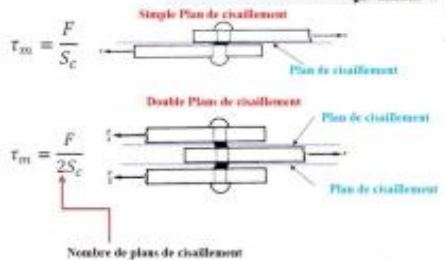
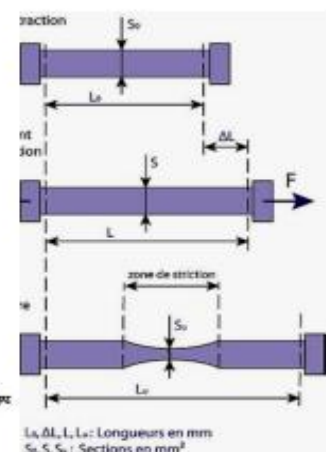
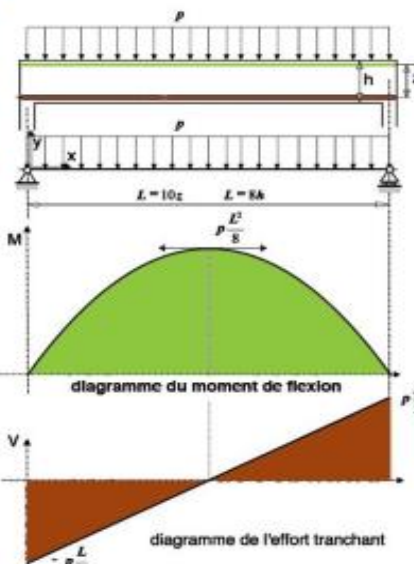
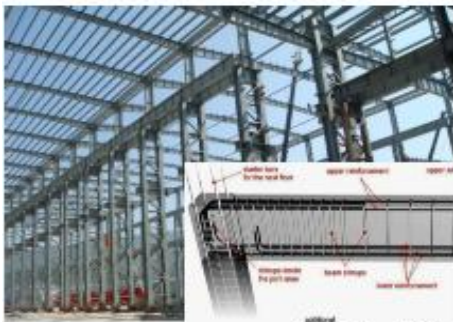
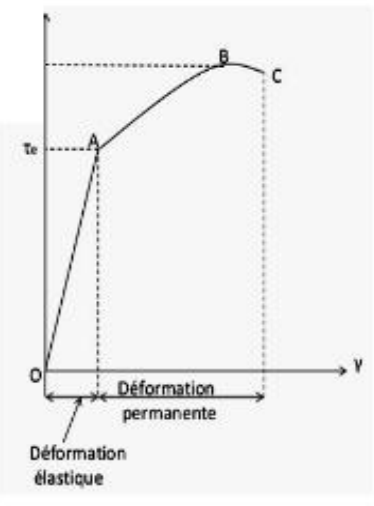
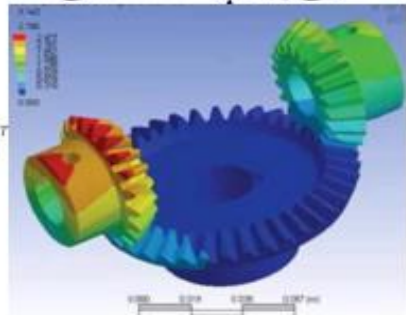
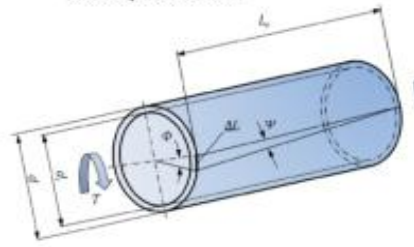


# Résistance des matériaux I



$$\sigma = E \cdot \epsilon$$



# Résistance des matériaux I

**Cours et exercices corrigés**

Par

**Tahar MASRI**

Docteur

Département de génie mécanique

Université Mohamed khider. Biskra

Algérie

Juin 2019

**Sommaire**

I.	Introduction à la RDM .....	6
I.1	Généralités .....	6
I.1.1	Définition : .....	6
I.2	Hypothèses générales de la résistance des matériaux.....	6
I.3	Les forces extérieures.....	7
I.4	Les forces intérieures (efforts de cohésion).....	8
I.4.1	Définition : .....	8
I.4.2	Effort longitudinal (N) : .....	9
I.4.3	Effort tranchant (T) : .....	11
I.4.4	Moment fléchissant ( $M_f$ ) : .....	13
I.4.5	Moment de torsion ( $M_t$ ) : .....	14
I.5	Notions de contraintes : .....	16
I.6	Applications : .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
II.	Traction et compression.....	18
II.1	Elasticité.....	18
II.2	Efforts normal et contrainte normale .....	18
II.3	Loi de HOOKE.....	19
II.3.1	Forme généralisée de la loi de Hooke .....	19
II.3.2	Coefficient de poisson : .....	19
II.3.3	Déformation normale : .....	20
II.4	Essai de traction.....	20
II.4.1	Eprouvettes d'essai.....	20
II.4.2	Présentation de l'essais de traction : .....	21
II.4.3	Condition de résistance à la traction.....	23
II.5	Essai de compression.....	23
II.5.1	Généralités.....	23

**Préface**

# **Chapitre I**

## **Introduction à la résistance des matériaux**

## **I. Introduction à la RDM**

### **I.1 Généralités**

#### **I.1.1 Définition :**

La résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux qui ne peuvent être disponibles qu'à travers les résultats des travaux expérimentaux comme le témoigne l'histoire du développement de la résistance des matériaux qui constitue une combinaison fascinante de la théorie et l'expérience.

La résistance des matériaux (R.D.M), est un outil de l'ingénieur et du technicien, âgée de 300 ans ; Galilée, Hooke, Bernoulli et Coulomb en furent les pères fondateurs.

Ce cours concerne l'aspect théorique et les applications usuelles des principes fondamentaux de la R.D.M. Les développements portent sur les conditions d'équilibre ou de résistance, les déformations et les exigences concernant les matériaux.

L'objectif de ce cours est :

- Définir les notions des efforts intérieurs, des sollicitations simples et composées et de contraintes.
- Préciser les hypothèses fondamentales de la résistance des matériaux.
- Donner des notions concernant les coefficients de sécurité.
- Etude de la traction, compression, cisaillement, flexion et de la torsion sur l'effet des sollicitations simples et composées.

### **I.2 Hypothèses générales de la résistance des matériaux**

Les formules et les propriétés établies dans ce cours supposent que (figure I.1):

- a- Les matériaux sont homogènes et isotropes.

- Un corps est homogène lorsque tous les cristaux ou tous les grains de matières sont identiques : même constitution, même structure.
  - Un solide est isotrope lorsque tous les points de sa structure ont les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions.
- b- Toutes les forces extérieures exercées sur le solide sont contenues dans le plan de symétrie.
- c- Hypothèse de Navier Bernoulli : les sections droites, planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, reste planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformations. Il n'y a pas de gauchissement des sections droites.
- d- On se place toujours dans le cas de petites déformations, autrement dit, les déformations restent faibles comparativement aux dimensions de la structure (poutre).

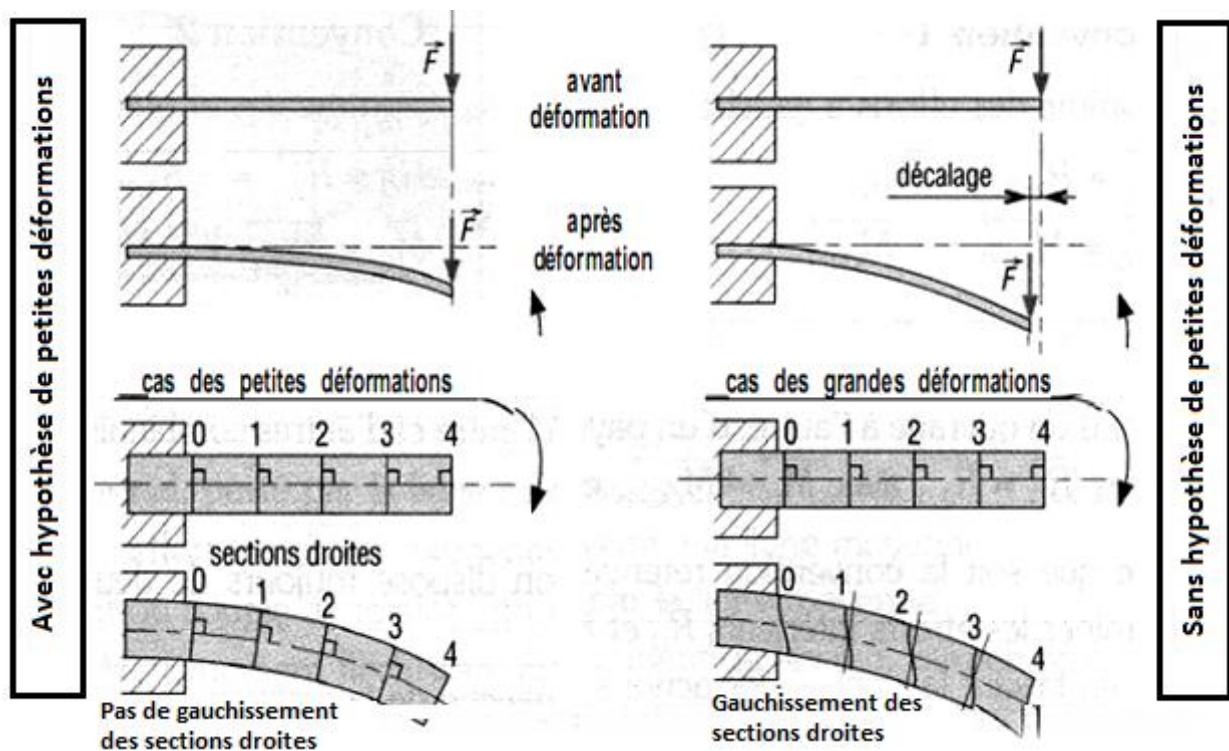


Figure I. 1: Les hypothèses de petites déformations.

### I.3 Les forces extérieures

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée (figure I.2). Suivant le cas, ces charges peuvent-être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figure aussi sous forme de

réactions des liaisons (réactions d'appuis, moment, ...).

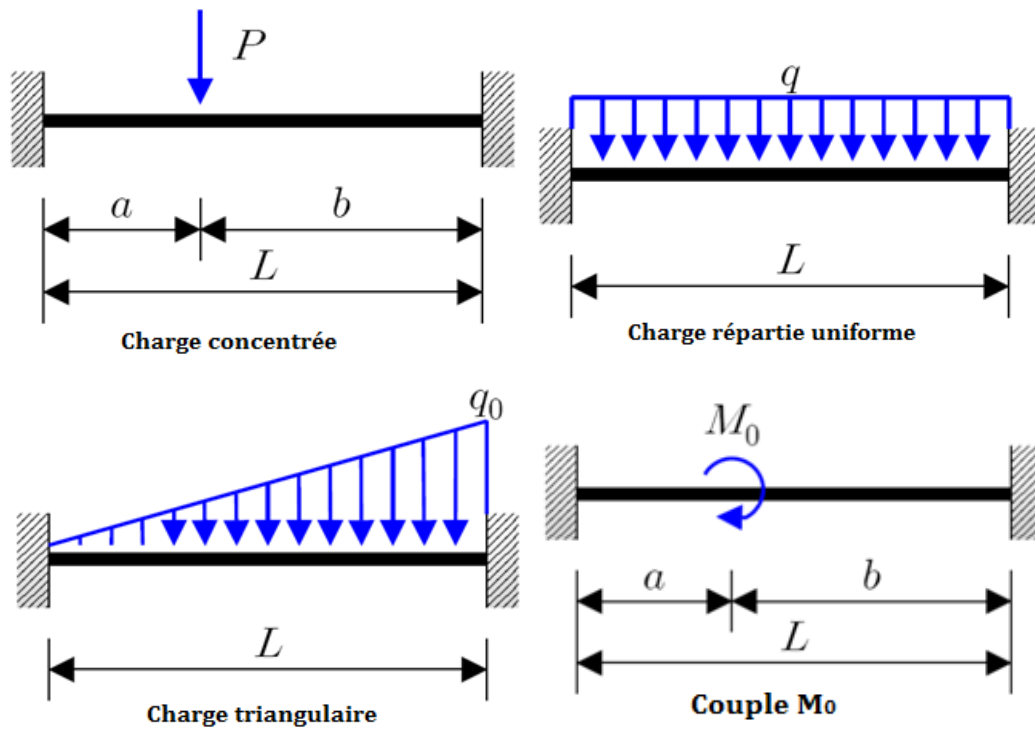


Figure 1. 2: Différentes types des charges.

## I.4 Les forces intérieurs (efforts de cohésion)

### I.4.1 Définition :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des structures (poutres) et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées.

Les efforts intérieurs sont calculés avec le principe fondamental de la statique à partir des l'actions extérieures agissant sur la poutre.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle, on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation (**S**) (figure I.3). on distingue le vecteur des forces  $F(N, T_y, T_z)$  et le vecteur moment  $M(M_x, M_y, M_z)$  résultant des forces intérieures dans la section.

$$\vec{F} = N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \qquad \vec{M} = M_x \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z} \qquad (01)$$



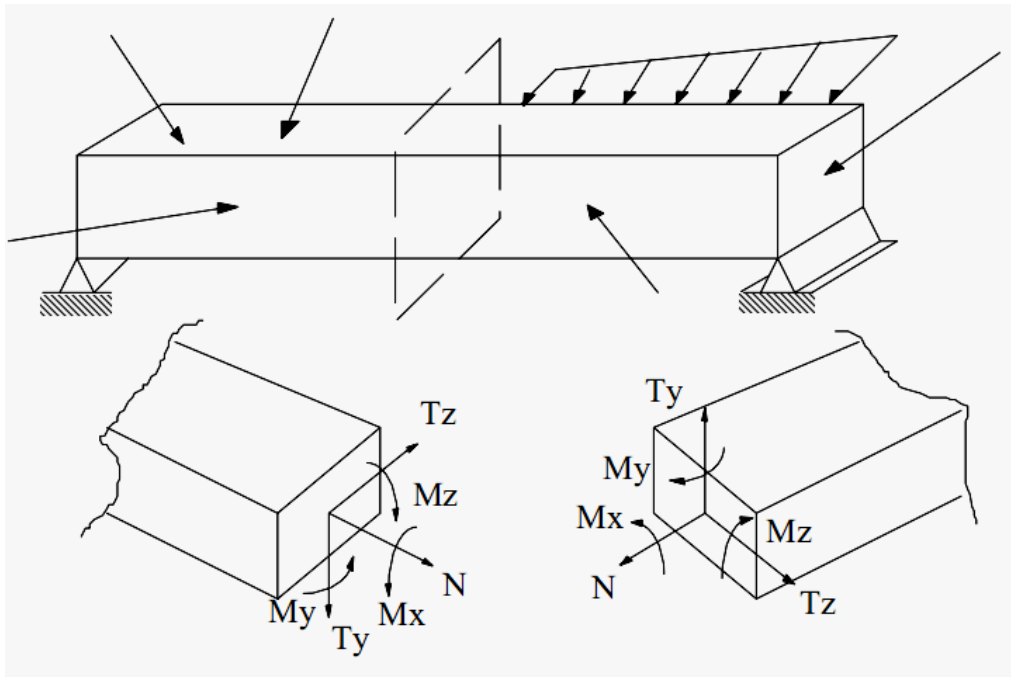


Figure I. 3 : Efforts intérieurs ou de cohésions.

**I.4.2 Effort longitudinal (N) :**

La composante  $N$  de la résultante  $F$  représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort longitudinal provoque une déformation longitudinale de l'élément.  $N$  est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas de compression.

La formule générale donnant la valeur de l'effort longitudinal dans une section droite arbitraire de la barre est de la forme :

$$N = \sum F + \sum \int q_x \cdot dx \tag{02}$$

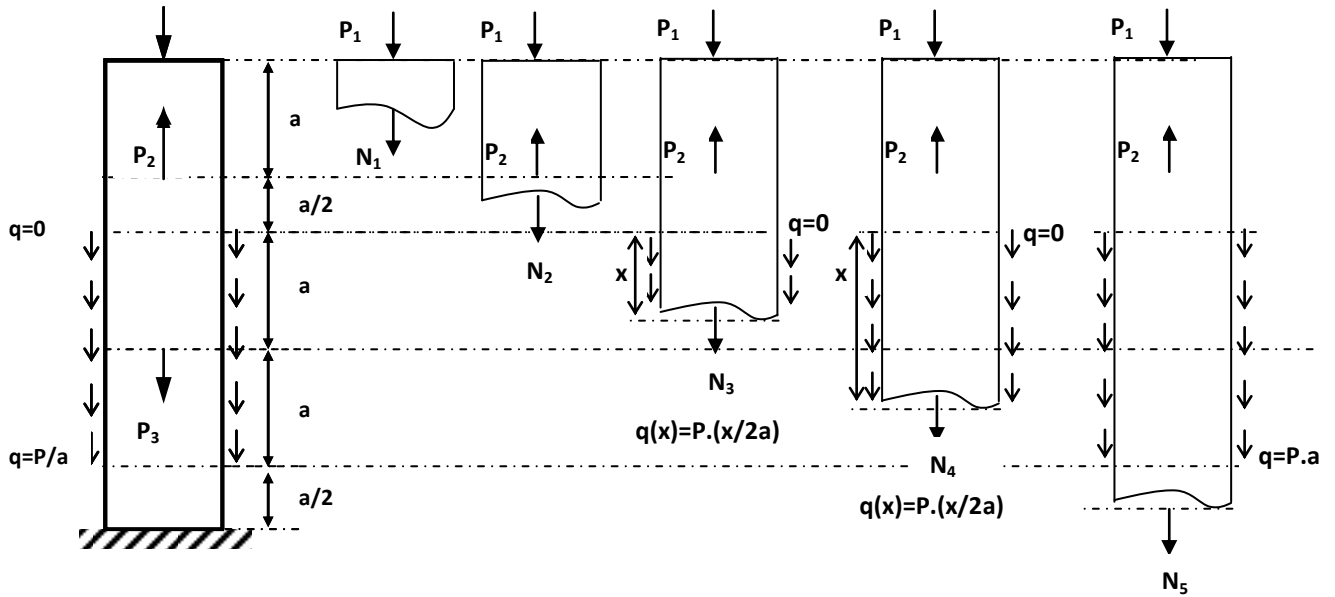
L'intégrale s'étend à la totalité de la longueur de chaque partie soumise à une charge répartie et la sommation à toutes les parties se trouvant d'un côté de la section considérée.

Si on oriente le vecteur de l'effort longitudinal  $N$  suivant la normale extérieure à la section droite considérée, la condition d'équilibre de la partie tranchée de la barre, c'est-à-dire la formule (02), nous donnera la valeur et le signe de l'effort recherché.

**Exemple 1**

Construire le diagramme de l'effort longitudinal  $N$  dans le problème suivant avec :

$P_1=P, P_2=3P, P_3=2P$ , la charge répartie varie linéairement de  $q=0$  à  $q=P/a$ .



**Section 1 :**

$$\sum F = 0 \implies N_1 + P_1 = 0 \implies N_1 = -P_1 = P$$

**Section 2 :**

$$\sum F = 0 \implies N_2 + P_1 - P_2 = 0 \implies N_2 = -P_1 + P_2 = 2P$$

**Section 3 :**

La charge répartie est linéaire de la forme :

$$q(x) = C \cdot x + B$$

D'où ;  $x=0, q(0)=0$  donc  $B=0$

$$x=2a, q(2a)=P/a \quad \text{Alors } 2a \cdot C = P/a \quad \text{donc} \quad C = P/2 \cdot a^2$$

$$q(x) = P \cdot x / 2 \cdot a^2$$

$$\sum F = 0 \implies N_3 + P_1 - P_2 + \int_{x=0}^{x=a} \frac{P}{2a^2} \cdot x \cdot dx = 0 \implies N_3 = -P_1 + P_2 - \frac{P \cdot x^2}{4 \cdot a^2}$$

$$N_3 = -P + 3P - \frac{P \cdot x^2}{4 \cdot a^2}$$

$$x=0 : \quad N_3 = -P + 3P = 2P$$

$$x=a : \quad N_3 = 2P - \left(\frac{P}{4}\right) = \frac{7}{4} \cdot P$$

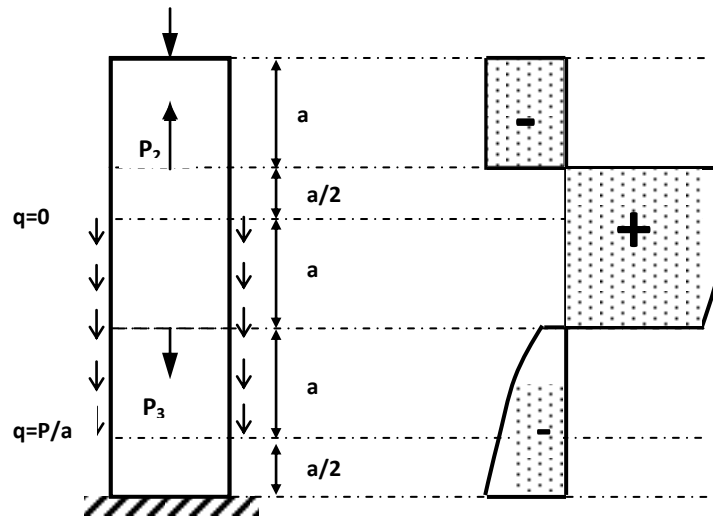
**Section 4 :**

$$\sum F = 0 \implies N_4 + P_1 - P_2 + P_3 + \int_{x=a}^{x=2a} \frac{P}{2a^2} \cdot x \cdot dx = 0 \implies N_4 = -P_1 + P_2 - P_3 - \frac{P \cdot x^2}{4 \cdot a^2}$$

$$N_4 = -\frac{P \cdot x^2}{4 \cdot a^2}$$

$$x=a : N_4 = -\frac{P}{4} \qquad x=2a : N_4 = -P$$

**Diagramme d'effort longitudinal**



**I.4.3 Effort tranchant (T) :**

Les efforts transversaux  $T_y$  et  $T_z$  sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans

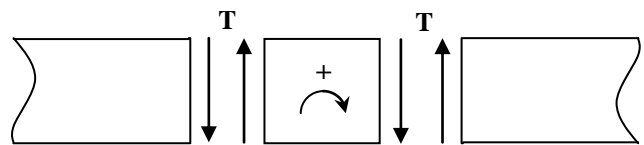
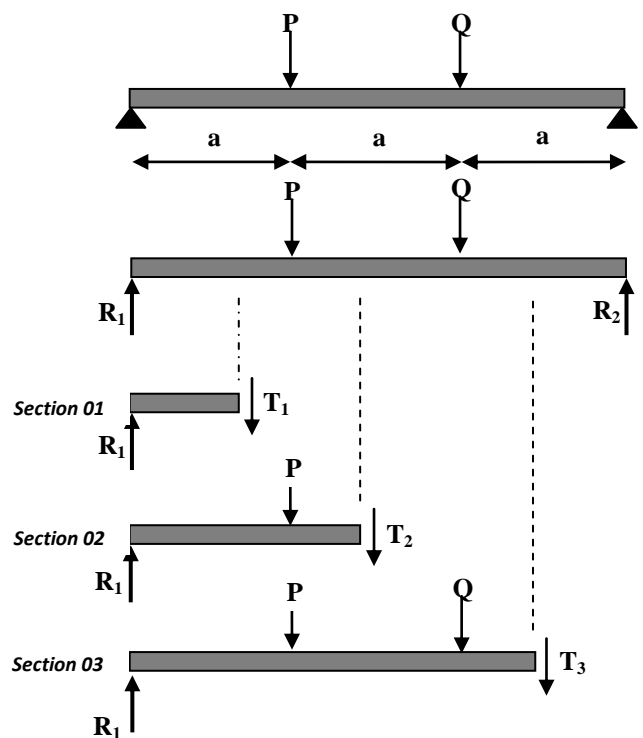


Figure I. 4: Effort tranchant

la direction y et z. Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre (Figure I.4).

**Exemple 02 :** Soit la poutre présentée ci-dessous, qui se repose sur deux appuis simples. La poutre est chargée avec deux charges concentrées P et  $Q=2P$  (exemple 02).

- Calculez les réactions dans les appuis et tracez le diagramme des efforts tranchants.



Exemple 02

Solution :

- Calcul des réactions :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow R_A + R_B - P - Q = 0$$

$$\rightarrow R_A = (P + Q) - R_B$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \rightarrow R_B \cdot 3a - Q \cdot 2a - P \cdot a = 0$$

$$\rightarrow R_B = \frac{2Q+P}{3} = \frac{5}{3} \cdot P$$

$$R_A = (P + Q) - R_B \rightarrow R_A = \frac{2P+Q}{3} = \frac{4}{3} \cdot P$$

- Calcul des efforts tranchants :

On appliquant la méthode des sections et le principe de la statique sur chaque section, on a :

Section 01 ( $0 \leq x \leq a$ ) :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow R_A - T_1 = 0 \rightarrow T_1 = R_A = \frac{4}{3} \cdot P$$

Section 02 ( $a \leq x \leq 2a$ ) :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow R_A - P - T_2 = 0 \rightarrow T_2 = R_A - P \rightarrow T_2 = \frac{1}{3} \cdot P$$

Section 03 ( $2a \leq x \leq 3a$ ) :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow R_A - P - Q - T_3 = 0 \rightarrow T_3 = R_A - P - Q \rightarrow T_3 = -\frac{5}{3} \cdot P$$

A partir de ses résultats on peut tracer le diagramme des efforts tranchants (Figure I.5).

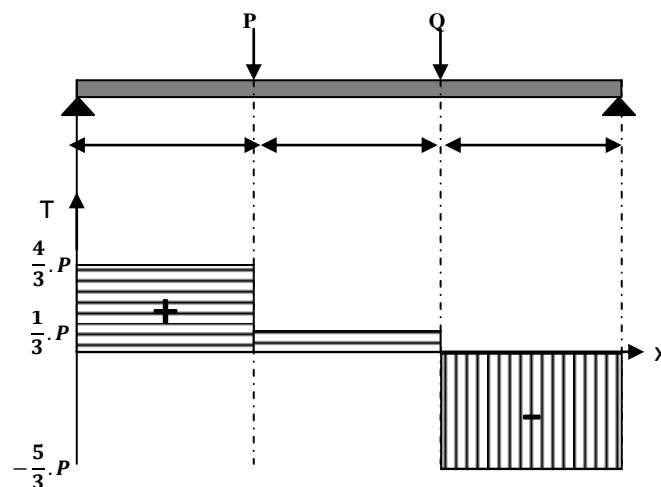


Figure I. 5 : Diagramme des efforts tranchants.

**I.4.4 Moment fléchissant ( $M_f$ ) :**

Les composantes  $M_y$  et  $M_z$  du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière  $y$  et  $z$  respectivement. La figure I.6 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

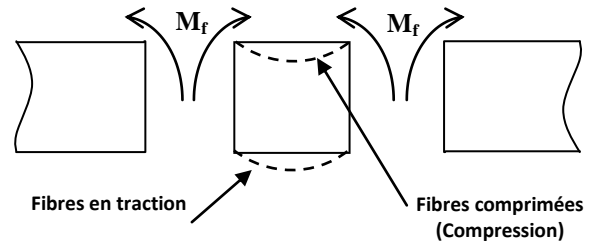


Figure I. 6 : Moment fléchissant

**Exemple 02 :** On va prendre le même exemple 01, et on va calculer et tracer le diagramme des moments fléchissant.

**Solution :** on appliquant le principe de la statique sur les moments et pour chaque section ;

Section 01 : ( $0 \leq x \leq a$ )

$$\sum \vec{M}_{/G1} = \vec{0} \rightarrow M_{f1} - R_A \cdot x = 0$$

$$\rightarrow M_{f1} = R_A \cdot x = \frac{4}{3} \cdot P \cdot x$$

$$x = 0 \rightarrow M_{f1} = 0$$

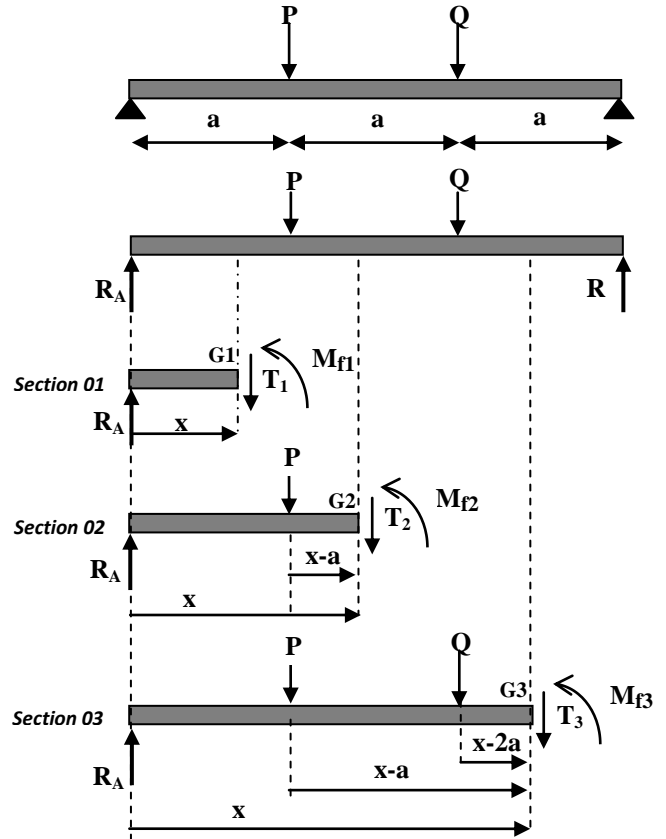
$$x = a \rightarrow M_{f1} = \frac{4}{3} \cdot P \cdot a$$

Section 02 : ( $a \leq x \leq 2a$ )

$$\sum \vec{M}_{/G2} = \vec{0} \rightarrow M_{f2} - R_A \cdot x + P \cdot (x - a) = 0 \rightarrow M_{f2} = R_A \cdot x - P(x - a)$$

$$\rightarrow M_{f2} = \frac{1}{3} \cdot P \cdot x + P \cdot a$$

$$x = a \rightarrow M_{f1} = \frac{4}{3} \cdot P \cdot a$$



Exemple 02

$$x = 2a \rightarrow M_{f2} = \frac{5}{3} \cdot P \cdot a$$

Section 03 : (2a ≤ x ≤ 3a)

$$\sum \vec{M}_{G3} = \vec{0} \rightarrow M_{f3} - R_A \cdot x + P \cdot (x - a) + Q \cdot (x - 2a) = 0$$

$$\rightarrow M_{f3} = R_A \cdot x - P(x - a) - Q \cdot (x - 2a)$$

$$\rightarrow M_{f3} = -\frac{5}{3} \cdot P \cdot x + 5 \cdot P \cdot a$$

$$x = 2a \rightarrow M_{f3} = \frac{5}{3} \cdot P \cdot a$$

$$x = 3a \rightarrow M_{f3} = 0$$

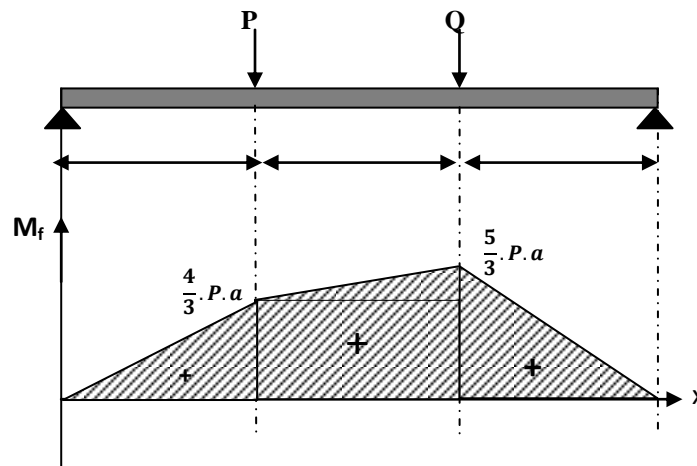


Figure I. 7 : Diagramme des moments fléchissant.

### I.4.5 Moment de torsion (M<sub>t</sub>) :

Le moment de torsion M<sub>x</sub> ou M<sub>t</sub> (Figure I.8) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre x. Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure.

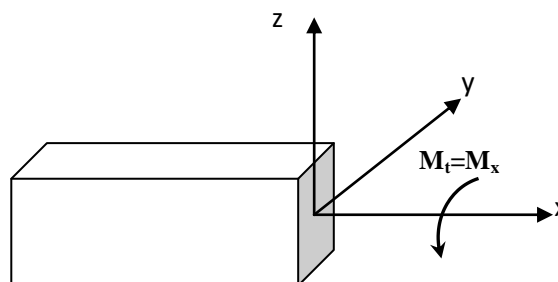


Figure I. 8 : Moment de torsion M<sub>t</sub>.

**Exemple 03 :** tracez le digramme de moment de torsion de la poutre encastrée (Exemple 03).

Solution :

1- Calcul du moment  $M$  à l'encastrement :

$$\sum \vec{M}/_{ox} = \vec{0} \rightarrow M + 4 - 8 = 0 \rightarrow M = 4 \text{ KN.m}$$

2- Calcul du moment de torsion  $M_t$  dans chaque tronçon :

Tronçon 1 :  $0 \leq x \leq 1\text{m}$

$$\sum \vec{M}/_{ox} = \vec{0} \rightarrow M_{t1} - M = 0 \rightarrow M_{t1} = M$$

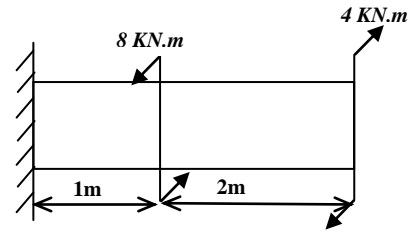
$$M_{t1} = 4 \text{ KN.m}$$

Tronçon 2 :  $1 \leq x \leq 3\text{m}$

$$\sum \vec{M}/_{ox} = \vec{0} \rightarrow M_{t2} + 8 - M = 0 \rightarrow M_{t2} = M - 8$$

$$M_{t2} = -4 \text{ KN.m}$$

3- Diagramme du moment de torsion :



Exemple 03

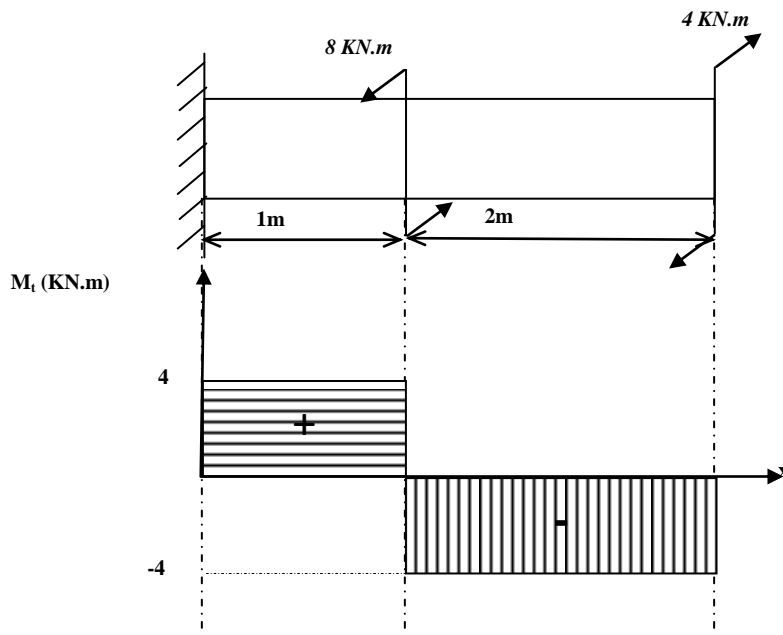
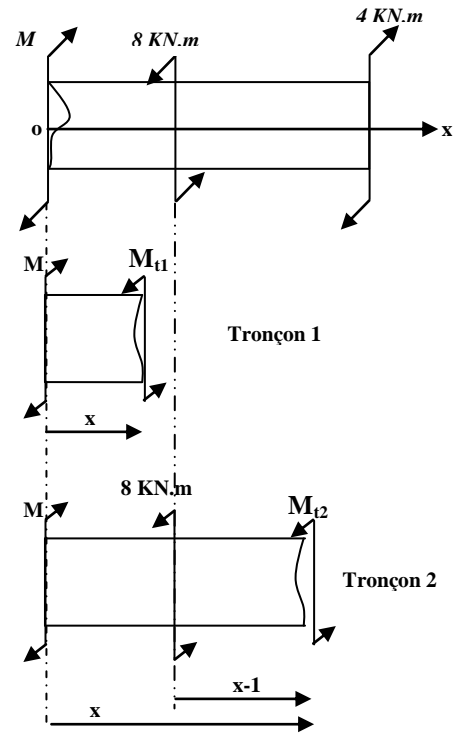


Figure I. 9: Diagramme du moment de torsion

### I.5 Notions de contraintes :

Les efforts internes définis précédemment, engendré par des forces extérieures, ne sont que les résultantes des efforts élémentaires agissant sur chaque section de l'élément sollicité par les forces extérieures. On appelle ces efforts élémentaires, contraintes.

Découpons au voisinage du point  $O$  du corps sollicité, un parallélépipède rectangulaire infiniment petit de côtes  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  (figure I.10). Sur chaque face de ce parallélépipède agissent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles.

- L'état de contrainte plan est le cas particulier d'une seule facette du volume où sur chaque côte agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle.
- L'état de contrainte linéaire est le cas particulier d'une seule contrainte normale et une contrainte tangentielle.

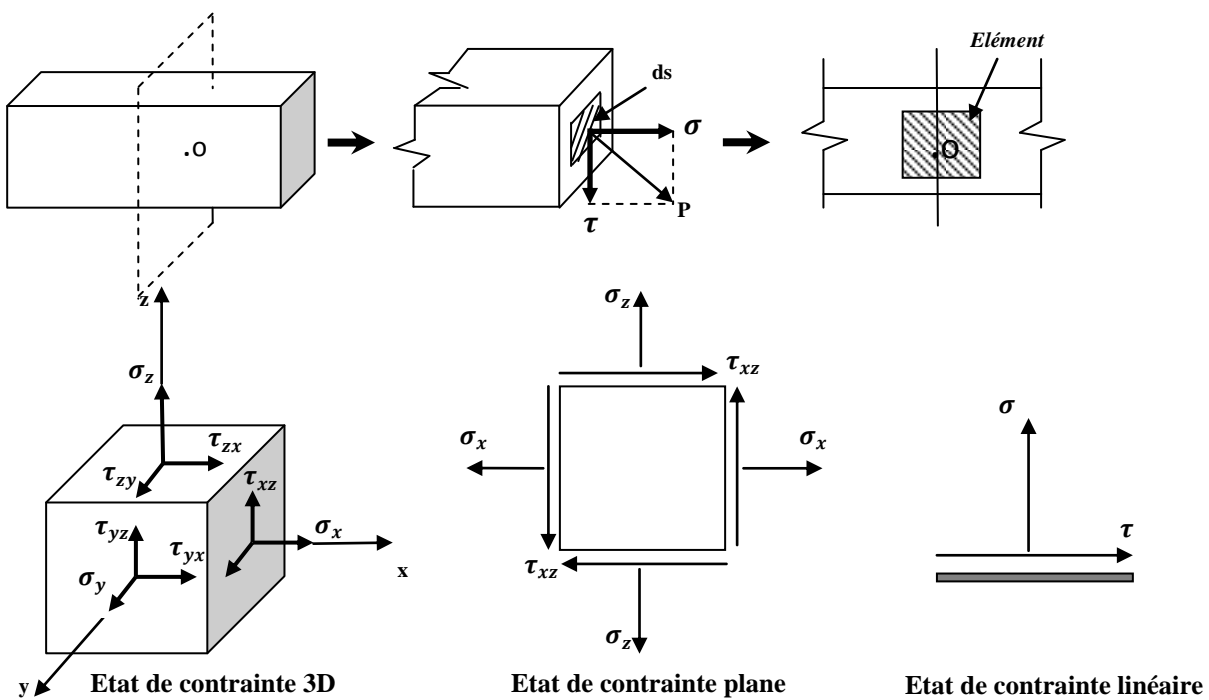


Figure I. 10 : Les états de contraintes.



## **Chapitre II**

### **Traction et compression**

## II. Traction et compression

### II.1 Elasticité

Sous l'action des efforts externes, les particules du corps se déplacent jusqu'à ce qu'un équilibre s'établisse entre les efforts externes et internes. Le corps est alors en état de déformation. Pendant la déformation, les efforts externes agissant sur le corps créent un travail, et ce travail se transforme complètement ou partiellement en énergie potentielle de déformation. Si les forces qui créent la déformation du corps diminuent graduellement d'intensité, le corps retrouve totalement ou partiellement sa forme originale.

Considérons par exemple, une barre prismatique sollicitée à une extrémité, comme l'indique la figure II.1. Sous l'action de cette charge la barre s'allongera d'une certaine longueur. Lorsque la charge est réduite, l'allongement de la barre diminue aussi. L'élasticité est la propriété physique d'un corps de reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation.

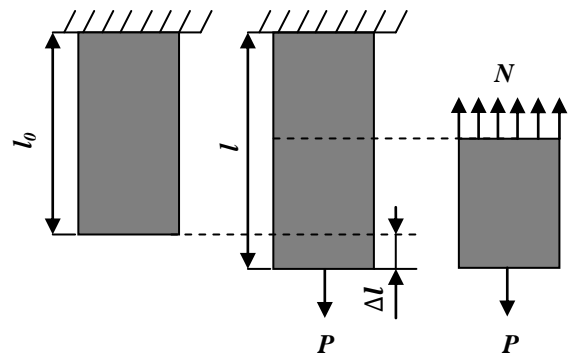


Figure II. 1 : Corps sollicité à une extrémité

### II.2 Efforts normal et contrainte normale

A l'aide des efforts normaux  $N_x$  (ou longitudinaux), citée précédemment, et supposant que dans toutes les sections droites des barres en extension ou en compression, les contraintes normales sont uniformément réparties (ceci est vrai approximativement aussi pour les barres à section variable). La valeur de la contrainte normale  $\sigma_x$  dans une section droite arbitraire  $S_x$  est de ce fait déterminée par le rapport de l'effort longitudinal  $N_x$  à l'aire  $S_x$  de la section, c'est-à-dire :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{S_x} \tag{II-1}$$

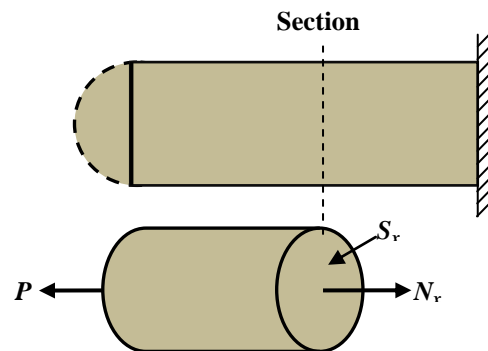


Figure II. 2 : Effort normal et contrainte normale.

### II.3 Loi de HOOKE

#### II.3.1 Forme généralisée de la loi de Hooke

La forme simple de la loi de Hooke (Robert Hooke 1678) a été énoncée pour une tension axiale, la charge étant entièrement dirigée en ligne droite, elle ne considère que la déformation dans la direction de la charge :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad (\text{II.2})$$

Dans le cas le plus général, un élément de matière est soumis à trois contraintes perpendiculaires  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$ , accompagnée respectivement par les déformations  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$ . En superposant les composantes de déformation dues à la contraction latérale résultant de l'effet de poisson aux déformations directes, on obtient la forme généralisée de la loi de Hooke :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_x)] \quad (\text{II.3})$$

$\nu$  : coefficient du Poisson.

#### II.3.2 Coefficient de poisson :

Lorsqu'une barre est soumise à une tension pure, il se produit une augmentation de longueur en direction de la charge, mais aussi une diminution des dimensions latérales perpendiculairement à la charge (Figure II.3). Le rapport de la déformation latérale à celle en direction axiale est le coefficient de poisson  $\nu$ . Il se situe généralement entre 0,25 et 0,35 pour la plupart des métaux.

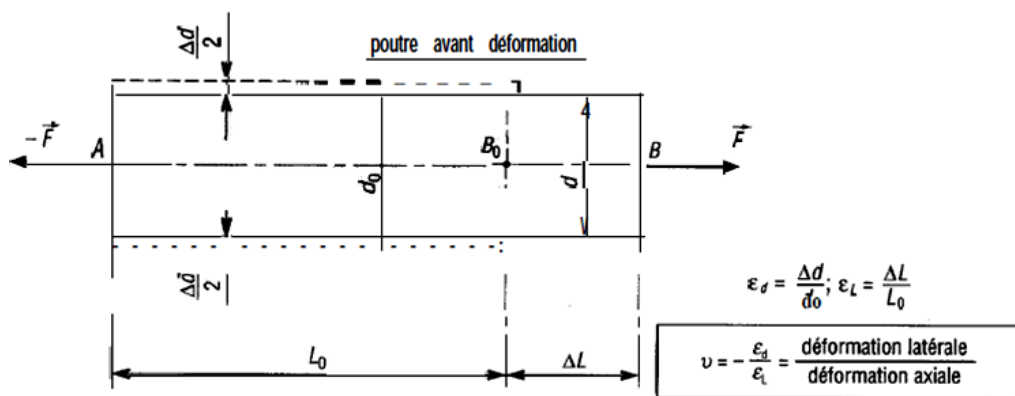


Figure II. 3 : Déformations latérale et axiale.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_l} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (\text{II.4})$$

### II.3.3 Déformation normale :

A partir de l'allongement sur la longueur d'un essai de traction ou compression, on peut déterminer l'allongement par unité de longueur, qui est la déformation normale notée  $\varepsilon$ , pour cela on divise l'allongement total  $\Delta l = l - l_0$  par la longueur de référence  $l_0$  :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{N}{A.E} \quad (\text{Sans dimension}) \quad (\text{II.5})$$

A l'aide de l'expérience sur l'allongement des barres prismatiques (Figure II.4), l'allongement d'une barre est proportionnel à l'effort de traction, ceci pour plusieurs matériaux de construction. En admettant que les matériaux des barres obéissent à la loi de Hooke (Robert Hooke 1678), la valeur de l'allongement absolu longitudinal peut être calculée d'après la formule :

$$\Delta l = \sum \int \frac{N.dx}{E.A} \quad (\text{II.6})$$

$E$  (N/mm<sup>2</sup>): module d'élasticité longitudinal du matériau

$N$  (N): effort produisant l'allongement de la barre

$A$  ou  $S$  (mm<sup>2</sup>): aire de la section transversale de la barre

$\Delta l$  (mm): Allongement total de la barre.

L'intégration s'effectue suivant la longueur de chaque partie, et la sommation suivant toutes les parties de la barre. Si  $N$  et  $A$  sont constants suivant la longueur  $l_0$ , la loi de Hooke s'écrit alors :

$$\Delta l = \frac{N.l_0}{A.E} \quad (\text{II.7})$$

## II.4 Essai de traction

### II.4.1 Eprouvettes d'essai

Le type de charge axiale se rencontre fréquemment dans les projets de structures et de machines. Pour reproduire au laboratoire ce type de charge, on fixe une éprouvette dans les mâchoires d'une machine d'essai à engrenage mue électriquement ou hydrauliquement. Ces deux types de machine sont couramment utilisés dans les laboratoires d'essai des matériaux pour appliquer une tension axiale.

Pour normaliser les méthodes d'essai des matériaux, l'American Society for Testing Materials a élaboré des spécifications utilisées dans toute l'Amérique. Pour les essais en tension et compression axiales, ces normes prévoient toute une série d'éprouvettes pour divers matériaux métalliques et non métalliques. Par exemple, dans le cas des éprouvettes de type haltère, pour les plaques de métal l'épaisseur de l'éprouvette est égale à 4,76mm d'épaisseur (Figure II.4-a) et pour

l'éprouvette prismatique, utilisée pour les métaux, le diamètre est supérieure à 38,10mm (Figure II.4-b). Les dimensions indiquées sont celles spécifiées par l'A.S.T.M, mais les extrémités des éprouvettes peuvent présenter la forme voulue pour s'adapter aux mâchoires de la machine d'essai. Comme on peut le voir sur les figures II.4, la partie centrale est un peu moins large que les extrémités, avec un congé qui répartie la charge pour que la rupture ne se produise pas dans les parties fixées dans les mâchoires. Les arrondis sont prévus pour éviter les concentrations de contrainte à la transition entre les deux portions d'inégale longueur. La longueur normalisée sur laquelle est mesuré l'allongement est de 203,20mm pour l'éprouvette de la figure 10-a et de 50,80mm pour celle de la figure 10-b.

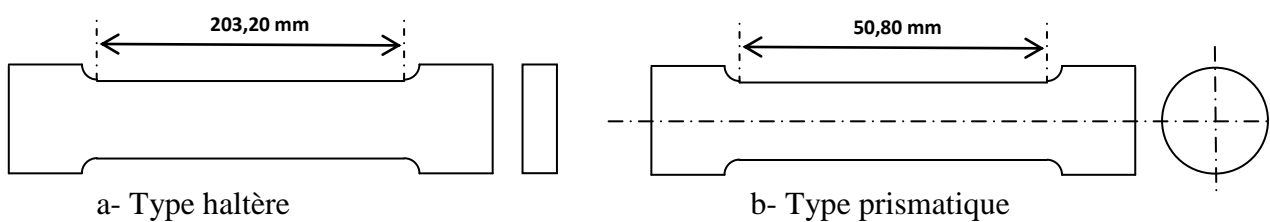


Figure II. 4 : Type des éprouvettes d'essai de traction.

#### II.4.2 Présentation de l'essai de traction :

L'essai consiste à exercer sur une éprouvette de forme cylindrique ou parallélépipédique (plate) des forces croissantes, qui vont la déformer progressivement puis la rompre.

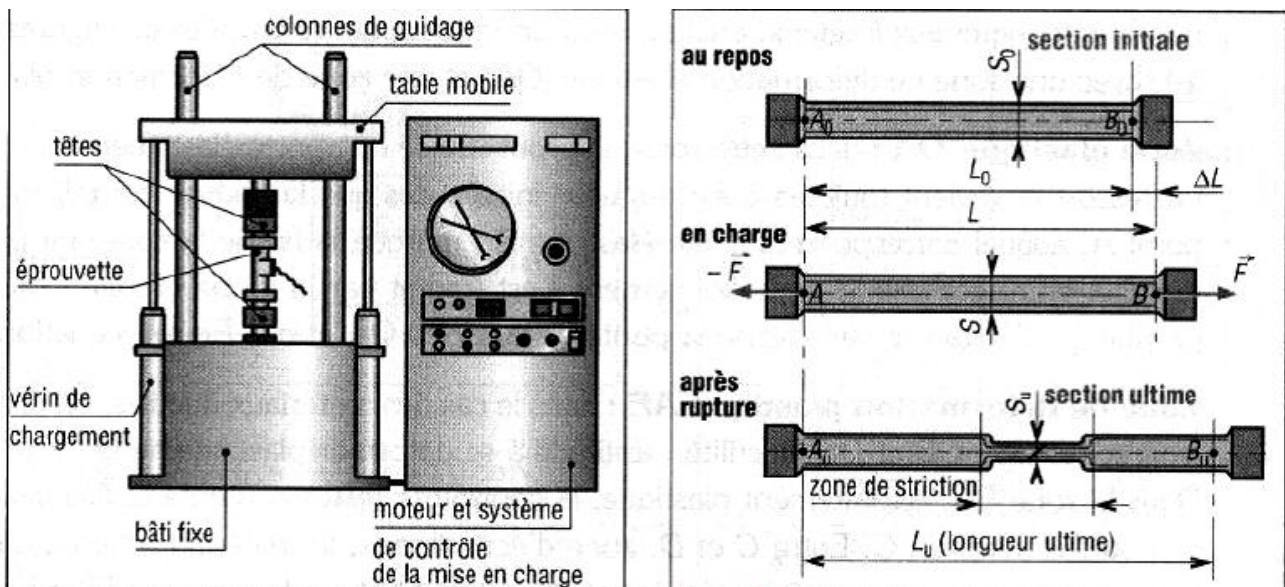


Figure II. 5 : Essais de traction.

En appliquant graduellement la charge par incrément, l'allongement total est mesuré sur la longueur de référence  $l_0$ , pour chaque incrément de charge  $F$  et ceci jusqu'à rupture de l'éprouvette.

La contrainte normale  $\sigma$  peut être calculée pour toute charge axiale en utilisant l'équation  $\sigma = \frac{N}{S}$ . La déformation est aussi calculée avec l'équation  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ . Après avoir un certain nombre de valeurs numérique, on peut tracer la courbe ou le diagramme **Contrainte/Déformation**. La courbe Contrainte/Déformation (Figure II.6) peut servir à caractériser plusieurs propriétés mécaniques du matériau :

- Limite de proportionnalité : point A
- Limite élastique ( $\sigma_e$  ou  $R_e$ ): coordonnées d'un point qui coïncide presque avec le point A
- Domaine élastique et domaine plastique :
  - ❖ Du point O jusqu'à A c'est le domaine élastique.
  - ❖ Du point A jusqu'à point de la rupture B c'est le domaine plastique.
- Seuil de plasticité «point R» : notée  $\sigma_{e0,2}$  ou  $R_{e0,2}$ , pour lequel il y a accroissement de la déformation sans augmentation de la contrainte.
- Résistance à la traction  $\sigma_r$  ou  $R_r$  : le point D, ordonnée maximale de la courbe.
- le point E est le point de rupture.
- Coefficient de striction  $Z\%$  :  $Z\% = \frac{S_u}{S_0} \cdot 100$

Avec :  $S_u$  : Section ultime après rupture       $S_0$  : section initiale de l'éprouvette.

- Le module d'élasticité longitudinal E.
- Le coefficient de poisson  $\nu$ .

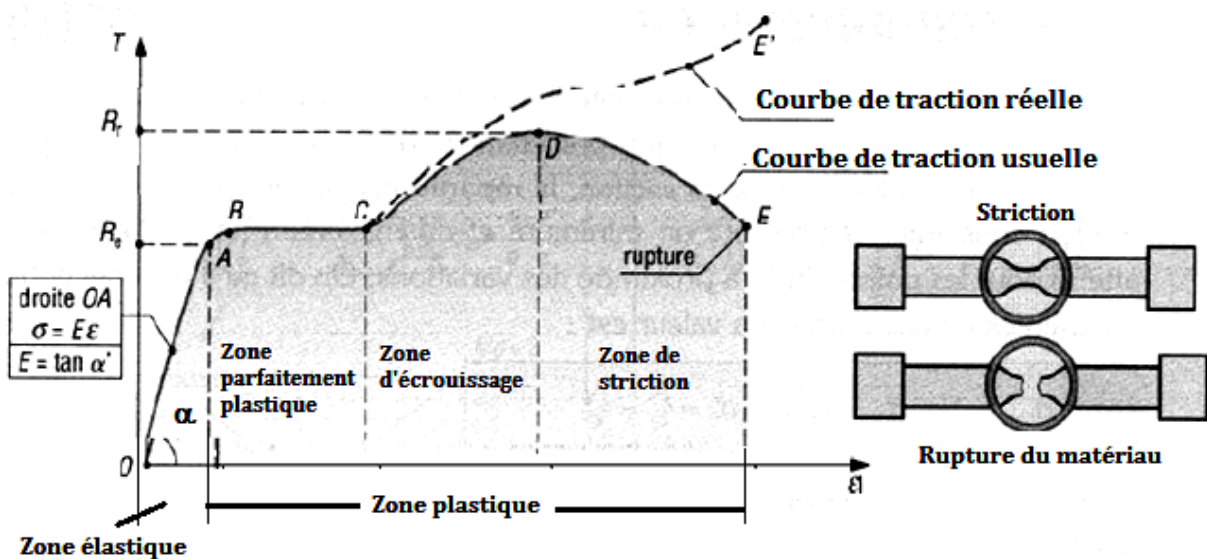


Figure II. 6 : La courbe contrainte/déformation d'un essai de traction.

### II.4.3 Condition de résistance à la traction

Pour des questions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte maximale de traction  $\sigma_{max}^{tr}$  appliquée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension ou à la traction  $R_{pe}^{tr}$ .

La résistance pratique  $R_{pe}^{tr}$  est fixée par des normes ou par le constructeur, dans le cas général,  $R_{pe}$  est définie à partir de la limite élastique  $\sigma_e$  ou  $R_e$  du matériau.

$$\sigma_{max}^{tr} \leq R_{pe}^{tr} \quad \text{avec} \quad R_{pe}^{tr} = \frac{R_e}{s} \quad (\text{II.8})$$

$s$  : est coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil ou de la structure.

$R_e$  : Limite élastique ( $\sigma_e$ ).

*Remarque* : Dans le cas des matériaux fragiles, on préfère utiliser la résistance à la rupture  $R_r$  du matériau, à la place de  $R_e$  pour définir  $s$ .

## II.5 Essai de compression

### II.5.1 Généralités

La figure montre les effets d'une charge de résultante  $N$  sur une pièce courte. Lorsqu'il s'agit de compression, le problème est moins net. Pour s'en rendre compte, il suffit de charger de bout une règle plate (Figure II. 7). Lorsque la charge  $P$  atteint une certaine valeur, la règle fléchit, on appelle cette flexion latérale le flambage. C'est un phénomène très dangereux, car amorcé sous une charge  $P$ , il s'accroît très vite jusqu'à la rupture lorsque  $P$  croît.

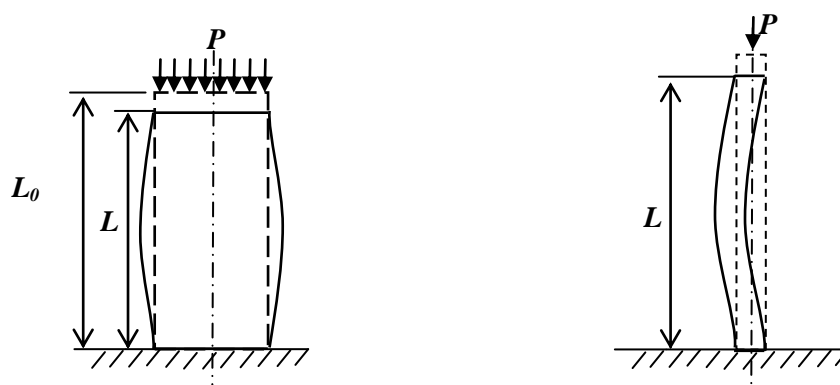


Figure II. 7 : Compression et flambage.

Considérons maintenant une tôle (Figure II. 8), c'est-à-dire un solide de faible épaisseur vis-à-vis de ses autres dimensions, serrée entre des mors parallèles d'un étai. Parler de contrainte de compression dans cette tôle n'a pas beaucoup de sens, en cherche bien plus d'éviter la détérioration possible des surfaces de contact.

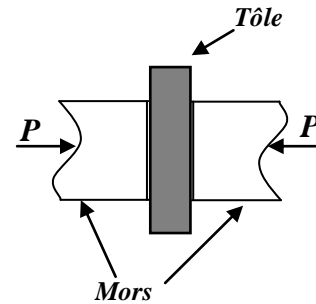


Figure II. 8 : Tôle mince en compression.

En conclusion, le cas idéal de compression intéresse les pièces courtes, mais pas trop courtes ; leur longueur  $L$  est comprise entre 3 et 8 fois la plus faible des dimensions transversales.

### II.5.2 Essai de compression :

L'essai de compression consiste des éprouvettes, cylindrique ou prismatique voisines de la section carrée, placées entre les plateaux d'une presse hydraulique. Au début de l'essai, les raccourcissements sont élastiques et directement proportionnels aux charges appliquées.

Au-delà d'une certaine charge à laquelle correspond la limite d'élasticité à la compression, les déformations subsistent en partie lorsque la charge est supprimée. L'éprouvette se rompt lorsque la limite de résistance à la compression est atteinte. Différents modes de rupture peuvent être observés.

- Par dilatation : pour les substances ductiles à résilience élevée (fer, acier, cuivre, bronze).
- Par glissement suivant des surfaces de séparation obliques pour les substances granuleuses (fonte, béton, pierre).
- Par plissement pour les substances fibreuses (bois).

### II.5.3 Condition de résistance à la compression

La condition de résistance à la compression est la même que la traction. La contrainte maximale à la compression appliquée  $\sigma_{max}^{comp}$  doit rester inférieure à une contrainte limite admissible du matériau, appelée résistance pratique à la compression  $R_{pe}^{comp}$ .

La résistance pratique  $R_{pe}^{tr}$  est fixée par des normes ou par le constructeur, dans le cas général,  $R_{pe}^{tr}$  est définie à partir de la limite élastique  $\sigma_e$  ou  $R_e$  du matériau.

$$\sigma_{max}^{com} \leq R_{pe}^{comp} \quad \text{avec} \quad R_{pe}^{comp} = \frac{R_e}{s} \quad (\text{II.8})$$



$s$  : est coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil ou de la structure.

$R_e$  : Limite élastique ( $\sigma_e$ ).

**Remarque** : Dans le cas des matériaux fragiles, on préfère utiliser la résistance à la rupture  $R_r$  du matériau, à la place de  $R_e$  pour définir  $s$ .

**Exemple** : Déterminer les efforts, les contraintes et les déformations dans chaque section.  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ .

### Section 1 :

$\sum \vec{F} = 0$  Après projection on a

$$N_1 + 400 = 0 \rightarrow N_1 = -400 \text{ kN}$$

Contrainte normale  $\sigma_1$  :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}, \quad \text{avec} \quad A_1 = \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} = 3,14 \cdot \frac{50^2}{4}, \quad A_1 = 1962,5 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{-400 \cdot 10^3}{1962,5}, \quad \sigma_1 = -203,8 \text{ N/mm}^2$$

- La contrainte est négative signifie que cette partie est en compression.

Le raccourcissement  $\Delta L_1$  :

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_0}{A_1 \cdot E} = \frac{\sigma_1 \cdot L_0}{E}, \quad \text{Avec} \quad L_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

$$\Delta L_1 = \frac{-203,8 \cdot 3 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5}, \quad \Delta L_1 = -2,91 \text{ mm}$$

La déformation  $\varepsilon_1$  :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{-2,91}{3 \cdot 10^3}, \quad \varepsilon_1 = 0,00097 \text{ mm/mm}$$

### Section 2 :

$\sum \vec{F} = 0$  Après projection on a

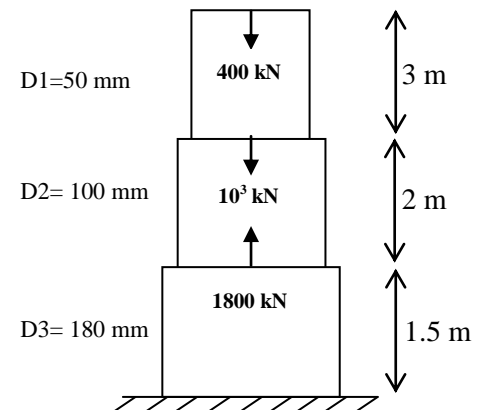
$$N_2 + 400 + 1000 = 0 \rightarrow N_2 = -1400 \text{ kN}$$

Contrainte normale  $\sigma_2$  :

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}, \quad \text{avec} \quad A_2 = \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} = 3,14 \cdot \frac{100^2}{4}, \quad A_2 = 7850 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{-1400 \cdot 10^3}{7850}, \quad \sigma_2 = -178,34 \text{ N/mm}^2$$

- La contrainte est négative signifie que cette partie est en compression.



Le raccourcissement  $\Delta L_2$  :

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_0}{A_2 \cdot E} = \frac{\sigma_2 \cdot L_0}{E}, \quad \text{Avec } L_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{-178,34 \cdot 2 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5}, \quad \Delta L_2 = -1,69 \text{ mm}$$

La déformation  $\varepsilon_2$  :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{-1,69}{2 \cdot 10^3}, \quad \varepsilon_2 = 0,000845 \text{ mm/mm}$$

### Section 3 :

$\sum \vec{F} = 0$  Après projection on a

$$N_3 + 400 + 1000 - 1800 = 0 \rightarrow N_3 = 400 \text{ kN}$$

Contrainte normale 3 :

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3}, \quad \text{avec } A_3 = \pi \cdot \frac{D_3^2}{4} = 3,14 \cdot \frac{180^2}{4}, \quad A_3 = 25434 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{400 \cdot 10^3}{25434}, \quad \sigma_3 = 15,72 \text{ N/mm}^2$$

- La contrainte est positive signifie cette partie est en traction.

L'allongement  $\Delta L_3$  :

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 \cdot L_0}{A_3 \cdot E} = \frac{\sigma_3 \cdot L_0}{E}, \quad \text{Avec } L_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ mm}$$

$$\Delta L_3 = \frac{15,72 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5}, \quad \Delta L_3 = 0,11 \text{ mm}$$

La déformation  $\varepsilon_2$  :

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0,11}{1,5 \cdot 10^3}, \quad \varepsilon_2 = 7,33 \cdot 10^{-5} \text{ mm/mm}$$

L'allongement total  $\Delta L_{tot}$  :

$$\Delta L_{tot} = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = -2,91 - 1,69 + 0,11$$

$$\Delta L_{tot} = -4,49 \text{ mm.}$$

- L'allongement totale est négative cela signifie que la structure globale est en compression.

**Système de barres isostatique :**

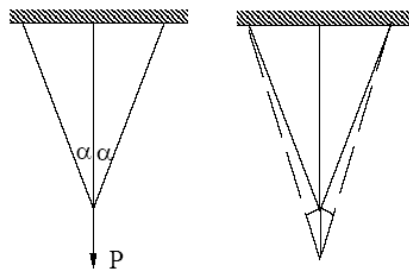
Un système est isostatique quand on peut déterminer les efforts intérieurs par les seules équations d'équilibre.

**Système de barres hyperstatique :**

On appelle structures hyperstatique les structures pour lesquelles les efforts qui sollicitent leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations de la statique. La résolution de ces systèmes s'effectue en considérant les aspects décrits ci-dessous :

- 1- **Aspect statique** : écrire les équations d'équilibre des barres sectionnées.
- 2- **Aspect géométrique** : établir le rapport entre les déformations à partir de la compatibilité géométrique.
- 3- **Aspect physique du problème** : établir les relations effort-déformation en utilisant la loi de Hooke  $\Delta L = \frac{N.L}{E.S}$  pour transformer les expressions de déformation en équations ayant des efforts normaux comme inconnus.
- 4- **Résolution du système d'équation.**

**Exemple** : soit le système de barres défini sur la figure ci-après. Etant données :  $L_1, S_1, L_2, S_2, L_3, S_3, P$  et  $\alpha$  avec  $L_1=L_2$ . Déterminer les efforts dans les barres.



**1- Aspect statique**

$$\sum F_x = 0$$

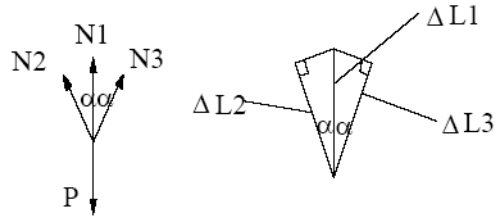
$$N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = N_3 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

$$\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P \quad (2)$$



**2- Aspect géométrique**

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$$

**3- Aspect physique:**

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{ES} \quad \text{et} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{ES}$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N_2 L_2}{ES} = \frac{N_1 L_1}{ES} \cos \alpha \Rightarrow N_2 L_2 = N_1 L_1 \cos \alpha$$

**4- Synthèse et résolution des équations**

On élimine  $N_3$  de (2)  $\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P$

de (5) on tire  $N_1 = N_2 \frac{L_2}{L_1 \cos \alpha}$

et en combinant (6) et (7) on aura alors

$$\Rightarrow N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad \text{et} \quad N_2 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

### III- Cisaillement

#### III-1 Objectifs :

- Définir l'effort tranchant  $T$ , la contrainte de cisaillement  $\tau$ , l'angle de glissement  $\gamma$ , le module d'élasticité transversal  $G$  et la loi liant  $\tau$  avec  $\gamma$ .
- Donner quelques applications usuelles du cisaillement.

#### III-2 Définition :

L'étude du cisaillement ressemble à celle de la traction (formules analogiques, etc.).

Une cisaille hydraulique est utilisée pour couper des ronds, fers et plats de petites dimensions. Elle se compose d'un bâti (0), d'un coulisseau (4) en liaison glissière par rapport au bâti (translation verticale), d'une lame fixe (2), d'une lame mobile (1) (liée au coulisseau) et d'un vérin hydraulique fournissant l'effort de coupe (5).

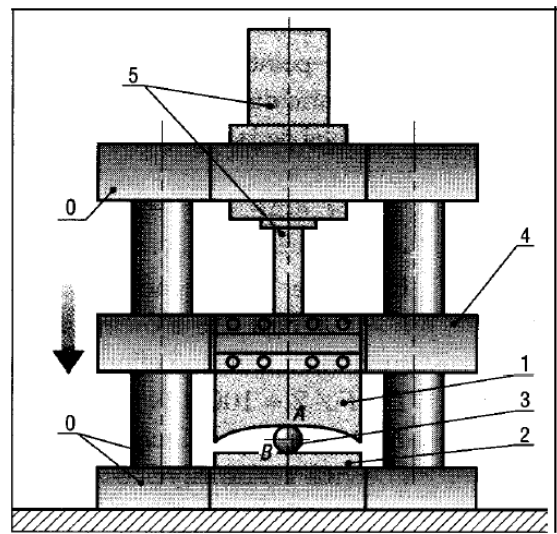


Fig. 1

Les efforts de cisaillement  $F_a$  et  $F_b$  exercés par les lames sont perpendiculaires à la poutre (3). Le cisaillement du rond se traduit par le glissement de la section droite  $S_1$  par rapport à la section droite  $S_2$  qui lui est directement en contact (Fig.2).

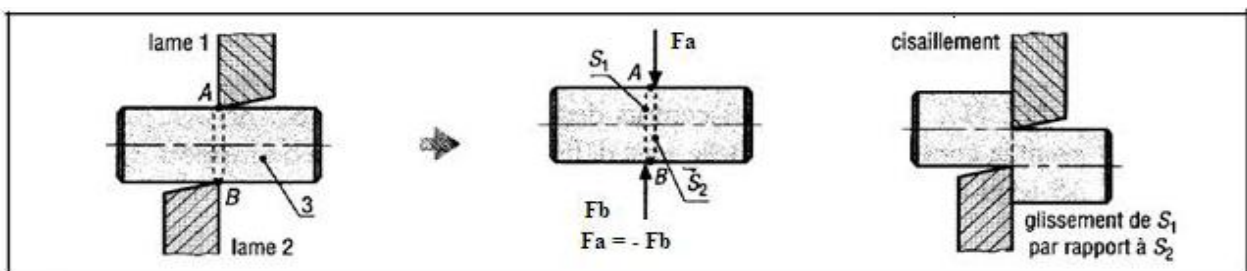


Fig. 2

#### Exemple :

Trois blocs de bois identiques (1), (2) et (3) de forme parallélépipédique, sont collés en chape comme l'indique la figure 3. L'assemblage supporte une charge  $F$  suivant son axe de symétrie. Les deux faces collées

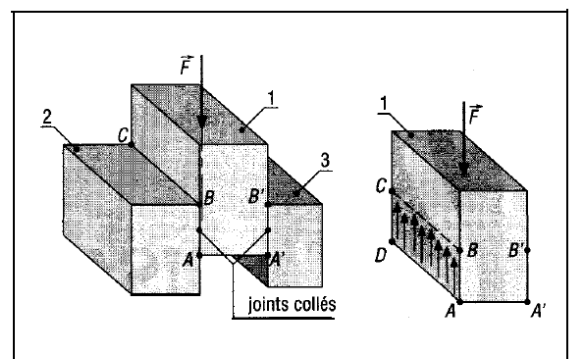


Fig. 3

ABCD et A'B'C'D', de même aire, sont soumises à un cisaillement de même nature que celui de l'exemple ci-dessus.

**III-3 Effort Tranchant T :**

Pour l'exemple 1, les actions exercées par S<sub>2</sub> et S<sub>1</sub> sont schématisées par une infinité de petites forces  $\overrightarrow{\Delta f_1}, \overrightarrow{\Delta f_2}, \dots, \overrightarrow{\Delta f_n}$  agissant sur les surfaces élémentaires  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  telle que  $\sum \Delta S_i$ .

$\vec{T}$  Résultante des actions précédentes, point d'application G le barycentre de la section S<sub>1</sub>, est égal et opposé à F (par application du principe fondamental de la statique).

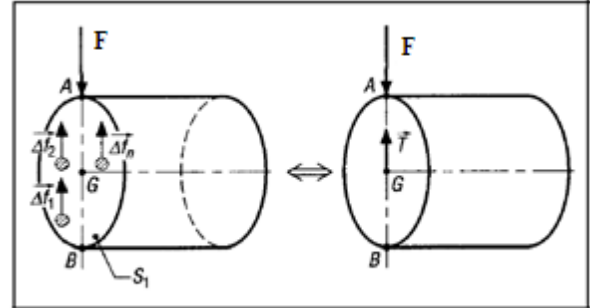


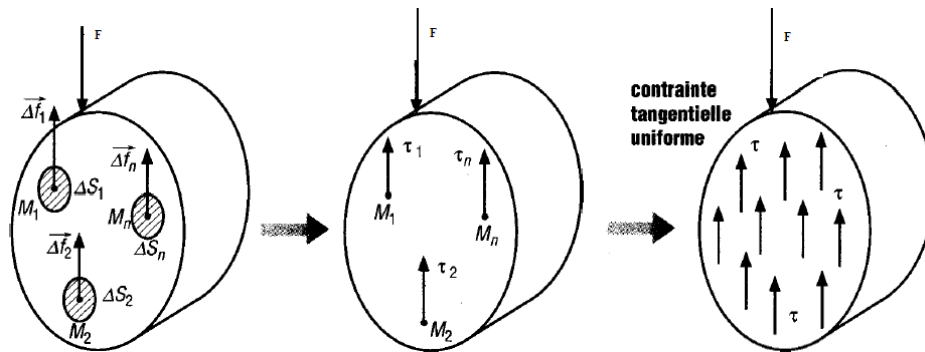
Fig. 4

$$\vec{T} = \overrightarrow{\Delta f_1} + \overrightarrow{\Delta f_2} + \dots + \overrightarrow{\Delta f_n} = -\vec{F}$$

**III-4 Contrainte de cisaillement  $\tau$**

Si  $M_1, M_2, \dots, M_n$  sont les centres des petites surfaces  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ , en chaque point la contrainte tangentielle  $\tau$  est définie comme la limite du rapport  $\Delta f$  sur  $\Delta S$  lorsque  $\Delta S$  tend vers 0 ou devient très petit :

$$\tau_1 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f_1}{\Delta S_1} \right), \tau_2 = \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f_2}{\Delta S_2} \right), \dots, \tau_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f_n}{\Delta S_n} \right)$$



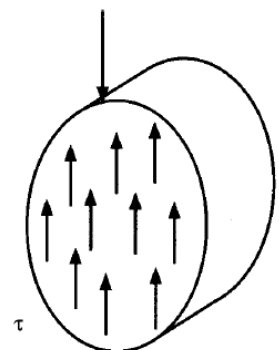
**Remarque :**

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  sont contenues dans la section droite, contrairement aux contraintes normales  $\sigma$  qui lui sont perpendiculaires.

**Contrainte tangentielle uniforme  $\tau$**

Dans le cas du cisaillement, on suppose que toutes les contraintes tangentielles sont identiques. Autrement dit, il y a répartition uniforme des contraintes dans la section cisailée ( $\tau_1 = \tau_2 = \tau_n$ ). Il en résulte que :

$$\tau = \frac{T}{S}$$



$\tau$ : Contrainte tangentielle (N/mm<sup>2</sup>) ou MPa.

**T** : Effort tranchant (N).

**S** ou **A** : aire de la section droite cisailée en mm<sup>2</sup>.

### III-5 Condition de résistance :

On utilise le même raisonnement qu'en traction, pour la plupart des constructions, sauf pour les cas où la rupture est recherchée, la contrainte tangentielle  $\tau$  dans la section cisailée doit toujours être inférieure à la contrainte admissible au cisaillement du matériau  $\tau_{adm}$  ou  $R_{pg}$ .

$$\tau = \frac{T}{S} \leq \tau_{adm} \text{ ou } R_{pg} \quad \text{avec} \quad R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

$R_{pg}$  : Résistance pratique au glissement ou au cisaillement.

$R_{eg}$  : Limite élastique au cisaillement.

$s$  : Coefficient de sécurité.

- Pour les métaux fibreux comme l'acier, la résistance à la rupture par glissement  $R_g$  est sensiblement égale à la moitié de la résistance à la rupture par traction  $R$  (traction).

$$R_g = \frac{R(\text{traction})}{2} = \frac{\sigma_r}{2}$$

- Les métaux à structure granuleuse comme la fonte :

$$R_g = R(\text{traction}) = \sigma_r$$

- La limite d'élasticité au glissement :  $R_{eg} = \frac{R_e(\text{traction})}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$

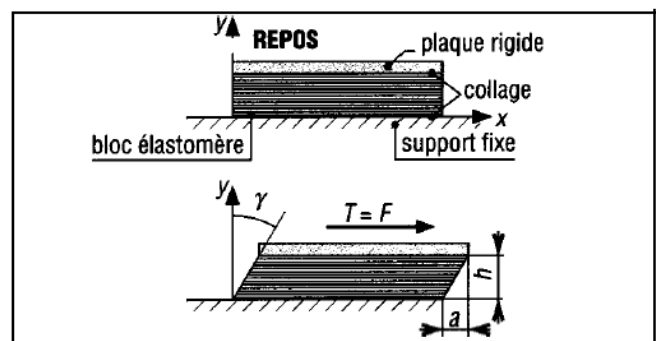
### III-6 Déformation –Angle de glissement $\gamma$ :

Dans le cas du cisaillement, les déformations sont caractérisées par un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres. Le glissement est mesuré par  $\gamma$  (gamma) appelé angle de glissement (unité : radian).

#### Exemple 1 :

Un bloc élastomère est collé entre une plaque rigide et un support fixe. La plaque permet de bien répartir l'effort de cisaillement  $T$  sur tout le bloc.

Le cisaillement amène un glissement des sections droites successives les unes par rapport aux autres.

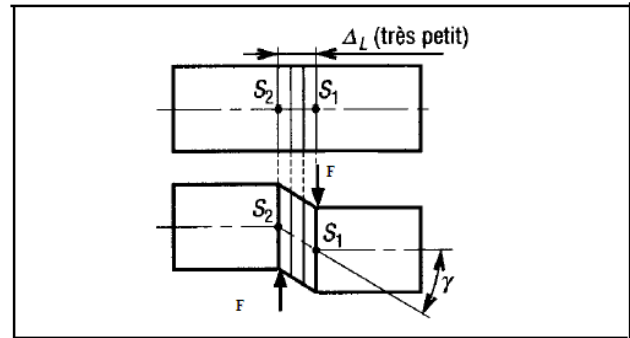


Le glissement peut être caractérisé par l'angle  $\gamma$ , appelé angle de glissement et tel que :

$$\tan \gamma = a/h \quad \text{si } \gamma \text{ est petit : } \tan \gamma = \gamma = a/h$$

**Exemple 2 :**

Le glissement de la section droite  $S_1$  par rapport à la section  $S_2$  peut être défini par un angle de glissement  $\gamma$  analogue à celui de l'exemple 1.



**Remarque :** comme en traction, il existe des déformation élastique et des déformations plastiques.

**Relation entre  $\tau$  et  $\gamma$  :**

Lorsque les déformations sont élastiques, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle à l'angle de glissement  $\gamma$ . Autrement dit :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$\tau$  : Contrainte tangentielle (N/mm<sup>2</sup> ou MPa).

$\gamma$  : Angle de glissement (radian).

$G$  : Module d'élasticité transversal (N/mm<sup>2</sup> ou MPa).

**Remarque :** la loi est analogue à la loi de Hooke  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  avec  $G$  constante caractéristique de matériau comme  $E$  (pour le métaus  $G \cong 0,4 \cdot E$ ).

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \vartheta)}$$

$E$  : Module d'élasticité longitudinal.

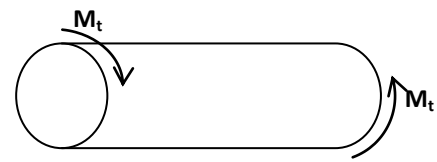
$G$  : Module d'élasticité transversal

$\vartheta$  : Coefficient de Poisson.



**IV-1 Définition :**

Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des liaisons dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés dont les moments sont parallèles à l'axe du cylindre.



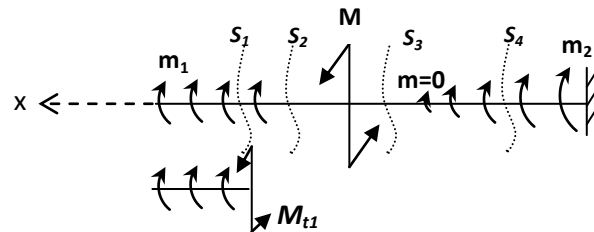
**Figure IV-1 :** Poutre en torsion simple

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{cohésion\} = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**IV-2 Moment de torsion :**

Le moment de torsion se détermine par la méthode des sections. La valeur du moment de torsion  $M_t$  dans une section droite arbitraire de la barre est égale à la somme algébrique des moments de tous les couples extérieurs (concentrés  $M$  et distribués suivant la longueur d'intensité  $m$ ), agissant autour de l'axe géométrique de la barre et appliqués à l'une des parties isolées par cette section.



**Figure IV-2 :** Poutre sollicitée avec plusieurs types de moments, Méthode des sections.

La formule générale donnant la valeur du moment de torsion dans une section arbitraire de la barre est de la forme :

$$M_t = \sum M + \sum \int m \cdot dx \tag{IV - 1}$$

L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, soumise à des couples répartis, la sommation à toutes les parties se trouvant d'un côté de la section considérée.

Par convention, nous admettrons que le moment de torsion considéré du côté de la normale extérieure à la section est positif, s'il est dirigé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans le SI (Système international) la relation entre le moment  $M$  (N.m), la vitesse angulaire  $\omega$  (1/s) et la puissance  $P$  (Watts) est exprimée par la formule :

$$M = \frac{P}{\omega} \tag{IV - 2}$$

**IV-3 Essai de Torsion simple :**

Un dispositif permet d’effectuer un essai de torsion sur une poutre encastrée à son extrémité  $G_1$  et soumise à un torseur couple à son extrémité  $G_2$ . Cette machine permet de tracer le graphe du moment appliqué en  $G_2$  en fonction de l’angle de rotation d’une section droite. On note lors de l’essai que, pour une même valeur du moment, l’angle  $\alpha$  croît de façon linéaire avec  $x$ , l’abscisse de la section droite étudiée :  $\alpha = k \cdot x$

**Analyse de la courbe  $M_t/\alpha$  :**

**Zone OA :** c’est la zone des déformations élastique. Si l’on réduit la valeur du moment jusqu’à une valeur nulle, l’éprouvette retrouve sa forme initiale. Dans cette zone, l’angle  $\alpha$  de torsion est proportionnel au couple appliquée

**Zone AB :** c’est la zone des déformations permanentes. L’éprouvette ne retrouve pas sa forme initiale après déformation.

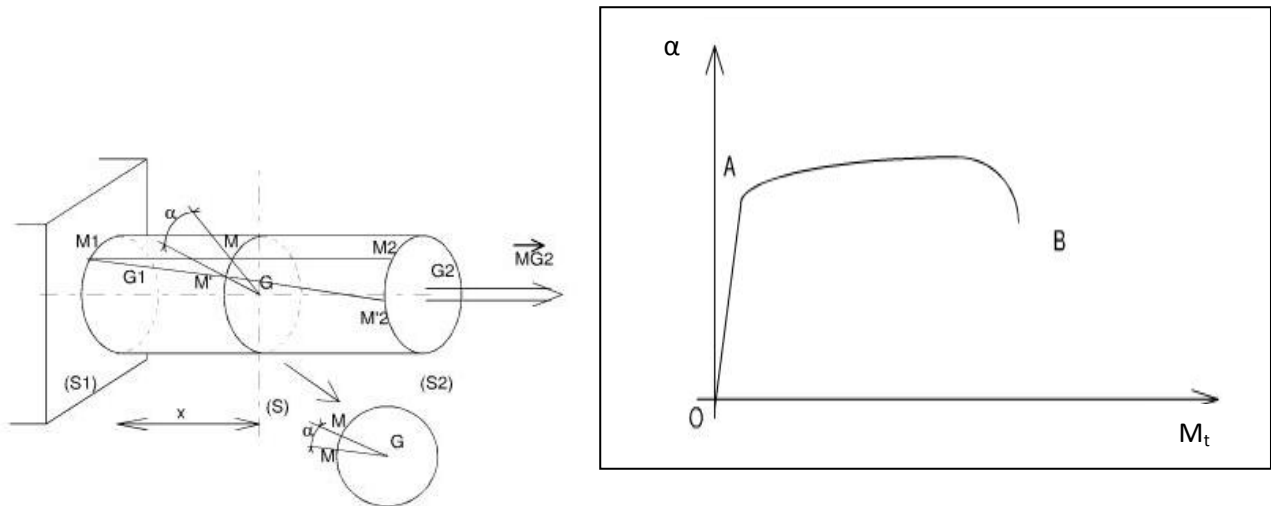
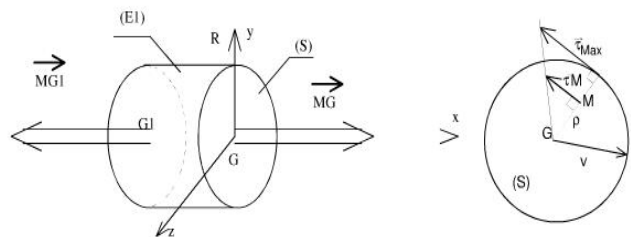


Figure IV-3 : Courbe  $M_t/\alpha$  de l’essai de torsion.

**IV-4 Contraintes tangentielles, Angle de torsion et énergie potentielle de déformation élastique :**

**a- Contraintes tangentielles  $\tau$  :**

Pour une barre cylindrique de section circulaire de diamètre  $D = 2R$  la contrainte tangentielle  $\tau$  en un point arbitraire de la section droite à une distance  $r$  du centre est déterminée par la formule :



$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p}$$

D’où :  $I_p = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$  : Le moment d’inertie polaire de la section circulaire.

Les valeurs des contraintes tangentielles maximales aux points les plus éloignés du centre ( $r=R$ ) sont :

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot R}{I_p} = \frac{M_t}{\left(\frac{I_p}{R}\right)}$$

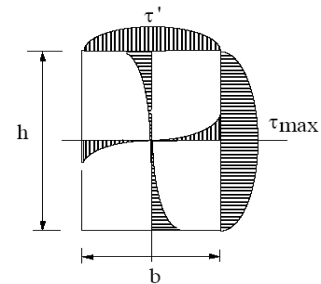
$\left(\frac{I_p}{R}\right) = W_p$  : Module de résistance polaire de la section circulaire en torsion.

Pour les barres de section rectangulaire la contrainte tangentielle maximale peut être déterminée par la formule :

$$\tau_{max} = \frac{M_t \max}{W_t}$$

$$\tau' = \beta \cdot \tau_{max}$$

Avec :  $W_t = \xi \cdot h \cdot b^2$



$\xi$  et  $\beta$  : sont donnés en fonction de rapport entre  $h$  et  $b$  dans le tableau suivant :

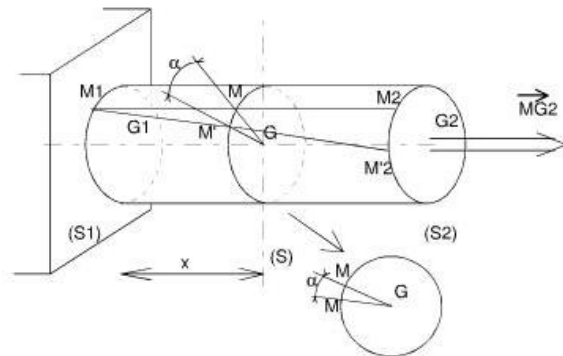
h/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
$\xi$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.256	0.267
$\beta$	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753
$\eta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263

**b- Angle de torsion  $\alpha$  :**

L'angle de torsion  $\alpha$  dans une partie de longueur  $l$ , où le moment de torsion  $M_t$  est constant, est déterminée d'après la loi de Hooke :

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_t}$$

Où  $I_t$  est le moment d'inertie de la section droite de la barre en torsion.



$I_t = I_p$  : Pour une section circulaire.

$I_t = \eta \cdot h \cdot b^3$  : Pour une section rectangulaire.

Si la barre est constituée de plusieurs tronçons dans chacun desquels le moment de torsion  $M_t$  varie selon une loi donnée, l'angle de torsion total est déterminé par la formule :

$$\alpha = \sum \int \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t}$$

L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, la sommation à toutes les parties de la barre.

### c- Energie potentielle de déformation élastique :

La formule générale donnant la valeur de l'énergie potentielle de déformation élastique, accumulée dans la barre pendant la torsion, est :

$$U = \sum \int \frac{M_t^2 \cdot dx}{2 \cdot G \cdot I_t}$$

L'intégration et la sommation s'effectuent de la même manière que pour déterminer l'angle de torsion.

### IV-5 Résistance et rigidité :

Pour une barre de section droite constante en torsion les dimensions de la section sont déterminées par la formule :

$$\tau_{max} \leq [\tau]_{adm} \quad \text{avec} \quad \tau_{max} = \frac{M_t \max}{W_t} \quad \text{donc :} \quad \frac{M_t \max}{W_t} \geq [\tau]_{adm}$$

$$W_t \geq \frac{\max M_t}{[\tau]_{adm}}$$

Où  $M_t$  est le moment de torsion maximal en valeur absolue.

Si on se fixe la condition supplémentaire selon laquelle l'angle de torsion maximal  $\alpha_{max}$  ne doit pas dépasser une valeur admissible  $\alpha_{adm}$ , la section choisie se vérifie pour la rigidité d'après l'expression :

$$I_t \geq \frac{\max M_t \cdot l}{G \cdot \alpha_{adm}}$$

Où :

$l$  : la longueur pour la valeur admissible de l'angle de torsion.

$\alpha_{adm}$  : Valeur admissible de l'angle de torsion.

## V-Flexion simple

### V-1 Généralités :

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinal initialement droit en une courbe curviligne (Fig.V-1). L'état d'une section de poutre ou de toutes les composantes des efforts internes, seule un moment fléchissant  $M_y$  et  $M_z$  n'est pas nul, est dit état de *flexion plane pure*.

La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, dans ce cas la sollicitation est dite *flexion simple*.

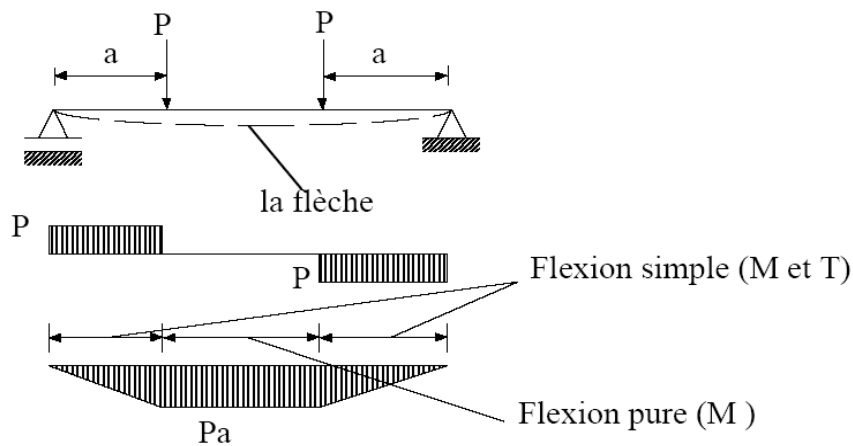


Fig.V-1 : Flexion simple et flexion pure.

Dans le chapitre des efforts internes nous avons vu comment déterminer le diagramme des moments fléchissants le long de l'axe longitudinal d'une poutre d'une structure isostatique. Dans ce chapitre nous proposons d'étudier le passage de l'effort interne aux contraintes agissant sur les sections de la poutre et particulièrement la distribution des contraintes normales et tangentielles résultant d'une flexion et d'un effort tranchant.

### V-2 Définition :

Une poutre est sollicitée en flexion plane simple lorsque le système des forces extérieures se réduit à un système coplanaire et que toutes les forces sont perpendiculaires à la fibre moyenne (Fig.V-2).

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{G(x,y,z)}$$

$T_y = 0$  : Flexion pure.

$T_y$  et  $M_{fz} \neq 0$  : Flexion plane.

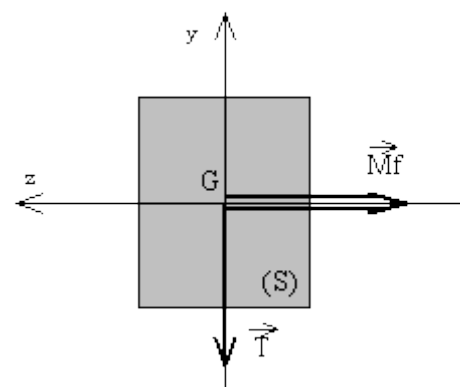


Fig.V-2 : Effort en flexion plane

### V-3 Essai de flexion

Soit une poutre dont la longueur  $L$ , appuyée à ses extrémités sur deux appuis élastiques soit **A** et **B**. Au milieu de la poutre, on exerce une force qui va la déformer progressivement en vue de déterminer quelques caractéristiques du matériau de la poutre. Pour faire augmenter la charge, on ajoute à chaque fois une masse  $m$ . à l'aide du comparateur on mesure pour chaque charge appliquée la flèche  $y$  correspondante.

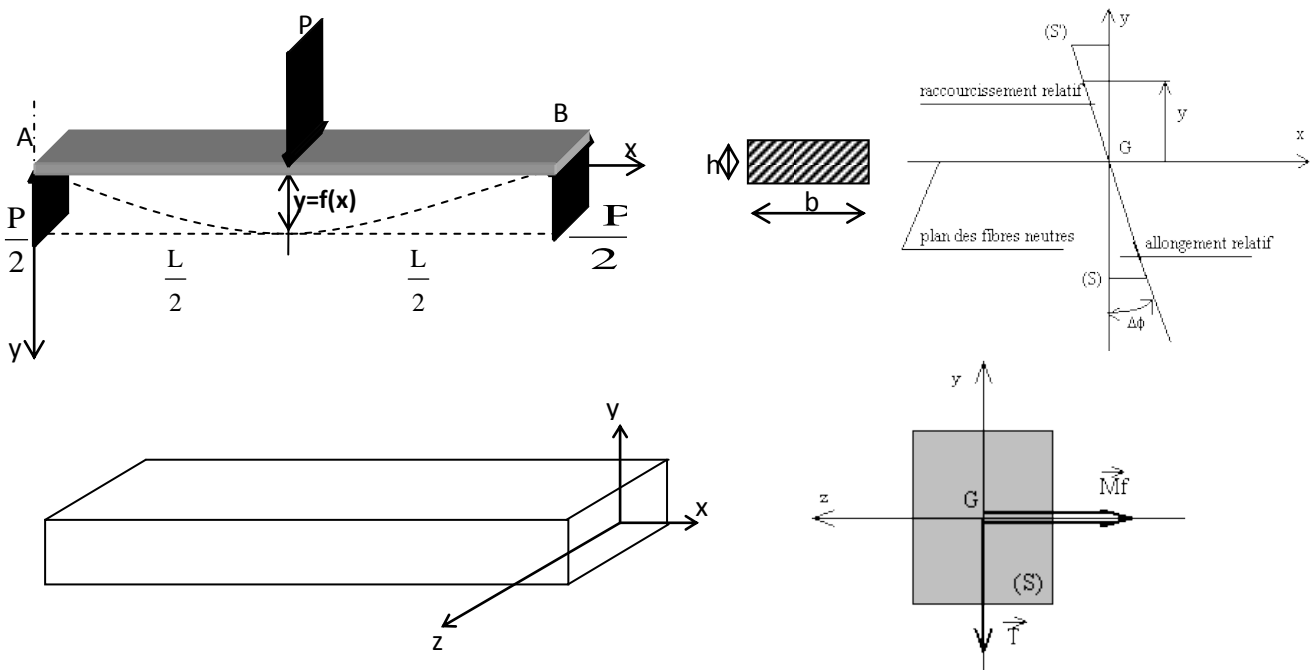


Fig.V-3 : Essai de flexion simple.

A partir de l'essai de flexion on constate que :

- La flèche est proportionnelle à l'effort  $P$  appliqué et ceci quelque soit le point choisi.
- La flèche est maximale au milieu de la poutre.
- La flèche est inversement proportionnelle au moment quadratique  $I_{gz}$  de la section.
- Les fibres longitudinales situées au dessus de la ligne moyenne se raccourcissent (en compression) et celles situées en dessous de la ligne moyenne s'allongent.
- Les fibres appartenant au plan  $(G,x,z)$  ne changent pas de longueur.
- Les allongements et raccourcissement relatifs  $(\Delta l/l)$  sont proportionnels à la distance de la fibre considérée au plan  $(G,x,z)$ .
- Les sections planes normales aux fibres restent planes normales aux fibres après déformation.

### V-4 Contraintes normales en flexion plane :

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La fig.V-4 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon

de courbure  $R$  et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance  $y$  de l'axe neutre peut être écrit :

$$\epsilon = \frac{bb' - aa'}{aa'} = \frac{(R + y)d\theta - dx}{dx}$$

$bb'$  : longueur après déformation (après chargement).

$aa' = dx$  : longueur avant déformation.

$$dx = R \cdot d\theta$$

Alors : 
$$\epsilon = \frac{y}{R}$$

D'où : 
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{loi de Hooke})$$

Donc : 
$$\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$$

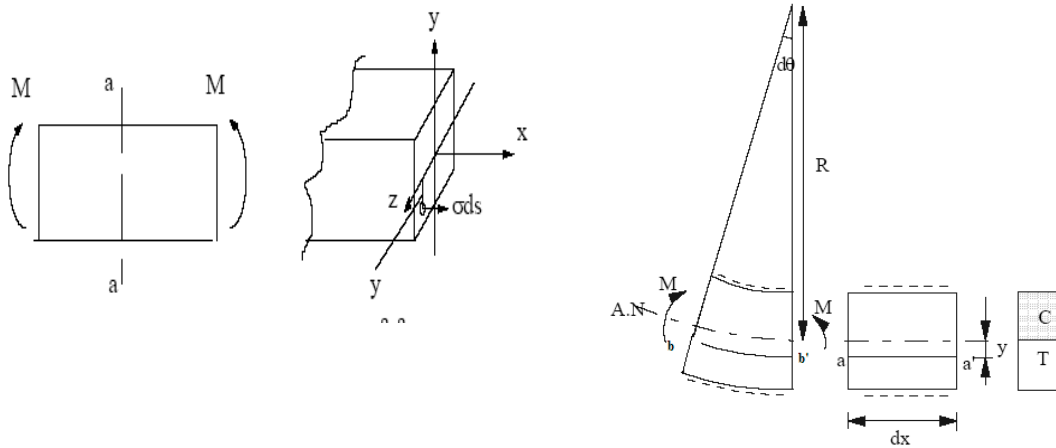


Fig.V-4 : compression et traction des fibres d'une poutre en flexion

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$Mf = \iint_S \sigma \cdot y \cdot ds$$

En introduisant la valeur de  $\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$  on obtient :

$$Mf = \iint_S \frac{E}{R} \cdot y^2 \cdot ds \quad \Rightarrow \quad Mf = \frac{E}{R} \iint_S y^2 \cdot ds$$

D'où : 
$$\iint_S y^2 \cdot ds = I_z \quad \text{alors :} \quad Mf = \frac{E \cdot I_z}{R}$$

A partir des deux formules :  $Mf = \frac{E \cdot I_z}{R}$  et  $\sigma = \frac{E}{R} \cdot y$ , la contrainte normale  $\sigma$  en tout point de la section de la poutre distance de  $y$  de l'axe  $x$  pour valeur :

$$\sigma = \frac{Mf}{I_z} \cdot y$$

Cette équation est appelée formule de Navier dont on note que :

- Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie  $I$ .
- Les contraintes varient linéairement avec la distance  $y$  de l'axe neutre.
- La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

L'application de cette formule est générale, mais on ne considérera que les cas particuliers suivants :

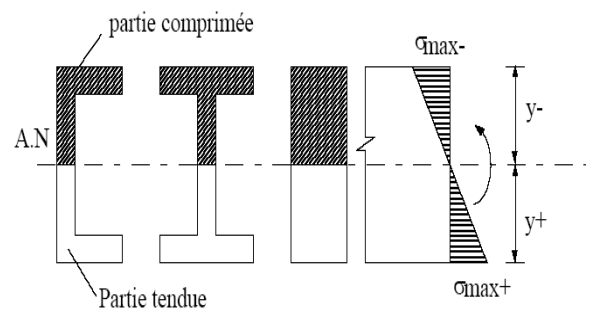
**a- Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal :**

$$y_{max}^- = y_{max}^+$$

$$|\sigma_{max}^-| = |\sigma_{max}^+| = \sigma_{max} = \frac{Mf}{I_x} \cdot y_{max}$$

$\sigma_{max}$ : Contrainte normale maximale.

$$W_y = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{I_x}{h/2} : \text{Module résistant de la section.}$$



**b- Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal :**

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression sont différentes.

$$|\sigma_{max}^-| = \left| \frac{Mf \cdot y_{max}^-}{I_x} \right|$$

$$|\sigma_{max}^+| = \left| \frac{Mf \cdot y_{max}^+}{I_x} \right|$$

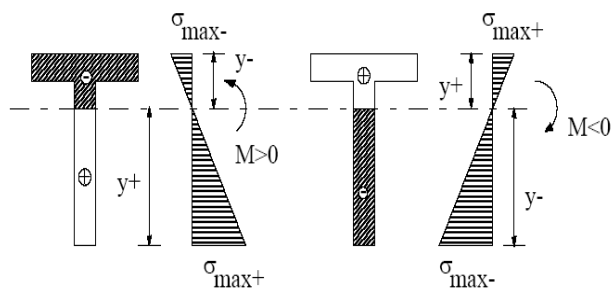
$\sigma_{max}^-$ : Contrainte de compression maximale.

$\sigma_{max}^+$  : Contrainte de traction maximale.

$y_{max}^-$  : Distance de fibre comprimées la plus éloignée.

$y_{max}^+$  : Distance de fibre tendue la plus éloignée.

$Mf$  : Moment fléchissant.



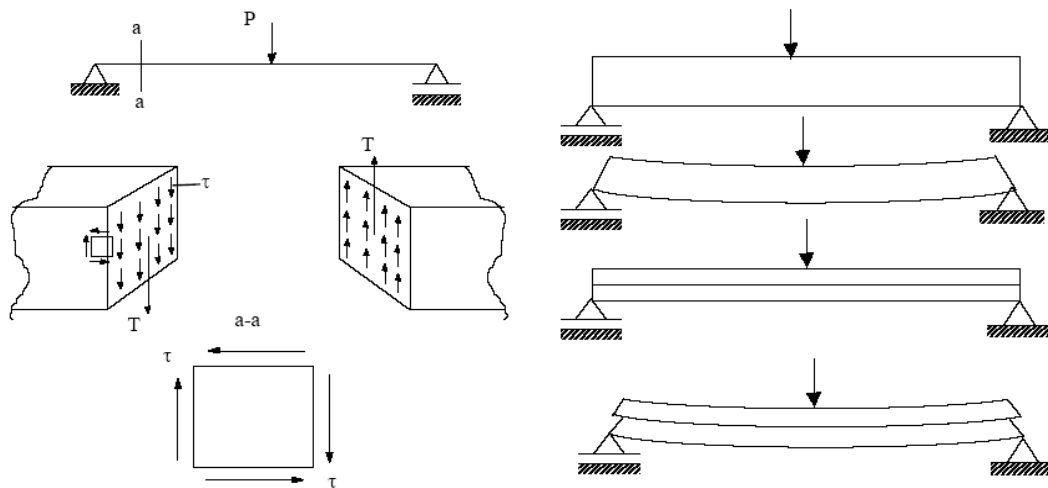


D'où on distingue deux modules de résistance de la section :

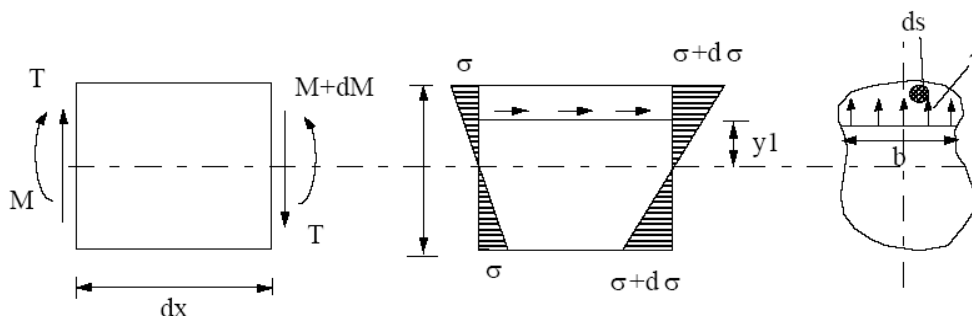
$$\frac{I_x}{Y_{max}^+} \quad \text{et} \quad \frac{I_x}{Y_{max}^-}$$

**V-5 Contraintes tangentielle en flexion :**

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire (Fig. ci-dessous) sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales. L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontré par superposition de deux poutre de hauteur  $h$  simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi-travée. On constate qu'il y a un glissement des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur  $2h$ .



Considérons un tronçon de poutre de longueur  $dx$  soumis à un effort tranchant constant  $T$  et un moment fléchissant  $M_f$  variant de  $M$  à  $M+dM$



La partie supérieure de l'élément  $dx$  à une distance  $y_1$  de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes  $\sigma$  à gauche de l'élément  $dx$ ,  $\sigma + d\sigma$  à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale  $\tau$ .

Ecrivons l'équation d'équilibre :

$$\iint_{S_1} \sigma \cdot dS - \iint_{S_1} (\sigma + d\sigma) \cdot dS + \tau \cdot (b \cdot dx) = 0$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section  $b \cdot dx$  :

$$\tau \cdot (b \cdot dx) = \iint_{S_1} d\sigma \cdot dS = \iint_{S_1} \frac{dMf}{I_z} \cdot y \cdot dS = \frac{dMf}{I_z} \iint_{S_1} y \cdot dS$$

$\iint_{S_1} y \cdot dS = S_z$  : Moment statique de la section droite.

L'équation devient :

$$\tau = \iint_{S_1} d\sigma \cdot dS = \iint_{S_1} \frac{dMf}{I_z} \cdot y \cdot dS = \frac{dMf}{I_z \cdot b \cdot dx} \cdot S_z \quad \text{avec} \quad \frac{dMf}{dx} = T$$

Alors la relation de la contrainte tangentielle est la suivante :

$$\tau = \frac{T \cdot S_z}{I_z \cdot b}$$

T (N): effort tranchant.

$S_z$  (mm<sup>3</sup>) : Moment statique de la section droite située soit au dessous où au dessus de la couche considérée.

$I_z$  (mm<sup>4</sup>): Moment d'inertie de la section droite.

$b$  (mm): La largeur de la section dans la couche considérée.

**a- Poutre à section rectangulaire :**

Dans le cas d'une section rectangulaire, la largeur  $b$  est constante. A une distance  $y$  de l'axe  $zz$  on détermine le moment statique  $S_z$  et le moment quadratique  $I_z$  par :

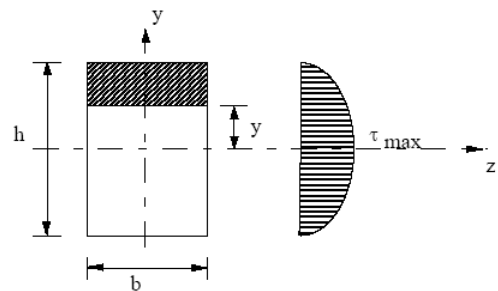
$$S_z = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad \text{avec} \quad I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

On obtient :

$$\tau = \frac{6 \cdot T}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

à :  $y=0 \quad \tau_{max} = \frac{3 \cdot T}{2 \cdot b \cdot h}$

à :  $y=h/2 \quad \tau = 0$



**b- Poutre à section circulaire :**

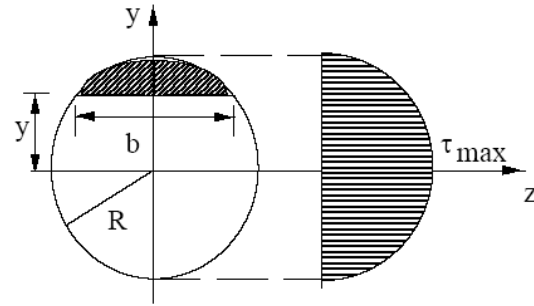
$$S_z = \frac{2}{3} \cdot (R^2 - y^2)^{3/2} \text{ (Variation parabolique)}$$

$$I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad , \quad b = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\tau = \frac{4.T}{3.\pi.R^4} \cdot (R^2 - y^2)$$

$$\tau_{max} = \frac{4.T}{3.\pi.R^4} \quad \text{pour} \quad y=0$$

$$\tau = 0 \quad \text{pour} \quad y=R$$



## V-6 Calcul de résistance en flexion :

### 1- Contrainte normale $\sigma$ :

La vérification d'une poutre en flexion se fait à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

#### a- Pour une section symétrique :

$$|\sigma_{max}| = \left| \frac{Mf \cdot y_{max}}{I_x} \right| \leq \min([\sigma_-]_{adm}, [\sigma_+]_{adm})$$

#### b- Pour une section non symétrique :

- Si  $[\sigma_-]_{adm} = [\sigma_+]_{adm} = [\sigma]_{adm}$  :  
 $\max(|\sigma_{max}^-|, |\sigma_{max}^+|) \leq [\sigma]_{adm}$
- Si  $[\sigma_-]_{adm} \neq [\sigma_+]_{adm}$  :  
 $|\sigma_{max}^-| \leq [\sigma_-]_{adm}$   
 $|\sigma_{max}^+| \leq [\sigma_+]_{adm}$

### 2- Contrainte tangentielle $\tau$ :

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où  $\sigma$  est maximale  $\tau = 0$ , par contre là où  $\tau$  est maximale  $\sigma = 0$ .

D'habitude on vérifie les contraintes normales et tangentielles séparément. Comme le cas d'une flexion pure, la condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{max}| = \frac{Mf_{max}}{I_z} \leq [\sigma]_{adm}$$

On devra aussi vérifier :

Cependant dans le cas où dans les sections de poutre il existe des points supportant l'action simultanée d'importantes contraintes normales et tangentielles, il convient de vérifier la résistance de la poutre par rapport aux contraintes principales on utilisant les diverses théories de résistance.