السلسلة رقم 03 حول الانحدار الخطي المتعدد والحل النموذجي

التمرين الأول (بمراعاة 8ارقام بعد الفاصلة دون تقريب)

أراد احد الباحثين معرفة المتغيرات المفسرة للظاهرة Y، وقد سمحت دراسته النظرية بتحديد متغيرين تفسيريين للظاهرة هما $(X_{1,t})$ و $(X_{2,t})$ ثم قام بتجميع البيانات عن هذه المتغيرات كما يوضحها الجدول الموالي:

(Y_t)	12	21	24	24	13	17	21	26	31	30
$(X_{1,t})$	7	9	11	12	7	9	12	14	19	21
$(X_{2,t})$	48	40	18	28	40	32	31	24	22	25

وقد تمكن الباحث من توصيف المشكلة المدروسة في شكلها الرياضي التالي:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1,t} + b_2 X_{2,t} + \varepsilon_t$$

المطلوب:

1- أكتب النموذج في شكله المصفوفي مع تحديد درجة كل مصفوفة؟

2- قدر معلمات النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى لعادية OLS؟

3- أحسب بواقي النموذج ؟ ثم أحسب مقدر تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

4- أحسب مصفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات matrice des variances-covariances ثم أحسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.

5- احسب معامل التحديد R^2 ثم معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$

6- اختبر المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج المقدر عند مستوى معنوية $(\alpha = 5\%)$ ؟

7- اختبر المعنوية الإحصائية الفردية لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية $(\alpha = 5\%)$ ؟

8- احسب القيمة المتوقعة (Y_{t+1}) للظاهرة المراد تفسيرها في السنة المقبلة، إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغيرين $(X_{1,t+1} = 22)$ و $(X_{2,t+1} = 23)$

التمرين الثاني يحتفظ بـ 9 ارقام بعد الفاصلة

إذا اتيحت لك البيانات التالية المتعلقة بالمتغيرات Y , X1 , X2

الفترة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(Y_t)	55	68	66	55	61	71	62	59	53	67
$(X_{1,t})$	12	17	16	9	13	22	23	19	16	17
$(X_{2,t})$	3	9	5	5	3	6	4	3	2	11

المطلوب: إذا افترضنا بأن النموذج الخطي المراد تقديره من الشكل: $Y_t = b_0 + b_1 X_{1,t} + b_2 X_{2,t} + \varepsilon_t$

1- قدر المعلمات: $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2$؟

2- حدد المقدرة التفسيرية للنموذج؟

3- اختبر المعنوية الكلية للنموذج ثم معنويته الجزئية عند مستوى معنوية $(\alpha = 5\%)$؟

التمرين الثالث:

إذا اتيحت لك البيانات التالية حول Q قيمة الإنتاج في الشركة و K قيمة رأس المال المستخدم في الشركة ، و L أجور العمال في الشركة على مدار 20 سنة: (الوحدة مليون دينار جزائري)

السنوات	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Q	106	81	72	57	66	98	82	99	110	118	95	112	64	137	86	56	81	65	149	65
K	8	9	4	2	6	6	3	6	8	8	4	8	3	6	4	2	3	3	9	3
L	23	14	38	97	11	43	93	49	36	43	61	31	57	97	93	72	61	97	89	25

إذا علمت أن دالة الإنتاج من نوع كوب دوغلاس المحددة بالصيغة التالية: $Q = AK^{\alpha 1}L^{\alpha 2}$

1- قدم تفسيرا اقتصاديا للمعاملات $\alpha 1$ و $\alpha 2$

2- حول النموذج غير الخطي لدالة كوب دوغلاس أعلاه إلى الشكل الخطي، ثم عرف المتغيرات الجديدة المستعملة في النموذج الخطي ؟

3- قدر معلمات النموذج الخطي؟

4- أختبر جودة النموذج المقدر عند مستوى معنوية $(\alpha = 5\%)$ ؟

5- أكتب معادلة الإنتاج كوب دوغلاس بالاعتماد على المعلمات المقدرة ؟

6- إذا عزمت الشركة في سنة 2024 على مضاعفة قيمة عوامل الإنتاج المستخدمة في سنة 2023، فما هي قيمة الإنتاج المتوقعة للشركة في سنة 2024 .

الحل النموذجي للسلسلة رقم 03

حل التمرين الأول: بمراعاة 8أرقام بعد الفاصلة دون تقريب

ملاحظة: هناك بعض التصحيحات بالمقارنة مع النموذج الذي تم حله في القسم ،حيث ننبه إلى وجود بعض الاختلافات في حساب قيم المعلمات وغيرها من الأرقام تبعا لمراعاتنا في هذا التمرين لـ 8 ارقام بعد الفاصلة دون تقريب)

النموذج المدروس يأخذ الصيغة الخطية التالية:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1,t} + b_2 X_{2,t} + \varepsilon_t$$

حيث أن $X1_t$، و$X2_t$ هما المتغيران التفسيريان للمتغير Y_t، وعليه عدد المتغيرات التفسيرية هو $(K = 2)$ وعدد المشاهدات هو $(n = 10)$

1- كتابة النموذج في صيغته المصفوفية مع تحديد درجة كل مصفوفة:

$$Y_{(n*1)} = X_{(n*(k+1))} b_{((k+1)*1)} + \varepsilon_{(n*1)}$$

أي :

$$Y_{(10*1)} = X_{(10*3)} \hat{b}_{(3*1)} + e_{(10*1)}$$

حيث:

$$Y_{(10*1)} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \\ 24 \\ . \\ . \\ 30 \end{bmatrix} \quad ، \quad X_{(10*3)} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 48 \\ 1 & 9 & 40 \\ 1 & 11 & 18 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 21 & 25 \end{bmatrix} \quad ، \quad \hat{b}_{(3*1)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \quad ، \quad e_{(10*1)} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ . \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

2- تقدير معلمات النموذج:

يمكن تقدير الشعاع $\hat{b}$ حيث $\hat{b}_{(3*1)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$. بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\hat{b} = (X^t X)^{-1} (X^t Y)$$

لنحسب $(X^t Y)$ و $(X^t X)^{-1}$

يمكن تحديد عناصر المصفوفتين بالاعتماد على المعادلات الطبيعية حيث:

$$(X^t Y) = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X1 * Y \\ \sum X2 * Y \end{bmatrix} \quad , \quad (X^t X) = \begin{bmatrix} n & \sum X1 & \sum X2 \\ \sum X1 & \sum (X1)^2 & \sum (X1 * X2) \\ \sum X2 & \sum (X1 * X2) & \sum (X2)^2 \end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر المصفوفتين يمكننا الاستعانة بالجدول المساعد التالي لحساب مختلف المجاميع الضرورية.

جدول تلخيصي لحساب مختلف المجاميع

	Y_t	$X1$	$X2$	$(X1)^2$	$(X2)^2$	$X1 * X2$	$X1 * Y$	$X2 * Y$	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
	12	**7**	**48**	49,00	2304,00	336,00	84,00	576,00	12,89543976	-0,89543976	0,80181236	81,08210512	98,01000000
	21	**9**	**40**	81,00	1600,00	360,00	189,00	840,00	16,74727578	4,25272422	18,08566329	26,55056689	0,81000000
	24	**11**	**18**	121,00	324,00	198,00	264,00	432,00	24,18348966	-0,18348966	0,03366846	5,21432503	4,41000000
	24	**12**	**28**	144,00	784,00	336,00	288,00	672,00	22,52502981	1,47497019	2,17553706	0,39066226	4,41000000
	13	**7**	**40**	49,00	1600,00	280,00	91,00	520,00	14,94365568	-1,94365568	3,77779740	48,39072630	79,21000000
	17	**9**	**32**	81,00	1024,00	288,00	153,00	544,00	18,79549170	-1,79549170	3,22379044	9,63797178	24,01000000
	21	**12**	**31**	144,00	961,00	372,00	252,00	651,00	21,75694884	-0,75694884	0,57297155	0,02046363	0,81000000
	26	**14**	**24**	196,00	576,00	336,00	364,00	624,00	25,35275787	0,64724213	0,41892237	11,92153691	16,81000000
	31	**19**	**22**	361,00	484,00	418,00	589,00	682,00	30,37386210	0,62613790	0,39204867	71,80633889	82,81000000
	30	**21**	**25**	441,00	625,00	525,00	630,00	750,00	31,40940123	-1,40940123	1,98641183	90,42871175	65,61000000
المجموع	**219,00**	**121,00**	**308,00**	**1667,00**	**10282,00**	**3449,00**	**2904,00**	**6291,00**		**0,01664757**	**31,46862344**	**345,44340856**	**376,90000000**
المتوسط	**21,90**	**12,10**	**30,80**										

$$(X^tY) = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X1 * Y \\ \sum X2 * Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 219 \\ 2904 \\ 6291 \end{bmatrix} \quad , \quad (X^tX) = \begin{bmatrix} n & \sum X1 & \sum X2 \\ \sum X1 & \sum (X1)^2 & \sum (X1 * X2) \\ \sum X2 & \sum (X1 * X2) & \sum (X2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 121 & 308 \\ 121 & 1667 & 3449 \\ 308 & 3449 & 10282 \end{bmatrix}$$

لنحسب المصفوفة $(X^tX)^{-1}$

يمكننا حساب $(X^tX)^{-1}$ باستعمال المصفوفة المساعدة $adj(X^tX)$ حيث: $(X^tX)^{-1} = \frac{\text{المصفوفة المساعدة لـ } (X^tX)}{det(X^tX)} = \frac{adj(X^tX)}{det(X^tX)}$ بتتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد مصفوفة المرافقات للمصفوفة(X^tX) أي: حساب $conj(X^tX)$

$$conj(A)=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}1667 & 3449\\ 3449 & 10282\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}121 & 3449\\ 308 & 10282\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}121 & 1667\\ 308 & 3449\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}121 & 308\\ 3449 & 10282\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}10 & 308\\ 308 & 10282\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}10 & 121\\ 308 & 3449\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}121 & 308\\ 1667 & 3449\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}10 & 308\\ 121 & 3449\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}10 & 121\\ 121 & 1667\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5244493 & -181830 & -96107\\ -181830 & 7956 & 2778\\ -96107 & 2778 & 2029\end{bmatrix}$$

ب- تحديد المصفوفة المساعدة:

المصفوفة المساعدة هي منقول مصفوفة المر افقات أي $adj(X^tX)=[conj(X^tX)]^t$

$$\Rightarrow adj\left(X^tX\right)=\begin{bmatrix}5244493 & -181830 & -96107\\ -181830 & 7956 & 2778\\ -96107 & 2778 & 2029\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}5244493 & -181830 & -96107\\ -181830 & 7956 & 2778\\ -96107 & 2778 & 2029\end{bmatrix}$$

ج- حساب محدد المصفوفة (X^tX)

$$det(X^tX)=10*\begin{vmatrix}1667 & 3449\\ 3449 & 10282\end{vmatrix}-121*\begin{vmatrix}121 & 3449\\ 308 & 10282\end{vmatrix}+308*\begin{vmatrix}121 & 1667\\ 308 & 3449\end{vmatrix}=842544$$

د- حساب $(X^tX)^{-1}$ حيث:

$$(X^tX)^{-1}=\frac{adj\left(X^tX\right)}{det\left(X^tX\right)}=\frac{\begin{bmatrix}5244493 & -181830 & -96107\\ -181830 & 7956 & 2778\\ -96107 & 2778 & 2029\end{bmatrix}}{842544}$$

$$(X^tX)^{-1}=\begin{bmatrix}6.22459242 & -0.21581068 & -0.11406763\\ -0.21581068 & 0.00944283 & 0.00329715\\ -0.11406763 & 0.00329715 & 0.00240818\end{bmatrix}$$

إذن:

$$\hat{b}=(X^tX)^{-1}(X^tY)=\begin{bmatrix}6.22459242 & -0.21581068 & -0.11406763\\ -0.21581068 & 0.00944283 & 0.00329715\\ -0.11406763 & 0.00329715 & 0.00240818\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}219\\ 2904\\ 6291\end{bmatrix}$$

$$\hat{b}=\begin{bmatrix}6.22459242*219-0.21581068*2904-0.11406763*6291\\ -0.21581068*219+0.00944283*2904+0.00329715*6291\\ -0.11406763*219+0.00329715*2904+0.00240818*6291\end{bmatrix}$$

$$\hat{b}=\begin{bmatrix}18.87206493\\ 0.90181005\\ -0.25602699\end{bmatrix}$$

وعليه تكون معادلة التقدير كما يلي:

$$\hat{Y}_t=18.87206493+0.90181005X_{1t}-0.25602699X_{2t}$$

3- حساب بواقي النموذج ثم حساب مقدر تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$.

3-1- احسب بواقي النموذج e_t : حيث: $e_t=\left(Y-\hat{Y}\right)$

والنتائج محددة في الجدول أعلاه

2-3- حساب مقدرتباين الأخطاء $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e^{t}e}{n-(K+1)} = \frac{\sum e^{2}}{n-(K+1)} = \frac{31{,}46862344}{10-(2+1)}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = 4.49551763$$

4- حساب مصفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات matrice des variances-covariances **ثم حساب مقدر الانحراف المعياري للمعلمات**

1-4- حساب مصفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات matrice des variances-covariances

$$matrice\ des\ variances\ et\ covariances = \Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(X^{t}X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = 4{,}49551763 * \begin{bmatrix} 6.22459242 & -0.21581068 & -0.11406763 \\ -0.21581068 & 0.00944283 & 0.00329715 \\ -0.11406763 & 0.00329715 & 0.00240818 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \begin{bmatrix} 27{,}98276496 & -0{,}97018071 & -0{,}51279304 \\ -0{,}97018071 & 0{,}04245040 & 0{,}01482239 \\ -0{,}51279304 & 0{,}01482240 & 0{,}01082601 \end{bmatrix}$$

2-4- حساب مقدر الانحراف المعياري للمعلمات

وتحدد لنا مصفوفة التباينات والتغايرات $\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b})$ **في قطرها الرئيسي قيم مقدرتباين المعلمات المقدرة أي** $\sigma_{\hat{b}_2}^{2}$, $\sigma_{\hat{b}_1}^{2}$, $\sigma_{\hat{b}_0}^{2}$ **على التوالي.**

إذن:

$$\sigma_{\hat{b}_0}^{2} = 27{,}98276496 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{27{,}98276496} = 5{,}28987381$$

$$\sigma_{\hat{b}_1}^{2} = 0{,}04245040 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0{,}04245040} = 0{,}20603494$$

$$\sigma_{\hat{b}_2}^{2} = 0{,}01082601 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_2} = \sqrt{0{,}01082601} = 0{,}10404811$$

5- حساب معامل التحديد R^2 و معامل التحديد المعدل $\overline{R}^{\,2}$

1-5- حساب معامل التحديد R^2

$$R^{2} = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^{2}}{\sum(Y-\bar{Y})^{2}} =$$

$$R^{2} = \frac{345{,}44340856}{376{,}9000} = 0.916538$$ بالاعتماد على الجدول أعلاه نجد:

ملاحظة: في نماذج الانحدار المتعدد لا يصلح معامل التحديد لتحديد المقدرة التفسيرية للنموذج لذلك تم اعتماد معامل التحديد المعدل $\overline{R}^{\,2}$

2-5- حساب معامل التحديد المعدل $\overline{R}^{\,2}$

$$\left(\overline{R^{2}}\right) = (R^{2}Ajust\acute{e}) = 1-(1-R^{2}).\frac{n-1}{n-(k+1)}$$

$$\left(\overline{R^{2}}\right) = 1-(1-0.916538)\frac{10-1}{10-(2+1)} = 0.892692$$

التعليق: تقدر المقدرة التفسيرية لهذا النموذج بـــ 89.26% وهذا ما يدل على أن 89.26% من التغيرات الاجمالية في المتغير Y مردها إلى المتغيرين التفسيريين المدرجين في النموذج $(X1\ ,X2)$ في حين ترجع النسبة الباقية $(100 - 89.26 = 10.74\%)$ والمقدرة بـ 10.74 % إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج .

6- اختبارات المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج المقدر

$$H_0: b_1 = b_2 = 0$$
$$H_1: \exists i\ /b_i \neq 0\ \ ou'\ i = 1,2$$

1. يمكن اختبار الفرضيتين بالاعتماد على جدول تحليل التباين كما يلي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
X_i	$SSR = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 345{,}44340856$	$K = 2$	$\frac{SSR}{K} = 172.72170428$
البواقي	$SSE = \sum(Y - \hat{Y})^2 = \sum e^2 = 31{,}46862343$	$n - (K+1) = 7$	$\frac{SSE}{n-(K+1)} = 4.49551763$
الإجمالي	$SST = \sum(Y - \bar{Y})^2 = 376.9$	$n - 1 = 9$	

$$F_{cal(K,n-(K+1))} = \frac{\frac{SSR}{K}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}} = \frac{172.72170428}{4.49551763} = 38.4208$$

إحصاءة فيشر الجدولية حيث:

$$F^{0.05}_{tab(K,n-(K+1))} = \ F^{0.05}_{tab(v1=2,\ v2=7)} = 4.74$$

القرار: نلاحظ أن $F_{cal} > F^{0.05}_{tab}$ لذلك نقرر رفض H_0 وقبول H_1 وبالتالي النموذج ذو دلالة إحصائية ويوجد على الأقل متغير يفسر المتغير Y بشكل معنوي .

ملاحظة: يمكن حساب إحصاءة فيشر F بالاعتماد على معامل التحديد كما يلي:

$$F_{cal(K,n-(K+1))} = \frac{R^2/_K}{(1-R^2)/_{n-(k+1)}} = \frac{\frac{0.916538}{2}}{\frac{(1-0.916538)}{10-(2+1)}}$$
$$F_{cal(K,n-(K+1))} = 38.435$$

7- اختبار المعنوية الإحصائية الجزئية

$$H_0: b_i = 0 \quad pour\ i = 0,1,2$$
$$H_1: b_i \neq 0 \quad pour\ i = 0,1,2$$

لاختبار الفرضيتين نستخدم إحصاءة t لستودنت student حيث:

	الفرضيات	$\hat{b}_i$	$\sigma_{\hat{b}_i}$	$t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$	$t_{tab\left(7\ ,\ \frac{5}{2}\%\right)}$	القرار
بالنسبة لـ b_0	$H_0: b_0 = 0$ $H_1: b_0 \neq 0$	$\hat{b}_0 = 18{,}87206493$	$\sigma_{\hat{b}_0} = 5{,}28987381$	$t_{cal\ b0} = \frac{\hat{b}_0}{\sigma_{\hat{b}_0}} = \frac{18{,}87206493}{5{,}28987381} = 3.5675$	2.365	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_0 \neq 0)$ بشكل معنوي
بالنسبة لـ b_1	$H_0: b_1 = 0$ $H_1: b_1 \neq 0$	$\hat{b}_1 = 0{,}90181005$	$\sigma_{\hat{b}_1} = 0{,}20603494$	$t_{cal\ b1} = \frac{\hat{b}_1}{\sigma_{\hat{b}_1}} = \frac{0{,}90181005}{0{,}20603494} = 4.3769$	2.365	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_1 \neq 0)$ بشكل معنوي
بالنسبة لـ b_2	$H_0: b_2 = 0$ $H_1: b_2 \neq 0$	$\hat{b}_2 = -0{,}25602699$	$\sigma_{\hat{b}_2} = 0{,}10404811$	$t_{cal\ b2} = \frac{\hat{b}_2}{\sigma_{\hat{b}_2}} = \frac{-0{,}25602699}{0{,}10404811} = -2.4606$	2.365	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_2 \neq 0)$ بشكل معنوي

الخلاصة: نلاحظ ان النموذج المقدر ذو دلالة إحصائية كلية وجزئية يمكن استعماله للتوقع

8- تحديد القيمة المتوقعة للمتغير $\left(\hat{Y}_{t+1}\right)$ في السنة المقبلة

$$\hat{Y}_{t+1} = 18.87206493 + 0.90181005X_{1t+1} - 0.25602699X_{2t+1}$$

$$\hat{Y}_{t+1} = 18.87206493 + 0.90181005 * 22 - 0.25602699 * 23 = 32{,}82326526$$

وعليه فإن القيمة المتوقعة للمتغير المراد تفسيره في السنة المقبلة $\left(\hat{Y}_{t+1}\right)$ يساوي 32,82326526

حل التمرين الثاني:

1- تقدير معلمات النموذج:

النموذج المدروس يأخذ الصيغة الخطية التالية:

$$Y_t = b_0 + b_1 X_{1,t} + b_2 X_{2,t} + \varepsilon_t$$

حيث أن X_{1t}، وX_{2t} هما المتغيران التفسيريان للمتغير Y_t، فعدد المتغيرات التفسيرية هو $(K = 2)$ وعدد المشاهدات هو $(n = 10)$

أ- كتابة النموذج في صيغته المصفوفية:

$$Y_{(n*1)} = X_{(n*(k+1))} b_{((k+1)*1)} + \varepsilon_{(n*1)}$$

أي :

$$Y_{(10*1)} = X_{(10*3)} \hat{b}_{(3*1)} + e_{(10*1)}$$

حيث:

$$Y_{(10*1)} = \begin{bmatrix} 55 \\ 68 \\ 66 \\ . \\ . \\ 67 \end{bmatrix} \quad ، \quad X_{(10*3)} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 1 & 17 & 9 \\ 1 & 16 & 5 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 17 & 11 \end{bmatrix} \quad ، \quad \hat{b}_{(3*1)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \quad ، \quad e_{(10*1)} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ . \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

يمكن تقدير الشعاع $\hat{b}$ حيث $\hat{b}_{(3*1)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$. بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\hat{b} = (X^t X)^{-1} (X^t Y)$$

لنحسب $(X^t Y)$ و $(X^t X)^{-1}$

يمكن تحديد عناصر المصفوفتين بالاعتماد على المعادلات الطبيعية حيث:

$$(X^t Y) = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X1 * Y \\ \sum X2 * Y \end{bmatrix} \quad , \quad (X^t X) = \begin{bmatrix} n & \sum X1 & \sum X2 \\ \sum X1 & \sum (X1)^2 & \sum (X1 * X2) \\ \sum X2 & \sum (X1 * X2) & \sum (X2)^2 \end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر المصفوفتين يمكننا الاستعانة بالجدول المساعد التالي لحساب مختلف المجاميع الضرورية.

جدول تلخيصي لحساب مختلف المجاميع

	Y_t	$X1$	$X2$	$(X1)^2$	$(X2)^2$	$X1 * X2$	$X1 * Y$	$X2 * Y$	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
	55	12	3	144,000	9	36	660	165	55,868702	-0,868702	0,754643	34,004034	44,890000
	68	17	9	289,000	81	153	1156	612	67,367154	0,632846	0,400494	32,116635	39,690000
	66	16	5	256,000	25	80	1056	330	61,292447	4,707553	22,161051	0,166099	18,490000
	55	9	5	81,000	25	45	495	275	56,519663	-1,519663	2,309377	26,835887	44,890000
	61	13	3	169,000	9	39	793	183	56,550528	4,449472	19,797797	26,517057	0,490000
	71	22	6	484,000	36	132	1562	426	66,731625	4,268375	18,219023	25,317253	86,490000
	62	23	4	529,000	16	92	1426	248	64,717011	-2,717011	7,382151	9,102358	0,090000
	59	19	3	361,000	9	57	1121	177	60,641486	-1,641486	2,694477	1,120451	7,290000
	53	16	2	256,000	4	32	848	106	57,247787	-4,247787	18,043697	19,822198	75,690000
	67	17	11	289,000	121	187	1139	737	70,063594	-3,063594	9,385610	69,949708	28,090000
المجموع	617,000	164,000	51,000	2858,00	335,0000	853,0000	10256,00000	3259,0000		0,000000	101,148318960	244,951681040	346,100000
المتوسط	61,7	16,4	5,1										

$$(X^tY) = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X1 * Y \\ \sum X2 * Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 617 \\ 10256 \\ 3259 \end{bmatrix} \quad , \quad (X^tX) = \begin{bmatrix} n & \sum X1 & \sum X2 \\ \sum X1 & \sum (X1)^2 & \sum (X1 * X2) \\ \sum X2 & \sum (X1 * X2) & \sum (X2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 164 & 51 \\ 164 & 2858 & 853 \\ 51 & 853 & 335 \end{bmatrix}$$

لنحسب المصفوفة $(X^tX)^{-1}$

يمكننا حساب $(X^tX)^{-1}$ باستعمال المصفوفة المساعدة $adj(X^tX)$ حيث: $(X^tX)^{-1} = \frac{\text{المصفوفة المساعدة لـ } (X^tX)}{det(X^tX)} = \frac{adj(X^tX)}{det(X^tX)}$ بتتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد مصفوفة المرافقات للمصفوفة(X^tX) أي : حساب $conj(X^tX)$

$$conj(A)=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}2858 & 853\\ 853 & 335\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}164 & 853\\ 51 & 335\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}164 & 2858\\ 51 & 853\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}164 & 51\\ 853 & 335\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}10 & 51\\ 51 & 335\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}10 & 164\\ 51 & 853\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}164 & 51\\ 2858 & 853\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}10 & 51\\ 164 & 853\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}10 & 164\\ 164 & 2858\end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}229821 & -11437 & -5866\\ -11437 & 749 & -166\\ -5866 & -166 & 1684\end{bmatrix}$$

ب- تحديد المصفوفة المساعدة:

المصفوفة المساعدة هي منقول مصفوفة المر افقات أي $adj(X^tX)=[conj(X^tX)]^t$

$$\Rightarrow adj\left(X^tX\right)=\begin{bmatrix}229821 & -11437 & -5866\\ -11437 & 749 & -166\\ -5866 & -166 & 1684\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}229821 & -11437 & -5866\\ -11437 & 749 & -166\\ -5866 & -166 & 1684\end{bmatrix}$$

ج- حساب محدد المصفوفة (X^tX)

$$det(X^tX)=10*\begin{vmatrix}2858 & 853\\ 853 & 335\end{vmatrix}-164*\begin{vmatrix}164 & 853\\ 51 & 335\end{vmatrix}+51*\begin{vmatrix}164 & 2858\\ 51 & 853\end{vmatrix}=123376$$

د- حساب $(X^tX)^{-1}$ حيث:

$$(X^tX)^{-1}=\frac{adj(X^tX)}{det(X^tX)}=\frac{\begin{bmatrix}229821 & -11437 & -5866\\ -11437 & 749 & -166\\ -5866 & -166 & 1684\end{bmatrix}}{123376}$$

$$(X^tX)^{-1}=\begin{bmatrix}1{,}862769096 & -0{,}092700363 & -0{,}047545714\\ -0{,}092700363 & 0{,}006070873 & -0{,}001345480\\ -0{,}047545714 & -0{,}001345480 & 0{,}013649332\end{bmatrix}$$

إذن:

$$\hat{b}=(X^tX)^{-1}(X^tY)=\begin{bmatrix}1{,}862769096 & -0{,}092700363 & -0{,}047545714\\ -0{,}092700363 & 0{,}006070873 & -0{,}001345480\\ -0{,}047545714 & -0{,}001345480 & 0{,}013649332\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}617\\ 10256\\ 3259\end{bmatrix}$$

$$\hat{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{43{,}642126508}\\ \mathbf{0{,}681826287}\\ \mathbf{1{,}348220075}\end{bmatrix}$$

وعليه تكون معادلة التقدير كما يلي:

$$\hat{Y}_t=\mathbf{43{,}642126508+0{,}681826287}X_{1t}+\mathbf{1{,}348220075}X_{2t}$$

2- تحديد المقدرة التفسيرية للنموذج

يمكن حساب المقدرة التفسيرية للنموذج باستعمال معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ حيث:

$$\left(\overline{R^2}\right)=(R^2Ajust\acute{e})=1-\frac{\frac{SSE}{n-(k+1)}}{\frac{SST}{n-1}}=1-\frac{SSE}{(SSR+SSE)}.\frac{n-1}{n-(k+1)}$$

بالاعتماد على جدول حساب المجاميع أعلاه يمكن تصميم جدول تحليل التباين الموالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
X_i	$SSR = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 244,951681040$	$K = 2$	$\frac{SSR}{K} = 122,475840520$
البواقي	$SSE = \sum e^2 = 101,148318960$	$n - (K+1) = 7$	$\frac{SSE}{n-(K+1)} = 14,449759851$
الإجمالي	$SST = \sum(Y - \bar{Y})^2 = 346,100000$	$n - 1 = 9$	

يمكننا حساب معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ كما يلي:

$$\left(\overline{R^2}\right) = 1 - \frac{\frac{SSE}{n-(k+1)}}{\frac{SST}{n-1}} = 1 - \frac{\frac{101,148318960}{10-(2+1)}}{\frac{346,100000}{10-1}} = 0,624247794$$

$$\left(\overline{R^2}\right) = 62.42\%$$

التعليق: تقدر المقدرة التفسيرية لهذا النموذج بـــ 62.42% وهذا ما يدل على أن 62.42% من التغيرات الاجمالية في المتغير Y مردها إلى المتغيرين التفسيريين المدرجين في النموذج $(X1\ ,X2)$ في حين ترجع النسبة الباقية 37,58%إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج.

3- اختبار المعنوية الكلية للنموذج ثم معنويته الجزئية

3-1- اختبار المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج

$$H_0: b_1 = b_2 = 0$$
$$H_1: \exists i\ /b_i \neq 0\ \ ou'\ i = 1,2$$

يمكن اختبار الفرضيتين بالاعتماد على جدول تحليل التباين وباستعمال احصاءة فيشر F_{cal} و F_{tab} كما يلي:

$$F_{cal(K,n-(K+1))} = \frac{MSSR}{MSSE} = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}} = \frac{122,475840520}{14,449759851} = 8,475978$$

إحصاءة فيشر الجدولية F_{tab} حيث:

$$F_{tab(K,n-(K+1))}^{0.05} = \quad F_{tab(v1=2,\ v2=7)}^{0.05} = 4.74$$

القرار:

نلاحظ أن $F_{cal} > F_{tab}^{0.05}$ لذلك نقرر رفض H_0 وقبول H_1 وبالتالي النموذج ذو دلالة إحصائية ويوجد على الأقل متغير يفسر المتغير Y بشكل معنوي.

3-2- اختبار المعنوية الإحصائية الجزئية

$$H_0: b_i = 0 \quad pour\ i = 0,1,2$$
$$H_1: b_i \neq 0 \quad pour\ i = 0,1,2$$

لاختبار الفرضيتين نستخدم إحصاءة t لستودنت student حيث $t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$

لذلك يجب حساب $\sigma_{\hat{b}_i}$ أي الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة $\sigma_{\hat{b}_0}$ ، $\sigma_{\hat{b}_1}$ ، $\sigma_{\hat{b}_2}$

ويمكننا حســاب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة بالاعتماد على مصــفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات matrice des variances-covariances

أ- حساب مصفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (X^t X)^{-1} = \frac{\sum e_t^2}{n-(k+1)} (X^t X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \frac{101,148318960}{10-(2+1)} * \begin{bmatrix} 1,862769096 & -0,092700363 & -0,047545714 \\ -0,092700363 & 0,006070873 & -0,001345480 \\ -0,047545714 & -0,001345480 & 0,013649332 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \begin{bmatrix} 26,916566097 & -1,339497985 & -0,687024148 \\ -1,339497985 & 0,087722654 & -0,019441870 \\ -0,687024148 & -0,019441870 & 0,197229571 \end{bmatrix}$$

ب- حساب مقدر الانحراف المعياري للمعلمات

ويمكن حساب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة من القطر الرئيسي لمصفوفة التباينات والتغايرات كما يلي:

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 26,916566097 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{26,916566097} = 5,188117780$$

$$\sigma_{\hat{b}_1}^2 = 0,087722654 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0,087722654} = 0,296180104$$

$$\sigma_{\hat{b}_2}^2 = 0,197229571 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_2} = \sqrt{0,197229571} = 0,444105361$$

	الفرضيات	$t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$	$t_{tab\left(7\ ,\ \frac{5}{2}\%\right)}$	القرار
بالنسبة لـ b_0	$H_0: b_0 = 0$ $H_1: b_0 \neq 0$	$\frac{\mathbf{43,6421265080}}{5,18811778} = 8,411$	2.365	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_0 \neq 0)$ بشكل معنوي أي أن المعلمة b_0 ذات دلالة إحصائية
بالنسبة لـ b_1	$H_0: b_1 = 0$ $H_1: b_1 \neq 0$	$\frac{\mathbf{0,681826287}}{0,296180104} = 2.302$	2.365	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert < t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر عدم رفض H_0 والمعلمة $(b_1 = 0)$ بشكل معنوي وبذلك فإن b_1 ليست ذات دلالة إحصائية
بالنسبة لـ b_2	$H_0: b_2 = 0$ $H_1: b_2 \neq 0$	$\frac{\mathbf{1,348220075}}{0,444105361} = 3.035$	2.365	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_2 \neq 0)$ بشكل معنوي أي أن المعلمة b_2 ذات دلالة إحصائية

حل التمرين الثالث

دالة الإنتاج من نوع كوب دوغلاس المحددة بالصيغة التالية: $Q = AK^{\alpha 1}L^{\alpha 2}$

1- التفسير الاقتصادي للمعاملات $\alpha 2$ ، $\alpha 1$

تمثل المعاملات $\alpha 1$ ، $\alpha 2$ مرونة الإنتاج بالنسبة لكل من رأس المال والعمل

كما تمثل $\alpha 1$ ، $\alpha 2$ المساهمة النسبية لكل من عنصر رأس المال وعنصر العمل في الإنتاج على التوالي

2- تحويل النموذج غير الخطي لدالة كوب دوغلاس أعلاه إلى الشكل الخطي، وتعريف المتغيرات الجديدة المستعملة في النموذج الخطي

بإدخال اللوغاريتم النبيري على دالة الإنتاج لكوب دوغلاس نجد:

$$Q = AK^{\alpha 1}L^{\alpha 2} \Rightarrow lnQ = lnA + \alpha 1 lnK + \alpha 2 lnL$$

بافتراض ان $(Y = lnQ)$ ، $(X_1 = lnK)$ ، $(X_2 = lnL)$ ،

$(b_0 = lnA)$ ، $(b_1 = \alpha 1)$ و $(b_2 = \alpha 2)$

فإن النموذج أعلاه يمكن كتابته كما يلي: $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$

وبمراعاة ان النماذج احتمالية فيجب إضافة حد الخطأ العشوائي ε فيصبح النموذج كما يلي:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \varepsilon$$

وهو نموذج انحدار خطي متعدد حيث المتغير المراد تفسيره هو $(Y = lnQ)$ والمتغيرين التفسيريين $(X_1 = lnK)$ و $(X_2 = lnL)$

ويمكن تحديد البيانات الجديدة الخاصة بالمتغيرات المحولة في الجدول الموالي:

Q	K	L	$LnQ = Y$	$lnK = X_1$	$lnL = X_2$
106	8	23	4,663	2,079	3,135
81	9	14	4,394	2,197	2,639
72	4	38	4,276	1,386	3,637
57	2	97	4,043	0,693	4,574
66	6	11	4,189	1,791	2,397
98	6	43	4,584	1,791	3,761
82	3	93	4,406	1,098	4,532
99	6	49	4,595	1,791	3,891
110	8	36	4,7	2,079	3,583
118	8	43	4,77	2,079	3,761
95	4	61	4,553	1,386	4,11
112	8	31	4,718	2,079	3,433
64	3	57	4,158	1,098	4,043
137	6	97	4,919	1,791	4,574
86	4	93	4,454	1,386	4,532

56	2	72	4,025	0,693	4,276
81	3	61	4,394	1,098	4,11
65	3	97	4,174	1,098	4,574
149	9	89	5,003	2,197	4,488
65	3	25	4,174	1,098	3,218

3- تقدير معلمات النموذج:

النموذج المدروس يأخذ الصيغة المصفوفية التالية:

$$Y_{(n*1)} = X_{(n*(k+1))} b_{((k+1)*1)} + \varepsilon_{(n*1)}$$

أي :

$$Y_{(20*1)} = X_{(20*3)} \hat{b}_{(3*1)} + e_{(20*1)}$$

حيث:

$$Y_{(20*1)} = \begin{bmatrix} 4.663 \\ 4.394 \\ 4.276 \\ . \\ . \\ 4.174 \end{bmatrix} \quad ، \quad X_{(20*3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2.079 & 3.135 \\ 1 & 2.197 & 2.639 \\ 1 & 1.386 & 3.637 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 1.098 & 3.218 \end{bmatrix} \quad ، \quad \hat{b}_{(3*1)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} \quad ، \quad e_{(20*1)} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ . \\ . \\ e_{20} \end{bmatrix}$$

يمكن تقدير الشعاع $\hat{b}$ حيث $\hat{b}_{(3*1)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$. بالاعتماد على العلاقة التالية: $\hat{b} = (X^t X)^{-1}(X^t Y)$

لنحسب $(X^t Y)$ و $(X^t X)^{-1}$

يمكن تحديد عناصر المصفوفتين بالاعتماد على المعادلات الطبيعية حيث:

$$(X^t Y) = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X1 * Y \\ \sum X2 * Y \end{bmatrix} \quad , \quad (X^t X) = \begin{bmatrix} n & \sum X1 & \sum X2 \\ \sum X1 & \sum (X1)^2 & \sum (X1 * X2) \\ \sum X2 & \sum (X1 * X2) & \sum (X2)^2 \end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر المصفوفتين يمكننا الاستعانة بالجدول المساعد التالي لحساب مختلف المجاميع الضرورية.

جدول تلخيصي لحساب مختلف المجاميع

	Y_t	$X1$	$X2$	$(X1)^2$	$(X2)^2$	$X1 * X2$	$X1 * Y$	$X2 * Y$	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
	4,663	2,079	3,135	4,32224100	9,82822500	6,51766500	9,69437700	14,61850500	4,59912319	0,06387681	0,00408025	0,01946672	0,04137156
	4,394	2,197	2,639	4,82680900	6,96432100	5,79788300	9,65361800	11,59576600	4,54350606	-0,14950606	0,02235206	0,00704023	0,00430336
	4,276	1,386	3,637	1,92099600	13,22776900	5,04088200	5,92653600	15,55181200	4,30328969	-0,02728969	0,00074473	0,02443291	0,03370896
	4,043	0,693	4,574	0,48024900	20,92147600	3,16978200	2,80179900	18,49268200	4,11976583	-0,07676583	0,00589299	0,11548726	0,17355556
	4,189	1,791	2,397	3,20768100	5,74560900	4,29302700	7,50249900	10,04103300	4,23177726	-0,04277726	0,00182989	0,05190320	0,07322436
	4,584	1,791	3,761	3,20768100	14,14512100	6,73595100	8,20994400	17,24042400	4,58393898	0,00006102	0,00000000	0,01546018	0,01547536
	4,406	1,098	4,532	1,20560400	20,53902400	4,97613600	4,83778800	19,96799200	4,35755673	0,04844327	0,00234675	0,01041283	0,00287296
	4,595	1,791	3,891	3,20768100	15,13988100	6,96878100	8,22964500	17,87914500	4,61750278	-0,02250278	0,00050637	0,02493329	0,01833316
	4,7	2,079	3,583	4,32224100	12,83788900	7,44905700	9,77130000	16,84010000	4,71478921	-0,01478921	0,00021872	0,06512153	0,05779216
	4,77	2,079	3,761	4,32224100	14,14512100	7,81911900	9,91683000	17,93997000	4,76074579	0,00925421	0,00008564	0,09068879	0,09634816
	4,553	1,386	4,11	1,92099600	16,89210000	5,69646000	6,31045800	18,71283000	4,42541029	0,12758971	0,01627914	0,00116894	0,00872356
	4,718	2,079	3,433	4,32224100	11,78548900	7,13720700	9,80872200	16,19689400	4,67606174	0,04193826	0,00175882	0,04685569	0,06677056
	4,158	1,098	4,043	1,20560400	16,34584900	4,43921400	4,56548400	16,81079400	4,23130520	-0,07330520	0,00537365	0,05211851	0,09096256
	4,919	1,791	4,574	3,20768100	20,92147600	8,19203400	8,80992900	22,49950600	4,79384182	0,12515818	0,01566457	0,11171759	0,21104836
	4,454	1,386	4,532	1,92099600	20,53902400	6,28135200	6,17324400	20,18552800	4,53436355	-0,08036355	0,00645830	0,00558959	0,00003136
	4,025	0,693	4,276	0,48024900	18,28417600	2,96326800	2,78932500	17,21090000	4,04282727	-0,01782727	0,00031781	0,17369951	0,18887716
	4,394	1,098	4,11	1,20560400	16,89210000	4,51278000	4,82461200	18,05934000	4,24860347	0,14539653	0,02114015	0,04451954	0,00430336
	4,174	1,098	4,574	1,20560400	20,92147600	5,02225200	4,58305200	19,09187600	4,36840042	-0,19440042	0,03779152	0,00831736	0,08156736
	5,003	2,197	4,488	4,82680900	20,14214400	9,86013600	10,99159100	22,45346400	5,02088657	-0,01788657	0,00031993	0,31504262	0,29528356
	4,174	1,098	3,218	1,20560400	10,35552400	3,53336400	4,58305200	13,43193200	4,01830416	0,15569584	0,02424119	0,19474202	0,08156736
المجموع	89,192000	30,908000	77,268000	52,5248120	306,5737940	116,4063500	139,9838050	344,8204930		0,00000000	0,16740250	1,37871830	1,54612080
المتوسط	4,4596000	1,5454000	3,8634000										

$$(X^tY) = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X1 * Y \\ \sum X2 * Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89.192 \\ 139.98381 \\ 344.82049 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$(X^tX) = \begin{bmatrix} n & \sum X1 & \sum X2 \\ \sum X1 & \sum (X1)^2 & \sum (X1 * X2) \\ \sum X2 & \sum (X1 * X2) & \sum (X2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30.908 & 77.268 \\ 30.908 & 52.52481 & 116.40635 \\ 77.268 & 116.40635 & 306.57379 \end{bmatrix}$$

لنحسب المصفوفة $(X^tX)^{-1}$

يمكننا حساب $(X^tX)^{-1}$ باستعمال المصفوفة المساعدة $adj(X^tX)$ حيث: $(X^tX)^{-1} = \frac{adj(X^tX)}{det(X^tX)}$ بتتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد مصفوفة المرافقات للمصفوفة(X^tX) أي : حساب $conj(X^tX)$

$$conj(A) = \begin{bmatrix} 2552,292574 & -481,096973 & -460,599708 \\ -481,096973 & 161,132056 & 60,072344 \\ -460,599708 & 60,072344 & 95,191776 \end{bmatrix}$$

ب- تحديد المصفوفة المساعدة:

$$adj(X^tX) = [conj(X^tX)]^t$$

$$adj(X^tX) = \begin{bmatrix} 2552,292574 & -481,096973 & -460,599708 \\ -481,096973 & 161,132056 & 60,072344 \\ -460,599708 & 60,072344 & 95,191776 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2552,292574 & -481,096973 & -460,599708 \\ -481,096973 & 161,132056 & 60,072344 \\ -460,599708 & 60,072344 & 95,191776 \end{bmatrix}$$

ج- حساب محدد المصفوفة (X^tX)

$$det(X^tX) = 586,4880034$$

د- حساب $(X^tX)^{-1}$ حيث:

$$(X^tX)^{-1} = \frac{adj(X^tX)}{det(X^tX)} = \frac{\begin{bmatrix} 2552,292574 & -481,096973 & -460,599708 \\ -481,096973 & 161,132056 & 60,072344 \\ -460,599708 & 60,072344 & 95,191776 \end{bmatrix}}{586,4880034}$$

$$(X^tX)^{-1} = \begin{bmatrix} 4,351824008 & -0,820301473 & -0,785352309 \\ -0,820301473 & 0,274740583 & 0,102427234 \\ -0,785352309 & 0,102427234 & 0,162308138 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\hat{b} = (X^tX)^{-1}(X^tY)$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 4,351824008 & -0,820301473 & -0,785352309 \\ -0,820301473 & 0,274740583 & 0,102427234 \\ -0,785352309 & 0,102427234 & 0,162308138 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 89.192 \\ 139.98381 \\ 344.82049 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 2{,}51339502 \\ 0{,}61391256 \\ 0{,}25818308 \end{bmatrix}$$

وعليه تكون معادلة التقدير كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 2{,}51339502 + 0{,}61391256\, X_{1t} + 0{,}25818308\, X_{2t}$$

4- اختبار جودة النموذج المقدر عند مستوى معنوية 5%

أولا- اختبار المعنوية الإحصائية الكلية

$$H_0 : b_1 = b_2 = 0$$
$$H_1 : \exists i \ / b_i \neq 0 \ \ ou' \ i = 1,2$$

يمكن اختبار الفرضيتين بالاعتماد على جدول تحليل التباين كما يلي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
X_i	$SSR = \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 1{,}378718$	$K = 2$	$\frac{SSR}{K} = 0{,}68935915$
البواقي	$SSE = \sum e^2 = 0{,}167402$	$n - (K+1) = 17$	$\frac{SSE}{n-(K+1)} = 0{,}00984721$
الإجمالي	$SST = \sum (Y - \bar{Y})^2 = 1{,}546121$	$n - 1 = 19$	

$$F_{cal(K,n-(K+1))} = \frac{\frac{SSR}{K}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}} = \frac{0{,}68935915}{0{,}00984721} = 70{,}005560$$

إحصاءة فيشر الجدولية حيث:

$$F^{0.05}_{tab(K,n-(K+1))} = \ F^{0.05}_{tab(v1=2,\ v2=17)} = 3.59$$

القرار: نلاحظ أن $F_{cal} > F^{0.05}_{tab}$ لذلك نقرر رفض H_0 وقبول H_1 وبالتالي النموذج ذو دلالة إحصائية ويوجد على الأقل متغير يفسر المتغير Y بشكل معنوي

وتقدر المقدرة التفسيرية لهذا النموذج من خلال معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$

$$\left(\overline{R^2}\right) = 1 - (1 - R^2).\frac{n-1}{n-(k+1)}$$

و $R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{1{,}378718}{1{,}546121} = 0{,}89172$

$$\left(\overline{R^2}\right) = 1 - (1 - 0{,}89172)\frac{20-1}{20-(2+1)} = 0{,}87898 = 87.899\%$$

التعليق: تقدر المقدرة التفسيرية لهذا النموذج بـ 87.899% وهذا ما يدل على أن 87.899% من التغيرات الاجمالية في المتغير Y مردها إلى المتغيرين التفسيريين المدرجين في النموذج $(X1\ ,\ X2)$ في حين ترجع النسبة الباقية والمقدرة بـ 12.1 % إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج .

ثانيا- اختبار المعنوية الإحصائية الجزئية.

$$H_0: b_i = 0 \quad pour\ i = 0,1,2$$
$$H_1: b_i \neq 0 \quad pour\ i = 0,1,2$$

لاختبار الفرضيتين نستخدم إحصاءة t لستودنت student حيث: $t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$

لذلك يجب حساب $\sigma_{\hat{b}_i}$ أي الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة $\sigma_{\hat{b}_0}$ ، $\sigma_{\hat{b}_1}$ ، $\sigma_{\hat{b}_2}$

ويمكننا حســـاب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة بالاعتماد على مصـــفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات matrice des variances-covariances

أ- حساب مصفوفة التباينات والتغايرات للمعلمات

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X^t X)^{-1} = \frac{\sum e_t^2}{n-(k+1)} (X^t X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \frac{0.16740250}{20-(2+1)} * \begin{bmatrix} 4{,}351824008 & -0{,}820301473 & -0{,}785352309 \\ -0{,}820301473 & 0{,}274740583 & 0{,}102427234 \\ -0{,}785352309 & 0{,}102427234 & 0{,}162308138 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat{b}} = var(\hat{b}) = \begin{bmatrix} 0{,}042853306 & -0{,}008077677 & -0{,}007733526 \\ -0{,}008077677 & 0{,}002705427 & 0{,}001008622 \\ -0{,}007733526 & 0{,}001008622 & 0{,}001598282 \end{bmatrix}$$

ب- حساب مقدر الانحراف المعياري للمعلمات

ويمكن حساب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة من القطر الرئيسي لمصفوفة التباينات والتغايرات كما يلي:

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 0{,}042853306 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{0{,}042853306} = 0{,}207010401$$
$$\sigma_{\hat{b}_1}^2 = 0{,}002705427 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0{,}002705427} = 0{,}052013720$$
$$\sigma_{\hat{b}_2}^2 = 0{,}001598282 \Rightarrow \sigma_{\hat{b}_2} = \sqrt{0{,}001598282} = 0{,}039978515$$

	الفرضيات	$t_{cal\ bi} = \frac{\hat{b}_i - 0}{\sigma_{\hat{b}_i}}$	$t_{tab\left(17\ ,\ \frac{5}{2}\%\right)}$	القرار
بالنسبة لـ b_0	$H_0: b_0 = 0$ $H_1: b_0 \neq 0$	$\frac{\mathbf{2,51339502}}{0{,}207010401} = 12{,}1413949$	2.11	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_0 \neq 0)$ بشكل معنوي أي أن المعلمة b_0 ذات دلالة إحصائية
بالنسبة لـ b_1	$H_0: b_1 = 0$ $H_1: b_1 \neq 0$	$\frac{\mathbf{0,61391256}}{0{,}052013720} = 11{,}8028967$	2.11	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_1 \neq 0)$ بشكل معنوي وبذلك فإن b_1 ذات دلالة إحصائية

بالنسبة لـ b_2	$H_0: b_2 = 0$ $H_1: b_2 \neq 0$	$\frac{\mathbf{0,25818308}}{0{,}039978515} = 6{,}45804584$	2.11	بما أن $\lvert t_{cal} \rvert > t_{tab}^{\frac{5}{2}\%}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1 والمعلمة $(b_2 \neq 0)$ بشكل معنوي أي أن المعلمة b_2 ذات دلالة إحصائية

الخلاصة: نلاحظ ان النموذج المقدر ذو دلالة إحصائية كلية وجزئية

5- كتابة دالة الإنتاج كوب دوغلاس بالاعتماد على المعلمات المقدرة

حسب الافتراضات المذكورة أعلاه : $(lnA = b_0 = 2.51339502)$ و

$(\alpha 2 = b_2 = 0.25818308)$ و $(\alpha 1 = b_1 = 0.61391256)$

فإن:

$$b_0 = lnA \Rightarrow A = e^{b_0}$$

$$\Rightarrow A = e^{2.51339502} = 12.3467765$$

إذن سيكون النموذج المقدر لدالة الإنتاج كوب دوغلاس كما يلي:

$$\widehat{Q_t} = AK_t^{\alpha 1} L_t^{\alpha 2} = 12.3467765 * K_t^{0.61391256} L_t^{0.25818308}$$

5- قيمة الإنتاج المتوقع للشركة في سنة 2024

$$\hat{Q}_{t+1} = AK_{t+1}^{\alpha 1} L_{t+1}^{\alpha 2} \Rightarrow \hat{Q}_{2024} = 12.3467765 * K_{2023+1}^{0.61391256} L_{2023+1}^{0.25818308}$$

$$\Rightarrow \hat{Q}_{2024} = 12.3467765 * K_{2024}^{0.61391256} L_{2024}^{0.25818308}$$

بما أن الشركة ترغب خلال سنة 2024 **بمضاعفة قيمة عوامل الإنتاج المستخدمة في سنة 2023** اي :

- ستستخدم رأس مال بقيمة: $K = 2 * 3 = 6$
- وستدفع أجور عمال تقدر بـ: $L = 2 * 25 = 50$.

فستكون قيمة الإنتاج المتوقعة للشركة في سنة 2024 هي $\hat{Q}_{2024}$ حيث:

$$\hat{Q}_{2024} = 12.3467765 * 6^{0.61391256} * 50^{0.25818308}$$

$$\hat{Q}_{2024} = 101{,}8394$$

وعليه ستكون قيمة الإنتاج المتوقع للشركة في سنة 2024 هي 101,8394 مليون دينار جزائري