Chapitre 3

Séries entières

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une famille particulière des séries de fonctions qui est constituée de fonctions de puissances et généralise les fonctions polynômes : ce sont les séries entières. Nous verrons que cette famille particulière joue un rôle important en mathématiques, comme la résolution de certaines équations différentielles.

3.1 Définition d'une série entière

Définition 3.1 *On appelle série entière toute série de fonctions* $(\sum f_n)$ *dont le terme général est de la forme* $f_n(x) = a_n x^n$ *où* (a_n) *désigne une suite réelle ou complexe et* x_0 *et* x *sont des nombres réels ou complexes (*x_0 *fixé).*

Remarque 3.1 *On peut avoir deux autres formes des séries entières*

1. *Le cas où le terme général de la série de fonctions est donné par* $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$ *et* x_0 *est un nombre réel ou complexe fixé. Pour étudier ce type Il suffit d'utiliser le changement de variable* $X = x - x_0$.
2. *Le cas où le terme général de la série de fonctions est donné par* $f_n(x) = a_n x^{\alpha n}$ *et* α *est un nombre rationnel fixé. Pour étudier ce type Il suffit d'utiliser le changement de variable* $X = x^{\alpha}$.

Pour unier la présentation des résultats suivant, on se place dans le cas d'une variable réelle.

3.2 Domaine de convergence

Comme pour les séries de fonctions, l'étude ce base toujours sur la détermination du domaine de convergence de la série entière c-à-d

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Remarque 3.2 *Pour les séries entières, le domaine de convergence n'est jamais vide car il contient au moins le point $x = 0$.*

Lemme 3.1 (Lemme d'Abel) *Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ une suite entière.*

1. *Si le terme général de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est borné en un point $x_0 \neq 0$ alors :*
   - *La série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$.*
   - *La série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente dans chaque intervalle $[-r, r] \subset]-|x_0|, |x_0|[$.*
2. *Si la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est divergente en un point $x_0 \neq 0$ (i.e $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x_0^n$ diverge) alors la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est divergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > |x_0|$.*

Démonstration. La suite $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée,

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n x_0^n| < M$$

1. Pour $|x| < |x_0|$:
$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$
   La série $\sum\limits_{n \geq 0} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ est une série géométrique de raison $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, donc convergente. d'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n \geq 0} |a_n x^n|$ est convergente et par suite la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente.

Maintenant si on considère le nombre réel positif $r < |x_0|$ et soit $|x| \leq r$.

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente.

2. Soit $x_0 \neq 0$ tel que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ est divergente.

   Supposons que pour tout $|x| > |x_0|$ la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > |x_1| > |x_0|$, alors d'après ce qui précède la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n x_1^n|$ est convergente.

■

Remarque 3.3 *S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ converge alors, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$.*

en effet, la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0$, ce qui entraine l'existence d'un nombre réel $M > 0$ tel que

$$|a_n x_0^n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.1 *Pour toute série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, il existe un nombre $R \geq 0$ fini ou infini tel que*

1. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $|x| < R$*
2. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge pour tout $|x| > R$.*
3. *Si $R > 0$, pour tout $0 < r < R$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement pour tout $|x| \leq r$.*

Remarque 3.4 *Ce qui précède ne donne aucun renseignement sur ce qui se passe lorsque $|x| = R$, alors suivant la série considérée, on verra qu'elle peut converger ou diverger.*

Définition 3.2 *Le nombre R, fini ou infini, caractérisé par les propriétés 1 et 2 et 3 du théorème 3.1 s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, il est donné par*

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n r^n| < +\infty \right\}$$

L'intervalle ouvert $]-R, R[$ s'appelle l'intervalle de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exemple 3.1 *:*

Exemple 3.2
1. *La série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Donc $R = 1$.*
2. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n}$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Donc $R = 1$.*

Remarque 3.5 *Le rayon de convergence d'une série entière ne dépend pas des premiers termes de la série. On peut modifier un nombre fini de coefficients sans modifier le rayon de convergence.*

Théorème 3.2 *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. de sommes S_a et S_b à l'interieur des intervalles de convergence.*

1. *La série entière somme $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$, avec $c_n = a_n + b_n$, a pour rayon $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour somme S_c vérifiant :*

$$S_c(x) = S_a(x) + S_b(x), \quad \forall x \in \left]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)\right[.$$

   Si de plus $R_a \neq R_b$, alors $R_c = \min(R_a, R_b)$.

2. *La série entière produit $\sum\limits_{n\geq 0} w_n x^n$, avec $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, a pour rayon $R_w \geq \min(R_a, R_b)$, et pour somme S_c vérifiant :*

$$S_w(x) = S_a(x).S_b(x), \quad \forall x \in \left]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)\right[.$$

Démonstration.

1. Si $|x| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sont absolument convergente, donc $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$ l'est aussi.on en déduit que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

   Maintenant on va montrer que si $R_a < R_b$ on a $R_c = R_a$. Et pour ceci on suppose $R_c > R_a$, alors il existe un réel x tel que $R_a < |x| < R_b$ et $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ convergente. Ce qui conduit à la convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ et par suite $\sum_{n\geq 0} (c_n - b_n) x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergente, ce qui contredit la supposition que $R_a < |x|$.

2. Si $|x| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sont absolument convergente, donc $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$ l'est aussi.on en déduit que $R_w \geq \min(R_a, R_b)$. ■

Remarque 3.6 *Si $R_a \neq R_b$, on n'a plus nécessairement $R_w = \min(R_a, R_b)$.*

Proposition 3.1 *Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On suppose que :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : a_n \neq 0.$$

Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, le rayon de convergence R est donné par

$$R = \begin{cases} 1/l & si\ 0 < l < +\infty \\ +\infty & si\ l = 0 \\ 0 & si\ l = +\infty \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de D'Alembert. ■

Proposition 3.2 *Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Si la limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, le rayon de convergence R est donné par :*

$$R = \begin{cases} 1/l & si\ 0 < l < +\infty \\ +\infty & si\ l = 0 \\ 0 & si\ l = +\infty \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy. ■

Proposition 3.3 (D'Hadamard) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *est égal au nombre* R *défini par* $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exemple 3.3 *:*

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-2)^n}{n} x^n$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)} \frac{n}{(-2)^n} \right| = 2,$$

alors $R = 1/2$.

2. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e,$$

alors $R = 1/e$.

3. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$, *on a*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \left. \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}} \right)^{-1} = 1/4.$$

3.3 Propriétés des séries entières

Théorème 3.3 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors :*

1. *Sa somme* S *est une fonction continue sur* $]-R, R[$.

2. *La série entière dérivée* $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ *obtenue à partir de la série initiale par dérivation terme à terme, a le même rayon de convergence* R *et de plus*

$$S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in \left]-R, R\right[.$$

3. *La série entière primitive* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} x^n$ *obtenues à partir de la série initiale par intégration terme à terme, a le même rayon de convergence* R *et de plus*

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n, \quad \forall x \in \left]-R, R\right[$$

Corollaire 3.1 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \neq 0$, *alors sa somme* S *est indéfiniment dérivable dans l'intervalle de convergence c-à-d*

$$S \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\left]-R, R\right[\right)$$

De plus

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Corollaire 3.2 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ *deux séries entières et de sommes respectives* S_a *et* S_b. *Alors si* $S_a = S_b$ *sur un intervalle* $]\alpha, \beta[$ *contenant* 0 *on a*

$$a_n = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.4 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}_+$ *et de somme* S.

1. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n R^n$ *est convergente alors*

$$\lim_{x\to R} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

2. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n R^n$ *est convergente alors*

$$\lim_{x\to -R} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n R^n.$$

Exemple 3.4 *Soit la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}\right| = 1 \implies R = 1.$$

Et comme la série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *converge (d'après Leibniz) alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

3.4 Fonctions développables en séries entières

Définition 3.3 *Une fonction* f *définie sur un intervalle contenant* 0 *est dite développable en série entière autour de* 0, *s'il existe* $r>0$ *et une série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$ *définie sur* $]-r,r[$, *telle que :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \quad \forall x\in\,]-r,r[\,.$$

Définition 3.4 *Une fonction* $f:x\to f(x)$ *définie sur un intervalle contenant* x_0 *est dite développable en série entière autour de* x_0, *si la fonction* $X\to f(X+x_0)$ *(où* $X=x-x_0$*) est développable en série entière au voisinage de* 0. *On aura alors :*

$$f(x) = f(X+x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n, \quad \forall x\in\,]x_0-r,x_0+r[\,.$$

Proposition 3.4 *:*

1. *Si* f *est développable en série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$ *définie sur l'intervalle* $]-r,r[$, *alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-r,r[)$ *et on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

2. *Si* f *est développable en série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ *sur l'intervalle* $]x_0-r,x_0+r[$

alors f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}\left(]x_0 - r, x_0 + r[\right)$ et on a

$$a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Remarque 3.7 *S'il existe, un développement en série entière d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 , alors ce développement est unique.*

Définition 3.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage du point x_0, alors la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ est appelée développement en série de Taylor de f en x_0.*
Pour $x_0 = 0$ la série entière obtenue $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est appelée développement en série de Maclorin de f en 0.

Remarque 3.8 *Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ mais pas développable en série entière.*

Exemple 3.5 *Soit la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^*)$. De plus

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ pour tout x, mais $f \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi cette fonction n'est pas développable en série entière autour de 0.

Théorème 3.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}(]-r, r[)$, vérifiant la condition suivante :*

$$\exists M > 0, \forall n \geq 1, \forall x \in \left]-r, r\right[: \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

Alors, pour tout $x \in \left]-r, r\right[$, la fonction f est somme de la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

qui est de rayon de convergence supérieur ou égale à r.

3.5 Applications

3.5.1 Développement de certaines fonctions en série de Taylor

Les développements en séries entières des fonctions élémentaires sont tout simplement les développements limités vus en première année.

Ils se déduisent presque tous de trois développements à connaître :

$\frac{1}{1-x}$	$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	où $R=1$
e^x	$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	où $R=+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	où $R=1$

Notons que pour trouver la série de Taylor d'une fonction on applique différentes méthodes :

• On présente la fonction donnée sous forme de la somme des fonctions simples, dont les séries de Taylor sont connues.

• On applique parfois changement de variables, dérivation et intégration des séries.

Exemple 3.6 *Donner le développement en séries entières de chaque fonction ci-dessous :*

1. $f(x)=\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$

   On a

$$\frac{5-2x}{x^2-5x+6}=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3-x}$$

   De plus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x/2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \forall |x|<R_1=2\\ \frac{1}{3-x}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x/3}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \forall |x|<R_2=3\end{aligned}$$

   Alors

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n \\ \forall |x|<\min(R_1,R_2)=2\end{cases}$$

2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}\right)$

On a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}\right) &= \ln\left(\frac{2\left(1+x^2/2\right)}{\sqrt{1-2x^2}}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+x^2/2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-2x^2\right) \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(2x^2\right)^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}x^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^{2n} \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+2^{2n-1}}{n2^n}x^{2n}
\end{aligned}$$

Pour déterminer le rayon de convergence, on pose

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}+2^{2n-1}}{n2^n}$$

alors

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1/2$$

Donc

$$\begin{cases} g(x) = \ln 2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+2^{2n-1}}{n2^n}x^{2n} \\ \forall\,|x| < 1/2 \end{cases}$$

3.5.2 Résolution des équations différentielles à l'aide des séries entières

On peut parfois utiliser les séries entières pour résoudre les équations différentielles ceci est due en exprimant leurs solutions au moyen des développement en séries entières. Afin d'expliquer cette technique considérons l'équation différentielle suivante :

$$y" + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)\,.$$

On cherche la solution de cette équation vérifiant la condition initiale

$$y\,(0) = y_0 \quad , \quad y'\,(0) = y_0'$$

Si les fonctions p, q, f se décompose en séries entières convergentes dans un voisinage du point 0, alors il existe une solution unique de l'équation différentielle sous forme d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ qui converge au voisinage du point 0.
En dérivant la série entière deux fois consécutivement et on remplaçant les expressions de y', y'', p, q, f dans l'équation différentielle, on présente cette équation sous forme d'une égalité de deux séries entières. De cette égalité on détermine les coefficients inconnus de la série entière.

Exemple 3.7 *Soit l'équation différentielle*

$$xy'' + xy' + y = 1 \tag{3.1}$$

Soit la série solution de l'équation différentielle

$$y\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{3.2}$$

En dérivant la série solution, on obtient

$$y'\,(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

En dérivant pour la deuxième fois

$$y\text{''}\,(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} \tag{3.3}$$

En substituant les formules 3.2 et 3.3 dans l'équation différentielle 3.1, on trouve :

$$\begin{aligned} xy'' + xy' + y = 1 \quad & \Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \\ & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(n+1\right)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \\ & \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left[n\left(n+1\right)a_{n+1} + \left(n+1\right)a_n\right] x^n = 1 \end{aligned}$$

Par identification

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 = 1 \\ \\ n\left(n+1\right)a_{n+1} + \left(n+1\right)a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

Par ailleurs, on montre facilement par récurrence que

$$a_n = \left(-1\right)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$y\left(x\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} x^n$$

en mettant $a_1 x$ enfacteur

$$y\left(x\right) = 1 + a_1 x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

et en changeant l'indice de sommation

$$y\left(x\right) = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{n}}{n!}$$

ce qui donne facilement

$$y\left(x\right) = 1 + a_1 x e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$