مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

يعتبر تحليل الانحدار الخطي باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)من أشهر الأدوات الإحصائية، ولكنه يبني صحته على مجموعة من الافتراضات الأساسية. أحد أهم هذه الافتراضات هو "استقلال الأخطاء ، Independence of Errors) وحدوث عكس ذلك (ارتباط الأخطاء) يضع الباحث الاقتصادي أمام أبرز المشاكل القياسية وهي " الارتباط الذاتي للأخطاء ".

1. التعريف بمشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

يقوم التطبيق الصحيح لطريقة المربعات الصغرى العادية على مراعاة الفرض الأساسي المتمثل في انعدام الارتباط الذاتي بين الأخطاء في فترات مختلفة .**تنشأ مشكلة الارتباط الذاتي Autocorrelation أو الارتباط التسلسلي Serial Correlation عندما ترتبط الأخطاء العشوائية (البواقي Residuals) مع بعضها البعض بعلاقة محددة موجبة أو سالبة** . غالبا ما تحدث هذه المشكلة في البيانات التاريخية (السلاسل الزمنية) أي المرتبطة بالزمن (t).

في تحليل الانحدار يعبر عن الارتباط الذاتي بين قيم حدود الخطأ المتتالية، يعبر عنه احصائيا:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \neq 0 \qquad i \neq j \quad i,j = 1,2,\dots,N$$

في هذه الحالة تكون قيمة معامل الارتباط بين حدود الخطأ لا تساوي 0 ، وغالبا يرتبط الخطأ العشوائي السالب بخطأ سالب ، والخطأ الموجب بخطأ موجب .

يأخذ الارتباط الذاتي أشكالا (درجات) مختلفة:

- الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى First-Order Autocorrelation - AR(1) هو أبسط وأشهر أشكال الارتباط الذاتي وتكون في هذه الحالة كل قيمة من قيم حدود الخطأ مرتبطة بالقيمة التي تسبقها فقط.
- الارتباط الذاتي من الرتبة الثانية Second -Order Autocorrelation - AR(2) : في هذه الحالة كل قيمة من قيم حدود الخطأ مرتبطة بالقيمتين السابقتين لها.
- الارتباط الذاتي من درجات أعلى

تحديد الرتبة أمر بالغ الأهمية ، لأنن استخدام علاج خاطئ للرتبة مصممة لرتبة أخرى سيخل بالنموذج تماما.

2. أسباب وجود مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

وفقا لأدبيات الاقتصاد القياسي صنفت أهم أسباب الارتباط الذاتي الى العوامل التالية:

أ. حذف متغير تفسيري مهم : هذا هو السبب الأكثر شيوعاً. إذا تم استبعاد متغير مستقل له تأثير جوهري على المتغير التابع(Y) ، فإن تأثير هذا المتغير المحذوف سيظهر في حد الخطأ العشوائي .(Error Term) وبما أن معظم المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية تتسم بالاستمرارية عبر الزمن (مثل الدخل، التضخم)، فإن هذا سيؤدي إلى ارتباط الأخطاء ببعضها البعض.

ب. خطأ تحديد النموذج Model miss specification : حيث أن الخطأ في اختيار الشكل الرياضي المناسب للنموذج القياسي أو حذف المتغير المناسب الى ارتباط بين البواقي ، مثال على ذلك كأن يرتبط المتغير التابع Yt بالمتغير المستقل Xt بعلاقة أسية ، في حين أننا حددنا وقدرنا نموذجا خطيا ، فنكون أمام حالة توصيف خاطئ للنموذج المقدر فإن زاد أو نقص بدلالة الزمن فإن الأخطاء ستتحرك بارتباط فيما بينها.

ت. . القصور الذاتي (الجمود Interia) بعض الظواهر تتسم بالبطء في التغير، بمعنى أن قيمتها الحالية تعتمد بقوة على قيمتها في الماضي القريب .*مثال:* مؤشر أسعار الأسهم، معدل البطالة، أو الناتج المحلي الإجمالي. إذا كانت هذه المتغيرات تتجه نحو الأعلى، فمن المرجح أن يستمر هذا الاتجاه لفترة، مما يجعل الأخطاء التنبؤية مترابطة زمنياً (أخطاء موجبة متتالية أو سالبة متتالية)

ث. معالجة البيانات الاحصائية وعدم دقة البيانات الزمنية ، أو الاخطاء التي ترتبط باحداث تعديلات على هذه البيانات من قبل الباحثين .

ج. طبيعة السلاسل الزمنية : تتميز بعض متغيرات السلاسل الزمنية على غرار الناتج المحلي الخام ، الرقام القياسية للأسعار ، معدلات البطالة وغيرها غالبا بالتغير معا في فترات الرخاء والركود الاقتصادي، فمن المتوقع حدوث الارتباط المتسلسل بين البواقي ، زدلك لتلاحق قيم المتغيرات بعضها ببعض بشكل تسلسلي.

3. أثار الارتباط الذاتي للاخطاء

- في حالة وجود الارتباط الذاتي، **تبقى معاملات الانحدار المقدرة بطريقة (OLS) غير متحيزة** .(Unbiased) كما تبقى متسقة غير أنها تفقد خاصية الكفاءة.
- تقدير خاطئ لتباين الأخطاء والمعاملات وهذا هو الخطر الأكبر. الصيغة الرياضية القياسية التي يستخدمها برنامج) مثل (SPSS, EViews, Stata لحساب التباين الخاص بالمعاملات تفترض مسبقاً **عدم وجود ارتباط ذاتي** .في حالة الارتباط الذاتي الموجب (وهو الأكثر شيوعاً)، فإن هذه الصيغة **تقلل من القيمة الحقيقية لتباين المعاملات**، مما يجعلها تبدو أقل مما هي عليه في الواقع.
- تضليل اختبارات الفرضيات t-test) وF-test
- ضعف القدرة التنبؤية للنموذج(Poor Forecasting) إذا استخدمنا نموذجاً يعاني من ارتباط ذاتي في الأخطاء للتنبؤ بالقيم المستقبلية، فإن التنبؤات ستكون غير دقيقة. لأن النموذج يتجاهل نمط الأخطاء عبر الزمن (مثلاً إذا كان هناك نمط موسمي في الأخطاء، فإن النموذج لن يأخذه في الحسبان عند التنبؤ بالمستقبل) .

4. اختبارات الكشف عن ظاهرة الارتباط الذتي :

1. الطريقة البيانية: قد يتم الكشف عن مشكلة الارتباط الذاتيبواسطة التمثيل البياني الذي يحدد لنا نوع الارتباط سواء كان موجبا أو سالبا.

2. اختبار داربن واتسون Durbin Watson

يعتبر هذا الاختبار من الاختبارات شائعة الاستخدام في الكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى ، يستخدم لأنه سهل وبسيط الفكرة والتطبيق ويعمل على العينات الصغيرة شرط أن لا تقل عن 15 مشاهدة.

أ. صياغة الفرضيات

اختبار DW يستخدم لاختبار ثلاثة فروض كالتالي:

- ارتباط ذاتي موجب :

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0 \end{cases}$$

- ارتباط ذاتي سالب :

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$$

- ارتباط ذاتي موجب أو سالب (غير محدد الاتجاه)

تكون احصائية DW تكون حسب العلاقة التالية :

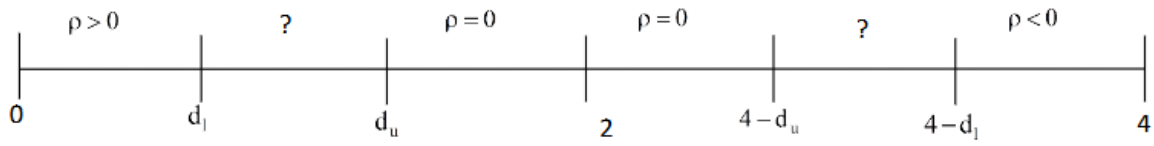
$$DW = \sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

أو : $DW = 2(1 - p)$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

ملاحظة هامة: يقوم برنامج EVIEWS لتحليل السلاسل الزمنية بحساب هذا المؤشر بطريقة الية ، ويدرج في نتائج اختبار الانحدار الخطي البسيط أو المتعدد ، ويبقى على الباحث سوى مقارنة هذه القيمة المحسوبة مع القيمتين الجدوليتين DL التي تمثل الحد الادنى لانعدام الارتباط الذاتي و Du التي تمثل الحد الأقصى ، وذلك حسب عدد المشاهدات n وعدد المتغيرات المستقلة المفسرة في النموذج عند رجة المعنوية 5 %.

يتم اتخاذ القرار بقبول الفرضية من عدمها من خلال مايلي:



قيمة DW هي 2 ينعدم معامل الارتباط الذاتي P=0

يتم قبول ورفض الفرضية الصفرية حسب الحالات التالية:

- 0 <DW < dl ارتباط ذاتي موجب
- Dl < Dw < Du مجال غير محسوم ، هناك شك في وجود ارتباط ذاتي
- Du < Dw < 4- Du عدم وجوذ ارتباط ذاتي
- 4 – Du < Dw < 4 – Dl عدم التأكد والحسم
- 4- DL < D w < 4 ارتباط ذاتي سالب

5. شروط اختبار دارين واتسون Durbin Watson

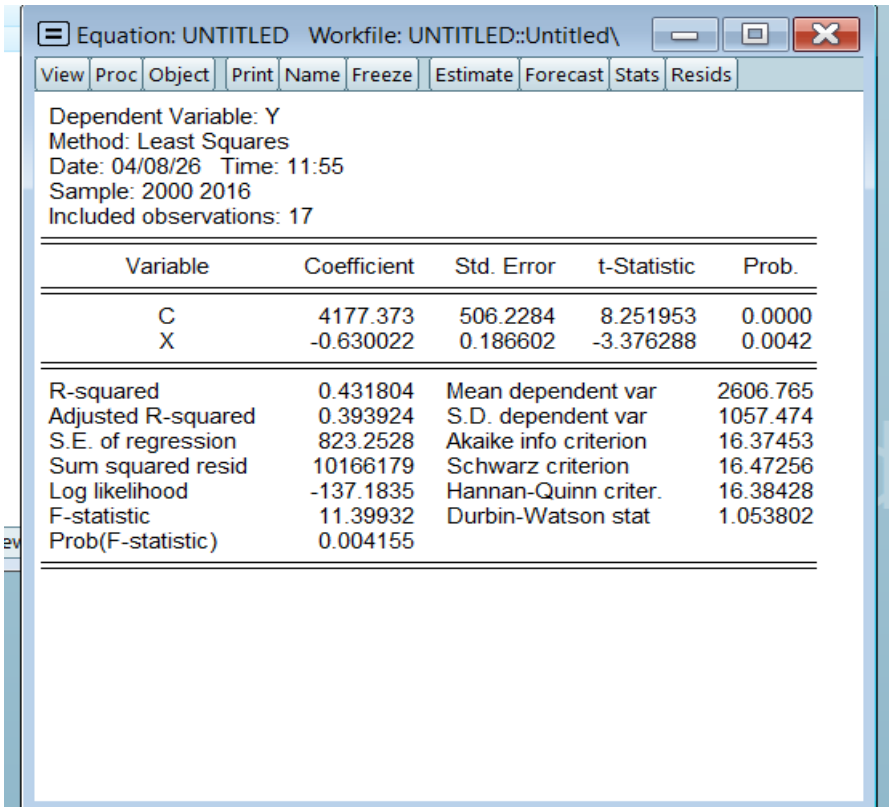
- يستعمل لاختبار الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.
- لا بد أن يحتوي النموذج على ثابت ، فإن كان لا يحتوي فيتعين إعادة تقديره بوجود الحد .
- لن لا توجد مشاهدات مفقودة سواء في المتغير التابع او المستقل
- أن لا يظهر المتغير التابع في فترات ابطاء في جملة المتغيرات المستقلة
- حجم العينة لا يقل عن 15 ممشاهدة .

مثال تطبيقي :

Group: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Default | Sc

	X	Y
2000	4253	2000
2001	4160	2300
2002	3643	2000
2003	3625	1660
2004	3518	1400
2005	3479	1200
2006	3132	1298
2007	2357	1250
2008	2091	4330
2009	2007	4110
2010	1915	3667
2011	1692	3600
2012	1521	3500
2013	1274	3400
2014	1274	3100
2015	1230	2500
2016	1209	3000



بما أن DWتقع في المنطقة ما بين 1.133> 1.05 > 0

DL =1.133 . DU = 1.381

يتم قبول رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة التي تنص على وجود ارتباط ذاتي موجب .

4. اختبار Breush Godfrey للارتباط التسلسلي

Breusch-Godfrey test 1978)هو أحد الاختبارات الإحصائية الشائعة المستخدمة في الاقتصاد القياسي (Econometrics) لفحص وجود **الارتباط الذاتي (Autocorrelation)** في الأخطاء العشوائية (Residuals)لنموذج انحدار .

يُعرف هذا الاختبار أيضاً باسم **اختبار مضاعف لاجرانج (LM Test)** Lagrange Multiplier - LM **للارتباط التسلسلي** .

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \rho_k \varepsilon_{t-k} + u_t$$

بالتعويض في النموذج الخطي المتعدد

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \rho_k \varepsilon_{t-k} + u_t$$

يُستخدم هذا الاختبار للكشف عما إذا كان هناك ارتباط بين البواقي (الخطأ) في الفترة الحالية والفترات السابقة .

- يتميز اختبار بروش-جودفري عن اختبار "داربين-واتسون (Durbin-Watson) "الشهير بأنه:
  1. يكشف ارتباطات ذاتية من رتب أعلى (مثلاً الارتباط مع الخطأ في الفترة

2. **صالح للاستخدام حتى لو كان النموذج يحتوي على متغير تابع مؤخر (Lagged Dependent Variable)**، بينما يفقد اختبار داربين-واتسون صلاحيته في هذه الحالة .

2.فرضيات الاختبار

- **الفرضية الصفرية :**لا يوجد ارتباط ذاتي في البواقي حتى الرتبة **p** أي الأخطاء مستقلة.
- **الفرضية البديلة H1** يوجد ارتباط ذاتي في البواقي عند الرتبة p

$$H_0;\ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$$

$$H_0;\ \rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_k \neq 0$$

.

احصائية هذا الاختبار تعتمد على مضاعف لا غرانج حيث

LM= n .R2

الاحصائية LMتتبع توزيع CHI- deux بدرجة الحرية k

- **القرار:**

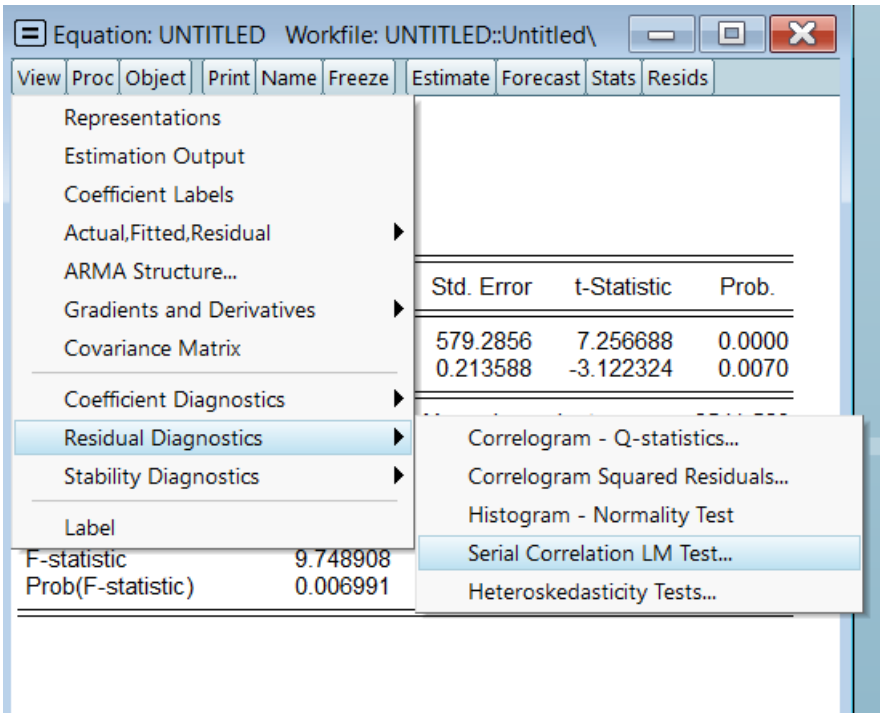
✓ إذا كانت $LM \geq \chi^2_k$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية H_1، أي وجود إرتباط ذاتي.

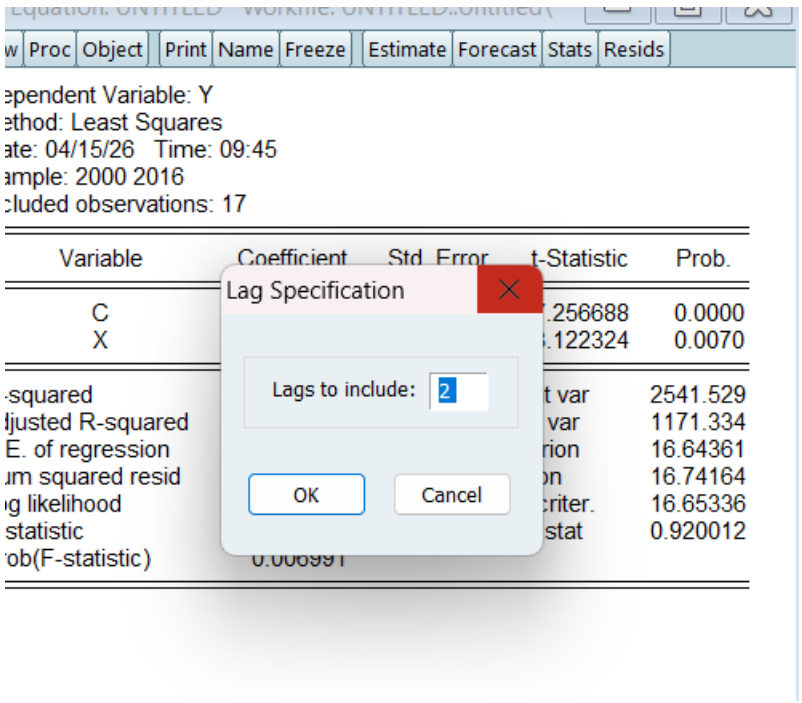
✓ إذا كانت $LM < \chi^2_k$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية H_0، أي لا يوجد إرتباط ذاتي.

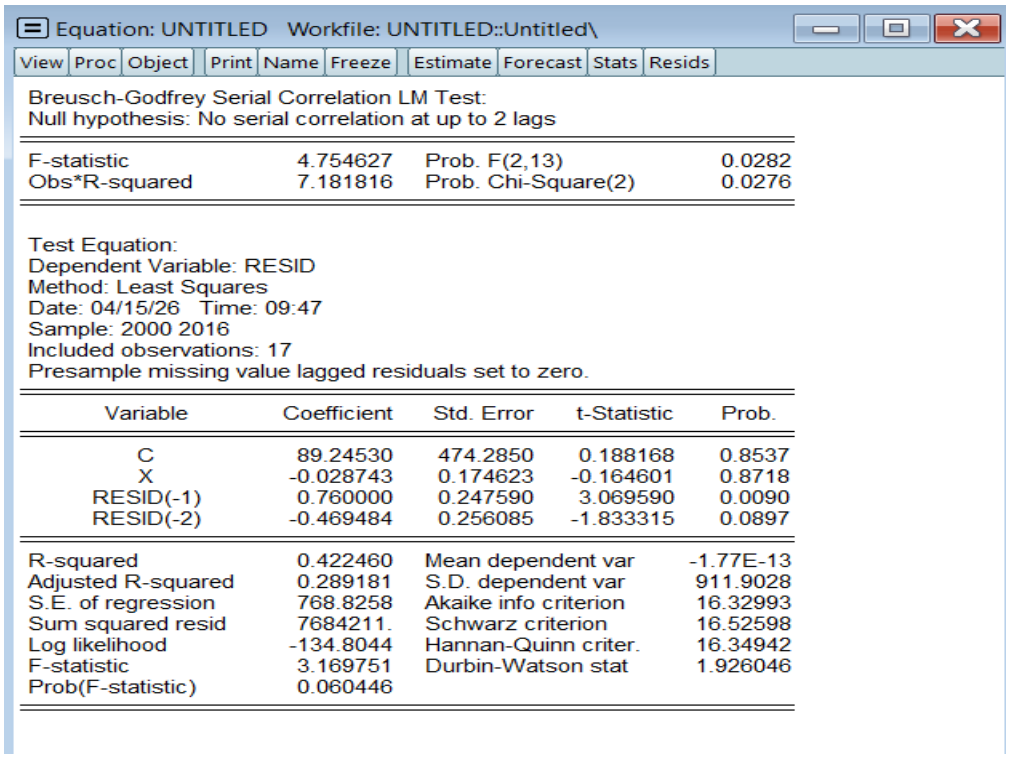
3. لاختبار الفرضيات في برنامج Eviews نتبع الخطوات التالية:

$$Table\ Estimation \rightarrow View \rightarrow Residual\ Diagnostics \rightarrow Serial\ Correlation\ LM\ test \rightarrow lags\ to\ include\ [2] \rightarrow ok$$

وفق المثال السابق :


Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids
Representations
Estimation Output
Coefficient Labels
Actual,Fitted,Residual
ARMA Structure...
Gradients and Derivatives
Covariance Matrix
Coefficient Diagnostics
Residual Diagnostics
Stability Diagnostics
Label
Correlogram - Q-statistics...
Correlogram Squared Residuals...
Histogram - Normality Test
Serial Correlation LM Test...
Heteroskedasticity Tests...
Std. Error t-Statistic Prob.
579.2856 7.256688 0.0000
0.213588 -3.122324 0.0070
F-statistic 9.748908
Prob(F-statistic) 0.006991


Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids
ependent Variable: Y
ethod: Least Squares
ate: 04/15/26 Time: 09:45
ample: 2000 2016
cluded observations: 17
Variable Coefficient Std. Error t-Statistic Prob.
C .256688 0.0000
X .122324 0.0070
squared t var 2541.529
djusted R-squared var 1171.334
E. of regression rion 16.64361
um squared resid on 16.74164
g likelihood criter. 16.65336
statistic stat 0.920012
ob(F-statistic) 0.006991
Lag Specification
Lags to include: 2
OK
Cancel



Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:
Null hypothesis: No serial correlation at up to 2 lags

F-statistic	4.754627	Prob. F(2,13)	0.0282
Obs*R-squared	7.181816	Prob. Chi-Square(2)	0.0276

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 04/15/26 Time: 09:47
Sample: 2000 2016
Included observations: 17
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	89.24530	474.2850	0.188168	0.8537
X	-0.028743	0.174623	-0.164601	0.8718
RESID(-1)	0.760000	0.247590	3.069590	0.0090
RESID(-2)	-0.469484	0.256085	-1.833315	0.0897

R-squared	0.422460	Mean dependent var	-1.77E-13
Adjusted R-squared	0.289181	S.D. dependent var	911.9028
S.E. of regression	768.8258	Akaike info criterion	16.32993
Sum squared resid	7684211.	Schwarz criterion	16.52598
Log likelihood	-134.8044	Hannan-Quinn criter.	16.34942
F-statistic	3.169751	Durbin-Watson stat	1.926046
Prob(F-statistic)	0.060446		

أهم رقم هنا هو "Obs*R-squared" واحتمالية "Prob. Chi-Square".

- **قيمة Obs*R-squared:** هي إحصائية LM المحسوبة
- **Prob. Chi-Square (P-Value):** هو القرار النهائي.

ثانياً: الانحدار المساعد (Auxiliary Regression)

يعرض لك البرنامج نتيجة انحدار البواقي على نفسها المؤخرة، ويهمنا فيها معامل التحديد **قاعدة القرار :**

1. **إذا كانت Prob. Chi-Square < 0.05** مستوى معنوية 5:(%)
   - نرفض الفرضية الصفرية
   - **النتيجة :**يوجد ارتباط ذاتي ذو دلالة إحصائية في الأخطاء (المشكلة موجودة).
2. **إذا كانت:Prob. Chi-Square > 0.05**
   - لا نرفض الفرضية الصفرية.
   - **النتيجة :**لا يوجد دليل على وجود ارتباط ذاتي

4. معالجة الإرتباط الذاتي :

يعتبر وجود الارتباط الذاتي في نتائج التقدير مشكلة إذ لا يمكن استخدام نتائج التقدير في وجود ارتباط ذاتي لأغراض التنبؤ ورسم السياسات قبل تخليصها من هذه المشكلة وعليه تأخذ معالجة الارتباط احد الأشكال التالية:

1. **إضافة متغيرات محذوفة (Omitted Variables)** إذا كان المتغير التابع يتأثر بعوامل تتغير بمرور الوقت ولم يتم تضمينها في النموذج، سيظهر تأثيرها في حد الخطأ ، وهذا يستلزم إضافة المتغيرات التفسيرية المهمة التي تم حذفها سواء كانت متغيرات اقتصادية أو مقياس للوقت.(Trend)
2. تغيير الصيغة الدالية (Functional Form) العلاقة بين المتغيرات قد لا تكون خطية يكون **الحل** :في استخدام اللوغاريتمات (Logarithmic Model) أو النماذج التربيعية .(Quadratic Form) التحويل اللوغاريتمي يقلب غالباً تباين الأخطاء ويصحح الارتباط.
3. طريقة تاخير المتغير التابع

في الغالب يلجأ الباحثون إلى إدراج المتغير التابع مؤخر بفترة واحدة كمتغير مستقل في النموذج لغرض إزالة الارتباط الذاتي للأخطاء من النموذج.

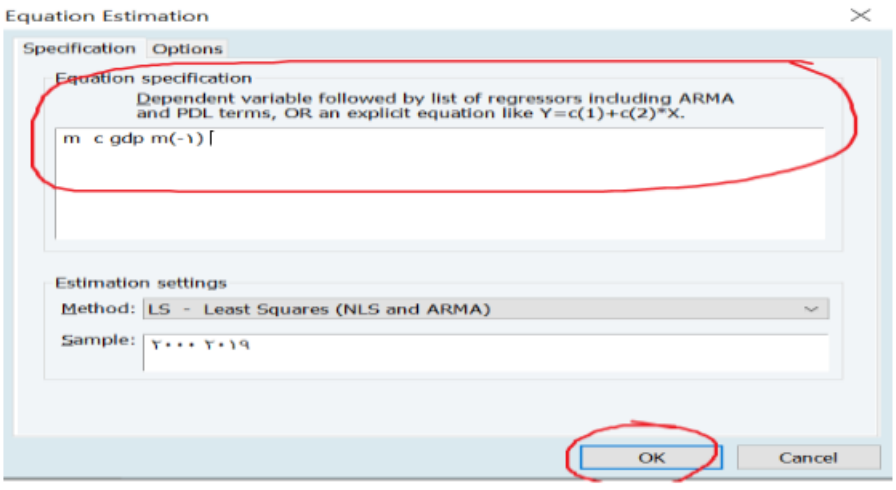
$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \boldsymbol{\gamma Y_{t-1}} + \varepsilon_t$$

ففي مثالنا السابق، السلسلة تبدأ من سنة 2000 للمتغير التابع والمستقل، يمكن إدخال بيانات المتغير التابع لسنة 1999 مقابل المتغير التابع لسنة 2000. ولكن في أغلب الأحيان لا توجد بيانات لسنة سابقة عن السلسلة المستخدمة. في هذه الحالة يمكن للباحث أن يضحي بمشاهدة واحدة في مقابل التخلص من أثر الارتباط الذاتي.

a.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \boldsymbol{\gamma Y_{t-1}} + \varepsilon_t$$

ب برنامج EViews يتم تقدير العلاقة كمايلي:



ايلي:

Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 03/04/24 Time: 04:30
Sample (adjusted): 2001 2019
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-26.93617	10.10539	-2.665526	0.0169
GDP	0.054502	0.021242	2.565810	0.0207
M(-1)	0.692369	0.197459	3.506388	0.0029

R-squared	0.989213	Mean dependent var	88.69474
Adjusted R-squared	0.987865	S.D. dependent var	71.53424
S.E. of regression	7.880195	Akaike info criterion	7.110522
Sum squared resid	993.5596	Schwarz criterion	7.259644
Log likelihood	-64.54996	Hannan-Quinn criter.	7.135759
F-statistic	733.6457	Durbin-Watson stat	2.392572
Prob(F-statistic)	0.000000		