Chapitre 4

Séries de $\mathcal{F}$ourier

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une autre famille des séries de fonctions qui est constituée de fonctions trigonométriques : ce sont les séries de $\mathcal{F}$ourier.
Comme nous avons vu au chapitre précédent que la représentation d'une fonction par sa série de Taylor est limitée de deux façons : d'abord, elle ne s'applique qu'aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ensuite, les sommes partielles de la série obtenue ne constituent une approximation de la fonction que dans un voisinage du point autour duquel on la calcule.
La série de Fourier ne souffre pas de ces inconvénients : on peut prescrire à l'avance l'intervalle de convergence et elle permet de représenter des fonctions très générales, présentant même certains types de discontinuités.
Nous verrons que ce type de séries jou un rôle important dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

4.1 Notions de base

Définition 4.1 *On dit qu'une fonction f réelle d'une variable réel possède une discontinuité de première espèce en un point x_0, si elle possède une limite finie à droite et une limite à gauche en x_0. On notera :*

$$f(x_0-0) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) \neq f(x_0+0) = \lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} f(x).$$

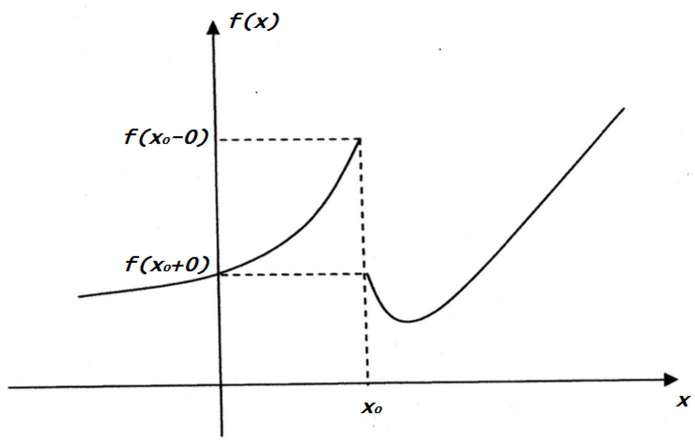

FIG. 4.1 – Discontinuité de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Définition 4.2 *Une fonction f et dite continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ donnée si :*

1. *Il existe $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tel que $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, la fonction f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$.*
2. *Les points a_i (pour tout $i = \overline{0, n}$) sont des points de discontinuité de première espèce de la fonction f.*

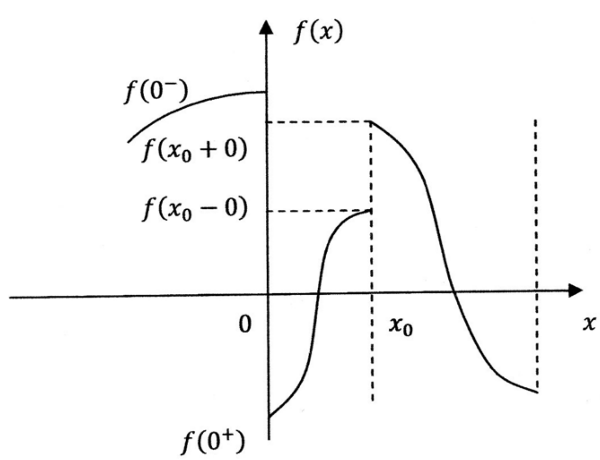

FIG. 4.2 – Fonction continue par morceaux.

Si I est un intervalle quelconque non réduit à un point, alors la fonction f est dite continue par morceaux sur I, si sa restriction à chaque segment $[a,b]$ inclus dans I est continue par morceaux.

Définition 4.3 *Une fonction f à valeurs réelles est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ donnée si :*

1. *Il existe $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tel que $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.*
2. *Les points a_i (pour tout $i = \overline{0,n}$) sont des points de discontinuité de première espèce de la fonction f et la fonction f'.*

Définition 4.4 *Soit I est un intervalle quelconque non réduit à un point, alors la fonction f est dite $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, si sa restriction à chaque segment $[a,b]$ inclus dans I est continue par morceaux, c-à-d :*

1. *Les point de discontinuités x_0 de f dans tout segment $[a,b]$ sont de première espèce et en nombre fini,*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) \text{ existent.}$$

2. *Les limites*

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0} \quad , \quad f'(x_0 + 0) = \lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0}.$$

   existes et finies.

Remarque 4.1 *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, alors elle est nécessairement continue par morceaux mais pas nécessairement continue. De plus, le fait d'être de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ne dépend pas de la subdivision (il suffit que celle ci existe).*

En pratique, il suffit de vérifier que le graphe de f n'aille jamais à l'infini et n'admette pas de tangente verticale.

Définition 4.5 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est dite périodique, s'il existe un nombre réel $T \neq 0$, tel que si :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x).$$

Le nombre T est appelé période de f.

Généralement on prend comme période de f la plus petite valeur positive de T.

Remarque 4.2 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T-$périodique, est dite continue par morceaux (resp $\mathcal{C}^1$ par morceaux) si sa restriction à chaque segment $[\alpha, \alpha+T]$ (c'est à dire sur une période) est continue par morceaux (resp $\mathcal{C}^1$ par morceaux).*

Lemme 4.1 *Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et intégrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx.$$

Démonstration. On a

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx,$$

et pour l'intégrale $\int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx$ on pose $x = y + T$, ce qui donne

$$\int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^\alpha f(y+T)\,dy = \int_0^\alpha f(y)\,dy = -\int_\alpha^0 f(y)\,dy.$$

Donc

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx - \int_\alpha^0 f(y)\,dy = \int_0^T f(x)\,dx.$$

■

Propriété 4.1 *Soit $f : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$, une fonction intégrable.*

1. *Si f est paire alors*
$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\delta} f(x)\,dx.$$
2. *Si f est impaire alors*
$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 0.$$

4.2 Séries trigonométriques

4.2.1 Représentation réelle

Définition 4.6 *On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \tag{4.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}, \omega > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles.

Le problème est de déterminer l'ensemble Δ tel que la série (4.1) soit convergente pour tout $x \in \Delta$.

Propriété 4.2 *:*

1. *S'il existe un nombre réel x_0 tel que la série (4.1) converge alors elle converge en tout point $x_0 + \dfrac{2k\pi}{\omega}, \forall k \in \mathbb{Z}$.*
2. *Si la série (4.1) converge dans $\mathbb{R}$, alors elle converge vers une fonction f périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.*

Démonstration. Supposons que la série (4.1) converge en x_0 et posons

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x_0) + b_n \sin(n\omega x_0)\right]$$

On a pour touts $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos\left(n\omega\left(x_0+\frac{2k\pi}{\omega}\right)\right)=\cos\left(n\omega x_0+n\omega\frac{2k\pi}{\omega}\right)=\cos\left(n\omega x_0\right)$$
$$\sin\left(n\omega\left(x_0+\frac{2k\pi}{\omega}\right)\right)=\sin\left(n\omega x_0+n\omega\frac{2k\pi}{\omega}\right)=\sin\left(n\omega x_0\right)$$

Alors

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(n\omega\left(x_0+\frac{2k\pi}{\omega}\right)\right)+b_n\sin\left(n\omega\left(x_0+\frac{2k\pi}{\omega}\right)\right)\right]=f\left(x_0\right).$$

ce qui montre la convergence de la série (4.1) en tout point de la forme $x_0+\dfrac{2k\pi}{\omega},\forall k\in\mathbb{Z}$. Maintenant si on suppose que la série (4.1) converge dans $\mathbb{R}$, on aura

$$f\left(x\right)=f\left(x+k\frac{2\pi}{\omega}\right)\qquad\forall x\in\mathbb{R},$$

ce qui implique que f est $\dfrac{2\pi}{\omega}-$périodique. ∎

Remarque 4.3 *Si on prend $T=2l$ tel que $l=\dfrac{\pi}{\omega}$, alors la série (4.1) s'écrit de la forme*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\tag{4.2}$$

Proposition 4.1 *La série trigonométrique (4.1) est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ si les séries $\left(\sum a_n\right)$ et $\left(\sum b_n\right)$ sont absolument convergentes*

Démonstration. Le résultat est évident en utilisant le critère de comparaison puisque on a l'inégalité suivante :

$$\left|a_n\cos\left(n\omega x\right)+b_n\sin\left(n\omega x\right)\right|\leq\left|a_n\right|+\left|b_n\right|\quad,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

∎

4.2.2 Représentation complexe

En utilisant les relations d'Euleur suivantes

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad , \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

la série (4.1) prend la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}\right]$$

En posant

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad , \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

La série (4.1) se représente donc sous la forme

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}\left[c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}\right]$$

Ce que l'on écrit sous forme d'une série double entrée

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \tag{4.3}$$

La série (4.3) est appelée la forme complexe d'une série trigonométrique.

Proposition 4.2 *Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série (4.1) est :*

1. *simplement converegnte sur* $\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{2k\pi}{\omega}, \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$.
2. *uniformément convergente sur chaque intervalle* $\left[\frac{2k\pi}{\omega} - \alpha, \frac{2(k+1)\pi}{\omega} - \alpha\right]$ *avec* $0 < \alpha < \frac{\pi}{\omega}$.

De plus sa somme est continue en tout point $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

4.2.3 Calcul des coefficients

Cas réel

Soient la série trigonométrique (4.3) et f sa somme que l'on suppose périodique de $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et dont la convergence est uniforme sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$.

Nous intéréssons dans ce paragraphe au calcul des coefficients de a_n et b_n en fonction de f.

On a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right].$$

Donc :

$$f(x)\cos(k\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(k\omega x) + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x)\cos(k\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\cos(k\omega x)\right]$$

$$f(x)\sin(k\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(k\omega x) + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x)\sin(k\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\right]$$

La convergence uniforme nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(k\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \cos(k\omega x)\,dx \\
&+ \sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx\right] \\
\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(k\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \sin(k\omega x)\,dx \\
&+ \sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx\right]
\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx = 0$$

On déduit alors les valeurs des coefficients par :

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(k\omega x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(k\omega x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

en particulier

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) dx.$$

Remarque 4.4 *:*

1. *Si $T = 2l$, alors*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. *Moyennant le lemme 4.1 et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les coefficients de la série trigonométrique peuvent s'écrire*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_\alpha^{\alpha+2l} f(x) \cos(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_\alpha^{\alpha+2l} f(x) \sin(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cas complexe

Considèrons la représentation complexe de la série trigonométrique (4.3), alors si elle converge uniformément vers une fonction f périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$ on a

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

Si on intègre sur $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, on obtient

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x) e^{-ik\omega x} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^{2\pi/\omega} e^{i(n-k)\omega x} dx,$$

or

$$\int_{0}^{2\pi/\omega} e^{i(n-k)\omega x}dx = \begin{cases} 0 \quad \text{si } n \neq k \\ \\ 2\pi/\omega \quad \text{si } n = k \end{cases}$$

Donc les coefficients peut être calculer par la formule

$$c_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_{0}^{2\pi/\omega} f(x)\, e^{-ik\omega x}dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+(2\pi/\omega)} f(x)\, e^{-ik\omega x}dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

4.3 Séries de $\mathcal{F}$ourier

L'idée générale de cette partie consiste à définir la série de $\mathcal{F}$ourier et à représenter des fonctions périodiques par des séries de $\mathcal{F}$ourier.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T = 2l$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

4.3.1 Définition

Définition 4.7 *La série trigonométrique du type (4.2) où*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{0}^{2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{0}^{2l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

s'appelle série de $\mathcal{F}$ourier associée à f, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont les coefficients de $\mathcal{F}$ourier de f.

Remarque 4.5 *:*

1. *Si la fonction f est paire alors*

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f s'écrit sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

2. *Si la fonction f est impaire alors*

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f s'écrit sous la forme

$$\sum_{n\geq 1} \left[b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

4.3.2 Représentation d'une fonction par une série de $\mathcal{F}$ourier

Théorème 4.1 (Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T = 2l$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Démonstration. Ce théorème est admis. ■

Remarque 4.6 *Si la fonction f est continue, $T-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors elle est représentable sur $\mathbb{R}$ par sa série de $\mathcal{F}$ourier, c-à-d*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple 4.1 *Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique de période 2, définie par :*

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ 0\leq x<1\\ \dfrac{1}{2} & si\ 1\leq x<2\end{cases}$$

Les conditions de Dirichlet sont vérifiées puisque

1. *Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k=k, k\in\mathbb{Z}$ et sont de première espèce car*

$$f(1+0)=f(1)=\frac{1}{2}; f(1-0)=1$$

2. *La fonction f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :*

$$f'(1-0)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\frac{f(x)-f(1-0)}{x-1}=0 \quad , \quad f'(1+0)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{f(x)-f(1+0)}{x-1}=1.$$

Alors f est développable en série de $\mathcal{F}$ourier.

Les coefficients de $\mathcal{F}$ourier : on a $l=1$ alors :

$$a_0=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x dx+\int_1^2\frac{1}{2}dx=1$$

$$a_n=\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx+\int_1^2\frac{1}{2}\cos(n\pi x)\,dx=\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi^2n^2},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$b_n=\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx+\int_1^2\frac{1}{2}\sin(n\pi x)\,dx=\frac{(-1)^{n+1}-1}{2\pi n},\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Donc la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f est

$$\frac{1}{2}+\sum_{n\geq1}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi^2n^2}\cos(n\pi x)+\frac{(-1)^{n+1}-1}{2\pi n}\sin(n\pi x)\right]=\begin{cases}1/4 & si\ x=0\\ x & si\ 0<x<1\\ 3/4 & si\ x=1\\ 1/2 & si\ 1<x<2\end{cases}$$

Remarquons que pour $x = 0$ ona

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2} = 1/4$$

Donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Remarque 4.7 *Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.*

4.3.3 Développement en série de Fourier des fonctions non périodiques

Théorème 4.2 *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et vérifiant les hypothèses suivants :*

1. *$\forall x \in [\alpha, \beta]$, les valeurs $f(x+0), f(x-0)$ existent et finies.*
2. *$\forall x \in [\alpha, \beta]$, les valeurs $f'(x+0), f'(x-0)$ existent et finies.*

Alors :

i/ *Pour tout $x \in \,]\alpha, \beta[$ on a :*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) \right]$$

ii/ *Pour α ou β on a :*

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha+0) + f(\beta-0)}{2} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi \alpha}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi \alpha}{\beta - \alpha}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi \beta}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi \beta}{\beta - \alpha}\right) \right] \end{aligned}$$

Où

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque 4.8 *Soit $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue est possédant des dérivées $f'(x+0), f'(x-0)$ dans $[0,l]$. Pour développer f en série de $\mathcal{F}$ourier qui contient que des cosinus ou bien des sinus, il suffit de la prologer sur $[-l,l]$ en fonction f_1 paire ou f_2 impaire, par exemple comme suit :*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(-x) & si \ -l \leq x < 0 \\ f(x) & si \ 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad f_2(x) = \begin{cases} -f(-x) & si \ -l \leq x < 0 \\ f(x) & si \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

et d'appliquer ensuite à f_1 ou à f_2 le théorème 4.2.

4.3.4 Egalité de Parseval

Théorème 4.3 *Soit f une fonction développable en série de Fourier et périodique de période $T > 0$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)\, dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 .$$

Remarque 4.9 *Si f est de période 2π on a*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f^2(x)\, dx$$