

# **Mécanique des Fluides Approfondie**

Master 1 Energétique

**Chawki Mahboub**

Département de Génie Mécanique  
Université de Biskra

# Préface

Ce cours de mécanique des fluides approfondie est destiné aux étudiants de Master 1 énergétique conformément à la dernière offre de formation adopté par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique en Algérie. Grâce à ce cours, l'étudiant peut approfondir ses connaissances sur certains phénomènes classiques mais assez complexes en mécanique des fluides qui ne font pas partie du contenu de la même matière en Licence, et également sur la formulation mathématique décrivant ces phénomènes, ainsi que la manière de les simplifier et de les résoudre.

Ce cours est consacré exclusivement aux écoulements incompressibles idéaux et réels, et il est scindé en cinq chapitres. Le premier chapitre est réservé à l'établissement des équations de mouvement. Le second chapitre traite la théorie des écoulements potentiels bidimensionnels. Le troisième chapitre contient quelques exemples des écoulements visqueux simples dont les équations gouvernantes possèdent des solutions exactes. Le quatrième chapitre présente des notions de base sur la théorie de la couche limite ainsi que les différentes approches de résolution de ce type d'écoulement. Le cinquième chapitre aborde la modélisation des écoulements turbulents. Une annexe est incluse à la fin de ce cours, dans laquelle figurent quelques exercices d'application.

# Liste de Symboles

- $a$  : accélération ( $\text{m/s}^2$ )  
 $A$  : aire ( $\text{m}^2$ )  
 $C_f$  : coefficient de frottement (/)  
 $C_p$  : chaleur spécifique ( $\text{J/kgK}$ )  
 $\overline{D}$  : tenseur des taux de déformation ( $\text{s}^{-1}$ )  
 $e$  : énergie totale par unité de masse ( $\text{J/kg}$ )  
 $E$  : énergie (J)  
 $f$  : fonction de courant réduite (/) / vitesse réduite (/) / coefficient de frottement (/)  
 $\vec{f}$  : force du poids par unité de masse ( $\text{m/s}^2$ )  
 $F$  : potentiel complexe ( $\text{m}^2/\text{s}$ )  
 $\vec{F}$  : force (N)  
 $g$  : gravité ( $\text{m/s}^2$ )  
 $h$  : enthalpie par unité de masse ( $\text{J/kg}$ ) / hauteur (m)  
 $I$  : intensité du doublet ( $\text{m}^3/\text{s}$ )  
 $\overline{I}$  : tenseur identité ( $\text{N/m}^2$ )  
 $k$  : énergie cinétique turbulente par unité de masse ( $\text{J/kg}$ )  
 $\overline{k}$  : tenseur de conductivité ( $\text{W/mK}$ )  
 $l, L$  : longueur (m)  
 $m$  : masse (kg)  
 $\vec{n}$  : vecteur normale (/)  
 $p$  : pression ( $\text{N/m}^2$ )  
 $\overline{P}$  : tenseur des contraintes ( $\text{N/m}^2$ )  
 $\vec{q}$  : vecteur vitesse (m/s)  
 $\dot{q}$  : source interne de chaleur par unité de volume ( $\text{W/m}^3$ )  
 $\dot{Q}$  : quantité de chaleur par unité de temps (W)  
 $Q, Q_v$  : débit volumique ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) / débit volumique par unité de longueur ( $\text{m}^2/\text{s}$ )  
 $r, \theta, x$  : coordonnées cylindriques (m, rad, m)  
 $\vec{r}$  : vecteur position (m)  
 $R$  : rayon (m)  
 $R_{ij}$  : tenseur de Reynolds ( $\text{J/kg}$ )  
 $Re$  : nombre de Reynolds (/)  
 $S$  : surface ( $\text{m}^2$ )  
 $t$  : temps (s)

$T$  : température (K)  
 $\overline{T}$  : tenseur gradient des vitesses ( $s^{-1}$ )  
 $u, v, w$  : composantes du vecteur vitesse (m/s)  
 $\hat{u}$  : énergie interne par unité de masse (J/kg)  
 $U$  : vitesse (m/s)  
 $v_r, v_\theta$  : composantes du vecteur vitesses (m/s)  
 $V$  : volume ( $m^3$ )  
 $\dot{W}$  : travail par unité de temps (W)  
 $W$  : vitesse complexe (m/s)  
 $x, y, z$  : coordonnées cartésiennes (m)  
 $z$  : variable complexe (m)

### Lettres grecques

$\alpha$  : angle (rad)  
 $\delta$  : épaisseur (m)  
 $\varepsilon$  : taux de dissipation d'énergie (J/kgs)  
 $\phi$  : potentiel de vitesse ( $m^2/s$ ), grandeur physique générale  
 $\bar{\phi}$  : flux de chaleur conductif ( $W/m^2$ )  
 $\Phi$  : dissipation visqueuse ( $kg/ms^3$ )  
 $\Gamma$  : intensité de tourbillon ( $m^2/s$ )  
 $\eta$  : position de la surface libre (m) / variable de similitude (m)  
 $\kappa$  : viscosité de dilatation ( $kg/ms$ ) / coefficient de Von Karman (/)  
 $\lambda$  : seconde viscosité ( $kg/ms$ )  
 $\mu$  : viscosité dynamique ( $kg/ms$ )  
 $\nu$  : viscosité cinématique ( $m^2/s$ )  
 $\theta$  : angle de rotation (rad)  
 $\rho$  : masse volumique ( $kg/m^3$ )  
 $\tau_p$  : contrainte de cisaillement pariétale ( $N/m^2$ )  
 $\overline{\tau}$  : tenseur des contraintes visqueuses ( $N/m^2$ )  
 $\omega$  : vortacité ( $s^{-1}$ ) / vitesse angulaire ( $s^{-1}$ ) / taux de dissipation spécifique ( $s^{-1}$ )  
 $\overline{\Omega}$  : tenseur des taux de rotation ( $s^{-1}$ )  
 $\psi$  : fonction de courant ( $m^2/s$ )

# Table des matières

<b>Préface</b> .....	i
<b>Liste de symboles</b> .....	ii
<b>Chapitre 1 : Équations de transport</b> .....	1
1. Description du mouvement .....	1
1.1. Description lagrangienne .....	1
1.2. Description eulérienne .....	1
2. Dérivée particulaire et accélération .....	2
3. Tenseurs (gradient des vitesses, déformation et rotation) .....	3
3.1. Translation .....	3
3.2. Rotation .....	4
3.3. Dilatation .....	5
3.4. Cisaillement .....	6
3.5. Mouvement général d'une particule fluide .....	7
4. Théorème de transport de Reynolds .....	9
4.1. Système et volume de contrôle .....	9
4.2. Formulation du théorème .....	10
5. Bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie .....	12
5.1. Equation de continuité .....	12
5.2. Equation de quantité de mouvement .....	12
5.3. Equation d'énergie .....	14
6. Fluide visqueux newtonien .....	16
6.1. Définition .....	16
6.2. Expérience .....	16
6.3. Loi de Newton généralisée .....	17
7. Equations de Navier-Stokes .....	18
<b>Chapitre 2 : Fluide parfait et ses applications</b> .....	20
1. Ecoulements potentiels .....	20
1.1. Définition .....	20
1.2. Potentiel de vitesse .....	21

1.3. Fonction de courant .....	22
1.4. Lignes de courant et lignes équipotentiell	22
1.5. Débit volumique .....	24
1.6. Potentiel complexe .....	24
a) Ecoulement uniforme .....	25
b) Source ou puits .....	25
c) Tourbillon ponctuel .....	26
d) Doublet .....	26
1.7. Méthode de superposition .....	28
a) Ecoulement autour d'un cylindre circulaire sans circulation .....	28
b) Ecoulement autour d'un cylindre circulaire avec circulation .....	29
2. Ondes d'interfaces (écoulement à surface libre) .....	31
2.1. Définition .....	31
2.2. Modèle général .....	31
2.3. Modèle linéaire (onde de faible amplitude) .....	32
<b>Chapitre 3 : Dynamique des fluides réels</b> .....	34
1. Ecoulements unidirectionnels (parallèles) .....	34
1.1. Ecoulement entre deux plans parallèles en mouvement relatif .....	34
1.2. Ecoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique .....	36
1.3. Ecoulement de Couette cylindrique .....	37
1.4. Premier problème de Stokes (problème de Rayleigh) .....	38
2. Ecoulement à faible nombre de Reynolds (écoulement de Stokes) .....	39
3. Lubrification hydrodynamique .....	40
<b>Chapitre 4 : Couche limite dynamique</b> .....	43
1. Développement de la couche limite .....	43
1.1. Définition .....	43
1.2. Epaisseurs de la couche limite .....	43
1.3. Equations de la couche limite .....	44
2. Equation de Blasius (solution auto-similaire) .....	46
3. Equation de Von Karman (méthode intégrale) .....	49
4. Méthode de Pohlhausen (profil de vitesse approché) .....	51
<b>Chapitre 5 : Écoulements turbulents</b> .....	53
1. Distribution universelle de vitesse (loi de la paroi) .....	53

2. Loi de puissance 1/7 <sup>ème</sup> .....	54
3. Echelles de turbulence .....	54
4. Champ moyen et fluctuations .....	56
5. Equations de Reynolds .....	57
5.1. Equations du mouvement moyen .....	57
5.2. Equations du mouvement fluctuant .....	58
6. Hypothèse de Boussinesq (viscosité turbulente) .....	59
7. Modèle de la longueur de mélange de Prandtl .....	59
8. Modèles de turbulence à deux équations .....	61
8.1. Modèle $k-\varepsilon$ .....	61
8.2. Modèle $k-\omega$ .....	62
8.3. Modèle SST .....	63
<b>Références</b> .....	65
<b>Annexe : Exercices d'application</b> .....	66

# Chapitre 1

## Équations de transport

### 1. Description du mouvement

La description du mouvement d'un fluide est la formulation mathématique décrivant son mouvement dans l'espace et dans le temps sans considération des causes provoquant celui-ci.

#### 1.1. Description lagrangienne

Elle consiste à suivre chaque particule fluide  $P$  se trouvant à l'instant  $t_0$  au point de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , dans son mouvement au cours du temps. Donc, à l'instant  $t$  la particule  $P$  se trouve en un point de l'espace dont les coordonnées s'écrivent :

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t) \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t) \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.1)$$

On appelle  $(x_0, y_0, z_0, t)$  les *variables de Lagrange*. Les composantes de la vitesse et de l'accélération de la particule fluide  $P$  à l'instant  $t$  sont par conséquent :

$$u = \frac{dx}{dt} \quad v = \frac{dy}{dt} \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (1.2)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.3)$$

#### 1.2. Description eulérienne

Elle consiste à observer en chaque point  $M$  de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ , le passage des particules fluides  $P$  au cours du temps. Donc, à l'instant  $t$  les composantes du vecteur vitesse que possède la particule fluide  $P$  en passant par le point  $M$  s'écrivent :

$$u = u(x, y, z, t) \quad v = v(x, y, z, t) \quad w = w(x, y, z, t) \quad (1.4)$$

On appelle  $(x, y, z, t)$  les *variables d'Euler*. Cette description est la plus utilisée en mécanique des fluides, cependant, elle présente l'inconvénient d'introduire des termes non linéaires dans l'expression de l'accélération (voir : [Dérivée particulaire et accélération](#)).

## 2. Dérivée particulière et accélération

Soit la fonction  $f = f(x, y, z, t)$ , la différentielle totale de cette fonction est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.5)$$

D'où la dérivée totale est :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dots \\ &\dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

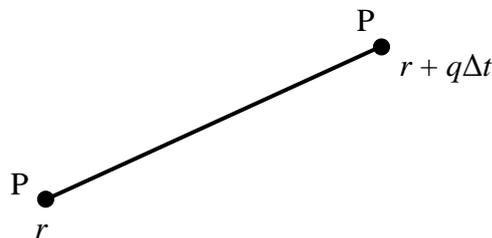
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} f \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{q} \quad (1.7)$$

Ce type de dérivée s'appelle une *dérivée particulière*, et elle est désignée par le symbole :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \vec{\nabla}) \quad (1.8)$$

Pour calculer l'accélération d'une particule fluide de vitesse  $q(r, t) = q(x, y, z, t)$ , il faut tenir compte du fait que pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , la particule se déplace à une autre position  $r + \Delta r = r + q\Delta t$  (voir [Figure 1.1](#)). Par conséquent, l'accélération de la particule est définie par :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(r + q\Delta t, t + \Delta t) - q(r, t)}{\Delta t} \quad (1.9)$$



**Figure 1.1** : La particule située à l'instant  $t$  en  $r$  passe à l'instant  $t + \Delta t$  en  $r + q\Delta t$

En utilisant la notation du système de coordonnées cartésiennes, le premier terme dans cette expression s'écrit :

$$q(r + q\Delta t, t + \Delta t) = q(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) \quad (1.10)$$

En utilisant le développement en série de Taylor pour cette dernière, on obtient :

$$q(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) = q(x, y, z, t) + \dots \\ \dots + \frac{\partial q}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial q}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial q}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial q}{\partial z} w\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (1.11)$$

Ou encore avec le système de coordonnées polaires :

$$q(r + q\Delta t, t + \Delta t) = q(r, t) + \frac{\partial q}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial q}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial q}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial q}{\partial z} w\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (1.12)$$

Par la substitution de ce développement dans l'expression de l'accélération, on aura :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(r + q\Delta t, t + \Delta t) - q(r, t)}{\Delta t} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (1.13)$$

$$a = \underbrace{\frac{\partial q}{\partial t}}_{\substack{\text{Taux de} \\ \text{variation} \\ \text{local}}} + \underbrace{(q \cdot \nabla)q}_{\substack{\text{Changement convectif} \\ \text{dû au déplacement} \\ \text{des particules fluides}}} = \frac{Dq}{Dt} \quad (1.14)$$

Cette équation est vectorielle avec trois composante, dont les expressions dans chacune des trois directions du système cartésien sont données par :

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.15a)$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.15b)$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.15c)$$

### 3. Tenseurs (gradient des vitesses, déformation et rotation)

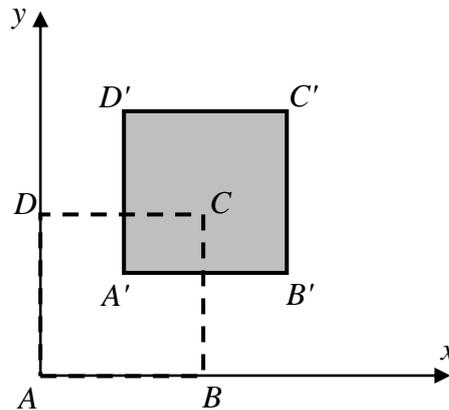
#### 3.1. Translation

Une translation pure est un mouvement dans lequel toutes les particules subissent le même déplacement. En notant par  $\vec{x}$  la position d'une particule fluide à un instant donné,  $\vec{x}'$  sa position à un instant ultérieur et par  $\vec{a}(t)$  le déplacement (indépendant de la position) :

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}(t) \quad (1.16)$$

La figure représente la translation d'un élément fluide, dont le volume matériel initial conserve sa forme. Le mouvement de translation s'effectue sans déformation. Toutes les particules matérielles ont au même instant le même vecteur vitesse défini par :

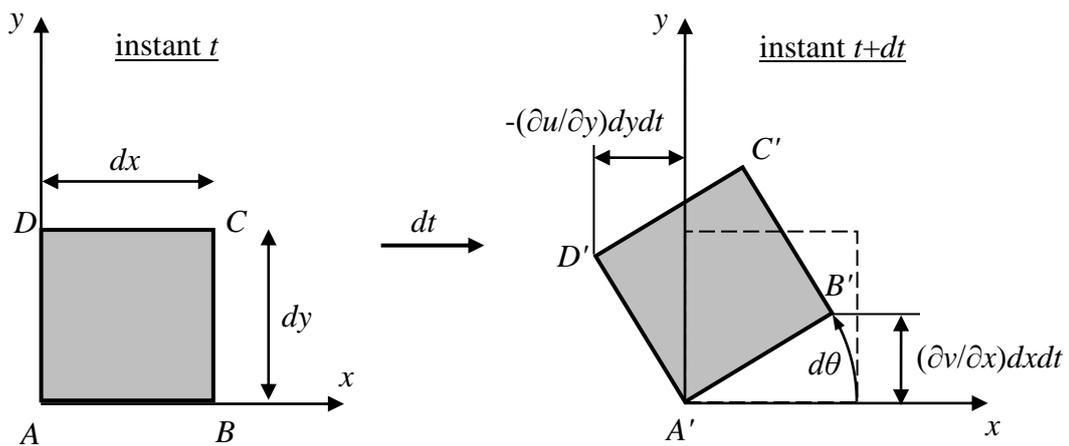
$$\vec{q}(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{a}(t) \quad (1.17)$$



**Figure 1.2** : Mouvement de translation en 2 dimensions

### 3.2. Rotation

Une rotation pure est un mouvement dans lequel toutes les particules tournent d'un même angle autour d'un axe donné.



**Figure 1.3** : Mouvement de rotation en 2 dimensions

Pour déterminer le taux rotation autour de l'axe  $Oz$ , on considère le déplacement de la ligne fluide  $AB$  (voir [Figure 1.3](#)). Si  $v$  est la vitesse du point  $A$  dans la direction  $\vec{y}$ , donc la vitesse du point  $B$  est  $v + (\partial v / \partial x) dx$ . Le déplacement du point  $B$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est  $v dt + (\partial v / \partial x) dx dt$  et le segment fluide  $AB$  subit donc une rotation d'angle  $d\theta = (\partial v / \partial x) dx dt / dx = (\partial v / \partial x) dt$ . On peut donc exprimer le taux de rotation instantané du segment fluide  $AB$  par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\partial v / \partial x) dt}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.18)$$

De même, le taux de rotation instantané du segment fluide  $AD$  est  $-(\partial u / \partial y) dt / dt = -\partial u / \partial y$ . Le taux de rotation moyen autour de l'axe  $Oz$  est donc exprimé par :

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.19)$$

Pour un mouvement de rotation tridimensionnel, ce résultat peut être généralisé :

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.20)$$

Les composantes du taux de rotation instantané  $\vec{\Omega}$  sont obtenues en prenant la moitié du rotationnel du champ des vitesses  $\vec{\omega}$  (appelé vecteur tourbillon ou vorticité de l'écoulement) :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{q} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{q} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \quad (1.21)$$

Si le rotationnel des vitesses est nul  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{q} = 0$ , l'écoulement est appelé irrotationnel et le champ de vitesse dérive d'un potentiel  $\Phi$  :

$$\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{\nabla} \Phi \quad (1.22)$$

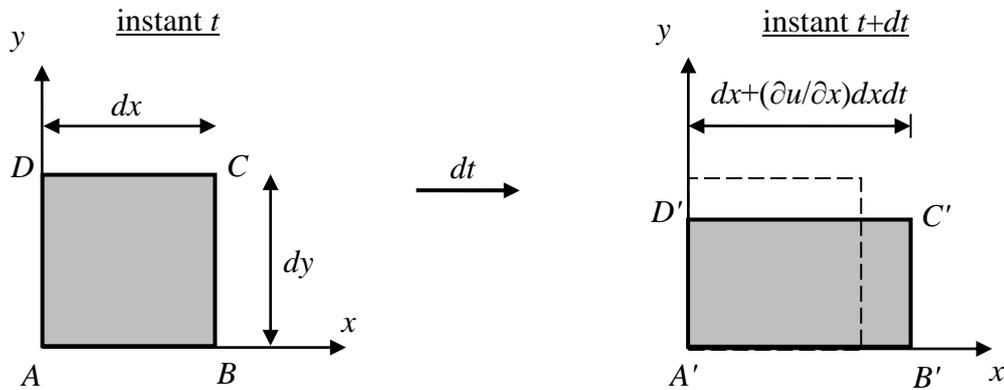
### 3.3. Dilatation

La dilatation ou déformation normale est observée lorsque la vitesse des particules change dans la direction du mouvement. La [Figure 1.4](#) représente une dilatation pure dans la direction des  $x$ .

Si  $u$  désigne la vitesse du point  $A$ , la vitesse du point  $B$  sera  $u + (\partial u / \partial x) dx$ . Après un temps  $dt$ , la longueur du segment  $A'B'$  sera  $dx + (\partial u / \partial x) dx dt$ . Le taux de déformation normale dans la direction  $x$  est défini comme étant la variation relative de longueur du segment  $AB$  par unité de temps :

$$\frac{1}{dxdt} \left( \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dxdt \right) - dx \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.23)$$

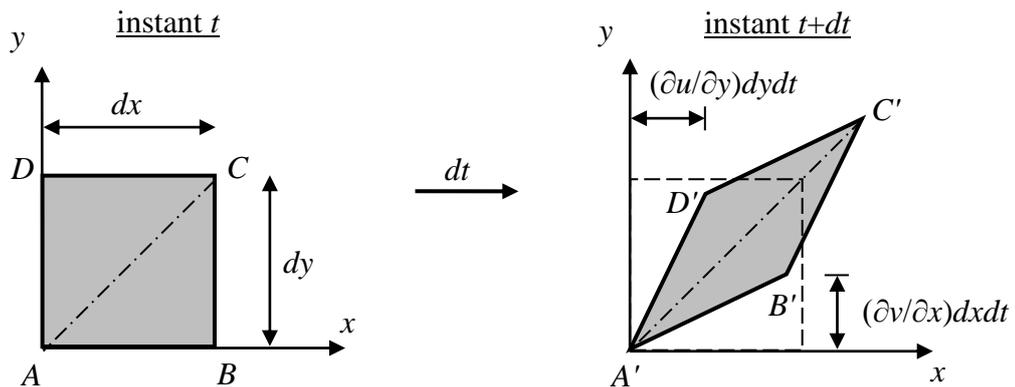
De même, si on a une dilatation pure dans la direction  $y$ , le taux de déformation normale est donc:  $\partial v/\partial y$ .



**Figure 1.4** : Dilatation en 2 dimensions suivant l'axe des  $x$

### 3.4. Cisaillement

Le cisaillement ou la déformation angulaire est associé à une variation de la vitesse dans la direction normale au mouvement. Considérons par exemple la déformation représentée sur la [Figure 1.5](#).



**Figure 1.5** : Cisaillement sans rotation

Si  $u$  est la vitesse du point  $A$ , alors  $u + (\partial u/\partial y)dy$  représente celle du point  $D$ . Pendant l'intervalle de temps  $dt$  le point  $A$  parcourt la distance  $udt$ , alors que le

point  $D$  parcourt la distance  $u dt + (\partial u / \partial y) dy dt$ . Dans ces conditions le segment  $AD$  pivote autour de  $A$  à la vitesse angulaire :

$$\frac{1}{dy dt} \left( \frac{\partial u}{\partial y} dy dt \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.24)$$

De la même manière si la vitesse du point  $B$  diffère de celle du point  $A$ , le segment  $AB$  pivote autour de  $A$  avec une vitesse angulaire:  $\partial v / \partial x$ . La vitesse de déformation (le taux de déformation) de l'angle  $BAD$  est donc la somme de ces deux vitesses angulaires:  $\partial v / \partial x + \partial u / \partial y$ .

Si  $\partial v / \partial x = \partial u / \partial y$ , la direction de la bissectrice principale est conservée et la rotation moyenne  $\Omega_z = \frac{1}{2}(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$  est nulle. La particule fluide subit donc un cisaillement pur.

Si  $\partial v / \partial x \neq \partial u / \partial y$ , la particule fluide subit à la fois une rotation et une déformation.

Si  $\partial v / \partial x = -\partial u / \partial y$ , la particule fluide subit une rotation pure.

### 3.5. Mouvement général d'une particule fluide

Dans le cas général un mouvement quelconque peut être décomposé en : translation, dilatation, déformation angulaire (cisaillement) et rotation. Pour cela, considérons un mouvement bidimensionnel quelconque de l'élément fluide  $ABCD$  (voir Figure 1.6). Le vecteur vitesse au point  $A$  et au point  $C$  a pour composantes respectivement :

$$\vec{q}_A = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \vec{q}_C = \begin{Bmatrix} u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

À l'instant  $t + dt$  le point  $A$  est passé en  $A'$  et le point  $C$  est passé en  $C'$ , et leurs coordonnées sont respectivement :

$$\vec{r}_{A'} = \begin{Bmatrix} x + u dt \\ y + v dt \end{Bmatrix} \quad \vec{r}_{C'} = \begin{Bmatrix} x + dx + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dt \\ y + dy + \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dt \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

En ajoutant et en retranchant  $\frac{1}{2}(\partial v / \partial x) dy dt$  à la première coordonnée, et  $\frac{1}{2}(\partial u / \partial y) dx dt$  à la seconde, Les coordonnées du point  $C'$  peuvent se réécrire sous la forme :

$$\vec{r}_{C'} = \begin{Bmatrix} x + dx + u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt + \dots \\ y + dy + v dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt + \dots \end{Bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{2em}}$   
Coordonnées  
initiales

$\underbrace{\hspace{2em}}$   
Translation

$\underbrace{\hspace{2em}}$   
Dilatation

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy dt &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy dt \\
 \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dt
 \end{aligned} \right\} \quad (1.27) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Déformation angulaire (Cisaillement)}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Rotation}}
 \end{aligned}$$

Le raisonnement précédent se généralise facilement au cas tridimensionnel, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{C'} = & \left\{ \begin{aligned}
 x + dx &+ u dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \right) dt \dots \\
 y + dy &+ v dt + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz \right) dt \dots \\
 z + dz &+ w dt + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \right) dt \dots
 \end{aligned} \right. \\
 & \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Coordonnées initiales}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Translation}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Dilatation}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Déformation angulaire (Cisaillement)}} \\
 & \left. \begin{aligned}
 \dots + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \right) dt \\
 \dots + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz \right) dt \\
 \dots + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \right) dt
 \end{aligned} \right\} \quad (1.28) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Rotation}}
 \end{aligned}$$

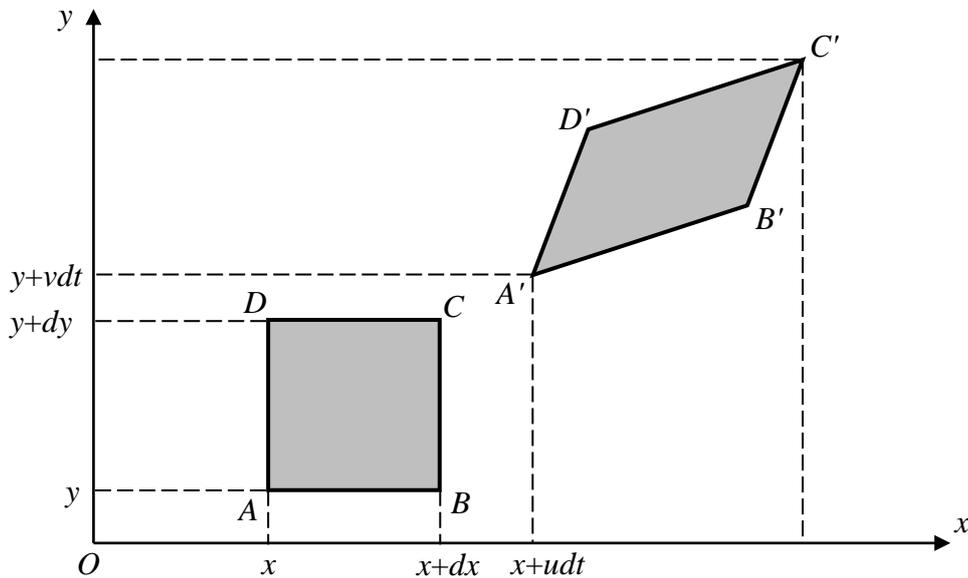


Figure 1.6 : Mouvement général d'une particule fluide en 2 dimensions

Maintenant, si on prend la différence de vitesse entre le point  $C$  et le point  $A$  dans le cas tridimensionnel, telle que :

$$d\vec{q} = \vec{q}_C - \vec{q}_A = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \overline{\overline{T}} \cdot d\vec{r} \quad (1.29)$$

La signification physique du tenseur gradient des vitesses  $\overline{\overline{T}}$  peut être démontrée en le composant en une partie asymétrique  $\overline{\overline{\Omega}}$  et une partie symétrique  $\overline{\overline{D}}$  selon :

$$\overline{\overline{T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{\Omega}}: \text{Tenseur des taux de rotation}} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{D}}: \text{Tenseur des taux de déformation}} \quad (1.30)$$

Le tenseur  $\overline{\overline{\Omega}}$  contient les trois composantes de la vitesse angulaire d'une particule fluide, par conséquent, il décrit le mouvement de rotation pure de la particule.

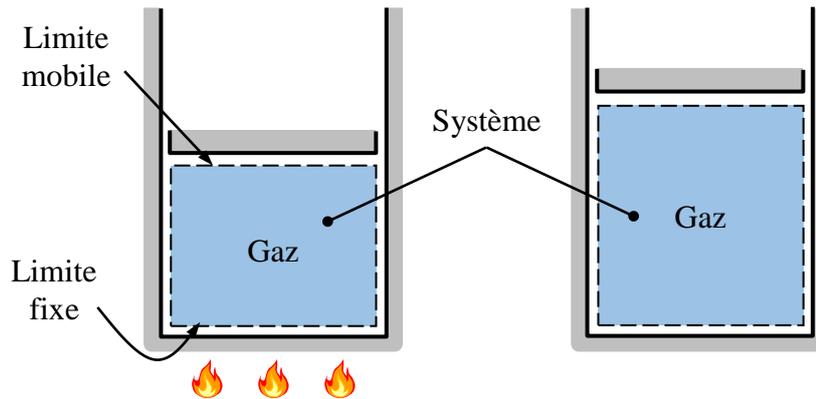
Le tenseur  $\overline{\overline{D}}$  contient les élongations de la particule fluide dans les trois directions du repère qui correspondent aux éléments diagonaux; alors que les éléments non diagonaux représentent la déformation angulaire pure de la particule fluide dans les trois plan du repère cartésien.

## 4. Théorème de transport de Reynolds

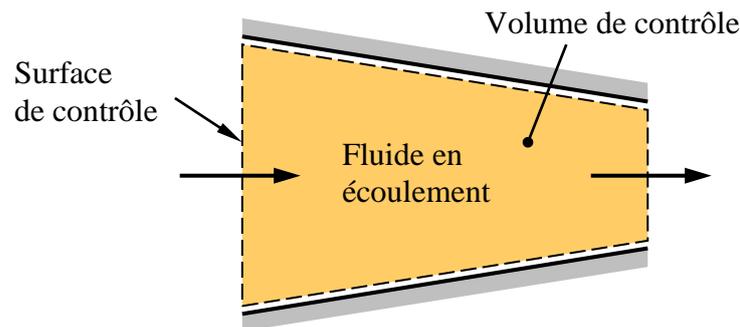
### 4.1. Système et volume de contrôle

Un système (système fermé) est défini comme une quantité de matière dont la forme peut changer durant un processus mais aucune masse ne traverse ses limites. [Rq. : la notion du système utilisée souvent dans la thermodynamique et la mécanique des solides]

Un volume de contrôle est un volume imaginaire limité par une surface fermée appelée surface de contrôle. Le volume et la surface de contrôle peuvent être fixes ou mobiles. Le fluide peut entrer et sortir du volume de contrôle à travers la surface de contrôle. [Rq. : la notion du volume de contrôle utilisée dans la mécanique des fluides]



**Figure 1.7** : System fermé



**Figure 1.8** : Volume de contrôle

#### 4.2. Formulation du théorème

Le théorème de transport de Reynolds nous permet de passer de l'approche du système à l'approche du volume de contrôle. Pour établir la formulation de ce théorème, on considère l'écoulement unidimensionnel d'un fluide dans un divergent, dont le volume de contrôle considéré comme étant fixe se trouve entre les sections droites (1) et (2). A l'instant  $t$  le système coïncide avec le volume de contrôle, donc tous les deux sont identiques (voir [Figure 1.9a](#)) :

$$B_{\text{Sys}}(t) = B_{\text{V.C.}}(t) \quad (1.31)$$

où  $B$  est une grandeur physique extensive (masse, énergie, quantité de mouvement...etc.). Pendant l'intervalle du temps  $\Delta t$ , le système se déplace dans le

sens de l'écoulement; et au cours de ce déplacement  $\Delta B_e$  entre dans le volume de contrôle (zone I) et  $\Delta B_s$  sort du volume de contrôle (zone II), (voir Figure 1.9b), on aura donc :

$$B_{S_{\text{sys}}}(t + \Delta t) = B_{V.C.}(t + \Delta t) - \Delta B_e(t + \Delta t) + \Delta B_s(t + \Delta t) \quad (1.32)$$

En soustrayant la première équation de la deuxième et divisant par  $\Delta t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{B_{S_{\text{sys}}}(t + \Delta t) - B_{S_{\text{sys}}}(t)}{\Delta t} &= \frac{B_{V.C.}(t + \Delta t) - B_{V.C.}(t)}{\Delta t} \dots \\ &\dots - \frac{\Delta B_e(t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Delta B_s(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.33)$$

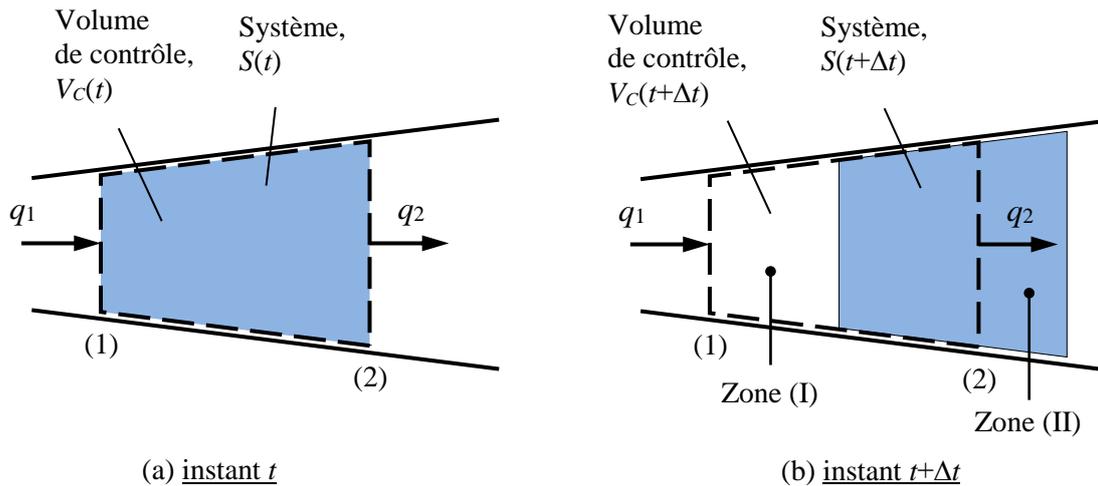
Prenant la limite lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\frac{dB_{S_{\text{sys}}}}{dt} = \frac{dB_{V.C.}}{dt} - \dot{B}_e + \dot{B}_s \quad (1.34)$$

Ou encore sous la forme :

$$\frac{dB_{S_{\text{sys}}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V.C.} \rho b dV + \int_{S.C.} \rho b (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.35)$$

d'où  $b = B/m$  représente la grandeur intensive correspondante,  $\dot{B}_e$  et  $\dot{B}_s$  représentent le flux de  $B$  respectivement entrant et sortant à travers la surface de contrôle.



**Figure 1.9** : Système mobile et volume de contrôle fixe

## 5. Bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie

### 5.1. Equation de continuité

L'équation de continuité (conservation de masse) peut être obtenue en remplaçant la grandeur extensive  $B$  dans le théorème de transport de Reynolds par la masse  $m$ , on obtient ainsi :

$$\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V.C.} \rho dV + \int_{S.C.} \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.36)$$

Et comme la masse du système est constante ( $dm_{sys}/dt = 0$ ), l'équation de continuité forme intégrale s'écrit :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V.C.} \rho dV}_{\substack{\text{Taux de variation} \\ \text{de la masse} \\ \text{contenu dans} \\ \text{le V.C.}}} + \underbrace{\int_{S.C.} \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) dS}_{\substack{\text{Débit massique} \\ \text{traversant la S.C.}}} = 0 \quad (1.37)$$

La forme différentielle (locale) de l'équation de continuité peut être établie en utilisant une forme alternative de l'équation précédente pour un volume de contrôle fixe :

$$\int_{V.C.} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S.C.} \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (1.38)$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradsky qui permet de transformer une intégrale surfacique en une intégrale volumique, le deuxième terme de cette équation s'écrit :

$$\int_{S.C.} \rho(\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V.C.} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) dV \quad (1.39)$$

Substituant cette expression dans l'équation précédente, il s'ensuit que :

$$\int_{V.C.} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) \right) dV = 0 \quad (1.40)$$

Etant donné que le volume  $V$  est arbitraire, l'intégrande doit être nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (1.41)$$

### 5.2. Equation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut être obtenue à partir de la seconde loi de Newton pour un système de masse  $m$  soumis à des forces externes, telle que :

$$\frac{d(m\vec{q})_{\text{sys}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (1.42)$$

Considérant un volume de contrôle fixe, et remplaçant la grandeur extensive  $B$  dans le théorème de transport de Reynolds par la quantité de mouvement  $m\vec{q}$ , on obtient :

$$\frac{d(m\vec{q})_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{v.c.}} \rho \vec{q} dV + \int_{\text{S.C.}} \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (1.43)$$

Dans la plupart des cas, deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans le volume de contrôle : les forces massiques (volumiques) et les forces surfaciques qui agissent par intermédiaire de la surface de contrôle. Ces deux forces sont exprimées respectivement par :

$$F_M = \int_{\text{v.c.}} \rho \vec{f} dV \quad (1.44)$$

$$F_S = \int_{\text{S.C.}} \overline{\overline{P}} \vec{n} dS \quad \text{avec} \quad \underbrace{\overline{\overline{P}}}_{\text{Tenseur des contraintes}} = \underbrace{-p \mathbf{I}}_{\text{Tenseur des contraintes associées à la pression}} + \underbrace{\overline{\overline{\tau}}}_{\text{Tenseur des contraintes visqueuses}} \quad (1.45)$$

En remplaçant par ces deux expressions dans l'équation précédente, on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement forme intégrale :

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{v.c.}} \rho \vec{q} dV + \int_{\text{S.C.}} \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\text{v.c.}} \rho \vec{f} dV + \int_{\text{S.C.}} \overline{\overline{P}} \vec{n} dS \quad (1.46)$$

Ou encore sous la forme :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\text{v.c.}} \rho \vec{q} dV}_{\text{Taux de variation de la } Q^{\text{thé}} \text{ de } M^{\text{vt}} \text{ contenu dans le V.C.}} + \underbrace{\int_{\text{S.C.}} \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Débit massique de la } Q^{\text{thé}} \text{ de } M^{\text{vt}} \text{ traversant la S.C.}} = \underbrace{\int_{\text{v.c.}} \rho \vec{f} dV}_{\text{Forces du poids}} - \underbrace{\int_{\text{S.C.}} p \vec{n} dS}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\int_{\text{S.C.}} \overline{\overline{\tau}} \vec{n} dS}_{\text{Forces visqueuses}} \quad (1.47)$$

Pour un volume de contrôle fixe, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{v.c.}} \rho \vec{q} dV = \int_{\text{v.c.}} \frac{\partial(\rho \vec{q})}{\partial t} dV \quad (1.48)$$

On utilise à nouveau le théorème de Green-Ostrogradsky, les intégrales surfaciques de l'équation précédente s'écrivent comme suit :

$$\int_{\text{S.C.}} \rho \vec{q} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\text{v.c.}} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q} \vec{q}) dV \quad (1.49)$$

avec  $\vec{q} \vec{q}$  représente un produit dyadique.

$$\int_{\text{S.C.}} p \vec{n} dS = \int_{\text{v.c.}} \vec{\nabla} p dV \quad (1.50)$$

$$\int_{\text{S.C.}} \overline{\overline{\tau}} \vec{n} dS = \int_{\text{v.c.}} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\tau}} dV \quad (1.51)$$

En remplaçant chaque terme par son expression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et étant donné que le volume  $V$  est arbitraire, l'intégrant doit être nul, il s'ensuit que :

$$\frac{\partial(\rho\vec{q})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{q}\vec{q}) = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\vec{\tau} \quad (1.52)$$

Cette équation peut se simplifier à l'aide de l'équation de continuité (1.41), comme :

$$\rho \frac{\partial\vec{q}}{\partial t} + \rho(\vec{q} \cdot \vec{\nabla})\vec{q} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\vec{\tau} \quad (1.53)$$

### 5.3. Equation d'énergie

L'équation de conservation de l'énergie peut être obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique, tel que :

$$\frac{dE_{Sys}}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (1.54)$$

Considérant un volume de contrôle fixe, et remplaçant la grandeur extensive  $B$  dans le théorème de transport de Reynolds par l'énergie  $E$ , on obtient :

$$\frac{dE_{Sys}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V.C.} \rho e dV + \int_{S.C.} \rho e(\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \dot{Q} + \dot{W} \quad (1.55)$$

Où :

$$\underbrace{e}_{\substack{\text{énergie totale} \\ \text{par unité de masse}}} = \underbrace{\hat{u}}_{\substack{\text{énergie interne} \\ \text{par unité de masse}}} + \underbrace{\frac{q^2}{2}}_{\substack{\text{énergie cinétique} \\ \text{par unité de masse}}} \quad (1.56)$$

$$\dot{Q} = \underbrace{\int_{V.C.} \dot{q} dV}_{\substack{\text{source de} \\ \text{chaleur interne}}} - \underbrace{\int_{S.C.} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS}_{\substack{\text{flux de chaleur} \\ \text{conductif}}} \quad (1.57)$$

$$\dot{W} = \underbrace{\int_{V.C.} \rho\vec{f} \cdot \vec{q} dV}_{\substack{\text{travail des} \\ \text{forces volumiques}}} + \underbrace{\int_{S.C.} \vec{P}\vec{n} \cdot \vec{q} dS}_{\substack{\text{travail des} \\ \text{forces surfaciques}}} + \dot{W}_{\text{autre}} \quad (1.58)$$

Supposons que  $\dot{W}_{\text{autre}} = 0$ , et en remplaçant par (1.57) et (1.58) dans (1.55), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V.C.} \rho e dV + \int_{S.C.} \rho e(\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V.C.} \dot{q} dV - \int_{S.C.} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS + \int_{V.C.} \rho\vec{f} \cdot \vec{q} dV + \int_{S.C.} \vec{P}\vec{n} \cdot \vec{q} dS \quad (1.59)$$

Ou encore sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho e dV + \int_{s.c.} \rho e (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS &= \int_{v.c.} \dot{q} dV - \int_{s.c.} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS + \int_{v.c.} \rho \vec{f} \cdot \vec{q} dV \\ &\quad - \int_{s.c.} p \vec{n} \cdot \vec{q} dS + \int_{s.c.} \vec{\tau} \cdot \vec{q} dS \end{aligned} \quad (1.60)$$

Pour un volume de contrôle fixe, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho e dV = \int_{v.c.} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} dV \quad (1.61)$$

On utilise le théorème de Green-Ostrogradsky, les intégrales surfaciques de l'équation précédente s'écrivent comme suit :

$$\int_{s.c.} \rho e (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS = \int_{v.c.} \vec{\nabla}(\rho e \vec{q}) dV \quad (1.62)$$

$$- \int_{s.c.} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS = - \int_{v.c.} \vec{\nabla} \vec{\varphi} dV \quad (1.63)$$

$$- \int_{s.c.} p \vec{n} \cdot \vec{q} dS = - \int_{v.c.} \vec{\nabla}(p \vec{q}) dV \quad (1.64)$$

$$\int_{s.c.} \vec{\tau} \cdot \vec{q} dS = \int_{v.c.} \vec{\nabla}(\vec{\tau} \cdot \vec{q}) dV \quad (1.65)$$

En remplaçant chaque terme par son expression dans l'équation de conservation de l'énergie, et étant donné que le volume  $V$  est arbitraire, l'intégrande doit être nul, il s'ensuit que :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho e \vec{q}) = \dot{q} - \vec{\nabla} \vec{\varphi} + \rho \vec{f} \cdot \vec{q} - \vec{\nabla}(p \vec{q}) + \vec{\nabla}(\vec{\tau} \cdot \vec{q}) \quad (1.66)$$

En remplaçant l'expression (1.56) dans cette équation, nous obtenons :

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{q^2}{2} \right) = \dot{q} - \vec{\nabla} \vec{\varphi} + \rho \vec{f} \cdot \vec{q} - \vec{\nabla}(p \vec{q}) + \vec{\nabla}(\vec{\tau} \cdot \vec{q}) \quad (1.67)$$

En multipliant l'équation de quantité de mouvement (1.53) par  $\vec{q}$ , on aura :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{q^2}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{q} - \vec{q} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \vec{\tau} \quad (1.68)$$

En remplaçant par (1.68) dans (1.67), on obtient après arrangement :

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \dot{q} - \vec{\nabla} \vec{\varphi} - \underbrace{p \cdot \vec{\nabla} \vec{q} + \vec{\nabla}(\vec{\tau} \cdot \vec{q}) - \vec{q} \cdot \vec{\nabla} \vec{\tau}}_{\text{dissipation d'énergie due aux forces visqueuses}} \quad (1.69)$$

On désigne par  $\Phi$  la dissipation d'énergie due aux forces visqueuses, et on exprime la densité de flux de chaleur conductif par la loi de Fourier, l'équation (1.69) devient :

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot \left( \bar{k} \vec{\nabla} T \right) - p \cdot \vec{\nabla} \bar{q} + \Phi \quad (1.70)$$

Sachant que l'enthalpie est définie par  $h = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$ , l'équation (1.70) peut s'écrire sous la forme :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot \left( \bar{k} \vec{\nabla} T \right) + \frac{Dp}{Dt} + \Phi \quad (1.71)$$

Avec :

$$\frac{Dh}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho} (-\beta T + 1) \frac{Dp}{Dt} \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.72)$$

On obtient ainsi :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot \left( \bar{k} \vec{\nabla} T \right) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \Phi \quad (1.73)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien, la fonction de dissipation visqueuse est donnée par :

$$\Phi = \mu \left( 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \quad (1.74)$$

## 6. Fluide visqueux newtonien

### 6.1. Définition

La viscosité est une mesure de la résistance à la déformation d'un fluide sous l'action de contrainte de cisaillement. Elle est la cause des frottements internes qui entraînent la dissipation d'énergie mécanique en chaleur. Elle dépend de la pression et de la température du fluide.

### 6.2. Expérience

Soit l'écoulement visqueux stationnaire entre deux plans parallèles distant de  $\delta$ , dont l'un est fixe et l'autre mobile avec une vitesse  $U$ . Pour que  $U$  soit constante, on applique une force constante  $F$  parallèle aux plans (voir [Figure 1.10](#)). L'expérience montre que la force  $F$  est proportionnelle à la vitesse  $U$ , proportionnelle à la surface du plan mobile  $A$ , et inversement proportionnelle à la distance  $\delta$ , ainsi :

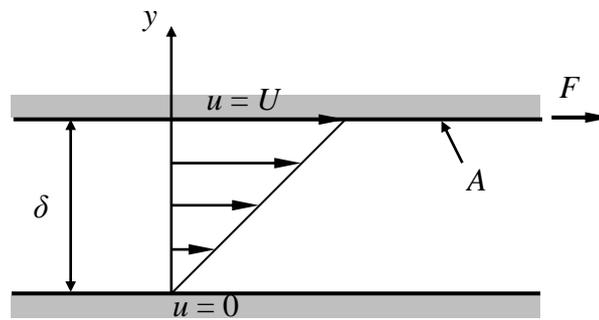
$$F \propto \frac{U \times A}{\delta} \quad \text{ou encore} \quad \frac{F}{A} \propto \frac{U}{\delta}$$

Etant donné que le rapport  $F/A$  exprime la contrainte de cisaillement, et le rapport  $U/\delta$  représente le gradient de la vitesse (ou le taux de déformation), on peut écrire :

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

Les fluides dont la contrainte de cisaillement est linéairement proportionnelle au taux de déformation sont appelés fluides newtoniens (air, eau, huiles...) ; et le coefficient de proportionnalité est appelé viscosité dynamique  $\mu$  :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (\text{Loi de Newton pour un écoulement unidimensionnel}) \quad (1.75)$$



**Figure 1.10** : Ecoulement (viscosimètre) de Couette

### 6.3. Loi de Newton généralisée

Pour généraliser la loi de Newton en 3 dimensions, il faut qu'elle soit satisfaisante aux conditions suivantes :

- lorsque le fluide est au repos, la contrainte exercée sur le fluide est due seulement à la pression thermodynamique  $\overline{\overline{P}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$  ;
- le tenseur de contraintes visqueuses  $\overline{\overline{\tau}}$  est linéairement lié au tenseur gradients des vitesses  $\overline{\overline{T}}$  ;
- aucune contrainte de cisaillement n'agira dans un mouvement de rotation pure ;
- le fluide est isotrope, c'est à dire, ses propriétés doivent être scalaires.

Ces conditions conduisent à la relation suivante :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.76)$$

Ou bien sous forme tensorielle :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{D} + \lambda(\bar{\nabla}\bar{q})\bar{I} \quad (1.77)$$

Où  $\lambda$  est la seconde viscosité liée à la viscosité dynamique  $\mu$  et la viscosité de dilatation  $\kappa$  par la relation :

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (1.78)$$

## 7. Equations de Navier-Stokes

A partir de l'équation de quantité de mouvement, on peut déduire l'équation de Navier-Stokes en tenant compte de l'hypothèse d'un fluide newtonien isotrope qui stipule que le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel au tenseur des taux de déformation :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{D} + \lambda(\bar{\nabla}\bar{q})\bar{I} \quad (1.79)$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont respectivement la viscosité dynamique et la seconde viscosité. Les forces visqueuses peuvent donc être exprimées par :

$$\bar{\nabla}\bar{\tau} = 2\mu\bar{\nabla}\bar{D} + \lambda\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{q}) \quad (1.80)$$

En faisant recours à l'expression du tenseur des taux de déformation  $\bar{D}$  (1.30), la relation précédente peut s'écrire comme :

$$\bar{\nabla}\bar{\tau} = \mu\bar{\Delta}\bar{q} + (\mu + \lambda)\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{q}) \quad (1.81)$$

En introduisant maintenant l'hypothèse de Stokes (pour un gaz monoatomique) reliant la viscosité dynamique à la seconde viscosité par la formule :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (1.82)$$

Les forces visqueuses se mettent alors sous la forme suivante :

$$\bar{\nabla}\bar{\tau} = \mu\bar{\Delta}\bar{q} + \frac{\mu}{3}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{q}) \quad (1.83)$$

Et l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\rho\frac{\partial\bar{q}}{\partial t} + \rho(\bar{q}\cdot\bar{\nabla})\bar{q} = \rho\bar{f} - \bar{\nabla}p + \mu\bar{\Delta}\bar{q} + \frac{\mu}{3}\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{q}) \quad (1.84)$$

Cette équation sous forme vectorielle est appelée équation de Navier-Stokes. La projection de cette équation sur les trois axes du repère cartésien nous donne :

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \dots$$

$$\dots + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\nabla} \bar{q}) \quad (1.85a)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \dots$$

$$\dots + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\nabla} \bar{q}) \quad (1.85b)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \dots$$

$$\dots + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\nabla} \bar{q}) \quad (1.85c)$$

Lorsque le fluide est incompressible, la divergence du vecteur vitesse s'annule ( $\bar{\nabla} \bar{q} = 0$ ) d'après l'équation de continuité, et donc le dernier terme dans ces équations disparaît :

$$\rho \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \rho (\bar{q} \cdot \bar{\nabla}) \bar{q} = \rho \bar{f} - \bar{\nabla} p + \mu \bar{\Delta} \bar{q} \quad (1.86)$$

# Chapitre 2

## Fluide parfait et ses applications

### 1. Écoulements potentiels

#### 1.1. Définition

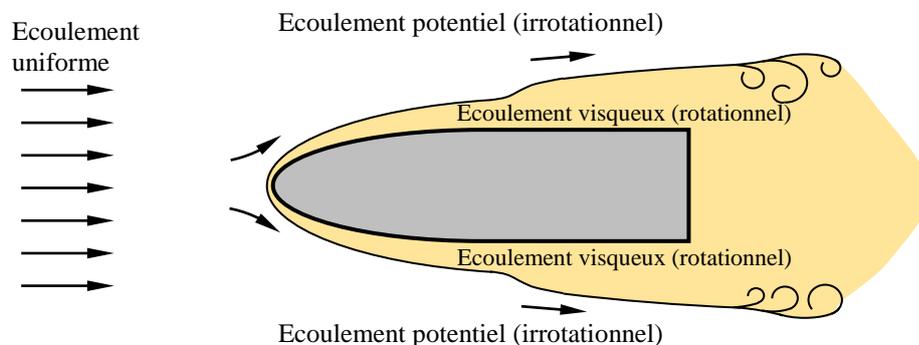
Un écoulement est irrotationnel lorsque le rotationnel de son champ de vitesse  $\vec{q} = (u, v, w)$  est égal au vecteur nul en tous points de fluide :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{q} = \vec{\nabla} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0} \quad (2.1)$$

Etant donné que le rotationnel d'un gradient est toujours égal au vecteur nul, Les écoulements caractérisés par la relation (2.1) sont appelés écoulements potentiels, car le champ de vitesse dérive d'un potentiel de vitesse  $\phi$ , tel que :

$$\vec{q} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \vec{\nabla} \phi \quad (2.2)$$

Pour les fluides idéaux, si l'écoulement est irrotationnel à un instant donné (eg. : initialement en repos ou loin en amont d'un corps placé dans un écoulement uniforme), il le restera à tout instant selon le théorème de Kelvin. Donc, tout écoulement irrotationnel d'un fluide idéal est un écoulement potentiel. Cependant pour les fluides réels, le caractère irrotationnel d'un champ de vitesse peut avoir lieu seulement suffisamment loin d'obstacles ou de frontières (voir [Figure 2.1](#)).



**Figure 2.1** : Zone de l'écoulement potentiel

### 1.2. Potentiel de vitesse

L'écoulement des fluides idéaux est régi par les équations d'Euler (équations de Navier-Stokes sans forces visqueuses) :

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \rho \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{q^2}{2} \right) - \vec{q} \times (\vec{\nabla} \times \vec{q}) \right] = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p \quad (2.3)$$

$$\text{Où : } (\vec{q} \cdot \vec{\nabla}) \vec{q} = \vec{\nabla} \left( \frac{q^2}{2} \right) - \vec{q} \times (\vec{\nabla} \times \vec{q})$$

Pour un écoulement irrotationnel,  $\vec{\nabla} \times \vec{q} = 0$  et  $\vec{q} = \vec{\nabla} \phi$ , et en présence de forces de volume conservatives, c'est-à-dire dérivent d'un potentiel,  $\vec{f} = -g \vec{\nabla} h$ , l'équation d'Euler (2.3) peut se réécrire sous la forme différentielle suivante :

$$d \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + d \left( \frac{q^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} + g dh = 0 \quad (2.4)$$

L'intégration (spatiale) de l'équation (2.4) nous donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gh = C(t) \quad (\text{Pour un écoulement compressible}) \quad (2.5)$$

Ou encore :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = C(t) \quad (\text{Pour un écoulement incompressible}) \quad (2.6)$$

Où  $C(t)$  est une fonction ne dépend que du temps et non de la position dans le fluide (différemment du cas d'un écoulement rotationnel). Pour un écoulement incompressible,  $\rho = \text{const}$ , l'équation de continuité se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \quad (2.7)$$

Et étant donné que le champ de vitesse d'un écoulement irrotationnel dérive d'un potentiel, équation (2.2), cela conduit par conséquent à l'équation de Laplace suivante :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.8)$$

Donc, pour déterminer le champ de vitesse d'un écoulement potentiel incompressible, il suffit de satisfaire l'équation de Laplace (2.8) et les conditions aux limites appropriées qui portent sur la composante normale de la vitesse par rapport aux parois solides (condition d'imperméabilité) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.9)$$

où  $n$  est la coordonnée normale à la paroi solide. Sur les limites libres (free-stream), des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann peuvent être imposées.

Après avoir résolu l'équation (2.8), le champ de vitesse peut être obtenu à partir de l'équation (2.2), et la pression à partir de l'équation (2.6) en déterminant d'abord la constante  $C(t)$  à l'aide d'une condition aux limites sur la pression  $p$ .

### 1.3. Fonction de courant

Pour un écoulement incompressible (rotationnel ou irrotationnel) bidimensionnel, la fonction de courant  $\psi$  est définie dans le plan  $(x, y)$ , telle que :

$$\vec{q} = \vec{\nabla} \psi \times \vec{k} \quad (2.10)$$

On constate que l'équation de continuité (2.7) est automatiquement satisfaite par le champ de vitesse (2.10). Si l'écoulement est irrotationnel, la substitution de (2.10) dans (2.1) donne l'équation de Laplace pour  $\psi$  :

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.11)$$

Avec les conditions aux limites suivantes:  $\psi = \text{const}$  le long d'une surface solide; et conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann sur les limites libres (free-stream).

**Rq. :** pour un écoulement incompressible irrotationnel bidimensionnel, nous pouvons également utiliser l'équation (2.11) avec les conditions aux limites appropriées au lieu de l'équation (2.8) afin de déterminer le champ de vitesse.

### 1.4. Lignes de courant et lignes équipotentiels

Les équations (2.2) et (2.10) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.12)$$

Les équations (2.12) sont appelées équation de Cauchy-Riemann. Pour illustrer la relation entre les lignes de courant et les lignes équipotentiels graphiquement, nous écrivons la différentielle totale des fonctions  $\psi$  et  $\phi$  respectivement :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (2.13)$$

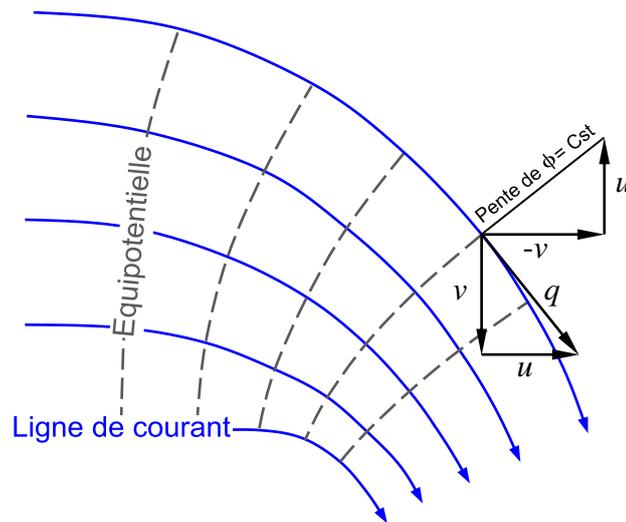
$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy \quad (2.14)$$

Dans la même ligne de courant ( $\psi = \text{const}$ ) nous avons  $d\psi = 0$ , et en substituant (2.12) dans (2.13) on obtient :

$$-v dx + u dy = 0 \quad \text{donc} \quad \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{const}}}_{\text{Pente de la tangente d'une ligne de courant}} = \underbrace{\frac{v}{u}}_{\text{Pente de vecteur vitesse } \vec{q}} \quad (2.15)$$

De même, dans une ligne équipotentielle ( $\phi = \text{const}$ ) nous avons  $d\phi = 0$ , par substitution de (2.12) dans (2.14) on obtient :

$$u dx + v dy = 0 \quad \text{donc} \quad \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{const}}}_{\text{Pente de la tangente d'une ligne équipotentielle}} = -\frac{u}{v} \quad (2.16)$$



**Figure 2.2** : Lignes de courant et lignes équipotentielles

Multipliant (2.15) et (2.16), nous obtenons :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{const}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{const}} = -1 \quad (2.17)$$

D'après (2.17), nous pouvons donc conclure que les lignes de courant et les lignes équipotentielles sont orthogonales en tout point d'intersection entre elles (voir [Figure 2.2](#)).

### 1.5. Débit volumique

Soit l'écoulement incompressible plan  $(x, y)$  ; le débit volumique entre les points  $A$  et  $B$ , pour une épaisseur d'unité est donné par :

$$Q = \int_A^B \vec{q} \cdot \vec{n} dl \quad \text{avec} \quad \vec{q}(u, v) \quad \text{et} \quad dl(dx, dy) \quad (2.18)$$

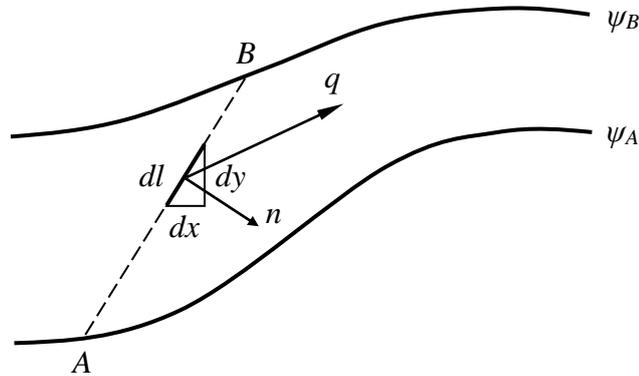
Le vecteur normal à  $dl$  est donné par :

$$\vec{n} = \sin \alpha \vec{i} - \cos \alpha \vec{j} = \frac{dy}{dl} \vec{i} - \frac{dx}{dl} \vec{j} \quad (2.19)$$

Le débit peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B (u \vec{i} + v \vec{j}) \cdot (dy \vec{i} - dx \vec{j}) = \int_A^B (u dy - v dx) \\ &= \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \end{aligned} \quad (2.20)$$

La différence entre deux valeurs de la fonction de courant  $\psi$  représente donc le débit volumique entre les deux lignes de courant correspondants pour une épaisseur d'unité dans la direction  $Oz$ .



**Figure 2.3** : Ecoulement incompressible entre deux lignes de courant

### 1.6. Potentiel complexe

Etant donné que le potentiel de vitesse  $\phi$  et la fonction de courant  $\psi$  vérifient les équations de Cauchy-Riemann (2.12), il existe un potentiel complexe  $F(z)$  défini comme une fonction de la variable complexe  $z = x + iy$ , telle que :

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (2.21)$$

On appelle vitesse complexe  $W(z)$ , la fonction :

$$W(z) = \frac{dF(z)}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) \quad (2.22)$$

Rq. : cette approche a l'inconvénient d'avoir la solution avant de savoir quel était le problème en premier lieu. En outre, elle ne peut pas être généralisée aux écoulement potentiels tridimensionnels.

Voici donc quelques écoulements potentiels bidimensionnels élémentaires :

### a) Ecoulement uniforme

Pour un écoulement uniforme de vitesse  $U_\infty$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe des  $x$  (Figure 2.4a), le potentiel complexe  $F(z)$  est une fonction linéaire de  $z$ , tel que :

$$F(z) = U_\infty e^{-i\alpha} z = U_\infty (\cos \alpha - i \sin \alpha)(x + iy) \quad (2.23)$$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = U_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \psi(x, y) = -U_\infty (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \end{cases} \quad (2.24)$$

### b) Source ou puits

Dans ce type d'écoulement de débit volumique  $Q$  (Figure 2.4b), le potentiel complexe  $F(z)$  est proportionnel au logarithme de  $z$ , tel que :

$$F(z) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (2.25)$$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \psi(x, y) = \pm \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2.26)$$

Le signe (+) désigne un écoulement de source, et le signe (-) désigne un écoulement de puits. Lorsque la source ou le puits se trouve au point  $z_0$ , l'équation (2.25) sera :

$$F(z) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.27)$$

**c) Tourbillon ponctuel**

Dans cet écoulement d'intensité de tourbillon  $\Gamma$  (Figure 2.4c), le potentiel complexe  $F(z)$  est proportionnel au logarithme de  $z$  dont la constante de proportionnalité est imaginaire, tel que :

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (2.28)$$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.29)$$

Si  $\Gamma > 0$  le tourbillon tourne dans le sens positive (sens antihoraire), et si  $\Gamma < 0$  le tourbillon tourne dans le sens négative (sens horaire). Lorsque le centre du tourbillon se trouve au point  $z_0$ , l'équation (2.28) sera :

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (2.30)$$

**d) Doublet**

C'est l'écoulement induit par une source et un puits d'intensité respective  $Q$  et  $-Q$  disposés de part et d'autre de l'origine sur une droite faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe des  $x$  (Figure 2.4d), tel que :

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + \varepsilon e^{i\alpha}) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \varepsilon e^{i\alpha}) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{1 + \varepsilon e^{i\alpha}/z}{1 - \varepsilon e^{i\alpha}/z}\right) \quad (2.31)$$

Maintenant si on fait tendre vers zéro la distance  $2\varepsilon$  entre la source et le puits, le développement en série de Taylor au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , en négligeant les termes d'ordre 2 et plus, nous donne :

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(1 + 2\frac{\varepsilon e^{i\alpha}}{z}\right) \quad (2.32)$$

Puisque  $\varepsilon \ll 1$ , (2.32) peut s'approximer comme suit :

$$F(z) = \frac{Q\varepsilon e^{i\alpha}}{\pi z} \quad (2.33)$$

Définissant  $I = Q\varepsilon/\pi$  comme l'intensité du doublet et  $\alpha$  comme son orientation, le potentiel complexe correspondant s'écrit :

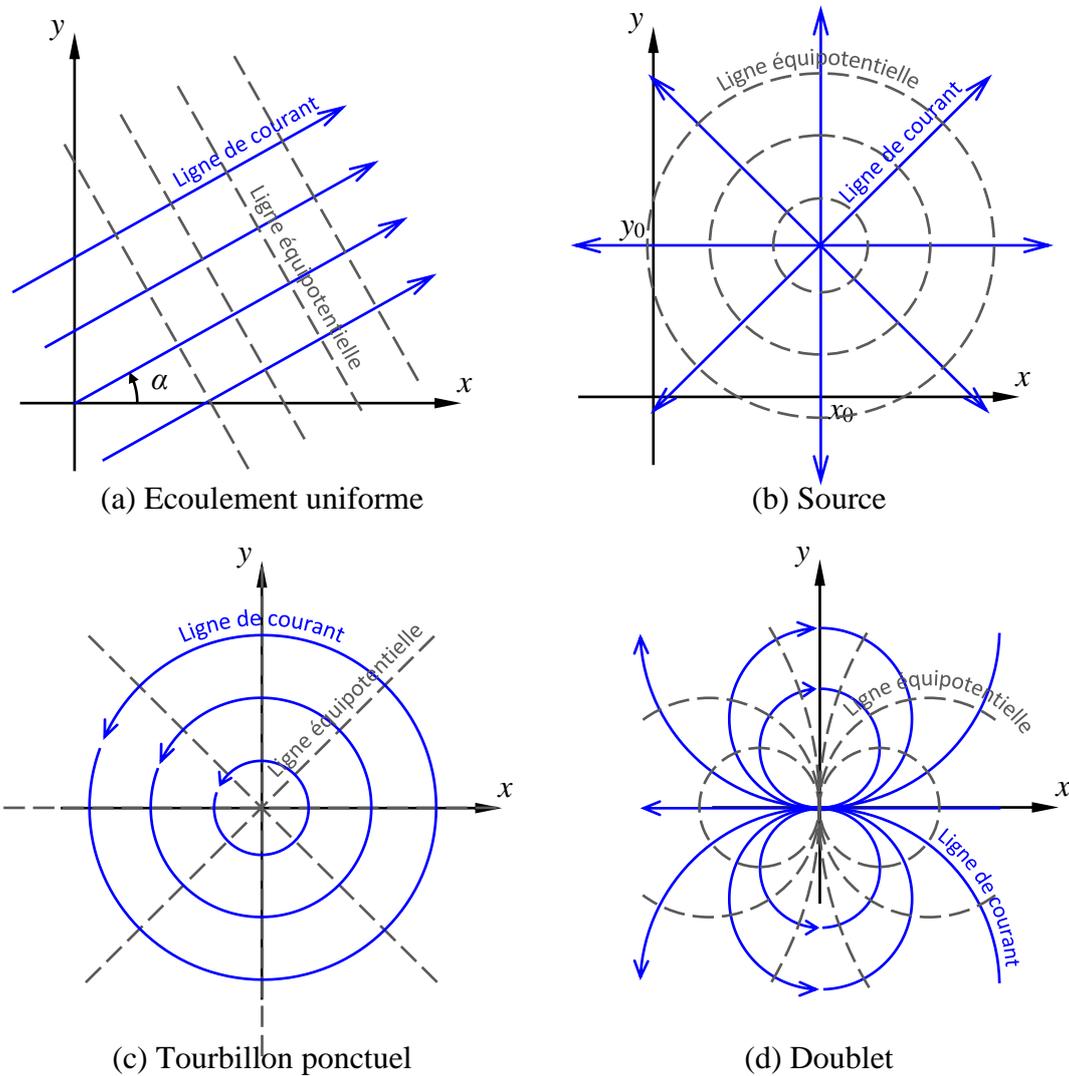
$$F(z) = \frac{Ie^{i\alpha}}{z} \quad (2.34)$$

Donc on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = I \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{x^2 + y^2} \\ \psi(x, y) = I \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (2.35)$$

Lorsque le doublet se trouve au point  $z_0$ , l'équation (2.34) sera :

$$F(z) = \frac{I e^{i\alpha}}{z - z_0} \quad (2.36)$$



**Figure 2.4** : Écoulements potentiels élémentaires

### 1.7. Méthode de superposition

L'équation de Laplace est linéaire, il est donc possible de former de nouvelles solutions de cette équation en appliquant le principe de superposition des solutions. L'exemple qu'on va voir est l'écoulement potentiel permanent autour d'un cylindre circulaire de rayon  $a$ .

#### a) Ecoulement autour d'un cylindre circulaire sans circulation

Considérons le potentiel complexe obtenu par superposition d'un écoulement uniforme de vitesse  $U_\infty$  dans la direction  $x$  et d'un doublet placé à l'origine ( $z_0 = 0$ ), d'angle d'orientation ( $\alpha = 0$ ) et d'intensité  $I$ , tel que :

$$F(z) = U_\infty z + \frac{I}{z} \quad (2.37)$$

$$F(z) = \underbrace{\left( U_\infty r + \frac{I}{r} \right) \cos \theta}_{\text{Potentiel de vitesse } \phi} + i \underbrace{\left( U_\infty r - \frac{I}{r} \right) \sin \theta}_{\text{Fonction de courant } \psi} \quad (2.38)$$

L'intensité du doublet peut être déduite à partir de la condition aux limites sur la surface du cylindre  $r = a$  qui coïncide avec la ligne de courant  $\psi = 0$  :

$$\psi(a, \theta) = \left( U_\infty a - \frac{I}{a} \right) \sin \theta = 0 \quad \text{donc} \quad I = U_\infty a^2 \quad (2.39)$$

Donc la fonction de courant pour un écoulement potentiel permanent autour d'un cylindre circulaire (sans circulation), est donnée par :

$$\psi(r, \theta) = U_\infty \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (2.40)$$

Et les vitesses sont exprimées par :

$$v_r(r, \theta) = U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (2.41)$$

**Rq. :** à l'infini  $r \rightarrow \infty$ , l'écoulement devient uniforme.

Etant donné que l'objectif de telle étude porte principalement sur la détermination des efforts aérodynamique exercées par le fluide en mouvement sur l'obstacle, il convient de déterminer la distribution de pression en tout point de la surface du cylindre  $r = a$ . D'après l'équation de Bernoulli (en supposant que les forces de volume sont négligeables) :

$$p + \frac{\rho}{2}U^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 \quad \text{on a : } p = p_\infty + \left\{1 - \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^2\right\} \frac{\rho}{2}U_\infty^2 \quad (2.42)$$

Donc :

$$p(a, \theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 \left\{1 - \left(\frac{U(a, \theta)}{U_\infty}\right)^2\right\} = p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 (1 - 4\sin^2 \theta) \quad (2.43)$$

L'équation (2.43) montre une distribution symétrique du coefficient de pression par rapport à l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ , cela implique que la résultante des efforts exercées par l'écoulement sur le cylindre est nulle (Paradoxe de d'Alembert).

### b) Ecoulement autour d'un cylindre circulaire avec circulation

Considérons maintenant le potentiel complexe obtenu par superposition d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire sans circulation (2.37) et d'un tourbillon ponctuel d'intensité  $\Gamma$  placé à l'origine ( $z_0 = 0$ ), tel que:

$$F(z) = U_\infty z + \frac{I}{z} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z + ic \quad (2.44)$$

Où la constante  $c$  a été ajoutée pour vérifier la condition  $\psi(a, \theta) = 0$ . Il s'ensuit alors que :

$$\psi(r, \theta) = U_\infty \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{a}\right) \quad (2.45)$$

Et :

$$v_r(r, \theta) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.46)$$

La distribution de pression sur la surface du cylindre est donc :

$$\begin{aligned} p(a, \theta) &= p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 \left\{1 - \left(\frac{U(a, \theta)}{U_\infty}\right)^2\right\} \\ &= p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 \left\{1 - 4 \left(\sin \theta - \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty a}\right)^2\right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

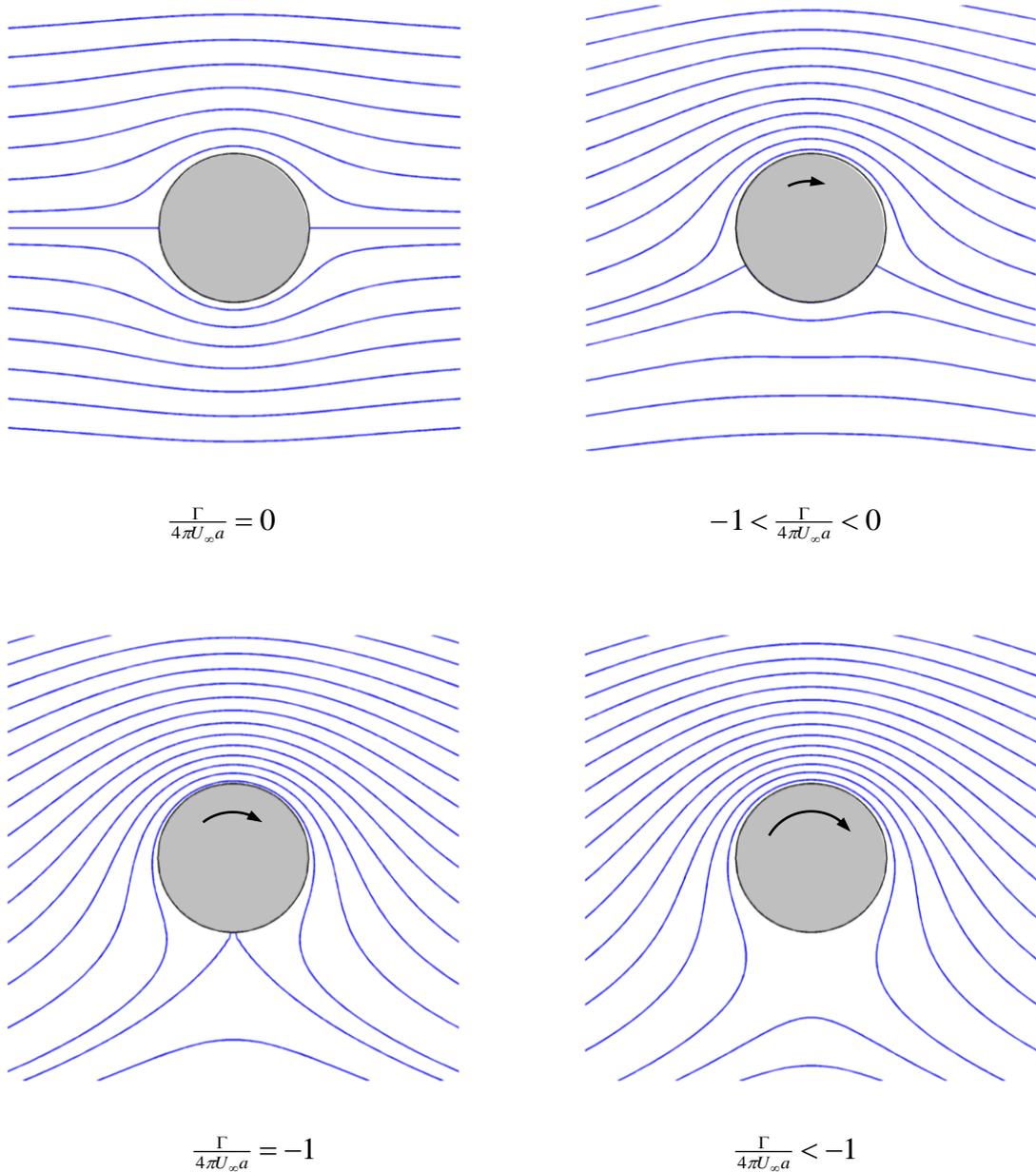
La force exercée par l'écoulement sur un cylindre de profondeur unité s'exprime par :

$$\vec{F} = -\int_C p(a, \theta) \vec{n} dl = -a \int_0^{2\pi} p(a, \theta) (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta \quad (2.48)$$

Il en résulte que :

$$\vec{F} = -\rho U_{\infty} \Gamma \vec{j} \quad (2.49)$$

Donc, une intensité de tourbillon  $\Gamma < 0$  assure une portance positive, alors que la traînée demeure nulle à cause de la symétrie de la distribution de pression par rapport à l'axe des  $y$ .

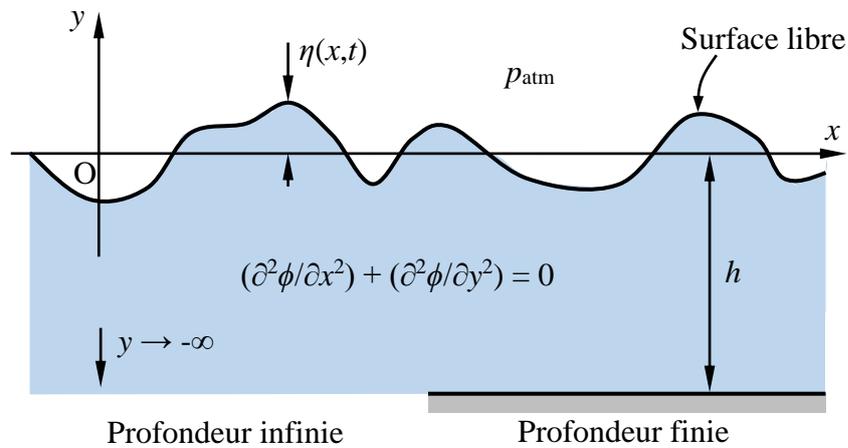


**Figure 2.5** : Ecoulement potentiel autour d'un cylindre circulaire

## 2. Ondes d'interfaces (écoulement à surface libre)

### 2.1. Définition

Les ondes d'interface sont les ondes se propageant à la surface de contact entre deux fluides non-miscibles. Dans le cas des ondes se déplaçant sur la surface libre de l'eau soumise à la gravité, l'écoulement peut être considéré comme idéal irrotationnel, et donc l'équation à résoudre est celle de Laplace pour le potentiel de vitesse  $\phi$ . Cependant, la position de la surface libre est a priori inconnue et il s'agit de la déterminer à tout instant.



**Figure 2.6** : Ecoulement à surface libre

### 2.2. Modèle général

Considérons le cas bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$ , l'écoulement loin de la surface libre est régi par:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.50)$$

En considérant l'écoulement incompressible, l'équation de Bernoulli pour la surface libre s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\eta = C \quad (2.51)$$

Où la constante  $C = p_{am}/\rho$  peut être déterminée à partir de la condition initiale lorsque l'eau est au repos, dont  $p = p_{am}$ ,  $\partial\phi/\partial t = 0$ ,  $q = 0$  et  $y = 0$ , donc (2.51) devient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + g\eta = 0 \quad (\text{à la surface libre } y = \eta(x,t)) \quad (2.52)$$

L'équation (2.52) est appelée **condition dynamique**. la seconde condition stipule qu'une particule de fluide qui se trouve à un certain moment sur la surface libre restera toujours sur la surface libre; donc la composante  $v$  de la vitesse de cette particule est donnée par :

$$v = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (\text{à la surface libre } y = \eta(x,t)) \quad (2.53)$$

L'équation (2.53) est appelée **condition cinématique**. Une autre condition est imposée au plan inférieur limitant la couche d'eau (ou très loin au-dessous de la surface libre si le domaine est étendu à une profondeur infinie), telle que :

$$v = 0 \quad (\text{à } y = -h) \text{ ou } (\text{à } y \rightarrow -\infty) \quad (2.54)$$

Donc le modèle en terme du potentiel de vitesse s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \\ \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_{y=\eta} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_{y=\eta}^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_{y=\eta}^2 \right\} + g\eta = 0 \\ \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_{y=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_{y=\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_{y=-h} = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

### 2.3. Modèle linéaire (onde de faible amplitude)

La linéarisation du modèle (2.55) peut être obtenue en supposant que l'amplitude de l'onde  $\eta$  est assez faible (relativement à la longueur d'onde) pour que: (i) le terme quadratique dans la condition dynamique soit négligeable; et (ii) le terme non-linéaire dans la condition cinématique soit également négligeable, on aura donc :

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_{y=\eta} + g\eta = 0 \quad (2.56)$$

Puisque  $\eta$  est très petite, le développement en série de Taylor du premier terme au voisinage de  $y = 0$  donne :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{y=\eta} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{y=0} + \eta \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial t}\right)_{y=0} + O(\eta^2) \approx \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{y=0} \quad (2.57)$$

La condition dynamique à la surface libre (2.56) devient :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{y=0} + g\eta = 0 \quad (2.58)$$

De même, le développement du terme à gauche de la condition cinématique en série de Taylor au voisinage de  $y = 0$ , nous donne :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=\eta} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} + \eta \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{y=0} + O(\eta^2) \approx \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (2.59)$$

Et en négligeant le second terme à droite de la condition cinématique (car  $\partial\eta/\partial x \rightarrow 0$ ), on obtient :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (2.60)$$

Maintenant en éliminant  $\eta$  des deux conditions (2.58) et (2.60), on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{y=0} + g \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (2.61)$$

Donc, le modèle linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{y=0} + g \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=-h} = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

# Chapitre 3

## Dynamique des fluides réels

### 1. Écoulements unidirectionnels (parallèles)

Un écoulement est dit unidirectionnel lorsqu'une seule composante du vecteur vitesse est non nulle et les lignes de courant sont, à chaque instant, des droites parallèles à la direction de l'écoulement. Considérons un écoulement laminaire incompressible sans forces de volume partout parallèle à l'axe des  $x$ , dont le vecteur vitesse est de la forme :

$$\vec{q} = u(x, y, z, t)\vec{i}$$

L'équation de continuité pour un écoulement incompressible s'écrit :

$$\operatorname{div}\vec{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Puisque  $v = w = 0$ , on déduit que  $\partial u / \partial x = 0$ , ce qui montre que la composante  $u = u(y, z, t)$  ne dépend pas de  $x$ . Cela nous permet de simplifier les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{implique que} \quad p = p(x, t) \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

#### 1.1. Écoulement entre deux plans parallèles en mouvement relatif

Considérant l'écoulement permanent, incompressible, laminaire et bidimensionnel d'un fluide newtonien entre deux plans parallèles. Le plan inférieur est fixe et le plan supérieur se déplace parallèlement à lui-même à une vitesse constante  $U_p$  (voir [Figure 3.1](#)). L'équation différentielle régissant l'écoulement est :

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (3.4)$$

Avec les conditions d'adhérence :

$$u(0) = 0 \quad u(h) = U_p \quad (3.5)$$

La forme générale de la solution de l'équation (3.4) est obtenue après l'intégration de celle-ci deux fois par rapport à  $y$  :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (3.6)$$

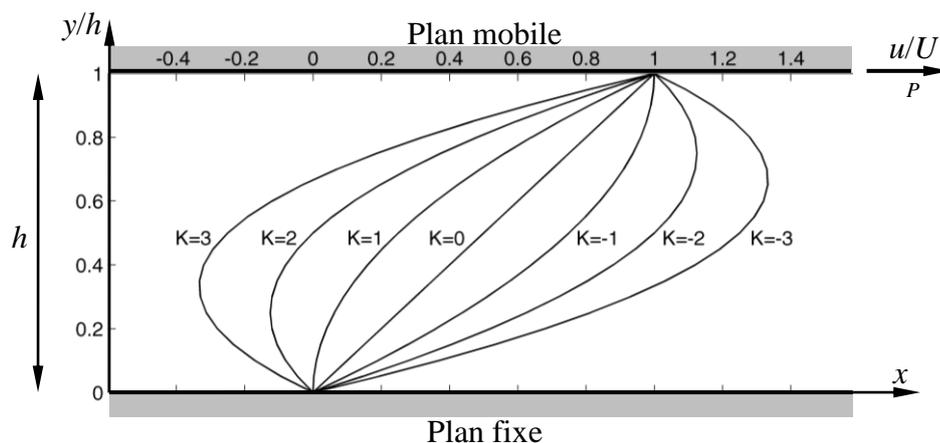
Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées immédiatement en tenant compte des conditions aux limites aux parois. La solution finale est donnée par :

$$u(y) = \underbrace{-\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right)}_{\text{Écoulement de Poiseuille plan}} + \underbrace{U_p \frac{y}{h}}_{\text{Écoulement de Couette}} \quad (3.7)$$

Le profil de vitesse, donné par (3.7), apparaît comme la superposition du profil correspondant à un écoulement sans gradient de pression (écoulement de Couette), et du profil correspondant à un écoulement entre deux plans fixes (écoulement de Poiseuille plan). L'expression (3.7) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{u(y)}{U_p} = \frac{y}{h} \left( 1 - K \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \right) \quad (3.8)$$

Où  $K = \frac{h^2}{2\mu U_p} \frac{dp}{dx}$  est un gradient de pression adimensionnel. D'après la [Figure 3.1](#) on constate que, si  $K < 1$ , la vitesse est partout positive; et si  $K > 1$ , l'écoulement au voisinage du plan inférieur se fait dans la direction opposée au mouvement du plan supérieur. Le gradient de pression imposé est alors suffisamment grand pour compenser, dans cette région, l'effet dû au déplacement du plan supérieur.



**Figure 3.1** : Écoulement entre deux plans parallèles en mouvement relatif

### 1.2. Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

Nous considérons maintenant l'écoulement axisymétrique dans un tube de section droite circulaire de rayon  $R$  (voir [Figure 3.2](#)). Compte tenu de la symétrie du problème, on se limite à des profils de vitesse de la forme  $u(r)$ , où  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ . Pour un écoulement stationnaire, l'équation (3.3) s'écrit dans les coordonnées cylindriques sous la forme :

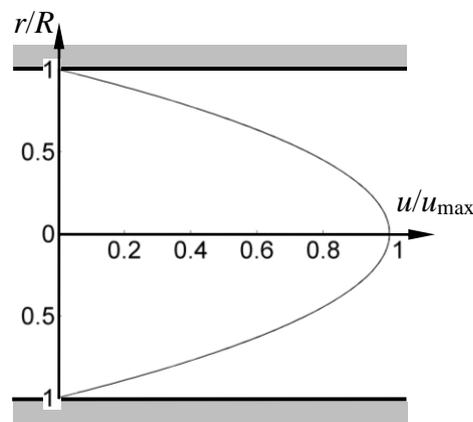
$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} \quad (3.9)$$

La forme générale de la solution de l'équation (3.9) est obtenue après l'intégration de celle-ci deux fois par rapport à  $r$  :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.10)$$

La constante  $C_1$  est nécessairement nulle car à  $r=0$ , la vitesse  $u(0)$  a une valeur finie, et la constante  $C_2$  est déterminée en utilisant la condition d'adhérence à la paroi du tube  $u(R)=0$ . La solution finale est donnée par :

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) \quad (3.11)$$



**Figure 3.2** : Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

Connaissant la distribution de la vitesse dans la section droite du conduit, on peut déterminer le débit  $Q$  circulant dans le tube et le coefficient de frottement  $f$  définis respectivement par :

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (3.12)$$

$$f = \frac{(-dp/dx)D_h}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2} = \frac{64}{\text{Re}_{D_h}} \quad (3.13)$$

Où  $D_h$  est le diamètre hydraulique du conduit, et  $\bar{u} = Q/\pi R^2$  est la vitesse moyenne.

### 1.3. Écoulement de Couette cylindrique

Considérons un écoulement permanent incompressible entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  tournant autour de leur axe avec des vitesses angulaires respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (voir Figure 3.3). On suppose que l'écoulement est uniquement provoqué par la rotation de cylindres et qu'aucun gradient de pression extérieur n'est appliqué. On choisit le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  avec  $\bar{x}$  comme axe de rotation.

L'écoulement se fait dans le plan  $(r, \theta)$ . En outre, l'écoulement est axisymétrique donc il est indépendant de  $\theta$ . L'équation de continuité s'écrit dans les coordonnées cylindriques sous la forme :

$$\text{div} \vec{q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

Étant donné que  $v_x = 0$  et  $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$ , l'équation (3.14) se réduit à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) = 0 \quad \text{cela implique que} \quad v_r = \frac{C}{r} \quad (3.15)$$

Or, les conditions aux limites sur les parois de cylindres imposent que  $v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0$ , il vient alors que  $v_r = 0$  partout dans le fluide. L'équation de Navier-Stokes selon  $\theta$  donne :

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = 0$$

Ou plus simplement :

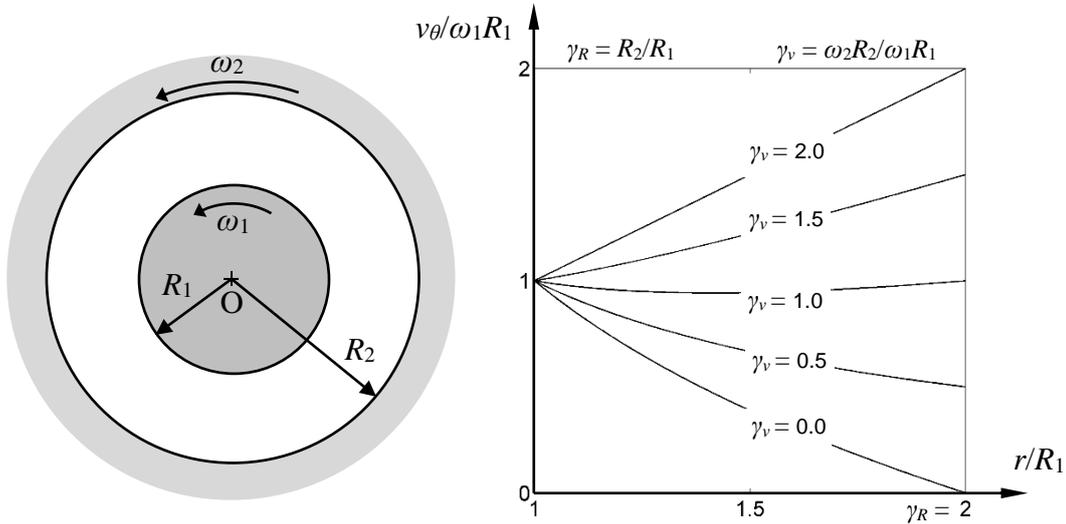
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.16)$$

En intégrant cette équation deux fois par rapport à  $r$ , on obtient:

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3.17)$$

En appliquant les conditions aux limites,  $v_\theta(R_1) = R_1\omega_1$  et  $v_\theta(R_2) = R_2\omega_2$ , la solution finale est donnée par :

$$v_\theta = \frac{R_2^2\omega_2 - R_1^2\omega_1}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (3.18)$$



**Figure 3.3 :** Ecoulement de Couette cylindrique

#### 1.4. Premier problème de Stokes (problème de Rayleigh)

Soit une plaque plane infinie ( $y = 0$  et  $-\infty < x < +\infty$ ) limite un demi-espace ( $y > 0$ ) occupé par un fluide initialement au repos. A l'instant initial ( $t = 0$ ) la plaque est brusquement mise en mouvement de translation uniforme à la vitesse  $U_p$ , et le fluide est mis en mouvement parallèle (voir Figure 3.4). L'écoulement se fait dans le plan  $(x, y)$  et est supposé invariant dans la direction du mouvement, donc le gradient de pression longitudinal est nul. Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes (3.3) se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

La condition initiale et les conditions aux limites sont pour ce problème :

$$\begin{cases} u(y,0) = 0 \\ u(0,t) = U_p, \quad t > 0 \\ u(\infty,t) \rightarrow 0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous cherchons  $u$  sous la forme auto-semblable  $u = U_p f(\eta)$ , dont analyse dimensionnelle nous permet de définir la variable de similitude  $\eta = y/(2\sqrt{\nu t})$ . L'équation (3.19) peut donc se transformer en :

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0 \quad (3.21)$$

avec comme conditions aux limites  $f(0) = 1$  et  $f(\infty) = 0$ . En intégrant l'équation (3.21) deux fois par rapport à  $\eta$ , on obtient la solution suivante :

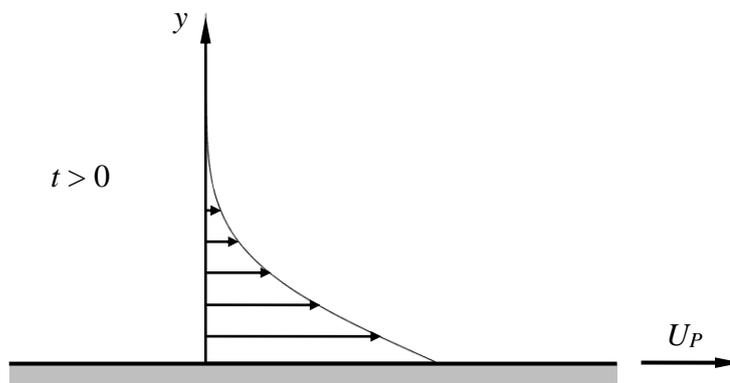
$$f(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_1 \operatorname{erf}(\eta) + C_2 \quad (3.22)$$

En appliquant les conditions aux limites, on aura :

$$f(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) \quad (3.23)$$

Où  $\operatorname{erf}(\eta)$  et  $\operatorname{erfc}(\eta)$  désignent respectivement la fonction d'erreur et la fonction d'erreur complémentaire. La variation de la vitesse sous la forme auto-semblable est donc donnée par :

$$u = U_p \operatorname{erfc}(\eta) \quad (3.24)$$



**Figure 3.4** : Premier problème de Stokes

## 2. Écoulement à faible nombre de Reynolds (écoulement de Stokes)

Étant donné que le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, l'écoulement à faible nombre de Reynolds (écoulement de Stokes) est celui où les forces d'inertie sont négligeables devant les autres forces. Cela nous permet d'omettre le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes pour avoir l'équation de Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \Delta \vec{q} \quad (3.25)$$

L'équation de Stokes (3.25), décrivant l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible à faible nombre de Reynolds, est valable pour les situations suivantes :

- Les dimensions géométriques caractéristiques de l'écoulement sont petites ;
- Ecoulements caractérisés par une très faible vitesse (écoulement rampants) ;
- Ecoulements de fluides avec une viscosité élevée.

L'équation de Stokes peut s'écrire sous d'autres formes alternatives. En prenant, par exemple, la divergence de (3.25) on obtient :

$$\nabla^2 p = 0 \quad (3.26)$$

Lorsqu'on prend le rotationnel de (3.25) on obtient :

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \mu \nabla^2 \omega \quad (3.27)$$

Où  $\omega = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x$  est la vorticité. Pour un écoulement stationnaire, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (\text{Équation biharmonique}) \quad (3.28)$$

### 3. Lubrification hydrodynamique

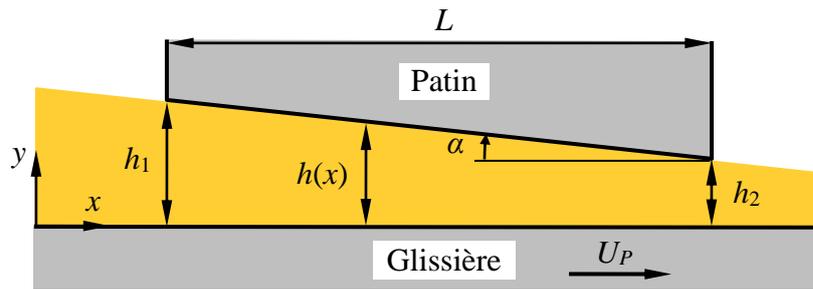
Tout mouvement relatif (glissement) entre deux surfaces est confronté au frottement et par conséquent l'usure des pièces en mouvement. Une réduction importante de frottement peut être obtenue lorsque ces deux surfaces sont séparées par un film mince de fluide visqueux (lubrifiant), dont l'écoulement produit est à faible nombre de Reynolds.

Considérons l'écoulement newtonien incompressible permanent et bidimensionnel dont les forces massiques sont négligeables, entre deux plaques distantes de  $h(x)$ , l'une est fixe et légèrement inclinée (patin) et l'autre est mobile (glissière) avec une vitesse  $U_p$  (voir [Figure 3.5](#)). L'écoulement du film induit par le mouvement de la glissière est régi par les équations de Stokes :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{U_p}{L}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{V}{h}} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\mu \frac{U_P}{L^2}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\mu \frac{U_P}{h^2}} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \underbrace{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\mu \frac{U_P h}{L^3}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\mu \frac{U_P}{Lh}} \quad (3.31)$$



**Figure 3.5 :** Ecoulement induit par le mouvement de glissière par rapport au patin

Etant donné la condition  $h/L \ll 1$ , l'analyse d'ordre de grandeur des termes dans les équations précédentes nous permet de négliger  $(\partial^2 u / \partial x^2)$  devant  $(\partial^2 u / \partial y^2)$ , et  $(\partial p / \partial y)$  devant  $(\partial p / \partial x)$ , cela conduit à :

$$\frac{dp(x)}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \quad (3.32)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(x, 0) = U_P \quad u(x, h(x)) = 0 \quad (3.33)$$

L'intégration de (3.32) nous donne :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (3.34)$$

En appliquant les conditions aux limites (3.33), la solution est par conséquent :

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (hy - y^2) + U_P \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (3.35)$$

Le débit volumique par unité de longueur est donc donné par :

$$Q_v = \int_0^h u dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 + U_P \frac{h}{2} \quad (3.36)$$

D'où :

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu \left( \frac{U_P}{h^2} - 2 \frac{Q_v}{h^3} \right) \quad (3.37)$$

Etant donné que  $h = h_1 - \alpha x$ , on aura d'après (3.37) :

$$\int_{p_1}^{p(x)} dp = -\frac{6\mu}{\alpha} \int_{h_1}^{h(x)} \left( \frac{U_P}{h^2} - 2 \frac{Q_v}{h^3} \right) dh \quad (3.38)$$

Donc :

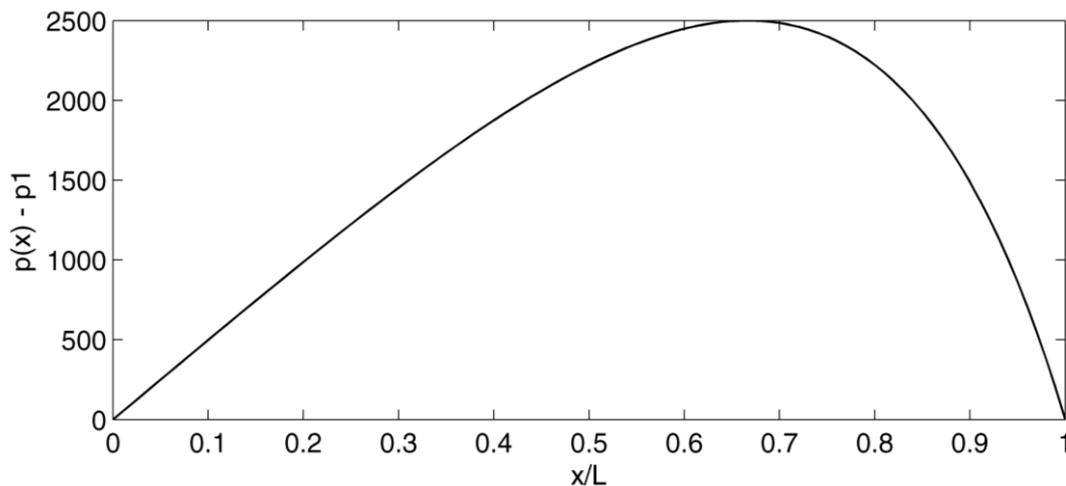
$$p(x) - p_1 = -\frac{6\mu}{\alpha} \left( -U_P \left( \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h_1} \right) + Q_v \left( \frac{1}{h(x)^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right) \quad (3.39)$$

Etant donné que les deux extrémités du système se trouvent à la même pression,  $p_2 = p_1$ , l'équation (3.39) permet de déterminer la valeur du débit :

$$Q_v = U_P \left( \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \right) \quad (3.40)$$

Substituant (3.40) dans (3.39), on obtient finalement la distribution de pression :

$$p(x) - p_1 = \frac{6\mu U_P}{\alpha} \left[ \frac{(h_1 - h(x))(h(x) - h_2)}{h(x)^2 (h_1 + h_2)} \right] \quad (3.41)$$



**Figure 3.6** : Distribution de  $p(x) - p_1$  pour  $U_P = 10$  m/s ;  $\mu = 10^{-4}$  kg/sm ;  $L = 0.1$  m ;  $h_1 = 0.2$  mm ;  $h_2 = 0.1$  mm

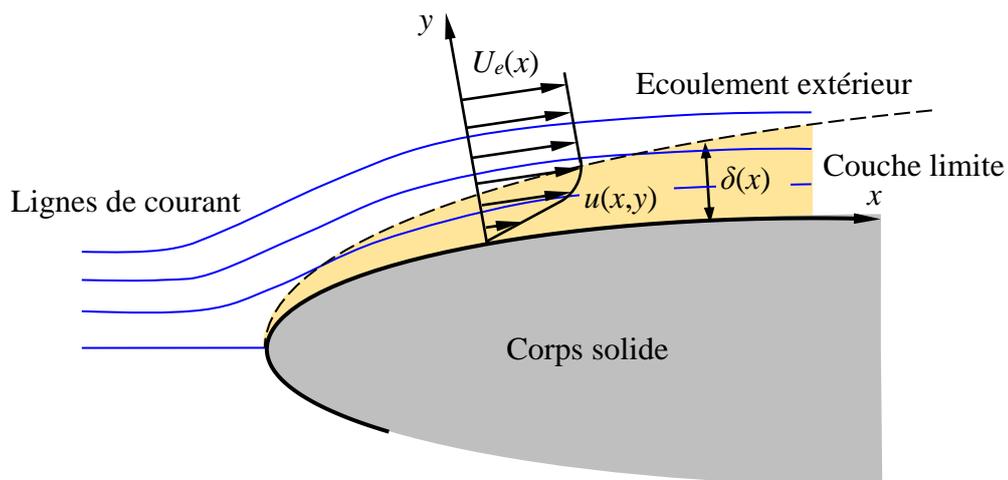
# Chapitre 4

## Couche limite dynamique

### 1. Développement de la couche limite

#### 1.1. Définition

La couche limite est une région qui se développe dans d'un écoulement de fluide visqueux, au voisinage d'une surface solide supposée fixe. Les effets dus à la viscosité sont restreints à cette région dans laquelle la vitesse tangentielle à la surface solide varie rapidement de zéro immédiatement sur celle-ci (condition d'adhérence) à une valeur relativement élevée donnée par l'écoulement à l'extérieur de la couche limite (voir Figure 4.1). Cette variation de vitesse se produit sur une épaisseur mince  $\delta$  appelée épaisseur de la couche limite.



**Figure 4.1** : Développement d'une couche limite le long d'une surface solide

#### 1.2. Epaisseurs de la couche limite

L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  est une valeur de  $y$  pour laquelle la vitesse  $u(x, y)$  tend asymptotiquement vers  $U_e(x)$  la vitesse de l'écoulement extérieur avec une précision donnée, soit :

$$u(x, \delta(x)) = 0.99U_e(x)$$

D'autres épaisseurs caractérisant la couche limite dynamique peuvent être introduites également. L'**épaisseur de déplacement**  $\delta_1$  ( $\delta^*$  dans d'autres réf.) qui représente la déviation vers le haut des lignes de courant due à la distorsion du profil de la vitesse  $u(x, y)$ , elle est donnée par :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (4.1)$$

L'**épaisseur de quantité de mouvement**  $\delta_2$  ( $\theta$  dans d'autres réf.) qui représente une épaisseur associée à la perte de flux de quantité de mouvement due au frottement visqueux, elle est donnée par :

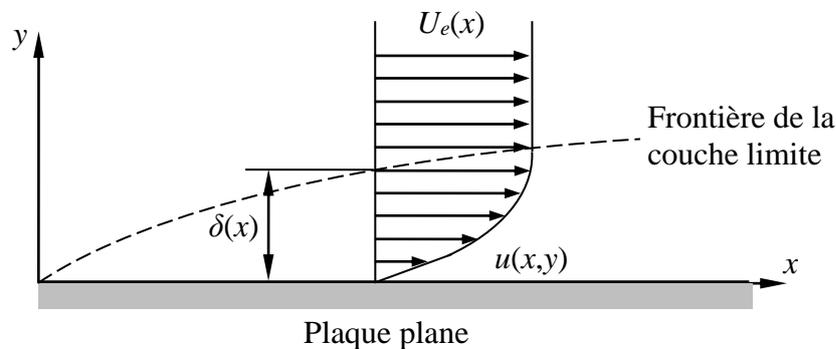
$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (4.2)$$

Le rapport entre l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement représente le facteur de forme  $H = \delta_1/\delta_2$ .

### 1.3. Equations de la couche limite

Pour dériver les équations de la couche limite, on considère ici l'écoulement permanent et bidimensionnel (x,y) d'un fluide incompressible et sans effet de forces massiques au voisinage d'une plaque plane (voir Figure 4.2); dans ce cas les équations de continuité et de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



**Figure 4.2** : Couche limite sur une plaque plane

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Les conditions aux limite pour l'écoulement considéré sont :

$$u(x,0) = 0 \quad v(x,0) = 0 \quad u(x,\infty) = U_e(x)$$

L'analyse d'ordre de grandeur nous permet d'estimer a priori les termes parus dans les équations précédentes. Pour cela on utilise deux échelles caractéristiques de l'écoulement :

- $\delta$  l'épaisseur de la couche limite (perpendiculaire à l'écoulement);
- $L$  une longueur caractéristique dans la direction parallèle à l'écoulement supposée très grande devant  $\delta$ , telle que  $\delta/L \ll 1$ .

Si  $U$  et  $V$  désignent une vitesse longitudinal typique et une vitesse transversale typique respectivement, les termes dans l'équation de continuité peuvent être estimés par :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{U}{L}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{V}{\delta}} = 0$$

Pour que l'équation de continuité soit satisfaite, ces deux termes doivent être du même ordre,  $V/\delta \sim U/L$ , ce qui implique que l'ordre de grandeur de la vitesse transversale est donné par :

$$V \sim \frac{\delta}{L} U$$

En tenant compte de cela, les ordres de grandeur des termes de l'équations de Navier-Stokes suivant  $\vec{x}$  sont :

$$\begin{array}{cccc} \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} & \text{(IV)} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \underbrace{\frac{U^2}{L}} & \underbrace{\frac{U\delta U}{L\delta}} & \underbrace{\frac{\nu U}{L^2}} & \underbrace{\frac{\nu U}{\delta^2}} \end{array}$$

Les deux premier termes sont du même ordre de grandeur  $\frac{U^2}{L}$ . Le terme (III) est beaucoup plus petit que le terme (IV) et donc peut être négligé,  $\frac{\text{(III)}}{\text{(IV)}} \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1$ . Les

termes (I), (II) et (IV) doivent avoir le même ordre de grandeur pour que les effets de viscosité seraient présents dans cette équation, soit :

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \text{il s'ensuit que:} \quad \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\text{Re}_L^{1/2}}$$

De la même manière, on peut estimer l'ordre de grandeur des termes de l'équations de Navier-Stokes suivant  $\bar{y}$  :

$$u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{U\delta}{L^2}} + v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{U\delta U}{L L}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\frac{U\delta}{L L^2}} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\frac{U\delta}{L \delta^2}}$$

Des deux équations de Navier-Stokes, les gradients de pression dans la direction longitudinale et transversale ont respectivement comme ordre de grandeur:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$

et  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L} \frac{\delta}{L}$ , cela implique que:  $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right) / \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \sim \frac{\delta}{L} \ll 1$ . C'est-à-dire que dans une couche limite, la pression ne varie pratiquement pas dans la direction transversale, et l'équation de Navier-Stokes suivant  $\bar{y}$  se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{donc } p = p(x)$$

Le gradient de pression dans la direction longitudinale est imposé par l'écoulement non visqueux à l'extérieur de la couche limite et est donné par (d'après l'équation de Bernoulli) :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx}$$

Eventuellement, la couche limite peut être décrite par les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## 2. Equation de Blasius (solution auto-similaire)

Nous considérons le problème d'une plaque plane placée dans un écoulement parallèle à celle-ci et uniforme de vitesse  $U_e = \text{const}$ . Dans ce cas, le gradient de pression dans la direction longitudinale est nul et les équations de la couche limite s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.4)$$

Avec les conditions aux limites :

$$u(x,0) = 0 \quad v(x,0) = 0 \quad u(x,\infty) = U_e \quad (4.5)$$

Il est commode dans cette approche d'introduire la fonction de courant  $\psi$ , telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.6)$$

En substituant (4.6) dans (4.3)–(4.5), l'équation de continuité est bien évidemment satisfaite,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$ , et l'équation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (4.7)$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,\infty) = U_e \quad (4.8)$$

Blasius a montré qu'une solution  $f(\eta)$  dite auto-similaire, qui dépend d'une seule variable  $\eta(x,y)$  dite variable de similitude, peut être obtenue en choisissant la transformation suivante :

$$\eta = y \left( \frac{U_e}{\nu x} \right)^{1/2} \quad \psi = (\nu U_e x)^{1/2} f(\eta) \quad (4.9)$$

On doit maintenant exprimer les dérivées de  $\psi$  par rapport à  $x$  et  $y$  dans l'équation (4.7) en fonction de  $f$  et  $\eta$ . Notons d'abord que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} y \left( \frac{U_e}{\nu x^3} \right)^{1/2} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( \frac{U_e}{\nu x} \right)^{1/2}$$

Donc, on trouve :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu U_e}{x} \right)^{1/2} f + (\nu U_e x)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial x} f' = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu U_e}{x} \right)^{1/2} (f - \eta f')$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = (\nu U_e x)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial y} f' = U_e f'$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U_e \frac{\partial \eta}{\partial x} f'' = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} U_e f''$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U_e \frac{\partial \eta}{\partial y} f'' = U_e \left( \frac{U_e}{\nu x} \right)^{1/2} f''$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = U_e \left( \frac{U_e}{\nu x} \right)^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial y} f''' = \frac{U_e^2}{\nu x} f'''$$

Substituant ces expressions dans l'équation (4.7), on obtient :

$$-\frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} \eta f' f'' - \frac{1}{2} \frac{U_e^2}{x} (f - \eta f') f'' = \frac{U_e^2}{x} f''' \quad (4.10)$$

Après simplification, il en résulte par conséquent l'équation de Blasius :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (4.11)$$

Les conditions aux limites pour la fonction  $f(\eta)$  peuvent être déduites à partir de celles définies pour la fonction de courant  $\psi(x, y)$  comme :

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(\infty) = 1 \quad (4.12)$$

L'équation de Blasius peut être résolue numériquement, dont la solution est illustrée dans le tableau ci-après pour quelques valeurs de  $\eta$  :

$\eta$	$f$	$f'$	$f''$
0.0	0.00000	0.00000	0.33206
1.0	0.16557	0.32978	0.32301
2.0	0.65002	0.62977	0.26675
3.0	1.39681	0.84604	0.16136
4.0	2.30574	0.95552	0.06423
5.0	3.28327	0.99154	0.01591

A  $y = \delta$ , nous avons  $\frac{u}{U_e} = f' = 0.99$ , ce qui correspond à  $\eta = 4.91$  ( $\eta \approx 5$  d'après le tableau) ; cela conduit à partir de l'expression de  $\eta$  à :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.91}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (4.13)$$

Les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement peuvent être déterminées également à partir de la solution de l'équation de Blasius ; on obtient ainsi :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \left(\frac{\nu x}{U_e}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (1 - f') d\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_1}{x} = \frac{1.72}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \left(\frac{\nu x}{U_e}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f'(1 - f') d\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_2}{x} = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}$$

La contrainte de cisaillement à la paroi est définie par :

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\rho U_e^2}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} f''(0) \quad \Rightarrow \quad C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}$$

### 3. Equation de Von Karman (méthode intégrale)

On peut obtenir une équation très pratique pour la couche limite laminaire avec gradient de pression, par intégration par rapport à  $y$  entre 0 et  $h(x)$  (distance normale à la paroi, supérieure à  $\delta$ ) de tous les termes des équations de la couche limite.

Equation de continuité :

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{h(x)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \quad (4.14)$$

Equation de quantité de mouvement (forme conservative) :

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + \int_0^{h(x)} \frac{\partial(vu)}{\partial y} dy = \int_0^{h(x)} U_e \frac{dU_e}{dx} dy + \nu \int_0^{h(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad (4.15)$$

Etant donné que  $v(0) = 0$ , l'intégration de l'équation de continuité donne :

$$v(h) = - \int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (4.16)$$

En appliquant la règle de Leibniz pour la dérivation d'une intégrale sur la première intégrale de l'équation (4.15), et sachant que  $u(h) = U_e(x)$ , on obtient après réarrangement :

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u^2 dy - U_e^2 \frac{dh}{dx} \quad (4.17)$$

En tenant compte des conditions aux limites et de l'équation (4.16), la deuxième intégrale de l'équation (4.15) nous donne :

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial(vu)}{\partial y} dy = v(h) \cdot u(h) = -U_e \int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

En appliquant de nouveau la règle de Leibniz sur l'intégrale du membre droit, on aura :

$$\begin{aligned} \int_0^{h(x)} \frac{\partial(vu)}{\partial y} dy &= v(h) \cdot u(h) = -U_e \left( \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u dy - U_e \frac{dh}{dx} \right) \\ &= U_e^2 \frac{dh}{dx} - U_e \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u dy \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le deuxième terme du membre droit de l'équation (4.15) s'écrit :

$$v \int_0^{h(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{1}{\rho} \left( \underbrace{\mu(\partial u / \partial y)}_0^{h(x)} - \underbrace{\mu(\partial u / \partial y)}_{\tau_p}^0 \right) = -\frac{\tau_p}{\rho} \quad (4.19)$$

En substituant les équations (4.17) - (4.19) dans l'équation (4.15), on obtient :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u^2 dy - U_e \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u dy - \int_0^{h(x)} U_e \frac{dU_e}{dx} dy = -\frac{\tau_p}{\rho} \quad (4.20)$$

En appliquant maintenant la règle de Leibniz de dérivation d'un produit de fonctions sur le deuxième terme du membre gauche de l'équation (4.20), on aura :

$$U_e \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u dy = \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} U_e u dy - \frac{dU_e}{dx} \int_0^{h(x)} u dy \quad (4.21)$$

En remplaçant par (4.21) dans (4.20), on obtient après réarrangement :

$$\frac{d}{dx} \left[ U_e^2 \int_0^{h(x)} \frac{u}{U_e} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \right] + U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^{h(x)} \left( 1 - \frac{u}{U_e} \right) dy = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (4.22)$$

Prenant  $h(x) \rightarrow \infty$ , et à l'aide des définitions de l'épaisseur de déplacement et de l'épaisseur de quantité de mouvement, l'équation (4.22) peut s'écrire comme :

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \delta_2) + U_e \frac{dU_e}{dx} \delta_1 = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (4.23)$$

En développant le premier terme et en divisant par  $U_e^2$ , on obtient l'équation de Von Karman :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{(2+H)}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \delta_2 = \frac{C_f}{2} \quad (4.24)$$

Où:  $\delta_1 = H\delta_2$  et  $C_f = \tau_p / \frac{1}{2} \rho U_e^2$

#### 4. Méthode de Pohlhausen (profil de vitesse approché)

Cette méthode consiste à représenter le profil de vitesse sous une forme approchée satisfaisant au moins partiellement les conditions aux limites du problème. Dans ce qui suit, nous considérons par exemple un profil de vitesse de type polynôme du troisième ordre :

$$\frac{u}{U_e} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (4.25)$$

Les dérivées première et seconde de ce profil par rapport à  $y$ , sont respectivement :

$$\frac{1}{U_e} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b}{\delta} + 2c \frac{y}{\delta^2} + 3d \frac{y^2}{\delta^3} \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{U_e} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2c}{\delta^2} + 6d \frac{y}{\delta^3} \quad (4.27)$$

Les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  peuvent être déterminées à l'aide des conditions aux limites suivantes :

$$\frac{u(0)}{U_e} = 0 \quad \frac{u(\delta)}{U_e} = 1 \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\delta = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = 0 \quad (4.28)$$

Ce qui nous donnent :

$$a = 0 \quad b = \frac{3}{2} \quad c = 0 \quad d = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent, le profil de vitesse (4.25) s'écrit :

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (4.29)$$

Par la suite ce profil peut être utilisé pour calculer l'épaisseur de la couche limite, en calculant tout d'abord l'épaisseur de la quantité de mouvement :

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^\infty \left(\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{9}{4} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{y}{\delta}\right)^6\right) dy = \frac{39}{280} \delta \quad (4.30)$$

Et le coefficient de frottement :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho U_e^2} = \frac{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0}{\rho U_e^2} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{\delta U_e} \quad (4.31)$$

Maintenant, les expressions (4.30) et (4.31) sont substituées dans l'équation de Von Karman qui s'écrit dans le cas d'un gradient de pression longitudinal nul comme suit :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (4.32)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{39}{280} \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{\delta U_e}$$

Soit :

$$\frac{d\delta^2}{dx} = \frac{280}{13} \frac{\nu}{U_e} \quad (4.33)$$

Comme  $\delta(0) = 0$ , l'intégration de (4.33) donne :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.641}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \quad (4.34)$$

En utilisant le profil de la vitesse (4.29) et la relation (4.34), on obtient :

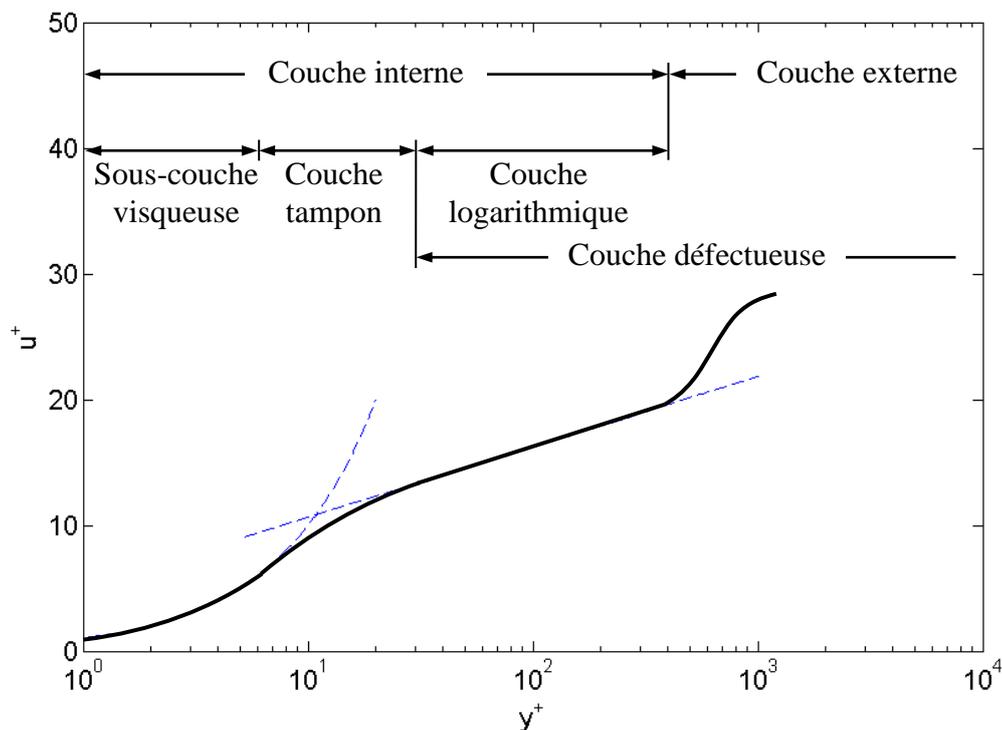
$$\frac{\delta_1}{x} = \frac{1.74}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{\delta_2}{x} = \frac{0.646}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \quad C_f = \frac{0.646}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}$$

# Chapitre 5

## Écoulements turbulents

### 1. Distribution universelle de vitesse (loi de la paroi)

La distribution universelle de vitesse est une relation semi-empirique qui représente une bonne approximation du profil de la vitesse longitudinale près de la paroi pour la plupart des écoulements turbulents. Ce profil est divisé généralement en plusieurs régions : sous-couche visqueuse ; couche tampon ; couche logarithmique et couche défectueuse.



**Figure 5.1** : Profil de la vitesse longitudinale d'une couche limite turbulente

On considère le problème d'une couche limite turbulente incompressible sans gradient de pression sur une plaque plane lisse, et on définit deux grandeurs adimensionnelles  $y^+$  et  $u^+$  telles que :

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad \text{et} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (5.1)$$

Où  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$  est la vitesse de frottement. Les lois de la distribution universelle sont exprimées par :

$$u^+ = y^+ \quad (\text{Sous-couche visqueuse}) \quad (5.2)$$

$$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05 \quad (\text{Couche tampon}) \quad (5.3)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (\text{Couche logarithmique}) \quad (5.4)$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B + 2 \frac{\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{y^+}{\delta}\right) \quad (\text{Couche défectueuse}) \quad (5.5)$$

Où  $\kappa = 0.4 - 0.41$ ,  $B = 5 - 5.5$  et  $\Pi = 0.44 - 0.6$ . Les lois (5.2) - (5.4) décrivant la variation de la vitesse dans ce qu'on appelle la couche interne peuvent être remplacées par la loi de la paroi de Spalding :

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \left( e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right) \quad (5.6)$$

## 2. Loi de puissance 1/7<sup>ème</sup>

Une approximation très simple du profil de la vitesse dans la couche limite turbulente a été proposée par Prandtl sous forme d'une loi de puissance un-septième :

$$\frac{u}{U_e} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (5.7)$$

Cette loi peut donner des approximations satisfaisantes dans la plupart (90 %) de la couche limite sauf au voisinage de la paroi ; car selon cette loi la contrainte de cisaillement pariétale est infinie (ce qui est faux). Cependant, elle peut aider à déterminer facilement (contrairement à la loi logarithmique) les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement de la couche limite turbulente, telles que :

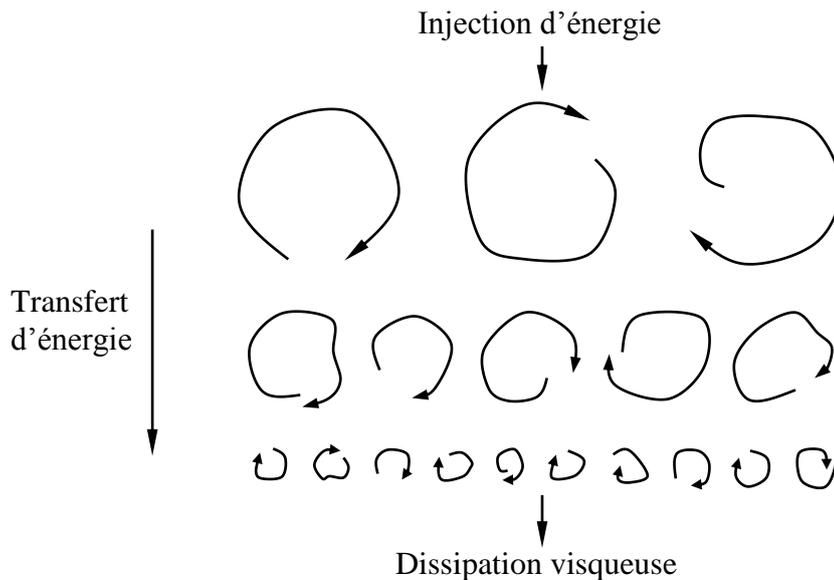
$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right) dy = \frac{1}{8} \delta \quad (5.8)$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right) dy = \frac{7}{72} \delta \quad (5.9)$$

## 3. Echelles de turbulence

D'après Richardson et Kolmogorov, les instabilités dans un écoulement turbulent créent de grands tourbillons au sein de cet écoulement et auxquels ce dernier transmet de l'énergie cinétique ; ces grands tourbillons se brisent en tourbillons de

plus petite taille, qui eux-mêmes se brisent en tourbillons encore plus petits. Ce processus de transfert d'énergie continu, sans aucune intervention de la viscosité (car le nombre de Reynolds à ces échelles est important), jusqu'à ce que la taille des tourbillons devient si petite que le nombre de Reynolds (basé sur cette taille) est d'ordre unité. A ce moment-là, les forces visqueuses deviennent importantes, et l'énergie de ces tourbillons est dissipée en chaleur par frottement.



**Figure 5.2** : Cascade d'énergie dans un écoulement turbulent

Pour déterminer la plus petite échelle (à partir de laquelle la viscosité devient le facteur principal de dissipation de l'énergie) dans un écoulement turbulent, on considère un écoulement de longueur et vitesse typiques (caractéristiques)  $l$  et  $U$  respectivement. Etant donné que les caractéristiques des grands tourbillons sont de même ordre que celles de l'écoulement, on peut donc estimer que l'énergie (par unité de masse) de ces tourbillons est proportionnelle à  $U^2$ , et le temps de leur rotation est  $l/U$  ; donc le taux de transfert d'énergie de ces tourbillons aux plus petits tourbillons serait proportionnel à  $U^3/l$ .

D'autre part, la taille des plus petits tourbillons (la plus petite échelle)  $\eta$  dépend seulement de la viscosité cinématique du fluide  $\nu$  et du taux de dissipation d'énergie par frottement  $\varepsilon$ , ce qui conduit à l'aide de l'analyse dimensionnelle à :

$$\eta \sim \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad u_\eta \sim (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad t_\eta \sim \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

Où  $\eta$ ,  $u_\eta$  et  $t_\eta$  sont respectivement les échelles de Kolmogorov de longueur, de vitesse et de temps. A l'échelle de Kolmogorov, le taux de transfert d'énergie dans la cascade turbulente (estimé précédemment comme étant proportionnel à  $U^3/l$ ) est égal approximativement au taux de dissipation d'énergie par frottement  $\varepsilon$ , il s'ensuit alors que :

$$\eta \sim l \text{Re}_l^{-3/4} \quad u_\eta \sim U \text{Re}_l^{-1/4} \quad t_\eta \sim \frac{l}{U} \text{Re}_l^{-1/2} \quad (5.11)$$

#### 4. Champ moyen et fluctuations

Dans le processus de modélisation statistique de la turbulence, il est utile de présenter chaque grandeur  $\phi$  de l'écoulement comme la somme d'une valeur moyenne  $\bar{\phi}$ , et d'une fluctuation  $\phi'$ , telle que :

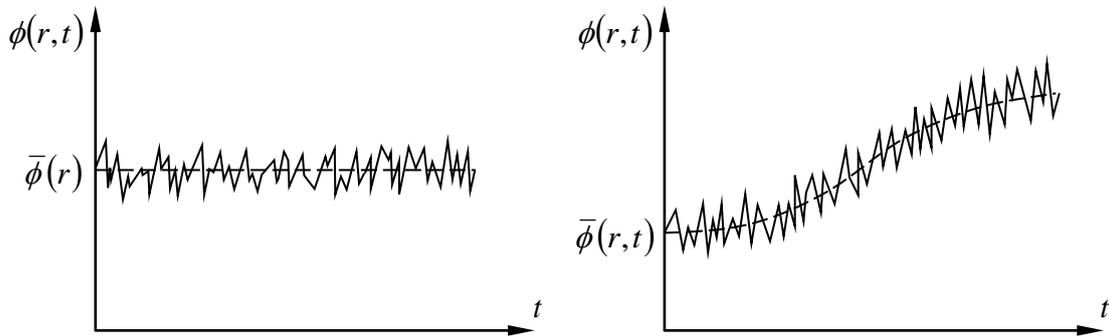
$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{Décomposition de Reynolds}) \quad (5.12)$$

Pour les écoulements turbulents stationnaires,  $\bar{\phi}$  représente la moyenne temporelle définie par :

$$\bar{\phi}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(r, t) dt \quad (5.13)$$

Pour les écoulements instationnaires, un autre type de moyenne plus général est utilisé. Dans ce cas,  $\bar{\phi}$  représente la moyenne stochastique de la grandeur  $\phi$  mesurée sur un ensemble d'expériences identiques, telle que :

$$\bar{\phi}(r, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i(r, t) \quad (5.14)$$



**Figure 5.3** : Grandeur moyenne et fluctuante dans un écoulement stationnaire et instationnaire

Où  $\bar{\phi}(r,t)$  est la moyenne stochastique,  $\phi_i(r,t)$  est la grandeur mesurée dans la  $i^{\text{ème}}$  expérience, et  $N$  est le nombre d'expériences réalisées. La définition de la moyenne (temporelle et stochastique) implique les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= 0 & \overline{\bar{f}} &= \bar{f} & \overline{\alpha f} &= \alpha \bar{f} & \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} & \overline{\bar{f} g} &= \bar{f} \bar{g} & \overline{f g} &= \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'} \end{aligned}$$

## 5. Equations de Reynolds

### 5.1. Equations du mouvement moyen

On considère l'hypothèse d'un écoulement incompressible de fluide newtonien, dont les équations de mouvement s'écrivent en notation indicielle :

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad k = 1,2,3 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_k u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + g_i \quad i = 1,2,3 \quad (5.16)$$

Rq. : l'indice  $i$  désignant la direction et il varie d'une équation à l'autre, alors que l'indice  $k$  désignant la sommation et il varie dans la même équation.

La décomposition de Reynolds pour les composantes du vecteur vitesse et la pression s'écrit :

$$u = \bar{u} + u' \quad p = \bar{p} + p' \quad (5.17)$$

En substituant (5.17) dans (5.15) et (5.16), on aura :

$$\frac{\partial (\bar{u}_k + u'_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k + u'_k)(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k^2} + g_i \quad (5.19)$$

En prenant maintenant la moyenne dans le temps des équations instantanées (5.18) et (5.19), tous les termes ne faisant intervenir qu'une fois les fluctuations ( $u'_i$  et  $p'$ ) disparaissent, et on obtient pour le champ moyen :

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (5.20)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k \bar{u}_i)}{\partial x_k}}_{\text{Force moyenne d'inertie}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{\text{Force moyenne de pression}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2}}_{\text{Force moyenne de viscosité}} + \underbrace{g_i}_{\text{Force moyenne de volume}} - \underbrace{\frac{\partial (\overline{u'_k u'_i})}{\partial x_k}}_{\text{Tensions de Reynolds}} \quad (5.21)$$

Rq. : les tensions de Reynolds introduisent 6 inconnues supplémentaires (car le tenseur de Reynolds est symétrique). On a donc un problème de fermeture dont il faut établir un modèle permettant de déterminer les termes  $\overline{u'_i u'_j}$ .

## 5.2. Equations du mouvement fluctuant

Pour obtenir les équations associées aux tensions de Reynolds  $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ , il faut faire le suivant :

- soustraction des équations de quantité de mouvement moyennes (5.21) des équations de quantité de mouvement instantanées (5.19) ;
- multiplier (scalairement) l'équation qui en résulte par  $u'_j$  ;
- réécrire la même équation en inversant les indices  $i$  et  $j$  ;
- combiner les deux équations précédentes, et prendre la moyenne définie précédemment.

Après réarrangement, il vient :

$$\underbrace{\frac{\partial (R_{ij})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k R_{ij})}{\partial x_k}}_{\text{Advection de } R_{ij}} = - \underbrace{\left( R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right)}_{\text{Production/destruction}} - \underbrace{\frac{\partial (\overline{u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k}}_{\text{Transport (diffusion) turbulent}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\overline{u'_j p'})}{\partial x_i} + \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_j} \right)}_{\text{Diffusion spatiale par } p'} \dots$$

$$\dots + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Production/destruction par } p'} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial x_k^2}}_{\text{Diffusion visqueuse}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation turbulente}} \quad (5.22)$$

Maintenant l'équation de l'énergie cinétique turbulente définie comme étant la demi-trace du tenseur de Reynolds,  $k = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33})$ , peut être déduite de (5.22), nous obtenons ainsi :

$$\underbrace{\frac{\partial (k)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k k)}{\partial x_k}}_{\text{Advection de } k} = - \underbrace{R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Production/destruction}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u'_i u'_i u'_k})}{\partial x_k}}_{\text{Transport (diffusion) turbulent}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{u'_i p'})}{\partial x_i}}_{\text{Diffusion spatiale par } p'} \dots$$

$$\dots + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2}}_{\text{Diffusion visqueuse}} - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}_{\text{Dissipation turbulente}} \quad (5.23)$$

Rq. : dans l'équation (5.23) les deux indices  $l$  et  $k$  désignant la sommation.

### 6. Hypothèse de Boussinesq (viscosité turbulente)

La loi de comportement d'un fluide newtonien incompressible reliant le tenseur des contraintes visqueuses au champ (moyen) de vitesse s'écrit :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.24)$$

Par similitude, Boussinesq a proposé de relier le tenseur de Reynolds au champ moyen de vitesse par :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.25)$$

L'équation (5.25) fournit cependant une énergie cinétique turbulente nulle  $k=0$ ; donc, la relation suivante est plutôt utilisée :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (5.26)$$

Où la viscosité turbulente  $\mu_t (= \rho \times \nu_t)$  n'est pas une propriété du fluide mais dépend de l'écoulement, dont  $\nu_t$  (comme la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ ) est supposée être le produit d'une longueur et d'une vitesse :

$$\mu_t \sim \rho \times \text{longueur} \times \text{vitesse}$$

### 7. Modèle de la longueur de mélange de Prandtl

Le modèle de la longueur de mélange a été développé pour un écoulement stationnaire incompressible bidimensionnel de type couche limite, dont la seule contrainte de Reynolds qui intervient est  $-\overline{u'v'}$  :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} \quad (5.27)$$

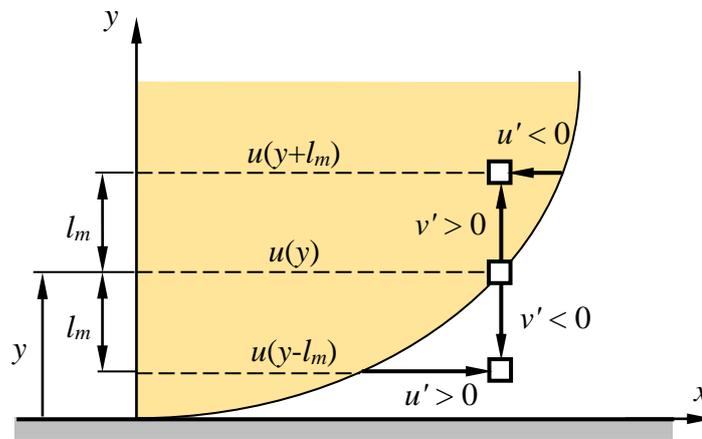
En utilisant l'hypothèse de Boussinesq (5.26), cette contrainte peut s'exprimer par :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (5.28)$$

Prandtl suppose que sous l'effet de la fluctuation de la vitesse transversale  $v'$ , une particule fluide se trouvant initialement à  $y$ , traverse une distance  $\pm l_m$

perpendiculairement au sens principal de l'écoulement tout en gardant sa  $Q^{tité}$  de  $M^{vt}$  dans la direction des  $x$  (voir Figure 5.4). La fluctuation turbulente  $u'$  pourrait être considérée comme la différence entre la vitesse moyenne de cette particule  $\bar{u}(y)$  et la vitesse moyenne de son nouvel environnement  $\bar{u}(y \pm l_m)$  (i.e. la vitesse moyenne de la lame  $y \pm l_m$  où se trouve cette particule après qu'elle traverse la distance  $\pm l_m$ ), telle que :

$$|u'| = |\bar{u}(y \pm l_m) - \bar{u}(y)| \cong l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.29)$$



**Figure 5.4** : Longueur de mélange  $l_m$  et fluctuations turbulentes  $u'$ ,  $v'$

Prandtl suppose également que  $u'$  et  $v'$  sont du même ordre :

$$|v'| \cong c_1 \times l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.30)$$

Et supposant que :

$$-\overline{u'v'} = c_2 \times |u'| \cdot |v'| \quad (5.31)$$

En substituant (5.29) et (5.30) dans (5.31), on obtient le modèle de la longueur de mélange :

$$-\overline{u'v'} = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.32)$$

où les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont incluses dans la longueur de mélange, et la valeur absolue est abandonnée pour s'assurer que  $\partial \bar{u} / \partial y$  négative implique une contrainte

turbulente  $\tau_t = -\overline{u'v'}$  négative. De (5.28) et (5.32), on obtient la relation de la viscosité cinématique turbulente :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.33)$$

Pour la couche limite turbulente, on utilise généralement un modèle de longueur de mélange à deux régions, interne et externe, tel que :

$$\begin{cases} l_{mi} = 0.41y \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{26} \left( 1 + \frac{y}{\tau_p} \frac{dp}{dx} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) & \text{pour } y \leq y_m \\ l_{me} = 0.09 \delta & \text{pour } y > y_m \end{cases} \quad (5.34)$$

Où  $y_m$  est la distance à la surface solide pour laquelle la viscosité turbulente calculée avec  $l_{mi}$  est égale à celle calculée avec  $l_{me}$ .

## 8. Modèles de turbulence à deux équations

Afin de modéliser les écoulements turbulents avec une meilleure représentation des différents aspects de ce phénomène complexe, il a fallu développer ce que l'on appelle le modèle à deux équations, dont l'une est une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k$ , l'autre est une équation de transport pour une grandeur physique représentant la dissipation de la turbulence, soit  $\varepsilon$  ou bien  $\omega$ , telles que :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \quad \varepsilon = \nu \overline{\left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2} \quad \omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k} \quad (5.35)$$

### 8.1. Modèle $k$ - $\varepsilon$

Le modèle standard  $k$ - $\varepsilon$  est le plus utilisé parmi les modèles statistiques (reposant sur l'hypothèse de la viscosité turbulente), cependant il s'applique uniquement à l'extérieur de la sous-couche visqueuse (soit à partir de  $y_0^+ = y_0 u_\tau / \nu \approx 50$ ), et il s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \mathcal{G}_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (5.36)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \mathcal{G}_\varepsilon \mu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.37)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.38)$$

Où  $\tau_{ij}^t$  est le tenseur de Reynolds donné par la relation (5.26), et les constantes du model sont :

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad \mathcal{G}_k = 1.0 \quad \mathcal{G}_\varepsilon = 0.769$$

Pour rendre compte de la présence d'une sous-couche visqueuse au voisinage d'une surface solide (où le nombre de Reynolds est relativement faible), on doit utiliser une version modifiée de ce modèle appelée « Modèle  $k$ - $\varepsilon$  à faible nombre de Reynolds » et donnée sous la forme générale suivante :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \mathcal{G}_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + L_k \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \mathcal{G}_\varepsilon \mu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} f_1 \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\varepsilon}{k} \dots \\ \dots - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + L_\varepsilon \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.41)$$

Les constantes de ce modèle sont les mêmes que celles du modèle standard, alors que les fonctions sont données selon Launder et Sharma par :

$$f_1 = 1.0 \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-\text{Re}_T^2) \quad f_\mu = \exp\left(-3.4 / \left(1 + \frac{\text{Re}_T}{50}\right)^2\right)$$

$$\text{Re}_T = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad L_k = -2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \quad L_\varepsilon = 2\nu \mu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \right)^2$$

**Rq. :** les modèles  $k$ - $\varepsilon$  sont moins sensibles que le modèle  $k$ - $\omega$  aux conditions aux limites de l'écoulement libre, donc il est préférable de les utiliser dans la région loin de la paroi.

## 8.2. Modèle $k$ - $\omega$

Le modèle  $k$ - $\omega$  est également populaire et très utilisé dans la modélisation statistique de la turbulence, dont la première (et la plus simple) version proposée par Wilcox se formule comme suit :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_{k1} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k \quad (5.42)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_{\omega 1} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \alpha_1 \frac{\omega}{k} \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta_1 \rho \omega^2 \quad (5.43)$$

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad (5.44)$$

Où les coefficients du modèle sont :

$$\alpha_1 = \frac{5}{9} \quad \beta_1 = \frac{3}{40} \quad \beta^* = C_\mu = \frac{9}{100} \quad \sigma_{k1} = \frac{1}{2} \quad \sigma_{\omega 1} = \frac{1}{2}$$

Rq. : ce modèle est plus fiable que le modèle  $k-\varepsilon$  dans la région près de la paroi, donc il est préférable de l'utiliser dans cette région.

### 8.3. Modèle SST

Pour bénéficier des avantages des modèles  $k-\varepsilon$  et  $k-\omega$ , Menter a proposé de les utiliser simultanément, chacun dans la zone de l'écoulement turbulent où il est signalé comme étant le plus fiable. Cette modélisation zonale utilise le modèle  $k-\omega$  de Wilcox près des parois solides et le modèle standard  $k-\varepsilon$  loin de ces parois solides. Cela est effectué en utilisant la relation  $\varepsilon = \beta^* \omega k$  pour transformer le modèle standard  $k-\varepsilon$  en une formulation  $k-\omega$ , telle que :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_{k2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \alpha_2 \frac{\omega}{k} \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta_2 \rho \omega^2 \dots \\ \dots + \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Sachant que :

$$\alpha_2 = 0.44 \quad \beta_2 = 0.0828 \quad \beta^* = C_\mu = \frac{9}{100} \quad \sigma_{k2} = 1 \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856$$

Rq. : (i) il faut mentionner que l'équation (5.46) est obtenue après avoir négligé la viscosité moléculaire dans le terme additionnel (appelé en anglais : cross-diffusion term), et également négligé un autre terme additionnel qui n'affecte pas significativement la solution d'après [Hoffmann et Chiang]. (ii) le coefficient  $\sigma_{\omega 2}$  doit avoir une valeur de  $1/1.3 \approx 0.769$ , mais dans toutes les références il prend la

valeur 0.856, qui est une valeur probablement corrigée pour s'assurer que  $\alpha_2 = \text{fn}(\beta_2, \beta^*, \sigma_{\omega 2}) = C_{\varepsilon 1} - 1 = 0.44$ .

Maintenant le modèle  $k-\omega$  (équations 5.42–5.43) et le modèle standard  $k-\varepsilon$  transformé (équations 5.45–5.46) sont combinés à l'aide d'une fonction de pondération  $F_1$ , dont le nouveau modèle s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij}^t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 \dots \\ \dots + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Les constantes de ce modèle  $\phi = \{\alpha, \beta, \sigma_k, \sigma_\omega\}$  seront déterminées à partir de la relation suivante :

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (5.49)$$

La fonction de pondération  $F_1$  est conçue de telle façon qu'elle prenne la valeur 1 au voisinage des parois solides et par conséquent le nouveau modèle (5.47)–(5.49) sera identique au modèle  $k-\omega$  (5.42)–(5.43) ; et elle prenne la valeur 0 loin des parois solides et par conséquent ce nouveau modèle sera identique au modèle standard  $k-\varepsilon$  transformé (5.45)–(5.46). Cette fonction est donc définie comme suit :

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (5.50)$$

$$\arg_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \alpha d}, \frac{500\nu}{\alpha d^2} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}d^2} \right) \quad CD_{k\omega} = \max \left( \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}, 10^{-20} \right)$$

Où  $d$  est la distance à la paroi la plus proche. Dans ce modèle la viscosité turbulente est exprimée par la relation suivante :

$$\mu_t = \frac{0.31\rho k}{\max(0.31\omega, \Omega F_2)} \quad (5.51)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad \arg_2 = \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \alpha d}, \frac{500\nu}{\alpha d^2} \right)$$

Rq.: (i) il est recommandé de prendre la constante  $\sigma_{k1}$  égale à 0.85 dans le modèle SST au lieu de 1/2. (ii) Menter a défini le terme  $\Omega$  dans la relation (5.51) une fois comme étant le taux de déformation ( $\times 2$ ) [Menter 1993] et une autre fois comme étant la valeur absolue de la vorticité [Menter 1994].

# Références

- [1] K. A. Hoffmann et S. T. Chiang, Computational Fluid Dynamics III, EES (2000)
- [2] R. B. Bird et al., Transport Phenomena, Wiley (2001)
- [3] I. G. Currie, Fundamental mechanics of fluids, Marcel Dekker (2002)
- [4] F. M. White, Fluid mechanics, McGraw-Hill (2003)
- [5] P. A. Davidson, Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers, Oxford University Press (2004)
- [6] J. F. Douglas et al., Fluid mechanics, Pearson PH (2005)
- [7] D. C. Wilcox, Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries (2006)
- [8] C. T. Crowe et al., Engineering Fluid Mechanics, Wiley (2008)
- [9] F. Durst, Fluid Mechanics, Springer (2008)
- [10] P. J. Pritchard et al., Introduction to Fluid Mechanics, Wiley (2011)
- [11] B. R. Munson et al., Fundamentals of fluid mechanics, Wiley (2012)
- [12] Y. Cengel et J. Cimbala, Fluid Mechanics Fundamentals and Applications, McGraw-Hill (2013)
- [13] H. Schlichting et K. Gersten, Boundary-Layer Theory, Springer (2017)
- [14] P. K. Kundu et al., Fluid Mechanics, Academic Press (2015)
- [15] R. A. Granger, Fluid Mechanics, Dover Publications (1995)
- [16] H. Yamaguchi, Engineering Fluid Mechanics, Springer (2008)
- [17] E. Krause, Fluid Mechanics, Springer (2005)
- [18] P. Huerre, Mécanique des fluides, Tome I, Ecole polytechnique (1998)
- [19] E. Guyon et al., Hydrodynamique physique, EDP Sciences/ CNRS Editions (2001)
- [20] S. Amiroudine et J.-L. Battaglia, Mécanique des fluides - Cours et exercices corrigés, Dunod (2011)

# Annexe

## Exercices d'application

### Chapitre 1

**E1.1 :** On considère le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel permanent et incompressible, tel que  $\vec{q} = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$  ; où  $U_0$  et  $b$  sont des constantes. Calcule l'accélération des particules fluides.

**E1.2 :** L'eau du robinet s'écoule verticalement vers le bas en chute libre dont l'accélération d'une particule d'eau à tout instant est  $\vec{a}(0,0, g)$ .

1. Détermine la vitesse de cette particule à l'aide de la description Lagrangienne ;
2. Détermine la vitesse de cette particule à l'aide de la description Eulérienne.

**E1.3 :** Une particule fluide de dimensions  $a \times a$  est déformée après un certain temps en un rectangle de longueur  $2a$  tout en restant alignée avec l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ . Quelle sera la hauteur de cette particule si l'écoulement est incompressible ?

**E1.4 :** Pour les champs de vitesse suivants identifie le type de mouvement et de déformation que subissent les particules fluides lors de l'écoulement :

1.  $\vec{q} = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$
2.  $\vec{q} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$
3.  $\vec{q} = -k \frac{y}{x^2+y^2} \vec{i} + k \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$
4.  $\vec{q} = m \frac{x}{x^2+y^2} \vec{i} + m \frac{y}{x^2+y^2} \vec{j}$

**E1.5 :** Etablis l'équation de continuité, en utilisant le bilan de masse dans un volume (cubique) élémentaire infinitésimal  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ .

**E1.6 :** Ecris l'équation de conservation de l'énergie sous forme enthalpique, sachant que :  $\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \dot{Q} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{k} \vec{\nabla} T) - p \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \Phi$  et  $h = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$

**E1.7 :** Pour un écoulement idéal, permanent et incompressible, établis l'équation de Bernoulli à partir de l'équation d'Euler.

### Chapitre 2

**E2.1 :** Détermine la fonction de courant et le potentiel de vitesse qui correspondent aux champs de vitesse suivants :

1.  $\vec{q} = a(x^2 - y^2)\vec{i} - 2axy\vec{j}$
2.  $\vec{q} = (2x + y)\vec{i} - (x + 2y)\vec{j}$
3.  $\vec{q} = -x\vec{i} + y\vec{j}$

**E2.2 :** Le champ de vitesse d'un écoulement source est défini par  $v_r = \frac{c}{r}$  et  $v_\theta = 0$ . On demande de déterminer le débit volumique sortant de cette source.

**E2.3 :** Soit le potentiel complexe  $F(z) = U_\infty (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$ . Trouve les équations à partir desquelles on peut déterminer  $\psi$  et  $\phi$ .

**E2.4 :** Soit le potentiel complexe  $F(z) = U_\infty z + c \ln z + i\lambda$

1. Détermine  $c$  et  $\lambda$  pour que le point d'arrêt  $P_0$  se trouve à  $(r_0, \pi)$  et  $\psi = 0$  sur la ligne de courant passant par le point d'arrêt  $P_0$  ;

2. Trace les lignes de courant  $\psi = 0$  ;  $\frac{\pi}{8}$  ;  $\frac{\pi}{4}$  ;  $3\frac{\pi}{8}$ .

Sachant que  $r_0 = 1$  m et  $U_\infty = 1$  m/s

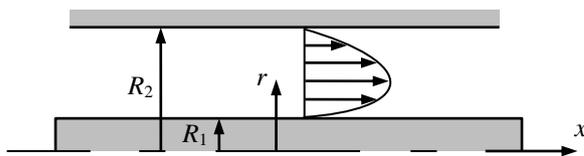
### Chapitre 3

**E3.1 :** Soit l'écoulement laminaire permanent incompressible et unidirectionnel d'un fluide newtonien entre deux conduites circulaires coaxiales.

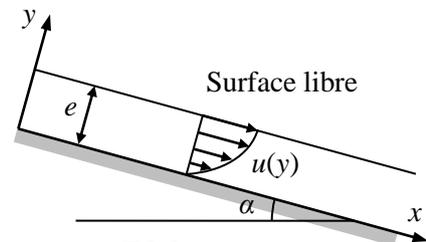
1. Détermine le profil de la vitesse ;

2. Détermine le débit volumique et déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.

**E3.2 :** Soit l'écoulement plan unidirectionnel à surface libre d'un fluide visqueux d'épaisseur "e" sur une plaque inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Détermine le profil de la vitesse.



**E3.1**



**E3.2**

**E3.3 :** Montre que, pour un écoulement laminaire permanent incompressible et visqueux entre deux plans infinis mobiles ( $u(0) = V$  et  $u(\delta) = U$ ) distant de  $\delta$ , le débit volumique par unité de longueur et les contraintes de cisaillement sur chaque plan s'expriment respectivement par:

$$Q = -\frac{\delta^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{\delta}{2} (U + V) \quad \tau_0 = \mu \left( \frac{U-V}{\delta} - \frac{\delta}{2\mu} \frac{dp}{dx} \right) \quad \tau_\delta = \mu \left( \frac{U-V}{\delta} + \frac{\delta}{2\mu} \frac{dp}{dx} \right)$$

**E3.4 :** Un cylindre de rayon  $R$  tourne autour de son axe avec une vitesse de rotation constante  $\omega$  dans un fluide newtonien au repos loin du cylindre.

1. Quel est la force provoquant le mouvement du fluide ?

2. Si l'écoulement est permanent, incompressible et unidirectionnel suivant  $\theta$ , avec forces massiques négligeables, simplifie les équations de mouvement pour obtenir celles régissant cet écoulement :

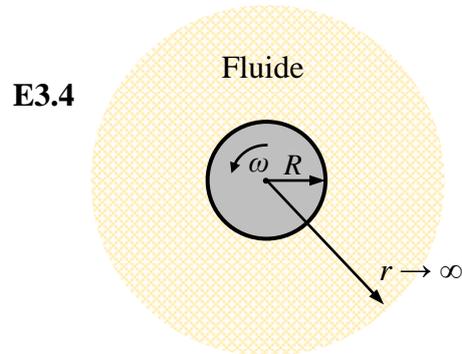
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho u_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + f_r$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + f_\theta$$

3. Détermine la vitesse de l'écoulement  $u_\theta$  ;

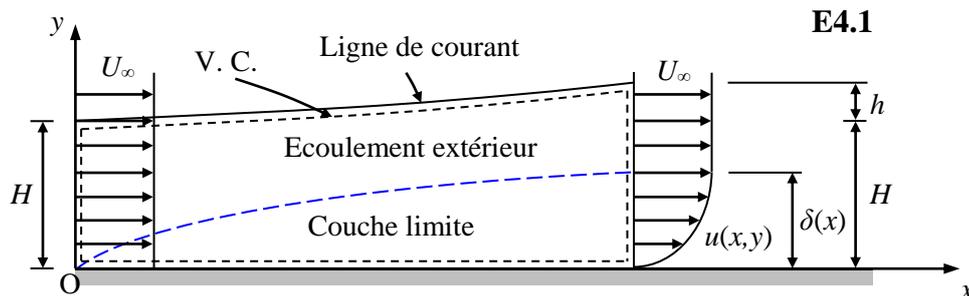
4. Détermine la distribution de pression  $p$ , sachant que  $p(r \rightarrow \infty) = p_\infty$ .



## Chapitre 4

**E4.1 :** Soit l'écoulement laminaire permanent et incompressible sur une plaque plane.

1. Applique la conservation de masse dans le volume de contrôle (ligne interrompue) et donne l'expression de la hauteur  $h$  ;
2. Qu'est-ce qu'elle représente ?



**E4.2 :** On considère l'écoulement sur une plaque plane horizontale dont le profil de la vitesse  $u(x, y)$  peut être approximé par la fonction suivante  $u(x, y) = a \sin(\omega y)$ .

1. Détermine les constantes  $a$  et  $\omega$  ;
2. Détermine  $\frac{\delta_1}{\delta}$ ,  $\frac{\delta_2}{\delta}$ ,  $H$  et  $\frac{\tau_p \delta}{\mu U_\infty}$ .

**E4.3 :** Soit l'écoulement de type couche limite sans gradient de pression sur une plaque plane horizontale de largeur unité, dont le profil de vitesse est approximé par la fonction linéaire  $u(x, y) = ay + b$ .

1. Détermine les constantes  $a$  et  $b$  ;
2. Détermine  $F_f$  la force de frottement s'exerçant sur la surface de la plaque en fonction de  $\rho$ ,  $U_\infty$  et  $\delta$ .

## Chapitre 5 :

**E5.1 :** Dans un écoulement turbulent et très près de la paroi solide, la vitesse varie linéairement avec la distance à la paroi et le gradient de la vitesse peut donc s'exprimer par  $\frac{du}{dy} = \text{fn}(u_\tau, \nu)$ , montre qu'à partir de l'analyse dimensionnelle cela conduit à une relation similaire à (5.2).

**E5.2 :** Dans un écoulement turbulent et suffisamment loin de la paroi solide, l'effet de viscosité est négligeable et le gradient de la vitesse peut donc s'exprimer par  $\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \text{fn}(y, u_\tau)$ , montre qu'à partir de l'analyse dimensionnelle cela conduit à une relation similaire à (5.4).

**E5.3 :** Sachant que la turbulence à la plus petite échelle dépend seulement de la viscosité cinématique du fluide  $\nu$  et du taux de dissipation d'énergie  $\varepsilon$ , démontre les relations des échelles de Kolmogorov (5.10) en utilisant l'analyse dimensionnelle.

**E5.4 :** Si la moyenne temporelle  $\bar{\phi}$  d'une grandeur physique  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$  dans un écoulement turbulent est définie par la relation (5.13), démontre les règles suivantes:

1.  $\overline{\bar{\phi}} = \bar{\phi}$
2.  $\overline{\phi'} = 0$
3.  $\overline{\phi_1 \cdot \phi_2} = \bar{\phi}_1 \cdot \bar{\phi}_2 + \overline{\phi'_1 \cdot \phi'_2}$

**E5.5 :** La distribution de vitesse d'un écoulement turbulent établi dans un tube de rayon  $R$  est approximativement décrite par  $\frac{u(y)}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/4}$  ou bien par  $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$ .

1. Détermine la vitesse moyenne  $\bar{u}$  en utilisant les deux approximations ;
2. Déduis le rapport des vitesses  $u_\tau / \bar{u}$ .

**E5.5**

