

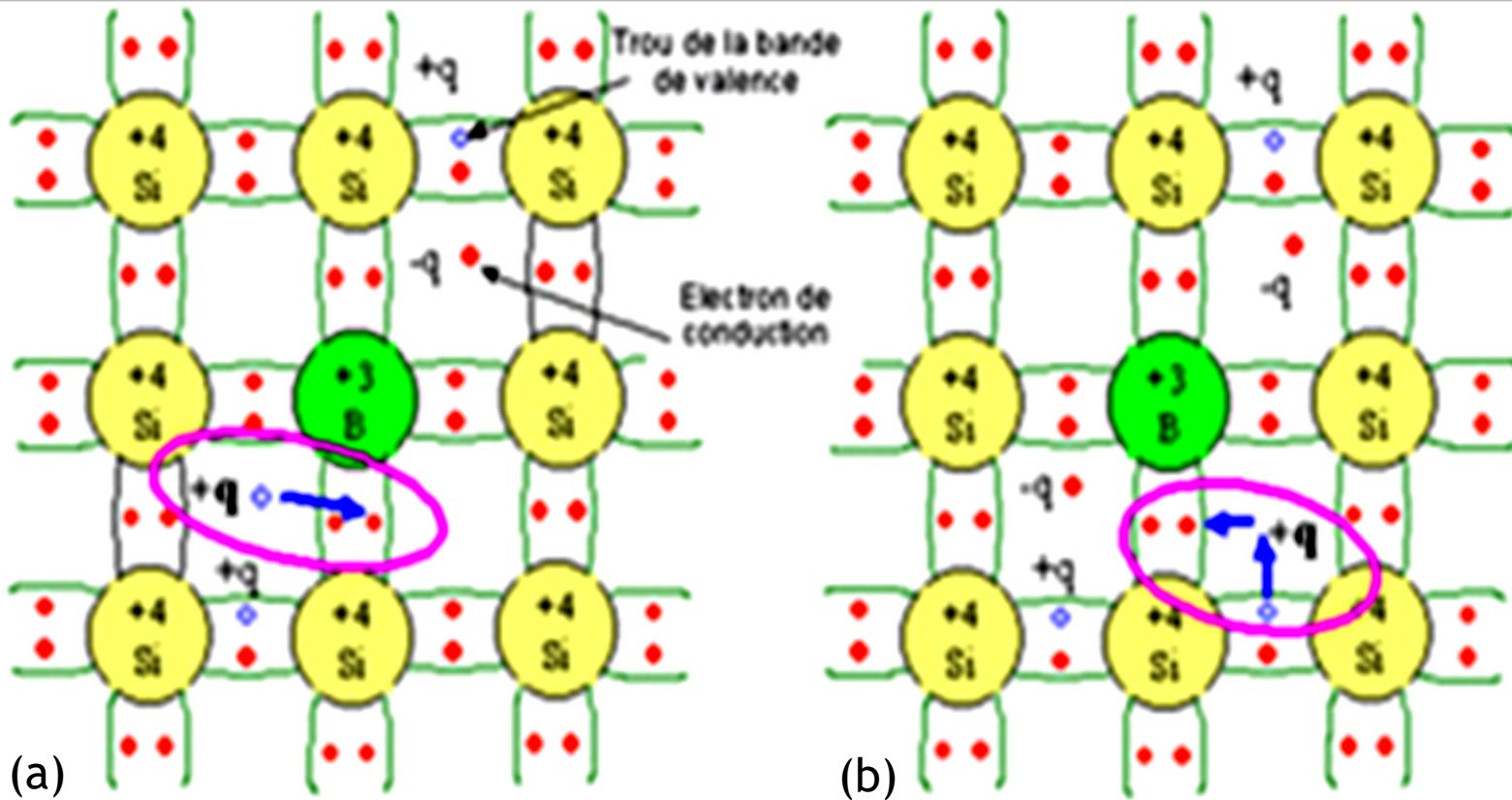
2- نصف ناقل غير جوهري:

هناك سببان رئيسيان لا يسمحان باستخدام أنصاف النواقل الجوهرية في صناعة المركبات الالكترونية مثل الثنائيات و الترانزستور - عند درجات الحرارة الاعتيادية (300) كلفن ، كثير من انصاف النواقل الجوهرية تحوي تراكيز ضعيفة من الشحنات الحرة ،
مثلا في Si : $n_i = 1.6 \times 10^{10} cm^{-3}$ ، في Ge $n_i = 1.3 \times 10^6 cm^{-3}$ و في GaAs $n_i = 2.33 \times 10^{13} cm^{-3}$ ،
و بذلك تكون تقريبا عازلة كهربائيا و بها تيارات ضعيفة ،
لدينا $n = p$ و بالتالي لا يمكن صناعة وصلة PN او ترانزستور ،
لعلاج هذا المشكل ، نقوم بإدخال ذرات شائبة (غريبة) الى المادة الاصلية و هي ما تعرف بعملية التطعيم ، كمية الشوائب المدخلة هي بنسبة ذرة واحدة شائبة لكل 10^8 ذرة نصف الناقل و تحتل ذرات التطعيم مواقع ابدالية داخل نصف الناقل ،

نصف ناقل من نوع P :

إذا كانت ذرات التطعيم تنتمي الى العمود III امن الجدول الدوري مثال ذلك In , Al , B ، ثلاثية التكافؤ ، بادخالها في شبكة Si رباعي التكافؤ ، سوف تسعى الذرات الشائبة لتحقيق أربع روابط تكافؤية مع ذرات السيليسيوم المجاورة لها و بالتالي تقتنص او تستقبل الكترون اضافي لتحقيق 4 روابط ، تصبح شحنتها سالبة نتيجة الالكترن الاضافي ، إذا اقتنصت الكترون كان حر فهي بذلك تنقص من تركيز الالكترونات الحرة (يصبح $n < p$) ، إذا اقتنصت إلكترون كان مرتبطا بذرة Si فهي بذلك تكون ثقب حر في ذرة Si و بالتالي تزيد من تركيز الثقوب الحرة (ايضا يصبح $p > n$) ، في كلا الحالتين يصبح تركيز الثقوب الحرة اكبر من تركيز الالكترونات الحرة و يصبح نصف الناقل غير جوهري ، من نوع P . تسمى ذرات التطعيم بذرات آخذة . تأخذ إلكترونات

الشكل يوضح التطعيم من نوع P الذي يتحقق بذرات آخذة ثلاثية التكافؤ (مثل البور) ، التي تقتنص إلكترون لتتحقق 4 روابط و تصبح سالبة الشحنة، إذا اقتنصت إلكترون كان حر (الحالة (a)) فهي تنقص من تركيز الإلكترونات الحرة (يصبح $n < p$) ، إذا اقتنصت إلكترون كان مرتبطا بذرة Si (الحالة (b)) فهي بذلك تكون ثقب حر في ذرة Si و بالتالي تزيد من تركيز الثقوب الحرة (ايضا يصبح $p > n$)



السيليسيوم المطعم يكون من نوع n إذا طعم بذرات مانحة خماسية التكافؤ مثل الأرسنيك (الحالة a) و من نوع p إذا طعم بذرات آخذة ثلاثية التكافؤ مثل البور (الحالة b).

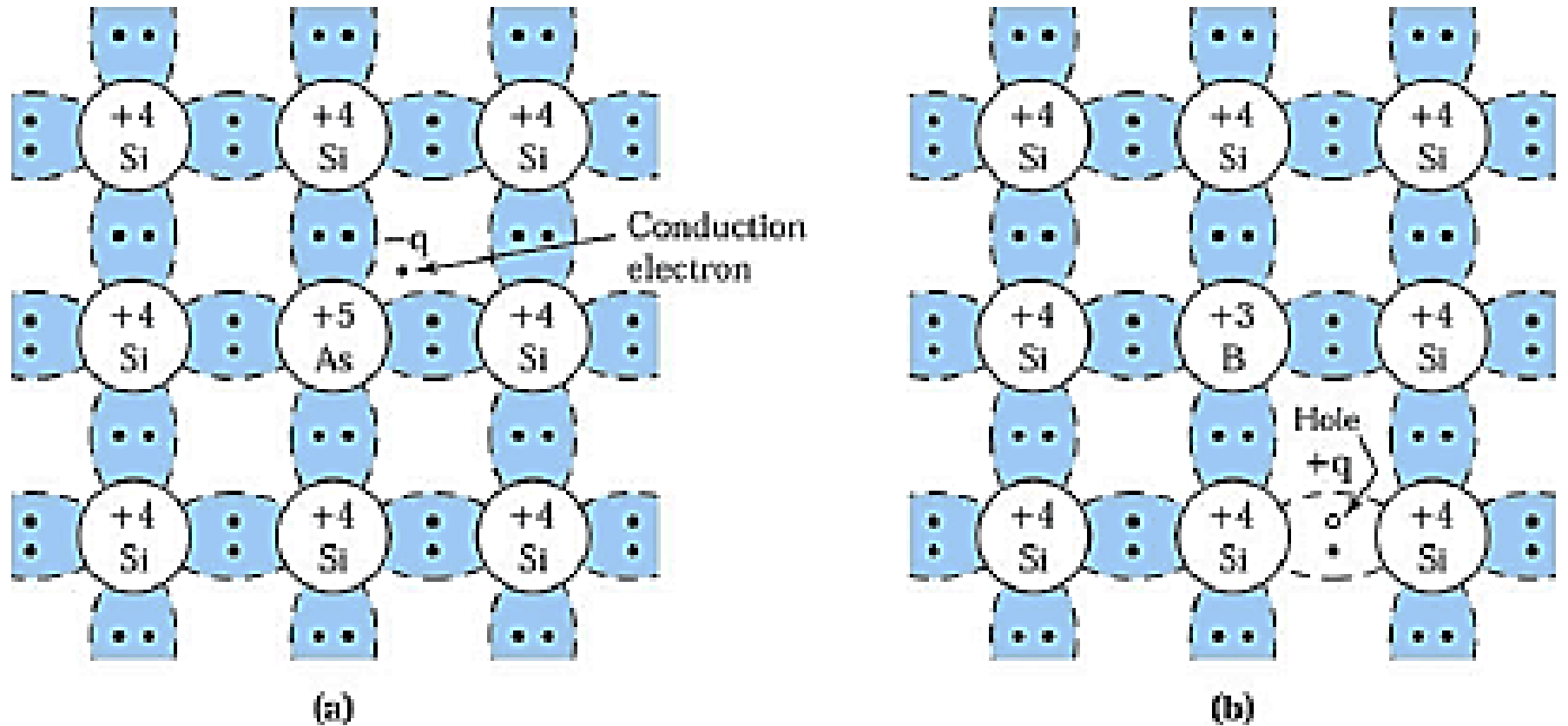


Fig. 19 Schematic bond pictures for (a) n -type Si with donor (arsenic) and (b) p -type Si with acceptor (boron).

طاقات التأين لمختلف شوائب التطعيم في السيليسيوم و أرسنيك الغاليوم

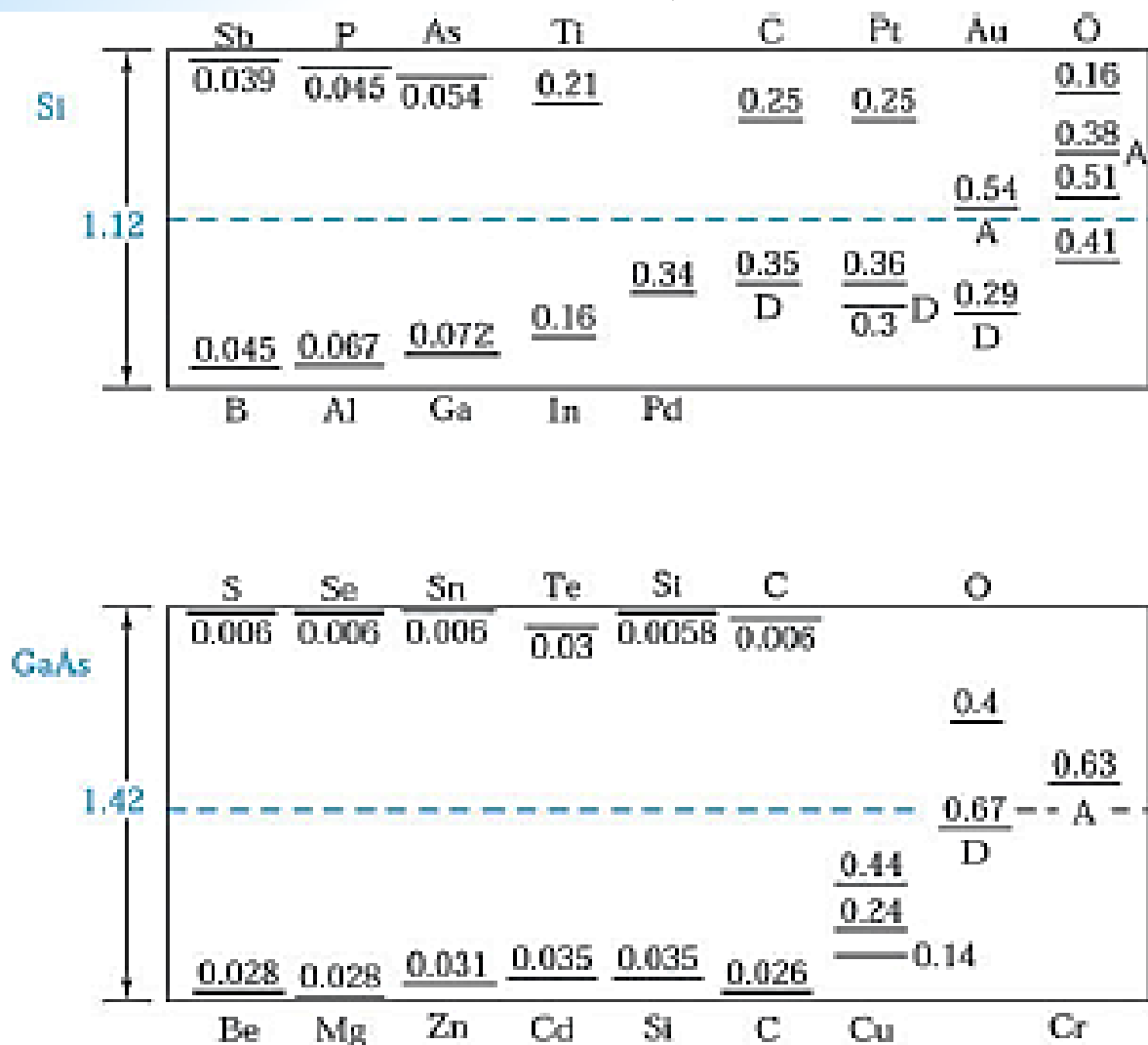
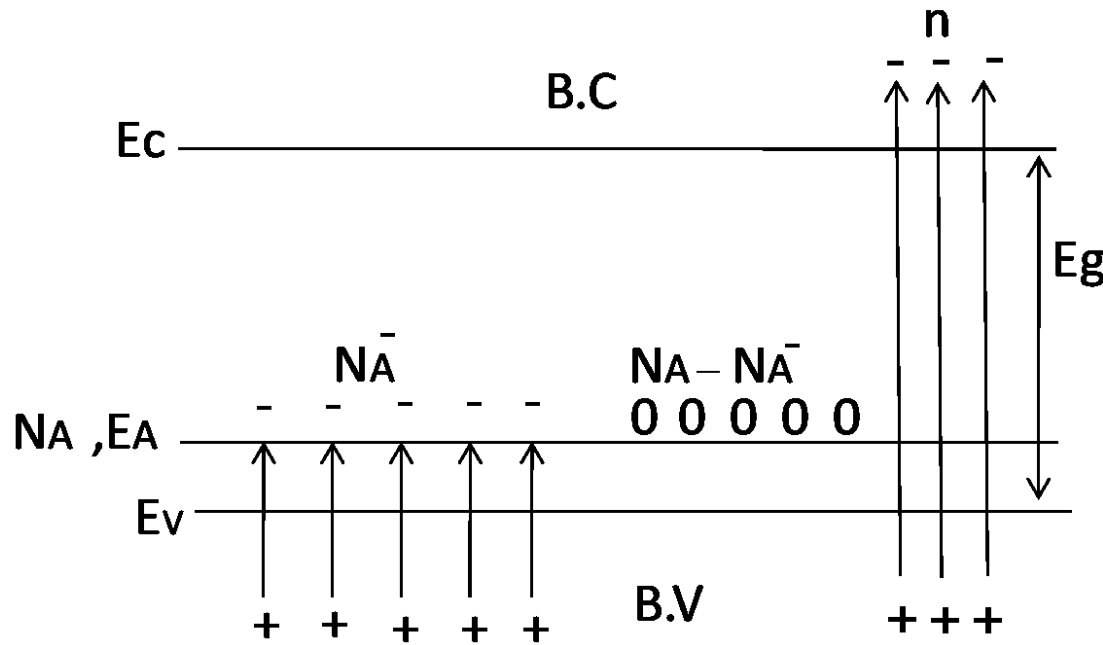


Fig. 20 Measured ionization energies (in eV) for various impurities in Si and GaAs. The levels below the gap center are measured from the top of the valence band and are acceptor levels unless labeled by *D* for donor level. The levels above the gap center are measured from the bottom of the conduction band and are donor levels unless indicated by *A* for acceptor level.*

إذا طعمنا نصف الناقل بذرات آخذة (ذرات البور مثلا) بتركيز N_A ، في درجات الحرارة الواطئة $T < 100^\circ K$ لا تتأين كل ذرات البور (لا تقتنص كلها إلكترونات) فقط قسم منها يتأين أي يقتنص إلكترونات و يصبح مشحون سلبا N_A^- و هذا القسم يخضع أيضا لإحصاء فارمي - ديراك حيث :

$$N_A^- = N_A \cdot f(E_A) = N_A \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E_A - E_F}{K_B T}\right)}$$



E_A مستوى الطا
الآخذة

ثقوب حرة ناشئة من اقتنص ذرات البور لإلكترونات التكافؤ -
تأين غير جوهري لذرات البور

ثقوب حرة ناشئة من تحرر
إلكترونات التكافؤ إلى عصابة النقل -
تأين جوهري لذرات نصف الناقل

$$p = n + N_A^- > n$$

معادلة تعادل الشحنة هي $p = p_1 + p_2 = N_A^- + n$

من جهة ثانية $n.p = n_i^2$

في نصف ناقل نوع P الثقوب حاملات أغلبية و الالكترونات حاملات أقلية

و نعوض $n = \frac{n_i^2}{p}$ في معادلة تعادل الشحنة $p - \frac{n_i^2}{p} - N_A^- = 0$ أي

$$p^2 - N_A^- p - n_i^2 = 0$$

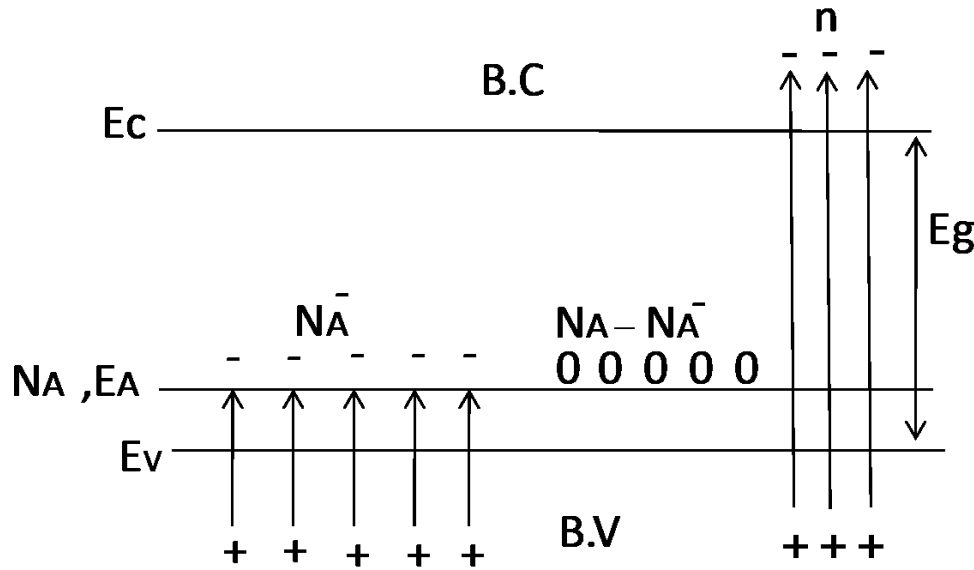
هي معادلة من الدرجة الـ

حلها بالميز و نقبل فقط

الموجب:

$$p = \frac{N_A^- + \sqrt{(N_A^-)^2 + 4n_i^2}}{2}$$

$$n = \frac{n_i^2}{p}$$



ثقوب حرة ناشئة من اقتناص ذرات

البور لإلكترونات التكافؤ -

تأين غير جوهري لذرات البور

$$p_1 = N_A^-$$

$$p = p_1 + p_2 = N_A^- + n$$

ثقوب حرة ناشئة من تحرر

إلكترونات التكافؤ الى عصابة النقل-

تأين جوهري لذرات نصف الناقل

$$p_2 = n$$

التركيز الكلي للثقوب الحرة

$$n = \frac{n_i^2}{p} \text{ و } p = \left(\frac{N_A^-}{2} \right) + \frac{\sqrt{((N_A^-)^2 + 4n_i^2)}}{2}$$

لدرجة الحرارة في هذه الدراسة : درجة الحرارة الواطئة ، المتوسطة و المرتفعة

أ- درجات الحرارة الواطئة $T < 100^\circ K$: تأين ذرات التطعيم هو تأين

$$\text{جزئي} \quad N_A^- = N_A \cdot f(E_A) = N_A \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_A - E_F}{K_B T}\right)}$$

لكن يبقى التأين غير الجوهرى يفوق التأين الجوهرى أي $n \ll n_i \ll N_A^-$

بالنظر الى معادلة تعادل الشحنة $p = N_A^- + n \cong N_A^-$

بالنظر الى حل معادلة تعادل الشحنة

$$p = \left(\frac{N_A^-}{2} \right) + \frac{\sqrt{((N_A^-)^2 + 4n_i^2)}}{2} \cong N_A^- \text{ و منه}$$

$$p = N_A^- = N_A \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_A - E_F}{k_B T}\right)}$$

من جهة ثانية ، $K_B T \ll (E_A - E_F)$ ، تقرب دالة فارمي ديراك الى توزيعة ماكسويل بولتزمان

$$f(E_A) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_A - E_F}{K_B T}\right)} \cong \frac{1}{\exp\left(\frac{E_A - E_F}{K_B T}\right)} = \exp\left(-\frac{E_A - E_F}{K_B T}\right) = \exp\left(\frac{E_F - E_A}{K_B T}\right)$$

و منه $p = N_V \cdot \exp\left(\frac{E_V - E_F}{K_B T}\right)$ ، من جهة ثانية لدينا ، $p = N^- = N_A \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_A}{K_B T}\right)$

بالجداء : $p \cdot p = p^2 = N_V \cdot \exp\left(\frac{E_V - E_F}{K_B T}\right) \cdot N_A \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_A}{K_B T}\right)$

$$p = (N_V \cdot N_A)^{1/2} \cdot \exp\left(\frac{E_V - E_A}{2K_B T}\right)$$

نعرف طاقة تأين الذرات الآخذة $E_{ia} = E_A - E_V$ و منه

$$p = (N_V \cdot N_A)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_{ia}}{2K_B T}\right)$$

$$n \cdot p = n_i^2 \Rightarrow n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{(N_V \cdot N_C) \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{K_B T}\right)}{(N_V \cdot N_A)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_{ia}}{2K_B T}\right)}$$

ب- في درجات الحرارة المتوسطة ، $100^\circ\text{K} < T \ll T_c$

تتأين كل ذرات التطعيم أي تقتنص كلها الكترولونات $N_A^- \cong N_A$ لكن يبقى

التأين غير الجوهرية يغلب التأين الجوهرية و منه $n \ll n_i \ll N_A$

بالنظر الى معادلة تعادل الشحنة $p = N_A + n \cong N_A$ و $n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{n_i^2}{N_A}$

بالنظر الى حل معادلة تعادل الشحنة

$$n = \frac{n_i^2}{p} = \frac{n_i^2}{N_A} \text{ وكذلك } p = \left(\frac{N_A}{2}\right) + \frac{\sqrt{((N_A)^2 + 4n_i^2)}}{2} \cong N_A$$

T_c هي درجة الحرارة الحرجة التي عندما تكون $T = T_c$ يصبح التأين الجوهرية من رتبة التأين غير الجوهرية أي $n_i(T_c) \cong N_A$ و منه يمكن حساب T_c من

$$n_i(T_c) = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T_c}\right) = N_A \text{ المساواة}$$

عند $T = T_c$ و بما أن $n_i(T_c) \cong N_A$ لا يهمل التركيز الجوهرية أمام تركيز التطعيم و منه تراكيز الثقوب و الالكترولونات تحسب بالعبارات العامة

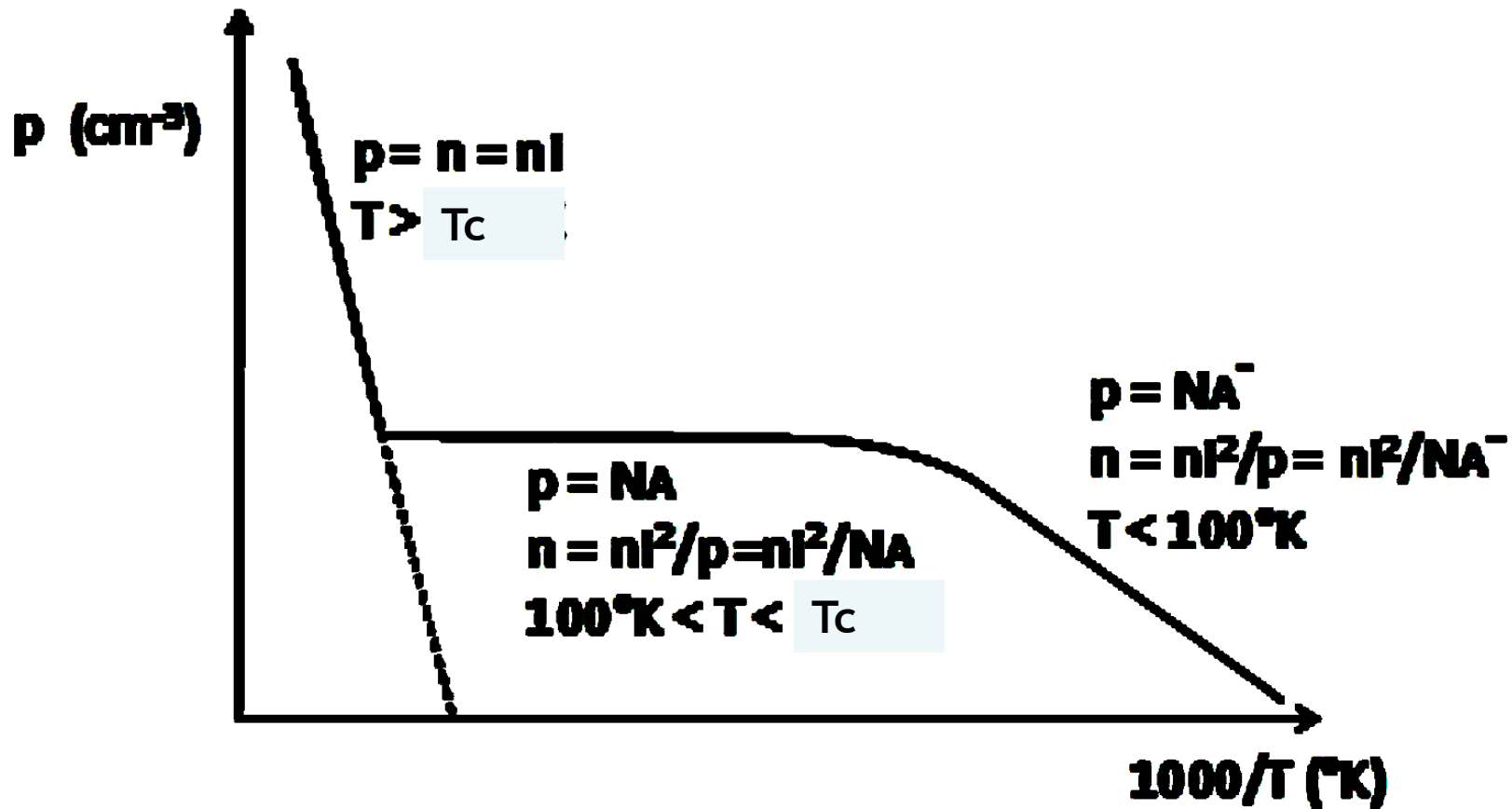
$$n = \frac{n_i^2}{p} \text{ و } p = \left(\frac{N_A}{2}\right) + \frac{\sqrt{((N_A)^2 + 4n_i^2)}}{2}$$

ج- في درجات الحرارة المرتفعة ، $T \gg T_c$

يفوق التآين الجوهري التآين غير الجوهري و منه $n(T) \gg N_A$ و كذلك $n_i(T) \gg N_A$

$$p(T) = n(T) + N_A \cong n(T) \cong n_i(T)$$

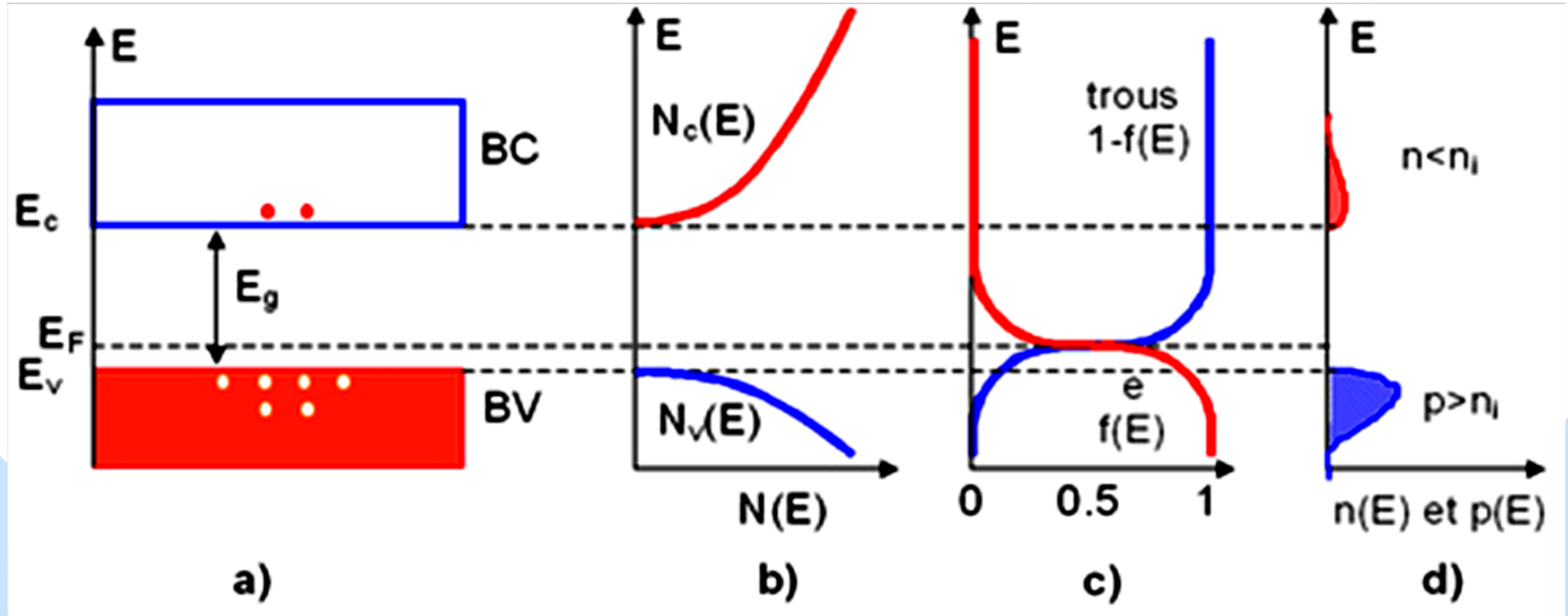
سلوك نصف الناقل عند درجات الحرارة المرتفعة يؤول الى سلوك نصف ناقل جوهري ، الشكا ، الآتى بلخص ، تغذات تركيز الثقوب الحرة p مع درجات الحرارة



وضعية مستوى فارمي في نصف ناقل مطعم نوع P

في درجات الحرارة المتوسطة $100^\circ K < T < T_C$ لدينا $p \cong N_A$ و من جهة ثانية
 بالمساواة بين العبارتين نستنتج عبارة مستوى فارمي بدلالة
 تركيز الذرات الآخذة N_A و التركيز الفعلي عند سقف عصابة التكافؤ N_V :

$$E_F = E_{FP} = E_V + K_B T \cdot \ln \left(\frac{N_V}{N_A} \right) \text{ و منه } p = N_A = N_V \exp \left(\frac{E_V - E_F}{K_B T} \right)$$



$$E_F = E_{FP} = E_V + K_B T \cdot \ln \left(\frac{N_V}{N_A} \right)$$

كلما زاد تركيز الذرات الآخذة فإن E_{FP} يقترب أكثر من سقف عصابة التكافؤ و عند $N_A = N_V$ ينطبق E_{FP} على E_V و يصبح نصف الناقل منحط *dégénéré* من أجل تراكيز $N_A < N_V$ يقع مستوى فارمي داخل النطاق الممنوع و يكون قريب من E_V في هذه الحالة نصف الناقل من نوع P لكن غير منحط *Non dégénéré*

عند درجات الحرارة الواطئة $T < 100^\circ K$

$$p = N_V \cdot \exp \left(\frac{E_V - E_F}{K_B T} \right) \text{ ، بالمساواة مع ، } p = N_A^- = N_A \cdot \exp \left(\frac{E_F - E_A}{K_B T} \right)$$

$$E_{FP} = \left(\frac{E_V + E_A}{2} \right) + \left(\frac{K_B T}{2} \right) \ln \left(\frac{N_V}{N_A} \right)$$

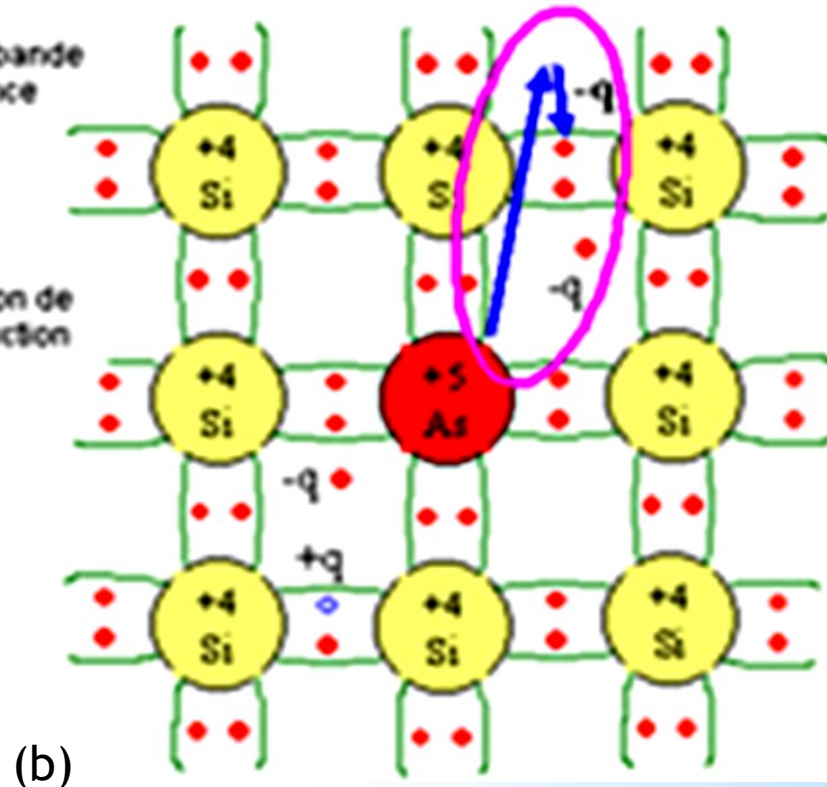
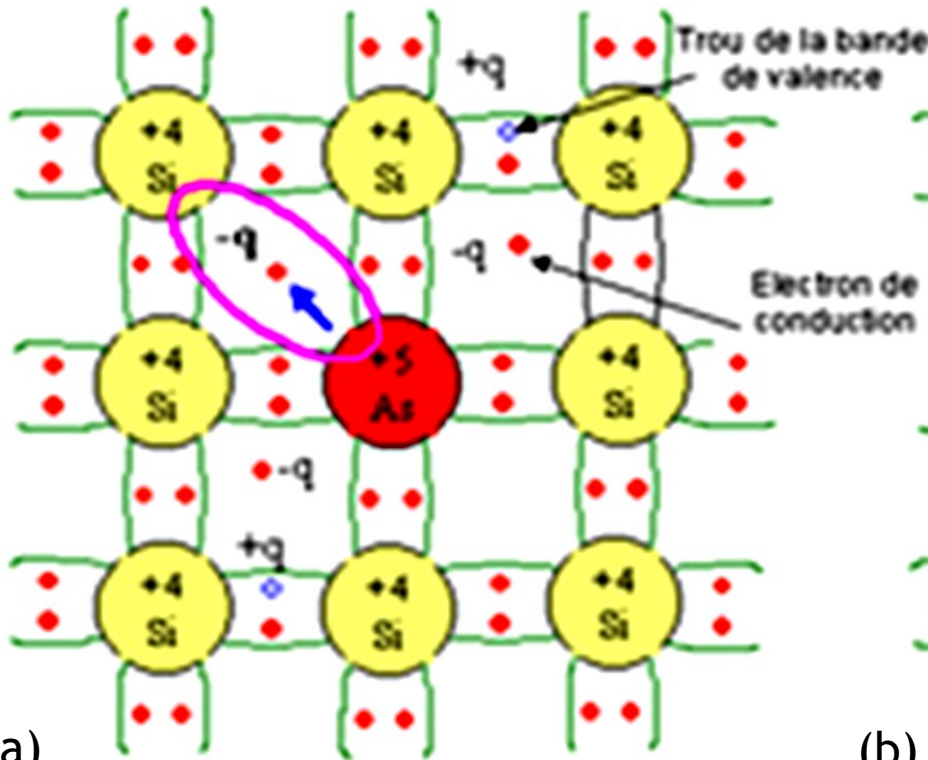
عند درجات الحرارة العالية $T > T_C$: $p(T) \cong n(T) \cong n_i(T)$

مستوى فارمي يؤول الى مستوى فارمي الجوهري

$$E_{FP}(T) \cong E_{Fi}(T) = \left(\frac{E_C + E_V}{2} \right) + \left(\frac{k_B T}{2} \right) \ln \left(\frac{N_V}{N_C} \right)$$

نصف ناقل نوع N :

نحصل عليه بتطعيم نصف ناقل جوهري (مثلا Si) بذرات شائبة مانحة تنتمي الى العمود V من الجدول الدوري أي خماسية التكافؤ مثل الفوسفور P ، الارسنيك As و الأنتيموان Sb ، هذه الشوائب تمنح الالكترن الخامس مباشرة ليصبح حرا (الحالة (a) للشكل) لتحقق 4 روابط تكافؤية مع ذرات نصف الناقل، ما يزيد في تركيز الالكترونات الحرة ($n > p$) ، الالكترن الخامس المتحرر يمكن يقتنص في محل ثقب في الذرة الجوهريية (الحالة (b) للشكل) وهذا ما ينقص في تركيز الثقوب الحرة اي لدينا كذلك ($n > p$) الالكترونات حاملات أغلبية و الثقوب أقلية و يكون نصف ناقل نوع N.



إذا طعمنا نصف الناقل بذرات مانحة (ذرات الأرسنيك مثلاً) بتركيز N_D ، في درجات الحرارة الواطئة $T < 100^\circ\text{K}$ لا تتأين كل الذرات المانحة (لا تحرر كلها إلكترونات) فقط قسم منها يتأين أي يحرر إلكترونات و يصبح مشحون ايجابا N_D^+ وهذا القسم يزداد مع زيادة درجة الحرارة تبعا لإحصاء فارمي - ديراك حيث :

$$N_D^+(E_D) = N_D \cdot [1 - f(E_D)] = N_D \cdot \left[1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_D - E_F}{K_B T}\right)} \right]$$

$$N_D^+(E_D) = N_D \cdot \left[\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E_D}{K_B T}\right)} \right]$$

E_D مستوى الطاقة للذرات المانحة و يقع في النطاق الممنوع قرب E_C

معادلة تعادل الشحنة هي $n = n_1 + n_2 = N_D^+ + p$ ، من جهة ثانية $n \cdot p = n_i^2$ في نصف ناقل نوع N الإلكترونات حاملات أغلبية و الثقوب حاملات أقلية و نعوض

$$p = \frac{n_i^2}{n} \text{ في معادلة تعادل الشحنة } n - \frac{n_i^2}{n} - N_D^+ = 0 \text{ أي}$$

$$n^2 - N_D^+ n - n_i^2 = 0 \text{ هي معادلة من الدرجة الثانية، حلها بالميز}$$

$$p = \frac{n_i^2}{n} \text{ و } n = \left(\frac{N_D^+}{2}\right) + \frac{\sqrt{\left((N_D^+)^2 + 4n_i^2\right)}}{2} \text{ ونقبل فقط الحل الموجب:}$$

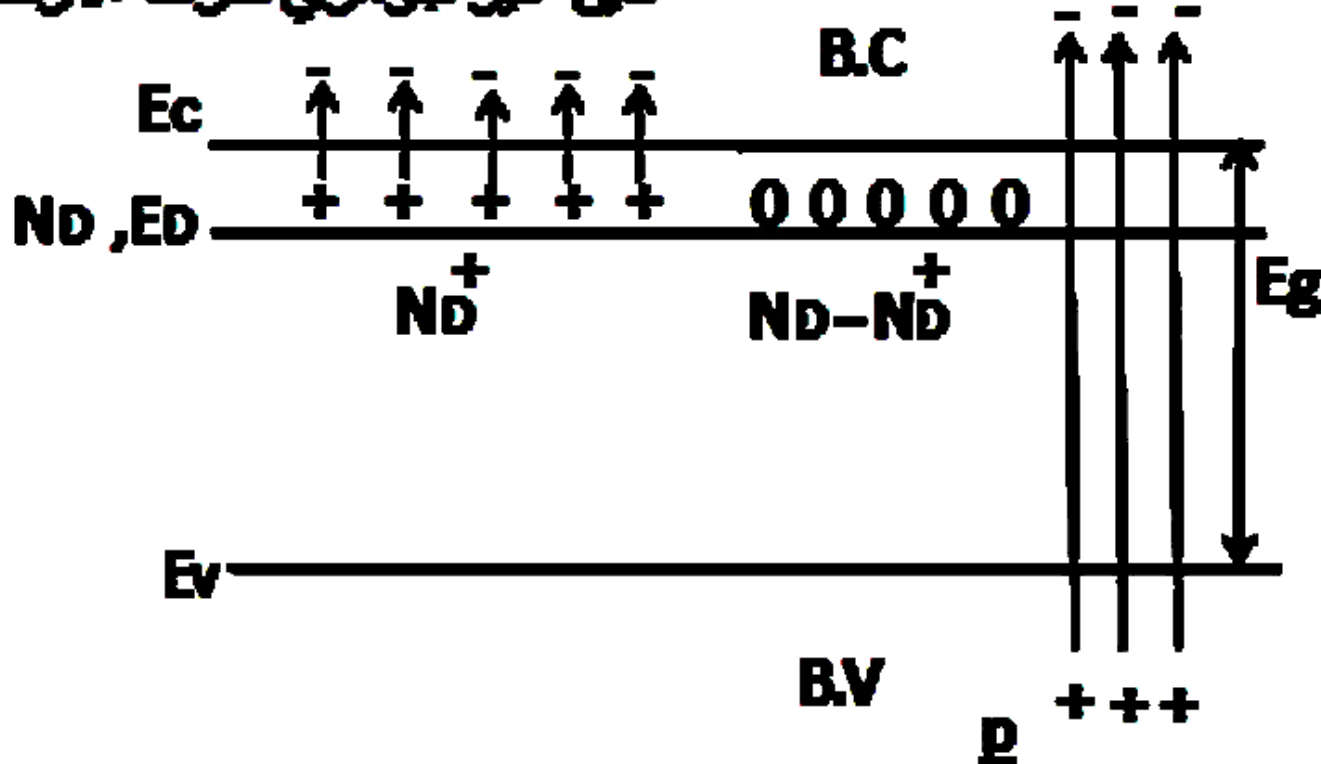
التركيز الكلي للإلكترونات الحرة

$$n = n_1 + n_2 = N_D^+ + p > p \quad n_2 = p$$

$$n_1 = N_D^+$$

إلكترونات حرة ناشئة من تحرير ذرات
الأرسنيك لإلكترونات تكاؤها -
تأين غير جوهري لذرات الأرسنيك

إلكترونات حرة ناشئة من انتقال
إلكترونات التكافؤ إلى عصابة القبل -
تأين جوهري لذرات نصف الناقل



أ- درجات الحرارة الواطئة $T < 100^\circ K$: تأين ذرات التطعيم هو تأين جزئي (تأين غير جوهري جزئي)

$$N_D^+(E_D) = N_D \cdot \left[\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E_D}{K_B T}\right)} \right]$$

لكن يبقى التأين غير الجوهري يفوق التأين الجوهري أي $p \ll n_i \ll N_D^+$
بالنظر الى معادلة تعادل الشحنة $n = N_D^+ + p \cong N_D^+$

بالنظر الى حل معادلة تعادل الشحنة $n = N_D^+$

$$n = \left(\frac{N_D^+}{2}\right) + \frac{\sqrt{\left((N_D^+)^2 + 4n_i^2\right)}}{2} \cong N_D^+$$

و منه $n = N_D^+ = N_D \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_F - E_D}{k_B T}\right)}\right)$ ، من جهة ثانية $n = N_C \exp\left(\frac{E_F - E_C}{k_B T}\right)$

بالجداء بين العبارتين و بعد تقريب دالة اسكان الشحن الموجبة للتطعيم ، أي بتتبع نفس طريقة الحساب بالنسبة للتطعيم نوع P نجد تركيز الالكترونات و الثقوب كما يلي:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{\sqrt{N_C N_D} \cdot \exp\left(-\frac{E_{id}}{2 K_B T}\right)} \text{ و } n = \sqrt{N_C N_D} \cdot \exp\left(-\frac{E_{id}}{2 K_B T}\right)$$

مع $E_{id} = E_C - E_D$ طاقة تأين الذرات المانحة

ب- في درجات الحرارة المتوسطة ، $100^\circ\text{K} < T \ll T_c$

تتأين كل ذرات التطعيم أي تحرر كلها الكترولونات $N_D^+ \cong N_D$ لكن يبقى

التأين غير الجوهرية يغلب التأين الجوهرية و منه $p \ll n_i \ll N_D$

بالنظر الى معادلة تعادل الشحنة $n = N_D + p \cong N_D$ و $p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{N_D}$

بالنظر الى حل معادلة تعادل الشحنة

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{N_D} \text{ كذلك و } n = \left(\frac{N_D}{2}\right) + \frac{\sqrt{((N_D)^2 + 4n_i^2)}}{2} \cong N_D$$

T_c هي درجة الحرارة الحرجة التي عندما تكون $T = T_c$ يصبح التأين الجوهرية من رتبة التأين غير الجوهرية أي $n_i(T_c) \cong N_D$ و منه يمكن حساب T_c من

$$n_i(T_c) = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T_c}\right) = N_D \text{ المساواة}$$

عند $T = T_c$ و بما أن $n_i(T_c) \cong N_D$ لا يهمل التركيز الجوهرية أمام تركيز التطعيم و منه تراكيز الثقوب و الالكترولونات تحسب بالعبارات العامة

$$p = \frac{n_i^2}{n} \text{ و } n = \left(\frac{N_D}{2}\right) + \frac{\sqrt{((N_D)^2 + 4n_i^2)}}{2}$$

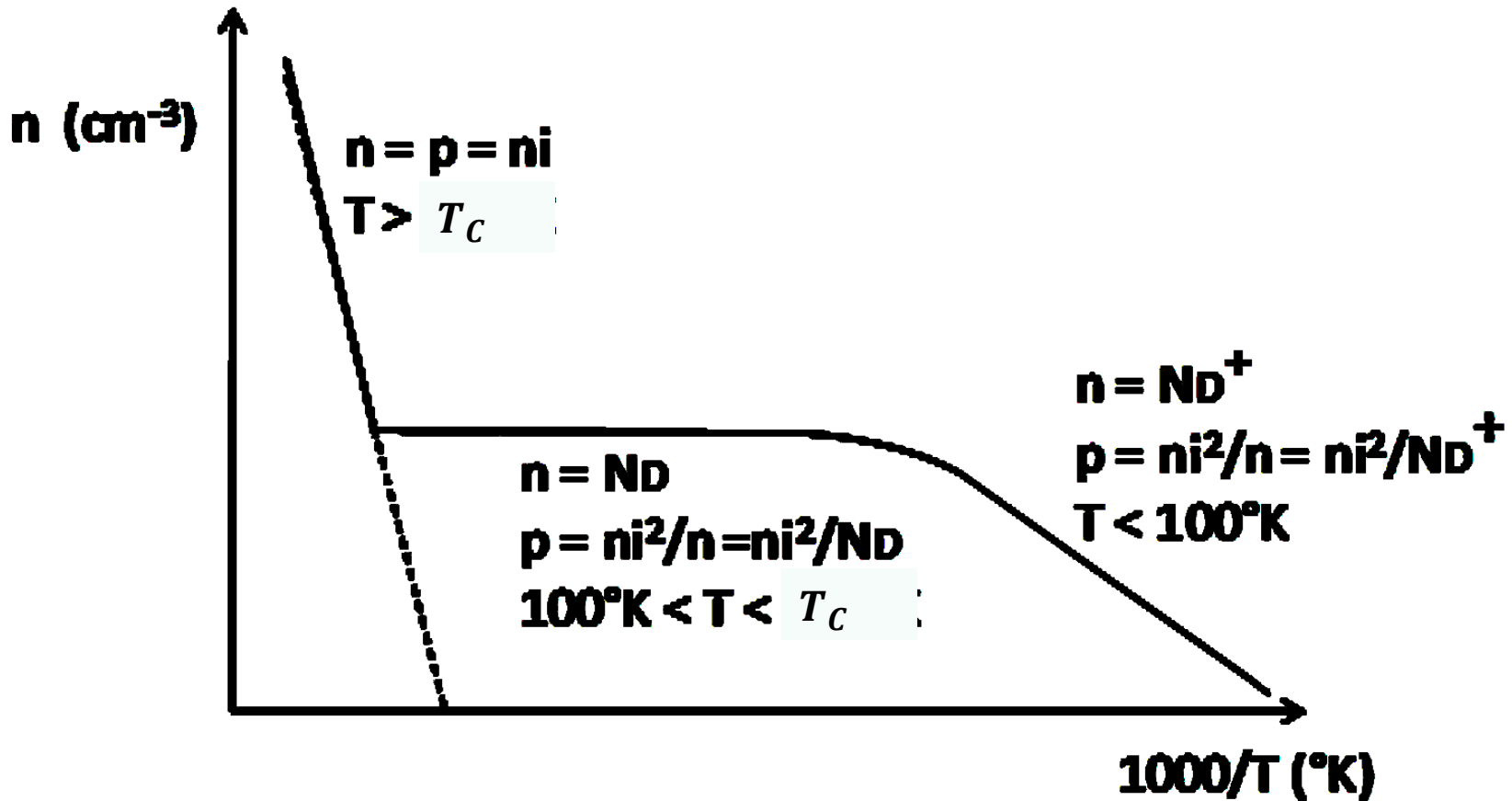
ج- في درجات الحرارة المرتفعة ، $T \gg T_c$

يفوق التآين الجوهري التآين غير الجوهري و منه $p(T) \gg N_D$ و كذلك $n_i(T) \gg N_D$

$$n(T) = p(T) + N_D \cong p(T) \cong n_i(T)$$

سلوك نصف الناقل عند درجات الحرارة المرتفعة يؤول الى سلوك نصف ناقل جوهري

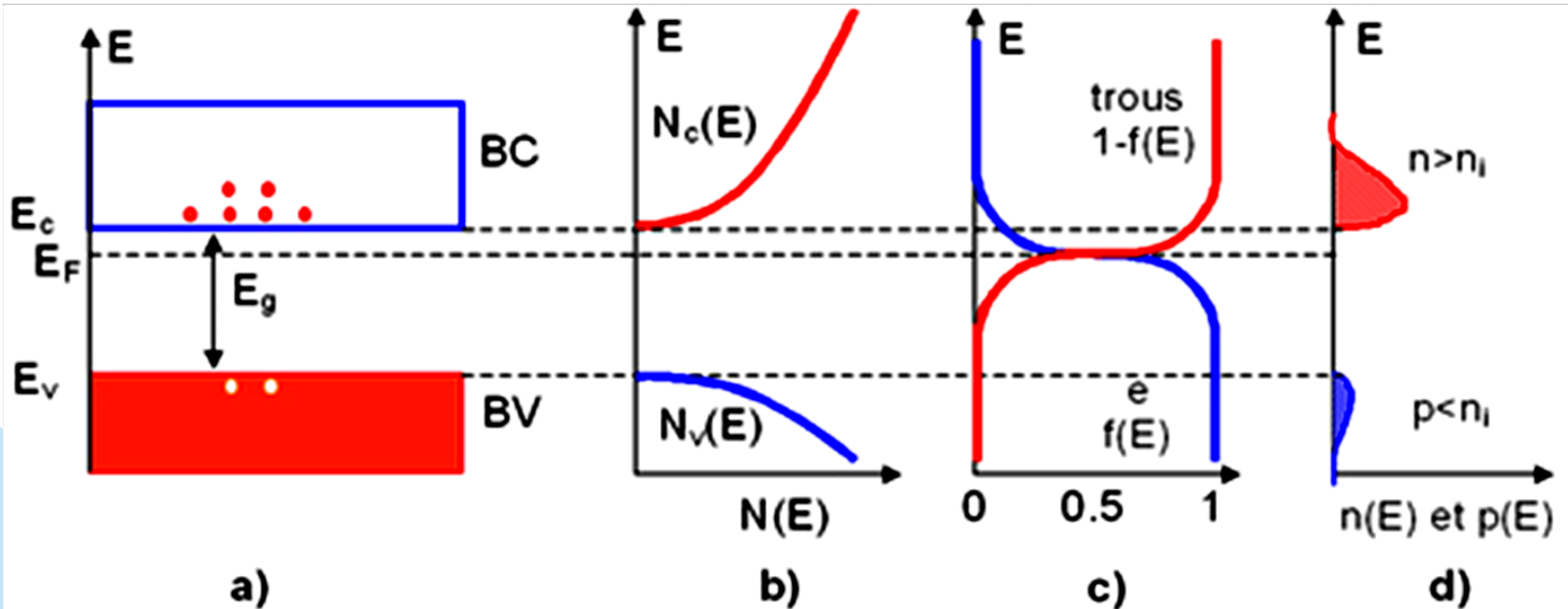
الشكل الآتي يلخص تغيرات مع درجات الحرارة تركيز الإلكترونات الحرة



وضعية مستوى فارمي في نصف ناقل مطعم نوع N

في درجات الحرارة المتوسطة $100^\circ K < T < T_C$ لدينا $n \cong N_D$ و من جهة ثانية $n = N_C \exp\left(\frac{E_F - E_C}{k_B T}\right)$ بالمساواة بين العبارتين نستنتج عبارة مستوى فارمي بدلالة تركيز الذرات المانحة N_D و التركيز الفعلي عند قعر عصابة النقل N_C :

$$E_F = E_{FN} = E_C - K_B T \cdot \ln\left(\frac{N_C}{N_D}\right) \text{ و } n = N_D = N_C \exp\left(\frac{E_F - E_C}{K_B T}\right)$$



كلما زاد تركيز الذرات المانحة فإن E_{FN} يقترب أكثر من قعر عصابة النقل و عند $N_D = N_C$ ينطبق E_{FN} على E_C و يصبح نصف الناقل منحط *dégénéré* من أجل تراكيز $N_D < N_C$ يقع مستوى فارمي داخل النطاق الممنوع و يكون قريب من E_C في هذه الحالة نصف الناقل من نوع N لكن غير منحط *Non dégénéré*

عند درجات الحرارة الواطئة $T < 100^\circ K$

$$n = N_C \cdot \exp\left(\frac{E_F - E_C}{K_B T}\right) \text{ ، بالمساواة مع ، } n = N_D^+ = N_D \cdot \exp\left(\frac{E_D - E_F}{K_B T}\right)$$

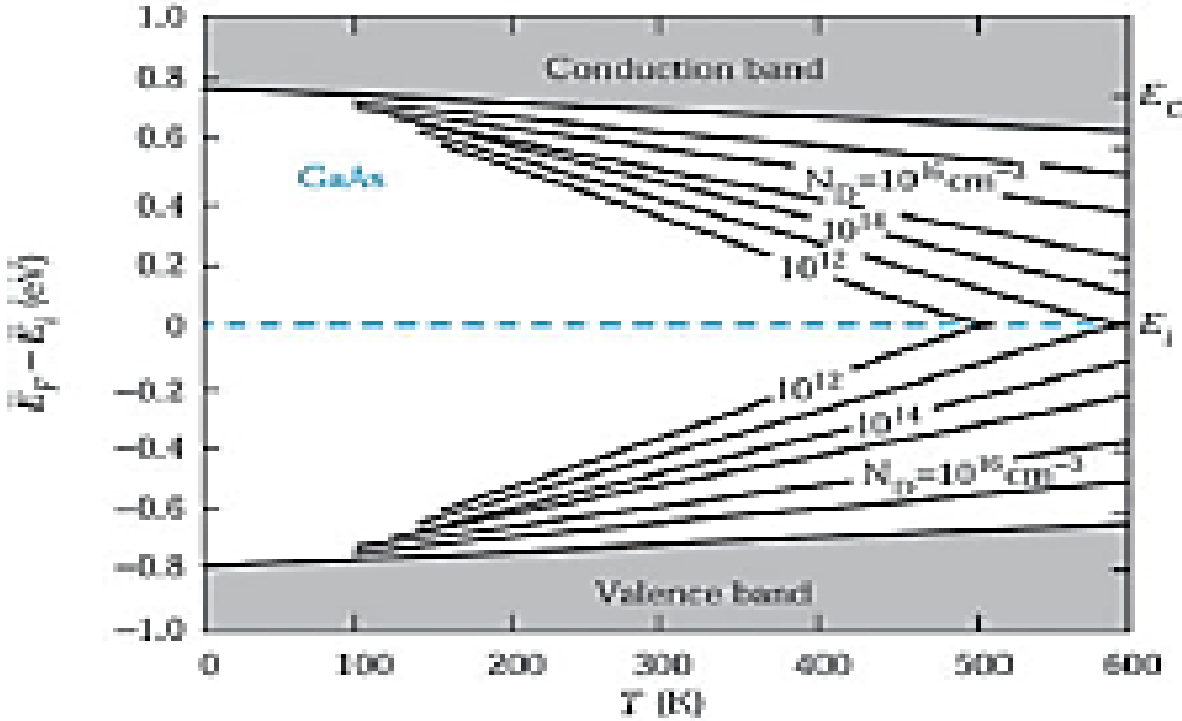
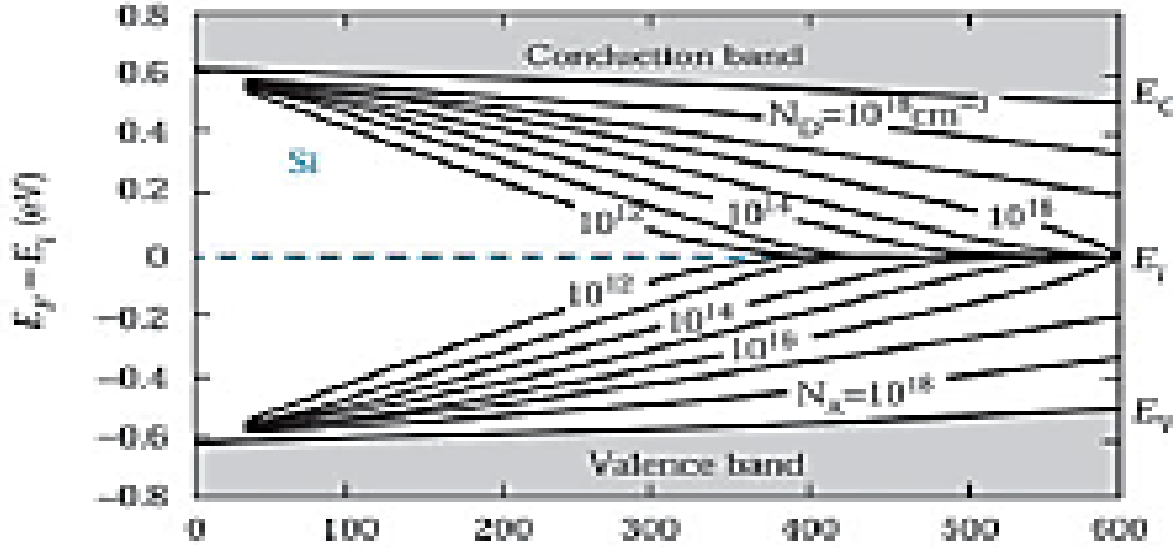
$$E_{FN} = \left(\frac{E_C + E_D}{2}\right) - \left(\frac{K_B T}{2}\right) \ln\left(\frac{N_C}{N_D}\right)$$

عند درجات الحرارة العالية $T > T_C$: $p(T) \cong n(T) \cong n_i(T)$

مستوى فارمي يؤول الى مستوى فارمي الجوهرى

$$E_{FN}(T) \cong E_{Fi}(T) = \left(\frac{E_C + E_V}{2}\right) + \left(\frac{k_B T}{2}\right) \ln\left(\frac{N_V}{N_C}\right)$$

تأثير الحرارة و تراكيز التطعيم على وضعية مستوى فارمي في مخطط الطاقة للسليسيوم و أرسنيك الغاليوم



نصف ناقل مطعم بـ N_A و N_D حيث $N_D > N_A$:

هو نصف ناقل نوع N بتطعيم صافي $(N_D - N_A)$ و معادلة تعادل الشحنة في درجة الحرارة المتوسطة حيث التأين كلي لذرات التطعيم كما يلي $p - n + N_D - N_A = 0$

$$\text{أو } n - p - (N_D - N_A) = 0$$

في نصف ناقل نوع N الإلكترونات حاملات أغلبية و الثقوب حاملات أقلية و نعوض $p = \frac{n_i^2}{n}$ في

$$\text{معادلة تعادل الشحنة } n - \frac{n_i^2}{n} - (N_D - N_A) = 0 \text{ أي } n^2 - (N_D - N_A)n - n_i^2 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية، حلها بالميز و نقبل فقط الحل الموجب:

$$p = \frac{n_i^2}{n} \text{ و } n = \left(\frac{(N_D - N_A)}{2} \right) + \frac{\sqrt{((N_D - N_A)^2 + 4n_i^2)}}{2} \text{ حيث } N_A > N_D$$

هو نصف ناقل نوع P بتطعيم صافي $(N_A - N_D)$ و معادلة تعادل الشحنة في درجة

الحرارة المتوسطة حيث التأين كلي لذرات التطعيم كما يلي $p - n + N_D - N_A = 0$

$$\text{أو } p - n - (N_A - N_D) = 0$$

في نصف ناقل نوع P الثقوب حاملات أغلبية و الالكترونات حاملات أقلية و نعوض $n = \frac{n_i^2}{p}$ في

$$\text{معادلة تعادل الشحنة } p - \frac{n_i^2}{p} - (N_A - N_D) = 0 \text{ أي } p^2 - (N_A - N_D)p - n_i^2 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية، حلها بالميز و نقبل فقط الحل الموجب:

$$n = \frac{n_i^2}{p} \text{ و } p = \left(\frac{(N_A - N_D)}{2} \right) + \frac{\sqrt{((N_A - N_D)^2 + 4n_i^2)}}{2}$$