Université Mohammed Kheider - Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques
Module: Analyse 03 (2ème année Licence Maths 2023/2024)

Série N° 02

Exercice 1 *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes:*

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
3. $f_n(x) = \dfrac{e^{-n^2x}}{n^3}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
4. $f_n(x) = n\left(x^n - x^{n+1}\right)$ *sur* $[0,1]$ *puis sur* $[0,a]$ *avec* a *dans* $]0,1[$.

Exercice 2 *Soit la suite de fonctions définie par:*

$$f_n(x) = n\sin\frac{x}{n} \quad ,x \in [0,+\infty[\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. *Etudier la convergence simple de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Etudier la convergence uniforme de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+$ *puis sur l'intervalle* $[0,1]$.
3. *Etudier la convergence simple de la suite des dérivées* $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+$.
4. *Que peut-on déduire?*

Exercice 3 *Soit la serie de fonctions de terme général :*

$$f_n(x) = \sin(x)\cos^n(x), \qquad x \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right] \ \text{ et } n \geq 1$$

1. *Montrer que la serie de fonctions* $\sum f_n(x)$ *converge simplement sur* $\left[0.\frac{\pi}{2}\right]$ *calculer sa somme*

2. *La serie est-elle uniformement convergente sur* $\mathbb{R}$

Exercice 4 1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *de fonctions définies par:*

$$f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 0$$

2. *On considère la série de fonctions de terme général* g_n *donnée par :*

$$g_n(x) = (-1)^n f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 0.$$

a. *Etudier la convergence simple et normale de la série* $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

b. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$*,en déduire que sa somme* S *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}_+$*.puis Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.