2]}} \leq \sqrt{35} \frac{\frac{k}{35} - \mathbf{E}[X_1^2]}{\sqrt{\mathbf{Var}[X_1^2]}} \right). \end{aligned}$$

Nous avons $\mathbf{E}[X_1] = 0$ donc $\mathbf{E}[X_1^2] = \mathbf{Var}[X_1^2] = 4$. D'autre par

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X_1^2] &= \mathbf{E}[X_1^4] - (\mathbf{E}[X_1^2])^2 \\ &= \mathbf{E}[X_1^4] - 16. \end{aligned}$$

Comme $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 4)$ alors $X_1 = 2Z$ où $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, ainsi $\mathbf{E}[X_1^4] = \mathbf{E}[2Z]^4 = 2^4 \mathbf{E}[Z^4] = 16 \times \mathbf{E}[Z^4] = 16 \times 3 = 48$, donc $\mathbf{Var}[X_1^2] = 48 - 16 = 32$. Par conséquent

$$\begin{aligned} 0.05 &= \mathbf{P}_{\sigma^2=4} \left(\sum_{i=1}^{35} X_i^2 \leq k \right) \\ &= \mathbf{P}_{\sigma^2=4} \left(\frac{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} X_i^2 - 4}{\sqrt{32}} \leq \sqrt{35} \frac{\frac{k}{35} - 4}{\sqrt{32}} \right). \end{aligned}$$

D'après le TCL on a

$$Z^* =: \sqrt{35} \frac{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{35} X_i^2 - 4}{\sqrt{32}} \text{ suit approximativement la loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

Le fait que $\mathbf{P}\left(Z^* \leq \sqrt{35} \frac{\frac{k}{35} - 4}{\sqrt{32}}\right) = 0.05$ implique que $\sqrt{35} \frac{\frac{k}{35} - 4}{\sqrt{32}} = \Phi^{-1}(0.05) = -\Phi^{-1}(1 - 0.05) = -\Phi^{-1}(0.95) = -1.64$, ce qui implique que $k = 85.115$. Ainsi le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification $\alpha = 0.05$ est

$$\delta^{(TCL)}(x_1, \dots, x_{35}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{35} x_i^2 \leq 85.115 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{35} x_i^2 > 85.115 \end{cases}$$

On peut aussi appliquer l'approximation de Fisher de la loi de khi-deux qui se trouve à la fin de la page 3 des tables statistiques:

$$\sqrt{2\chi_\nu^2} - \sqrt{2\nu - 1} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1), \text{ pour } \nu > 30.$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} 0.05 &= \mathbf{P}_{\sigma^2=4} \left(\sum_{i=1}^{35} X_i^2 \leq k \right) = \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^{35} (X_i/2)^2 \leq k/4 \right) \\ &= \mathbf{P}(\chi_{35}^2 \leq k/4) \\ &= \mathbf{P} \left(\sqrt{2\chi_{35}^2} - \sqrt{2 \times 35 - 1} \leq \sqrt{2(k/4)} - \sqrt{2 \times 35 - 1} \right) \\ &\simeq \mathbf{P} \left(Z \leq \sqrt{k/2} - \sqrt{69} \right), \end{aligned}$$

donc $\sqrt{k/2} - \sqrt{69} = -1.64 \Rightarrow k = 88.888$. Ainsi le test uniformément le plus puissant, au niveau de signification $\alpha = 0.05$ est

$$\delta^{(Fisher)}(x_1, \dots, x_{35}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{35} x_i^2 \leq 88.888 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{35} x_i^2 > 88.888 \end{cases}$$

On note que, pour les petits échantillons, l'approximation de Fisher est plus précise que le TCL. Pour que cette dernière atteigne la précision de Fisher on doit avoir $n > 100$. Par la suite nous allons considérer le test $\delta^{(Fisher)}(x_1, \dots, x_{35})$.

3) Le risque de première espèce et celui de deuxième espèce sont respectivement définies par

$$\alpha(\sigma) := \mathbf{P}_{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{35} X_i^2 \leq 88.888 \right), \text{ pour } \sigma^2 \geq 4,$$

et

$$\beta(\sigma) := 1 - \mathbf{P}_{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{35} X_i^2 \leq 88.888 \right), \text{ pour } \sigma^2 < 4.$$

4) La dimension du test est définie par $\sup_{\sigma^2 \geq 4} \alpha(\sigma)$ qui est égale au seuil de signification $\alpha = 0.05$.

5) Nous traçons le graphe au TD.