أختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي:

أختبار داربن واتسون : Durbon-Watson (D.W) Test

العالم داربن اشتق اختبار للكشف عن مشكلة الارتباط الذاتي يستند على افتراض أن حدود الخطأ العشوائي u_t لنموذج الانحدار الخطي العام تعاني من الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى ($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$) .

شروط استخدام اختبار داربن واتسون:

1- أنموذج الانحدار يجب أن يتضمن على الحد الثابت.

2- الارتباط الذاتي بين الاخطاء العشوائية يكون من الدرجة الاولى ($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$).

3- أنموذج الانحدار يجب أن لا يتضمن على قيمة أو قيم مرتدة زمنيا لمتغير الاستجابة ضمن المتغيرات التفسيرية.

فرضية الاختبار تنص على عدم وجود ارتباط ذاتي بين الخطاء العشوائية, هذه الفرضية توصف بفرضية العدم الآتية:

$H_0 : \rho = 0$

مقابل الفرضية البديلة الآتية:

$H_1 : \rho \neq 0$

هذا الاختبار يعتمد على الاخطاء العشوائية الناتجة من انموذج الانحدار وتحت الافتراض المذكور اعلاه.

أحصاءة الاختبار التي يرمز لها (D.W) والتي تسمى بمعامل داربن-واتسون تحسب وفق الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

كلما كبر حجم العينة وأخذ بالاقتراب من المالانهاية بمعنى ($n \longrightarrow \infty$) فان:

$$\sum_{t=2}^{n} e_t^2 \cong \sum_{t=1}^{n} e_t^2 \cong \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2$$

$$\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \cong \sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}$$

بالاعتماد على ما ورد اعلاه يمكن تعديل صيغة معامل داربن-واتسون لتصبح كالآتي:

$$D.W \cong \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1} + \sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \cong \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} - \frac{2\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{2} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\cong 1 - \frac{2\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{2} e_t^2} + 1 \cong 2 - \frac{2\widehat{Cov}(e_t e_{t-1})}{\widehat{Var}(e_t)}$$

من النتيجة الاخيرة لصيغة معامل داربن واتسون نحصل على العلاقة بين قيمة معامل داربن والقيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى والمبينة بالآتي:

$$D.W \cong 2 - 2\hat{\rho} \cong 2(1 - \hat{\rho})$$

بالاعتماد على العلاقة بين قيمة معامل داربن والقيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى, وبما ان $-1 \leq \hat{\rho} \leq 1$, نجد أن قيمة معامل داربن تقع ضمن الفترة $0 \leq D.W \leq 4$, الجدول التالي يبن تحليل العلاقة بين القيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي وقيمة معامل داربن:

$\hat{\rho} = 1$	→	**D.W=0**
$\hat{\rho} = 0$	→	D.W=2
$\hat{\rho} = -1$	→	D.W=4

من تحليل العلاقة اعلاه نجد انه كلما اقتربت قيمة معامل داربن من الصفر دل على وجود أرتباط ذاتي موجب. وكلما اقتربت من 4 دل على وجود أرتباط ذاتي سالب. في حين القيمة الوسطى 2 تشير الى انعدام الارتباط الذاتي.

قاعدة القرار أي قبول فرضية العدم من عدمها:

تعتمد قاعدة القرار الخاصة باختبار فرضية الارتباط الذاتي على تحديد القيمة الدنيا d_L والقيمة العليا d_U لمعامل داربن والمتوفرة في الجداول الخاصة باختبار داربن-واتسون والتي تحدد على اساس درجة الحرية (n) وعدد المتغيرات التفسيرية, وبالاعتماد على هاتين القيمتين فأن قاعدة القرار تكون كالآتي:

اذا كانت $0 < D.w < d_L$ ترفض فرضية العدم H0 (بمعنى وجود ارتباط ذاتي موجب)

اذا كانت $d_L < D.w < d_U$ الاختبار يكون فاشل.

اذا كانت $d_U < D.w < 4-d_U$ تقبل فرضية العدم H0 (بمعنى عدم وجود ارتباط ذاتي).

اذا كانت $4-d_U < D.w < 4-d_L$ الاختبار يكون فاشل.

اذا كانت $4-d_L < D.w < 4$ ترفض فرضية العدم H0 (بمعنى وجود ارتباط ذاتي سالب)

الرسم البياني التالي يبن قاعدة القرار لاختبار داربن:



مثال تطبيقي حول اختبار الارتباط الذاتي بين حدود الاخطاء العشوائية:

الجدول التالي يبين قيم كل من متغير الاستجابة Y والمتغير التفسيري X , لعينة بحجم n=15 . على افتراض أن Y يرتبط بالمتغير التفسيري X بعلاقة خطية وفق أنموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

المطلوب: 1-اختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي.

2- تقدير معامل الارتباط الذاتي في حالة وجود هذه المشكلة.

Y_t	X_t	Y_t	X_t	Y_t	X_t
33	10	46	13	40	14
34	10	45	13	43	14
38	11	37	13	44	15
43	12	40	13	54	16
46	12	38	13	55	16

لغرض اختبار مشكلة الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ العشوائي يجب أولا تقدير معلمات انموذج الانحدار واستخدام انموذج الانحدار المقدر لحساب البواقي ($e_t = Y_t - \hat{Y}_t$) ثم بعد ذلك يتم حساب معامل داربن واتسون لاختبار فرضية الارتباط الذاتي.

تقدير معلمات انموذج الانحدار :

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t X_t \end{bmatrix}$$

n=15 $\quad \sum X_t = 195 \quad \sum X_t^2 = 2583 \quad \sum Y_t = 636 \quad \sum Y_t X_t = 8400$

بأستعمال المجاميع اعلاه يمكن تقدير معلمات انموذج الانحدار(اترك ايجاد القيم التقديرية لمعلمتي انموذج الانحدار كتمرين للطالب) , أنموذج الانحدار المقدر مبين أدناه:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75 X_t$$

بالاعتماد على معادلة الانحدار المقدرة يتم تقدير قيم متغير الاستجابة ($\hat{Y}_t$) وبعدها يتم حساب قيم البواقي ($e_t = Y_t - \hat{Y}_t$), وكما مبينة في الجدول التالي:

$\hat{Y}_t$	e_t	$\hat{Y}_t$	e_t	$\hat{Y}_t$	e_t
34.15	-1.15	42.400	3.6	45.15	-5.15
34.15	-0.15	42.400	2.6	45.15	-2.15
36.90	1.1	42.400	-5.4	47.90	-3.9
39.65	3.35	42.400	-2.4	50.65	3.35
39.65	6.35	42.400	-4.4	50.65	4.35

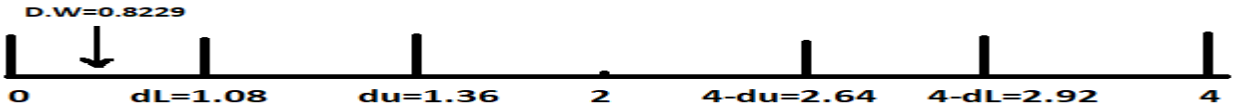
بالاعتماد على الجدول التالي يتم حساب قيمة معامل داربن واتسون D.W :

e_t	e_{t-1}	e_t^2	$(e_t - e_{t-1})$	$(e_t - e_{t-1})^2$
-1.15	--	1.3225		
-0.15	-1.15	.0225	1.00	1.000
1.1	-0.15	1.2100	1.25	1.563
3.35	1.1	11.2225	2.25	5.063
6.35	3.35	40.3225	3.00	9.000
3.6	6.35	12.9600	-2.75	7.563
2.6	3.6	6.7600	-1.00	1.000
-5.4	2.6	29.1600	-8.00	64.000
-2.4	-5.4	5.7600	3.00	9.000
-4.4	-2.4	19.3600	-2.00	4.000
-5.15	-4.4	26.5225	-0.75	.563
-2.15	-5.15	4.6225	3.00	9.000
-3.9	-2.15	15.2100	-1.75	3.063
3.35	-3.9	11.2225	7.25	52.563
4.35	3.35	18.9225	1.00	1.000
المجموع		204.6		168.375

بالاعتماد على الجدول السابق يتم حساب معامل داربن واتسون:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{168.375}{204.6} = 0.8229$$

من جداول داربن واتسون ولمستوى دلالة 0.05 ودرجة (15 , 1) اذ ان (1) يمثل عدد المتغيرات التفسيرية (متغير تفسيري واحد), و (15) تمثل حجم العينة (n=15), نجد أن d_L=1.08 و du=1.36 .



نلاحظ أن $0 < D.W=0.8229 < d_L=1.08$ وكما موضح في الشكل أعلاه.

لذا يمكن رفض فرضية العدم (H0: ρ=0) وقبول الفرضية البديلة (H1: ρ≠0) , مما يشير الى وجود مشكلة الارتباط الذاتي وأن حدود الخطأ العشوائي تعاني من ارتباط ذاتي موجب أي أن (ρ > 0).

بعد رفض فرضية العدم يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ العشوائي وبالاعتماد على الصيغة التي تمت الاشارة اليها في المحاضرة السابقة وكالآتي:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{15} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{15} e_{t-1}^2} = \frac{110.29}{185.6775} = 0.59$$

يمكن تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي من العلاقة بين هذا المعامل ومعامل داربن وتسون وكالآتي:

$D.W = 2(1-\hat{\rho})$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D.W}{2} = 1 - \frac{0.8229}{2} = 0.58855 \cong 0.59$$

t	e_t	e_{t-1}	$e_t e_{t-1}$	e_{t-1}^2
2	-0.15	-1.15	.172	1.32
3	1.1	-0.15	-.165	.02
4	3.35	1.1	3.685	1.21
5	6.35	3.35	21.273	11.22
6	3.6	6.35	22.860	40.32
7	2.6	3.6	9.360	12.96
8	-5.4	2.6	-14.040	6.76
9	-2.4	-5.4	12.960	29.16
10	-4.4	-2.4	10.560	5.76
11	-5.15	-4.4	22.660	19.36
12	-2.15	-5.15	11.072	26.52
13	-3.9	-2.15	8.385	4.62
14	3.35	-3.9	-13.065	15.21
15	4.35	3.35	14.573	11.22
المجموع			110.29	185.6775

تقدير معامل الارتباط الذاتي ومعالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

يقدر معامل الارتباط الذاتي باعتماد الصيغة الاتية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} t_{t-1}^2}$$

أذ أن: e_t تمثل البواقي المقدرة من أنموذج الانحدار المقدر عند الزمن t .

e_{t-1} تمثل البواقي المقدرة من أنموذج الانحدار المقدر عند الزمن (t-1).

معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بين الاخطاء العشوائية:

تتضمن عملية معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بين الاخطاء العشوائية اتباع الخطوات التالية بفتراض ان أنموذج الانحدار هو انحدار خطي بسيط:

1- تقدير معادلة الانحدار وأختبار معنوية الارتباط الذاتي باتباع أختبار داربن واتسون.

2- تقدير معامل الارتباط الذاتي وفق الصيغة أعلاه.

3- معالجة المشكلة بتنقية البيانات الخاصة بمتغير الاستجابة Y والمتغير التوضيحي X .

ملاحظة: يمكن تعميم معالجة مشكلة الارتباط الذاتي لحالة أنموذج الانحدار الخطي العام.

تنقية البيانات من مشكلة الارتباط الذاتي:

بافتراض أنموذج الانحدار الخطي البسيط

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$$

بعد تقدير قيمة معامل الارتباط الذاتي وأذا كانت نتيجة أختبار داربن واتسون هي رفض فرضية العدم بمعنى ان قيمته لاتساوي الصفر، تأتي مرحلة تنقية البيانات من مشكلة الارتباط الذاتي وتتم التنقية بالشكل الآتي:

أ- بالنسبة لمتغير الاستجابة:

كل قيمة من قيم متغير الاستجابة في الزمن t يتم طرحها من القيمة السابقة لها (أي في الزمن t-1) بعد ضربها بالقيمة المقدرة لمعامل الارتباط الذاتي ($\hat{\rho}$). اذا فرضنا أن قيمة متغير الاستجابة التي تم تنقيتها هي Y_t^* فأن عملية التنقية تتم وفق الصيغة الآتية:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$

لاحظ سيتم فقدان مشاهدة واحدة نتيجة عملية الفروق.

ب- بالنسبة للمتغير التوضيحي:

يتم اتباع نفس الاجراء المتبع في تنقية بيانات متغير الاستجابة لتنقية بيانات المتغير التوضيحي، اذا فرضنا أن قيمة متغير الاستجابة التي تم تنقيتها هي X_t^* فأن عملية التنقية تتم وفق الصيغة الآتية:

$$X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

بعد اتمام عملية تنقية البيانات يتم الاعتماد على قيم متغير الاستجابة بعد التنقية (Y_t^*) وقيم المتغير التوضيحي بعد التنقية (X_t^*) أي تقدير أنموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + \epsilon_t^*$$

أذ أن :

$$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho)$$

$$\epsilon_t^* = \epsilon_t - \rho\epsilon_{t-1}$$

علما أن الاخطاء العشوائية بعد تنقية البيانات (ϵ_t^*) تحقق جميع فروض طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، لذا يمكن اعتماد تلك الطريقة في تقدير معلمات الانموذج وأن المعلمات المقدرة تحقق جميع الخصائص المرغوبة وهي :

1- المقدرات تكون غيرمتحيزه.
2- المقدرات تكون دالة خطية بقيم متغير الاستجابة.
3- لها اقل تباين من بين جميع المقدرات غير المتحيزة.

لذا فهي تتصف بخاصية افضل تقدير خطي غير متحيز.

ملخص خطوات أختبار ومعالجة مشكلة الارتباط الذاتي وتقدير أنموذج الانحدار:

1- يتم اولا تقدير نموذج الانحدار ($Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$) .
2- من نموذج الانحدار المقدر في الخطوة (1) يتم حساب قيم البواقي (e_t).
3- بالاعتماد على قيم البواقي (e_t) التي تم حسابها في الخطوة السابقة يتم أختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي من عدمها بالاعتماد على أختبار داربن واتسون وتحت الافتراضات الخاصة بهذا الاختبار والتي تم ذكرها سابقا.
4- في حال اشار اختبار داربن الى وجود مشكلة الارتباط الذاتي يتم تقدير قيمة معامل الارتباط. اما اذا اشار اختبار داربن الى عدم وجود مشكلة الارتباط الذاتي يتم الاعتماد النموذج المقدر في الخطوة (1).
5- تستخدم قيمة معامل الارتباط الذاتي التي تم تقديرها لمعالجة مشكلة الارتباط الذاتي في حالة وجود المشكلة.
6- يتم الاعتماد على البيانات المنقاة والخاصة بقيم متغير الاستجابة والمتغير التوضيحي لتقدير انموذج الانحدار.
7- يتم اعادة الخطوات (2-6) ولكن بالاعتماد على البواقي الناتجة من تقدير انموذج الانحدار الذي حصلنا عليه في الخطوة (6), للتأكد من معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

ملاحظة : تسمى طريقة التقدير والمعالجة الموضحة بالخطوات اعلاه بطريقة التكرار.

مثال تطبيقي حول معالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

البيانات المبينة في الجدول التالي تمثل قيم كل من متغير الاستجابة Y والمتغير التوضيحي X لعينة بحجم (n=10).

المطلوب اختبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي بين الاخطاء العشوائية, في حالة وجودها عالج المشكلة وقدر معاملات الانموذج:

t	Y	X
1	23	5
2	24	8
3	28	6
4	33	7
5	36	7
6	36	8
7	35	9
8	27	8
9	30	9
10	28	9

اولا يتم تقدير أنموذج الانحدار بطريقة المربعات الصغرى : بافتراض العلاقة الخطية بين متغير الاستجابة والمتغير التوضيحي والمتمثلة بنموذج الانحدار الخطي البسيط الاتي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t$$

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Y_t X_t \end{bmatrix}$$

ومن جدول البيانات حصلنا على المعلومات الاتية:

n=10 $\quad \sum X_t = 76 \quad \sum X_t^2 = 594 \quad \sum Y_t = 300 \quad \sum Y_t X_t = 2299$

ومن تلك المجاميع نحصل على القيم التقديرية لمعلمات أنموذج الانحدار

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 76 \\ 76 & 594 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 300 \\ 2299 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.195 \\ 1.159 \end{bmatrix}$$

أذن معادلة الانحدار المقدرة تكون كالاتي:

$$\hat{Y}_t = 21.195 + 1.159 X_t$$

بالاعتماد على معادلة الانحدار المقدرة يتم تقدير قيم متغير الاستجابة ($\hat{Y}_t$) وبعدها يتم حساب قيم البواقي ($e_t = Y_t - \hat{Y}_t$), وكما مبينة في الجدول التالي:

t	$\hat{Y}_t$	e_t
1	26.98780	-3.98780
2	30.46341	-6.46341
3	28.14634	-.14634
4	29.30488	3.69512
5	29.30488	6.69512
6	30.46341	5.53659
7	31.62195	3.37805
8	30.46341	-3.46341
9	31.62195	-1.62195
10	31.62195	-3.62195

وبالاعتماد على قيم البواقي (e_t) يتم اجراء اختبار داربن واتسون.

بالاعتماد على الجدول السابق يتم حساب معامل داربن واتسون:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{129.98899}{185.9878} = 0.6989$$

من جداول داربن واتسون ولمستوى دلالة 0.05 ودرجة (10 , 1) اذ ان (1) يمثل عدد المتغيرات التفسيرية (متغير تفسيري واحد), و (10) تمثل حجم العينة (n=10), نجد أن d_L=0.879 و du=1.320 .



نلاحظ أن d_L=0.879 < D.W=0.6989 < 0 وكما موضح في الشكل أعلاه. لذا يمكن رفض فرضية العدم (H0: ρ=0) وقبول الفرضية البديلة (H1: ρ≠0) , مما يشير الى وجود مشكلة الارتباط الذاتي وأن حدود الخطأ العشوائي تعاني من ارتباط ذاتي موجب أي أن (ρ > 0).

بعد أن تم رفض فرضية العدم بمعنى وجود مشكلة الارتباط الذاتي , يتم معالجة البيانات بالاعتماد على قيمة معامل الارتباط الذاتي. نحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي المقدرة وبالاعتماد على الجدول الآتي:

t	e_t	e_{t-1}	$e_t e_{t-1}$	e_{t-1}^2
2	-6.46341	-3.98780	25.77484	15.90
3	-.14634	-6.46341	.94587	41.78
4	3.69512	-.14634	-.54075	.02
5	6.69512	3.69512	24.73929	13.65
6	5.53659	6.69512	37.06811	44.82
7	3.37805	5.53659	18.70286	30.65
8	-3.46341	3.37805	-11.69958	11.41
9	-1.62195	-3.46341	5.61749	12.00
10	-3.62195	-1.62195	5.87463	2.63
المجموع			106.48275	172.87

تنقية البيانات باستعمال قيمة معامل الارتباط الذاتي المقدرة وفق الصيغتين:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \quad , \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

والبيانات المنقاة مبينة بالجدول التالي :

t	Y_t	Y_{t-1}	$0.6159Y_{t-1}$	$Y_t^* = Y_t - 0.6159Y_{t-1}$	X_t	X_{t-1}	$0.6159X_{t-1}$	$X_t^* = X_t - 0.6159X_{t-1}$
2	24	23	14.1657	9.8343	8	5	3.0795	4.9205
3	28	24	14.7816	13.2184	6	8	4.9272	1.0728
4	33	28	17.2452	15.7548	7	6	3.6954	3.3046
5	36	33	20.3247	15.6753	7	7	4.3113	2.6887
6	36	36	22.1724	13.8276	8	7	4.3113	3.6887

7	35	36	22.1724	12.8276	9	8	4.9272	4.0728
8	27	35	21.5565	5.4435	8	9	5.5431	2.4569
9	30	27	16.6293	13.3707	9	8	4.9272	4.0728
10	28	30	18.4770	9.5230	9	9	5.5431	3.4569

من الجدول اعلاه نحصل على قيم كل من متغير الاستجابة والمتغير التوضيحي التي تم معالجتها من مشكلة الارتباط الذاتي.

من الجدول السابق يتم حساب كل مما يأتي:

n=9 , $\sum X_t^* = 27.7347$, $\sum X_t^{*2} = 108.28$, $\sum Y_t^* = 109.4752$

$\sum Y_t^* X_t^* = 360.78$

وبالاعتماد على تلك المعلومات يتم تقدير انموذج الانحدار.

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta_0^*} \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 27.7347 \\ 27.7347 & 108.28 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 109.4752 \\ 360.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.463 \\ -0.091 \end{bmatrix}$$

معادلة الانحدار المقدرة تكون كالآتي:

معادلة الانحدار المقدرة في التكرارا الاول $\widehat{Y_t^*} = 12.463 - 0.091X_t^*$

ذكرنا سابقا أن ($\beta_0^* = \beta_0(1 -)$) , لذا لغرض الحصول على القيمة التقديرية لـ (β_0) يتم تقسيم القيمة التقديرية لـ (β_0^*) والبالغة (12.463) على المقدار ($1 - \hat{\rho}$) , وكالآتي :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\widehat{\beta_0^*}}{1-\hat{\rho}} = \frac{12.463}{1-0.6159} = 32.447$$

لذا فأن معادلة الانحدار المقدرة في التكرار الاول تكون كألاتي:

$$\widehat{Y_t^*} = 32.447 - 0.091X_t^*$$

كل العمليات التي اجريت (الاختبار والمعالجة والتقدير) تمثل التكرار الاول.

يتم في التكرار الثاني اعادة عملية اختبار مشكلة الارتباط الذاتي بالاعتماد على القيم التقديرية لمتغير الاستجابة بعد المعالجة الاولى اي ($\widehat{Y_t^*}$) وقيم البواقي لمعادلة الانحدار المقدرة الاخيرة (معادلة الانحدار المقدرة أعلاه) للتأكد من معالجة مشكلة الارتباط الذاتي, وفي حال بقاء المشكلة تعاد عملية المعالجة مرة ثانية بالاعتماد على قيمة معامل الارتباط الذاتي المقدرة في التكرار الثاني . وهكذا نستمر لحين ازالة المشكلة.

في التكرار الثاني يتم الاعتماد على قيم البواقي المحسوبة من معادلة الانحدار المقدرة بعد تنقية البيانات اي البواقي ϵ_t^* والتي تساوي :

$$\epsilon_t^* = Y_t^* - \widehat{Y_t^*}$$