الحل النموذجي للسلسلة رقم 1

حل التمرين الأول:

النموذج المراد تقديره من الشكل: $Y_t = b_0 + b_1 X_t + e_t$

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط

يمكن تقدير المعلمتين $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية OLS حيث:

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} \dots\dots\dots (1) \quad \text{و} \quad \hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t \dots\dots\dots (2)$$

يمكن الاستعانة بالجدول الموالي لحساب مختلف المجاميع:

	Y	X	$X*Y$	X^2	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$	$(\hat{Y}-\bar{Y})^2$	$(Y-\bar{Y})$	$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})*(Y-\bar{Y})$
	25,6	**4**	102,4	16	30,483333	-4,883333	23,846944	-14	196,000	429,698351	-25,6125	656,000156	358,5750
	32,7	**8**	261,6	64	36,405952	-3,705952	13,734083	-10	100,000	219,233852	-18,5125	342,712656	185,1250
	45,4	**12**	544,8	144	42,328571	3,071429	9,433673	-6	36,000	78,924187	-5,8125	33,785156	34,8750
	53,9	**16**	862,4	256	48,251190	5,648810	31,909049	-2	4,000	8,769354	2,6875	7,222656	-5,3750
	59	**20**	1180	400	54,173810	4,826190	23,292115	2	4,000	8,769354	7,7875	60,645156	15,5750
	62,6	**24**	1502,4	576	60,096429	2,503571	6,267870	6	36,000	78,924187	11,3875	129,675156	68,3250
	65	**28**	1820	784	66,019048	-1,019048	1,038458	10	100,000	219,233852	13,7875	190,095156	137,8750
	65,5	**32**	2096	1024	71,941667	-6,441667	41,495069	14	196,000	429,698351	14,2875	204,132656	200,0250
المجموع	409,7	144	8369,6	3264		**0,000000**	**151,017262**		**672,000**	**1473,251488**		**1624,268750**	**995**
المتوسط	51,2125	18											

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} = \frac{8369.6 - 8*18*51.2125}{3264 - 8*(18)^2} = 1.480655$$

بتعويض $\hat{b}_1$ في العلاقة رقم 02 نجد :

$$\hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t = 51.2125 - 1.480655 * 18 = 24.560714$$

وعليه يكون النموذج المقدر كما يلي: $\hat{Y}_t = 24.560714 + 1.480655X_t$

ملاحظة: يمكن تقدير المعلمة $\hat{b}_1$ باستعمال الصيغة المختصرة التالية: $\hat{b}_1 = \frac{\sum(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum(X_t - \bar{X})^2}$

وبالتعويض في العلاقة نجد: $\hat{b}_1 = \frac{995}{672} = 1.480655$

2- حساب معامل التحديد R^2 :

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} \Rightarrow R^2 = \frac{1473.251488}{1624.268750} = 0.907024 = 90.70\%$$

أي أن 90.70% من التغيرات في الظاهرة المدروسة Y يفسرها المتغير التفسيري X في حين أن النسبة المتبقية $(100 - 90.70 = 9.3\%)$ يمكن ردها إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج محل الدراسة.

3- اختبارات جودة النموذج (الاختبارات الاحصائية للنموذج)

لإجراء اختبارات جودة النموذج سنقوم بإجراء كل من الاختبارات المعنوية الكلية ثم الاختبارات المعنوية الجزئية (الفردية)

2-1- اختبارات المعنوية الكلية للنموذج:

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$H_1: b_1 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل اختبر فيشر F وسيتم حساب كل من إحصاءة فيشر المحسوبة F_{cal} و إحصاءة فيشر الجدولية F_{tab} حيث: $F_{cal} = \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}}$

يمكن الاعتماد على جدول تحليل التباين لحساب F_{cal} كما يلي:

مصدر التغيرات	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
$\boldsymbol{X}$	$SSR = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 1473.251488$	1	$\frac{SSR}{1} = 1473.251488$
البواقي	$SSE = \sum(Y - \hat{Y})^2 = \sum e_t^2 = 151.017262$	$n - 2 = 6$	$\frac{SSE}{6} = \frac{\sum e_t^2}{6} = \frac{151.017262}{6} = 25.169544$
الإجمالي	$SST = \sum(Y - \bar{Y})^2 = 1624.268750$	$n - 1 = 7$	

$$F_{cal} = \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}} = \frac{1473.251488}{25.169544} = 58.5331$$

بالاعتماد على جدول فيشر نحسب F_{tab} عند درجة حرية البسط $(v1 = 1)$ ودرجة حرية المقام$(v2 = 6)$وعند مستوى معنوية$(\alpha = 5\%)$

أي: $F^{5\%}_{tab(v1=1,v2=6)} = 5.99$

بما أن: $F_{cal} > F_{tab}$ فإننا نقرر رفض H_0 وقبول H_1، أي أنه يوجد على الأقل متغير يفسر الظاهرة Y والنموذج ككل ذو دلالة إحصائية

ملاحظة: يمكن اجراء اختبار المعنوية الكلية للنموذج بالاعتماد على معامل التحديد R^2 حيث:

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{0.907024}{1}}{\frac{1-0.907024}{8-(1+1)}} = 58.5327$$

2-2- اختبارات المعنوية الجزئية

أولا- بالنسبة لـ b_0

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_0 = 0$

$H_1: b_0 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student وسيتم حساب كل من إحصاءه ستودنت المحسوبة t_{cal} و إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} حيث:

أ- **إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal}** : وتحسب باستخدام العلاقة التالية: $t_{cal\ b_0} = \frac{\hat{b}_0 - 0}{\sigma_{\hat{b}_0}}$

حيث: $\sigma_{\hat{b}_0}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X-\bar{X})^2}\right)$

ومقدر تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ معرف بالعلاقة: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-(k+1)} \sum e_t^2$ حيث k هو عدد المتغيرات التفسيرية أي $(k = 1)$

بالتعويض نجد: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{8-2}(151.017262) = 25{,}169544$

بتعويض $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ في علاقة $\sigma_{\hat{b}_0}^2$ نجد :

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 25{,}169544\left(\frac{1}{8} + \frac{18^2}{672}\right) = 15.281508$$

$$\sigma_{\hat{b}_0} = 3.909157$$

بتعويض قيمة $\sigma_{\hat{b}_0}$ في علاقة t_{cal} نجد: $t_{cal} = \frac{24.560714}{3.909157} = 6.2828$

ب- **إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} :** وتحدد t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\,\%\right)$ أي أن: $t_{tab(6)}^{\frac{5}{2}\%} = 2.447$

ملاحظة: يمكن حساب $\sigma_{\hat{b}_0}^2$ بالاعتماد على العلاقة: $\sigma_{\hat{b}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{\sum X^2}{n\sum(X-\bar{X})^2}$

وبالتعويض نجد:

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 25169544\frac{3264}{8*672} = 15.281509$$

$$\sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{15.281509} = \sigma_{\hat{b}_0} = 3.909157$$

ج –القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}0}| > (t_{tab})$ أي $|6.2828| > 2.447$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_0 \neq 0$ بشكل معنوي عند مستوى دلالة 5%

ثانيا- بالنسبة لـ b_1

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$$H_1: b_1 \neq 0$$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student وسيتم حساب كل من إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal} و إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} حيث:

أ- **إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal} :** وتحسب بالعلاقة التالية: $t_{cal\,b_1} = \frac{\hat{b}_1 - 0}{\sigma_{\hat{b}_1}}$

حيث: $\sigma_{\hat{b}_1}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{1}{\sum(X-\bar{X})^2}$

بالاعتماد على الجدول المساعد وبالتعويض في علاقة $\sigma_{\hat{b}_1}^2$ نجد:

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = 25.169544 * \frac{1}{672} = 0.03745469$$

$$\sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0.03745469} = 0.193532$$

بتعويض $\sigma_{\hat{b}_1}$ في $t_{cal\ b_1}$ نجد: $t_{cal\ b_1} = \frac{1.480655}{0.193532} = 7.6506$

ب- **إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} :** وتحدد t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\ \%\right)$ أي: $t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(6)} = 2.447$

ج –القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}1}| > (t_{tab})$ أي $|7.6506| > 2.447$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_1 \neq 0$ بشكل معنوي

خلاصـــة: إجمالا يمكن القول أن للنموذج الاحصـــائي المقدر معنوية إحصـــائية كلية و معنوية إحصـــائية جزئية لكل معلماته، كما أنه يتمتع بقدرة تفســـيرية عالية تفوق 90.7 % مما يعني أن النموذج مقبول مبدئيا لتفسير الظاهرة المدروسة.[1]

حل التمرين الثاني:

النموذج المراد تقديره من الشكل: $Y_t = b_0 + bX_t + e_t$

يعتبر ســعر البترول متغيرا لا يمكن التحكم فيه، بل يعتبر متغير خاضـع للســوق الدولية، مما يجعله متغيرا خارجيا، في حين يعتبر معدل النمو متغيرات داخليا.

لذلك يشـكل سـعر البترول متغيرا تفسـيريا للنمو الاقتصـادي ونرمز له بـــ X_t في حين يشـكل معدل النمو الاقتصادي المتغير المراد تفسيره ونرمز له بـ Y_t

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط

يمكن تقدير المعلمتين $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية OLS حيث:

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} \quad \text{و} \quad \hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t$$

يمكن الاستعانة بالجدول الموالي لحساب مختلف المجاميع

[1] هناك قبول مبدئي للنموذج على اعتبار أنه يشترط لقبول النموذج أن يكون لديه معنوية إحصائية (كلية وجزئية) وخال من المشاكل القياسية بحسب نتائج الاختبارات القياسية التي ستتم دراستها في الفصل الرابع.

جدول مساعد لحساب مختلف المجاميع

	Y_t	X_t	$X_t * Y_t$	$(X_t)^2$	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(X-\bar{X})^2$	$(\hat{Y}-\bar{Y})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$
	0,90	35,19	31,671	1238,3361	3,849930	-2,949930	8,702088	71,774784	3,959822	0,921600
	3,60	39,54	142,344	1563,4116	4,871672	-1,271672	1,617149	164,403684	9,070167	3,027600
	4,00	35,50	142,000	1260,25	3,922744	0,077256	0,005969	77,123524	4,254912	4,579600
	5,60	30,60	171,360	936,36	2,771816	2,828184	7,998622	15,069924	0,831409	13,987600
	4,10	29,67	121,647	880,3089	2,553375	1,546625	2,392049	8,714304	0,480769	5,017600
	5,20	29,11	151,372	847,3921	2,421841	2,778159	7,718170	5,721664	0,315665	11,155600
	1,00	14,18	14,180	201,0724	-1,084965	2,084965	4,347079	157,201444	8,672819	0,739600
	-1.10	18,72	-20,592	350,4384	-0,018595	-1,081405	1,169436	63,968004	3,529121	8,761600
	-1.80	16,26	-29,268	264,3876	-0,596408	-1,203592	1,448634	109,369764	6,033941	13,395600
	-2.90	18,41	-53,389	338,9281	-0,091409	-2,808591	7,888182	69,022864	3,807998	22,657600
المجموع	18,6	267,18	671,325	7880,885200		**0,000000**	**43,287377**	**742,369960**	**40,956623**	**84,24400**
المتوسط	1,86	26,718								

بالتعويض في العلاقتين السابقتين نجد

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} = \frac{671.325 - 10*26.718*1.86}{7880.8852 - 10(26.718)^2} = 0.234883$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t = 1.86 - 0.234883 * 26.718 = -4.415608$$

وعليه يكون النموذج المقدر كما يلي: $\hat{Y}_t = -4.415608 + 0.234883X_t$

2- تحديد المقدرة التفسيرية للنموذج (حساب معامل التحديد R^2):

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2} \Rightarrow R^2 = \frac{40.956623}{84.244000} = 0.486167 = 48.61\%$$

أي أن 48.61% من التغيرات في الظاهرة المدروسة Y يفسرها المتغير التفسيري X في حين أن النسبة المتبقية (100-48.61=51.39%) يمكن ردها إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج محل الدراسة.

3-اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5 %

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$H_1: b_1 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل اختبار فيشر F و نحسب كل F_{cal} و F_{tab} حيث:

$$F_{cal} = \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}}$$

يمكن الاعتماد على جدول تحليل التباين لحساب F_{cal} كما يلي:

مصدر التغيرات	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
X	$SSR = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 40.956623$	1	$\frac{SSR}{1} = 40.956623$
البواقي	$SSE = \sum(Y - \hat{Y})^2 = \sum e_t^2 = 43.287377$	$n - 2 = 8$	$\frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum e_t^2}{8} = \frac{43.287377}{8} = 5.410922$
الإجمالي	$SST = \sum(Y - \bar{Y})^2 = 84.24400$	$n - 1 = 9$	

$$F_{cal} = \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{n-(k+1)}} = \frac{40.956623}{5.410922} = 7.569250$$

بالاعتماد على جدول فيشر نحسب F_{tab} عند درجة حرية البسط $(v1 = 1)$ ودرجة حرية المقام$(v2 = 8)$وعند مستوى معنوية$(\alpha = 5\%)$ ، أي: $F^{5\%}_{tab(v1=1,\ v2=8)} = 5.32$

بما أن: $F_{cal} > F_{tab}$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1، أي أنه عند مستوى معنوية 5% يوجد على الأقل متغير يفسر الظاهرة Y وبالتالي النموذج ككل ذو دلالة احصائية .

ملاحظة: يمكن اجراء اختبار المعنوية الكلية للنموذج بالاعتماد على معامل التحديد R^2 حيث:

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{0.486167}{1}}{\frac{1-0.486167}{10-(1+1)}} = 7.569250$$

4- حساب كل من $\sigma_{\hat{b}_0}$ و $\sigma_{\hat{b}_1}$

أولا- حساب $\sigma_{\hat{b}_0}$:

يمكن حساب $\sigma_{\hat{b}_0}$ بالاعتماد على العلاقة: $\sigma^2_{\hat{b}_0} = \sigma^2_{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X-\bar{X})^2}\right)$

حيث مقدر تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ معرف بالعلاقة: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-(k+1)} \sum e_t^2$ حيث k هو عدد المتغيرات التفسيرية أي $k = 1$

بالتعويض نجد: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{10-2}(43.287377) = 5.410922$

بالتعويض في علاقة $\sigma_{\hat{b}_0}^2$ نجد :

$$\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 5.410922 * \left(\frac{1}{10} + \frac{26.718^2}{742.36996}\right) = 5.744141$$

$$\sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{5.744151} = 2.396695$$

ملاحظة: يمكن حساب $\sigma_{\hat{b}_0}$ بالاعتماد على العلاقة: $\sigma_{\hat{b}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{\sum X^2}{n\sum(X-\bar{X})^2}$

وبالتعويض نجد: $\sigma_{\hat{b}_0}^2 = 5.410922 * \frac{7880.8852}{10*742,3699} = 5.744151$

$\sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{5.744151} = 2.396695$

ثانيا- حساب $\sigma_{\hat{b}_1}$

يمكن حساب $\sigma_{\hat{b}_1}$ باستعمال العلاقة: $\sigma_{\hat{b}_1}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{1}{\sum(X-\bar{X})^2}$

بالتعويض نجد :

$$\sigma_{\hat{b}_1}^2 = 5.410922 * \frac{1}{742.36996} = 0.007288$$

$$\sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0.007288} = \sigma_{\hat{b}_1} = 0.0853697$$

5- الاختبارات المعنوية الفردية (الجزئية) لمعلمات النموذج

أولا- بالنسبة لـ b_0

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_0 = 0$

$H_1: b_0 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student وسيتم حساب كل من احصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal} و إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} حيث:

أ- **إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal}:** وتحسب بالعلاقة التالية: $t_{cal} = \frac{\hat{b}_0 - 0}{\sigma_{\hat{b}_0}}$

بتعويض $\sigma_{\hat{b}_0}$ (المحسوبة سابقا في السؤال 4)في علاقة t_{cal} نجد:

$$t_{cal} = \frac{-4.415608}{2.396695} = -1.8423$$

ب- إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab}: وتحدد t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية$(n-2)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\,\%\right)$ أي أن: $t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(8)} = 2.306$

ج –القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}0}| < (t_{tab})$ أي $|-1.8423| < 2.306$ فنقرر عدم رفض H_0 (أي قبول H_0) أي أن $b_0 = 0$ وبالتالي لا تكون لهذه المعلمة أية دلالة إحصائية.

ثانيا- بالنسبة لـ b_1

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين:

$$H_0: b_1 = 0$$

$$H_1: b_1 \neq 0$$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student ثم نحسب t_{cal} و t_{tab} حيث:

أ- احصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal}:

وتحسب باستخدام العلاقة التالية: $t_{cal} = \frac{\hat{b}_1 - 0}{\sigma_{\hat{b}_1}}$

بتعويض $\sigma_{\hat{b}_1}$ (المحسوبة سابقا في السؤال (4) في علاقة t_{cal} نجد:

$$t_{cal} = \frac{0.234883}{0.0853697} = 2.751362$$

ب- احصاءة ستودنت الحدولية t_{tab}:

وتحدد t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2)$ وعند مستوى دلالة

$$t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(8)} = 2.306 \quad \text{أي:} \quad \left(\alpha/2 = 5/2\,\%\right)$$

ج –القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}1}| > (t_{tab})$ أي $|2.751362| > 2.306$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_1 \neq 0$ بشكل معنوي

خلاصة: إجمالا يمكن القول أن للنموذج الاحصائي المقدر ذو معنوية إحصائية كلية ولكن معلمة الحد الثابت ليست لها معنوية إحصائية، في حين أن للمعلمة b_1 معنوية إحصائية وكنتيجة لذلك فإن النموذج غير مقبول لتفسير الظاهرة المدروسة Y. فضلا عن ذلك نجد أن النموذج يعاني من قصور بسبب ضعف مقدرته التفسيرية لا تتجاوز 48.62 % . لذلك ستكون الحاجة ماسة إلى مراجعة الخطوة الأولى من النمذجة ممثلة في مرحلة توصيف النموذج، وهو ما سنقوم به من خلال مراجعة تأثير سعر البترول على معدل النمو الاقتصادي، إذ ان سعر البترول في السنة$(t-1)$ يمكنه ان يؤثر في معدل النمو الاقتصادي في السنة (t)

6- تقدر معلمات النموذج بافتراض أن مستوى التباطؤ سنة واحدة

6-1- تقدر معلمات النموذج: $Y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{t-1} + e_t$

بافتراض أن مستوى التباطؤ يساوي سنة واحدة أي أن المتغير المراد تفسيره Y_t في الزمن t يفسر بدلالة المتغير التفسيري X_{t-1} (سعر البترول في السنة الماضية $(t-1)$)

وعليه فإن النموذج الجديد المراد تقديره في هذا التوصيف الجديد هو: $Y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{t-1} + e_t$

مثلا: معدل النمو الاقتصادي لسنة 2014 يفسر بسعر البترول لسنة 2013 (هذا البيان غير متوفر)

ومعدل النمو الاقتصادي لسنة 2015 يفسر بسعر البترول لسنة 2014 = **35,19**

ومعدل النمو الاقتصادي لسنة 2016 يفسر بسعر البترول لسنة 2015 = **39,54**

وهكذا مع بقية السنوات

وسيتم تقدير معلمات النموذج على ضوء البيانات الجديدة التالية

t	Y_t	X_{t-1}
2015	3,60	35,19
2016	4,00	39,54
2017	5,60	35,50
2018	4,10	30,60
2019	5,20	29,67
2020	1,00	29,11
2021	-1.10	14,18
2022	-1.80	18,72
2023	2,90	16,26

أ- **تقدير معلمات النموذج :** $Y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{t-1} + e_t$ للفترة 2015-2023 (لأنه عند سنة 2014 لا تتوفر لدينا بيانات حول سعر البترول المقابل له، وبذلك يتم استبعاد بيانات سنة 2014) وعليه تكون عدد المشاهدات $(n = 9)$

يمكن الاستعانة بالجدول الموالي لحساب مختلف المجاميع:

جدول مساعد لحساب مختلف المجاميع

	Y_t	X_{t-1}	$Y_t * X_{t-1}$	$(X_{t-1})^2$	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
	3,60	35,19	126,684	1238,3361	4,311837	-0,711837	0,506711	56,985723	5,499822	2,667778
	4,00	39,54	158,160	1563,4116	5,663226	-1,663226	2,766322	141,583557	13,664553	4,134444
	5,60	35,50	198,800	1260,25	4,408143	1,191857	1,420524	61,762135	5,960805	13,201111
	4,10	30,60	125,460	936,36	2,885888	1,214112	1,474069	8,755023	0,844967	4,551111
	5,20	29,67	154,284	880,3089	2,596970	2,603030	6,775765	4,116390	0,397282	10,454444
	1,00	29,11	29,110	847,3921	2,422998	-1,422998	2,024923	2,157635	0,208238	0,934444
	1,10-	14,18	-15,598	201,0724	-2,215220	1,115220	1,243715	181,201512	17,488172	9,404444
	1,80-	18,72	-33,696	350,4384	-0,804804	-0,995196	0,990416	79,586223	7,681048	14,187778
	2,90-	16,26	-47,154	264,3876	-1,569038	-1,330962	1,771460	129,529690	12,501207	23,684444
المجموع	17,70	248,770	696,05	7541,957100		0,000000	18,973904	665,677888	64,246095	83,22000
المتوسط	1,966667	27,641111								

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_{t-1}Y_t - n\bar{X}_{t-1}\bar{Y}_t}{\sum (X_{t-1})^2 - n(\bar{X}_{t-1})^2} = \frac{696.05 - 9*27.641111*1.966667}{7541.9571 - 9*(27.64)^2} = 0.310664$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_{t-1} = 1.966667 - 0.310664 * 27.641111 = -6.620438$$

وعليه يكون النموذج المقدر كما يلي: $\hat{Y}_t = -6.620438 + 0.310664\, X_{t-1}$

2-6- اختبارات جودة النموذج عند مستوى معنوية 5 % (الاختبارات المعنوية الكلية والفردية)

أولا- الاختبارات المعنوية الكلية للنموذج:

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$H_1: b_1 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين يمكننا استخدام احصاءة فيشر F

لحساب F_{cal} نستخدم معامل التحديد $\boldsymbol{R^2}$ حيث

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}}$$

حيث :

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2} \Rightarrow R^2 = \frac{64{,}246095}{83.2200} = 0.772003 = 77.20\%$$

أي أن 77.20% من التغيرات في الظاهرة المدروسة Y يفسرها المتغير التفسيري X في حين أن النسبة المتبقية $(100 - 77.20 = 22.8\%)$ يمكن ردها إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج محل الدراسة.

- **حساب $\boldsymbol{F_{cal}}$**

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}} = \frac{0.772003}{\frac{(1-0.772003)}{9-2}} = 23.7021$$

- **حساب $\boldsymbol{F_{tab}}$:**

بالاعتماد على جدول فيشر نحسب F_{tab} عند درجة حرية البسط $(v1 = 1)$ ودرجة حرية المقام $(v2 = 7)$ وعند مستوى معنوية $(\alpha = 5\%)$ أي: $F^{5\%}_{tab(v1=1,\ v2=7)} = 5.59$

أ- القرار:

بما أن: $F_{cal} > F_{tab}$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1، أي أنه عند مستوى معنوية 5% يوجد على الأقل متغير يفسر الظاهرة والنموذج ككل ذو دلالة إحصائية في تفسير تغيرات Y_t

ثانيا- الاختبارات المعنوية الجزئية

أ- بالنسبة لـ b_0

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_0 = 0$

$H_1: b_0 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student ونحسب كل من t_{cal} و t_{tab}

أ- 1-إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal} :

وتحدد باستخدام العلاقة التالية: $t_{cal} = \frac{\hat{b}_0 - 0}{\sigma_{\hat{b}_0}}$ حيث: $\sigma^2_{\hat{b}_0} = \sigma^2_{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X-\bar{X})^2}\right)$

ومقدر تباين الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$ معرف بالعلاقة: $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{n-(k+1)}\sum e_t^2$ حيث k هو عدد المتغيرات التفسيرية أي $k = 1$

بالتعويض نجد: $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{9-2}(18{,}973904) = 2.710557$

بتعويض $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$ في $\sigma^2_{\hat{b}_0}$ نجد :

$$\sigma^2_{\hat{b}_0} = 2.710557 * \left(\frac{1}{9} + \frac{27{,}641111^2}{665.677888}\right) = 3.412211$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{3.412211} = 1.847217$$

ملاحظة: يمكن حساب $\sigma^2_{\hat{b}_0}$ بالاعتماد على العلاقة: $\sigma^2_{\hat{b}_0} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\frac{\sum X^2}{n\sum(X-\bar{X})^2}$

وبالتعويض نجد: $\sigma^2_{\hat{b}_0} = 5.410922 * \frac{7880.8852}{10*742{,}369960} =$ 3.412211

$$\sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{3.412211} = 1.847217$$

بتعويض $\sigma_{\hat{b}_0}$ في علاقة t_{cal} نجد: $t_{cal} = \frac{-6.620438}{1.847217} = -3.584006$

أ-2- إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} :

وتحدد t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\,\%\right)$ أي أن: $t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(7)} = 2.365$

أ-3–القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}0}| > (t_{tab})$ أي $|-3.584006| > 2.365$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_0 \neq 0$ بشكل معنوي وبالتالي تكون لهذه المعلمة دلالة إحصائية عند مستوى معنوية 5 %

ب- بالنسبة لـ b_1

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$H_1: b_1 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student ونحسب كل من t_{cal} و t_{tab} حيث:

ب-1- إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal} :

وتحدد باستخدام العلاقة التالية: $t_{cal} = \frac{\hat{b}_1 - 0}{\sigma_{\hat{b}_1}}$ حيث: $\sigma^2_{\hat{b}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \frac{1}{\sum(X-\bar{X})^2}$

بالتعويض في علاقة $\sigma^2_{\hat{b}_1}$ نجد :

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = 2.710557 * \frac{1}{665,677888} = 0.0040719$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0.004072} = 0.063812$$

بتعويض $\sigma_{\hat{b}_1}$ في علاقة t_{cal} نجد: $t_{cal} = \frac{0.310664}{0.063812} = 4.8684$

ب-2- إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab} :

وتحسب t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\,\%\right)$ أي: $t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(7)} = 2.365$

ب-3 –القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}1}| > (t_{tab})$ أي $|4.8684| > 2.365$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_1 \neq 0$ شكل معنوي

الخلاصة: إجمالا يمكن القول أن للنموذج المقدر معنوية إحصائية كلية وكما أن كل معلماته ذات دلالة إحصائية جزئية، فضلا عن ذلك فإنه يتمتع بقدرة تفسيرية عالية تفوق 77.20 % مما يعني أن النموذج المقدر مقبول لتفسير الظاهرة المدروسة Y

ملاحظة: يشترط لقبول النموذج في عملية التوقع:

1- أن تكون لجميع معلماته معنوية إحصائية (تكون ذات دلالة إحصائية جزئية)

2- أن يكون النموذج معنوية إحصائية كلية (ذو دلالة إحصائية كلية)

3- خلو النموذج من المشاكل القياسية تبعا لنتائج الاختبار ات القياسية التي ستتم دراستها لاحقا في الفصل الرابع . والخامس

7- **تحديد معدل النمو المتوقع لسنة 2024 ، ثم لسنة2025 بافتراض ان سعر البترول لسنة 2023 هو 18,41 دولار للبرميل و من المتوقع ان يصل إلى 23دولار في سنة 2024:**

بافتراض ان النموذج المقدر السابق خال من العيوب القياسية التي تمت الإشارة لها في الملاحظة السابقة

بتعويض قيمة X_{t-1} في النموذج المقدر نتحصل على $\hat{Y}_{t+1}$ أي :

$$\hat{Y}_{t+1} = -6.620438 + 0.310664\, X_{t-1}$$

- **بالنسبة لمعدل النمو المتوقع سنة 2024:**

يتوقع في سنة $t = 2024$ أن يكون معدل النمو مساويا

$$\hat{Y}_{2024} = -6.620438 + 0.310664\, X_{2024}$$
$$\hat{Y}_{2024} = -6.620438 + 0.310664\, X_{2023}$$
$$\hat{Y}_{2024} = -6.620438 + 0.310664\, (18{,}41)$$
$$\hat{Y}_{2024} = -0{,}9011\%$$

معدل النمو المتوقع لسنة 2024 يساوي 0,90 %

- **بالنسبة لمعدل النمو المتوقع سنة 2025:**

$$\hat{Y}_{2025} = -6.620438 + 0.310664\, X_{2025-}$$
$$\hat{Y}_{2025} = -6.620438 + 0.310664\, X_{2024}$$
$$\hat{Y}_{2025} = -6.620438 + 0.310664\, (23)$$
$$\hat{Y}_{2025} = 0{,}5248\%$$

معدل النمو المتوقع لسنة 2025 يساوي $0{,}5248\%$

حل التمرين الثالث:

النموذج المراد تقديره من الشكل: $Y_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_t + e_t$

1- تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط

يمكن تقدير المعلمتين $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية OLS حيث:

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} \quad \text{و} \quad \hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t$$

يمكن الاستعانة بالجدول الموالي لحساب مختلف المجاميع

جدول مساعد لحساب مختلف المجاميع

t	Y_t	X_t	$Y_t * X_t$	$(X_t)^2$	$\hat{Y}$	e_t	e_t^2	$(X_t - \bar{X}_t)^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X}) * (Y - \bar{Y})$
1	2,2	0,3	0,660	0,0900	1,435435	0,764565	0,584560	28,09	41,613073	52,061775	-5,3	7,2153846	-38,2415
2	1,3	0,8	1,040	0,6400	0,826867	0,473133	0,223855	23,040	34,131905	39,884083	-4,8	6,3153846	-30,3138
3	0,6	1,4	0,840	1,9600	0,096586	0,503414	0,253426	17,640	26,132240	31,532544	-4,2	5,6153846	-23,5846
4	-1,5	2,5	-3,750	6,2500	-1,242264	-0,257736	0,066428	9,610	14,236441	12,357929	-3,1	3,5153846	-10,8977
5	-2,1	3,2	-6,720	10,2400	-2,094259	-0,005741	0,000033	5,760	8,532976	8,499467	-2,4	2,9153846	-6,9969
6	-4,9	4,6	-22,540	21,1600	-3,798249	-1,101751	1,213856	1,000	1,481419	0,013314	-1	0,1153846	-0,1154
7	-5,7	5,5	-31,350	30,2500	-4,893671	-0,806329	0,650166	0,010	0,014814	0,468698	-0,1	-0,6846154	0,0685
8	-6,6	6,3	-41,580	39,6900	-5,867380	-0,732620	0,536733	0,490	0,725896	2,511006	0,7	-1,5846154	-1,1092
9	-7,7	7	-53,900	49,0000	-6,719375	-0,980625	0,961626	1,960	2,903582	7,207160	1,4	-2,6846154	-3,7585
10	-7,4	8,2	-60,680	67,2400	-8,179938	0,779938	0,608303	6,760	10,014396	5,686391	2,6	-2,3846154	-6,2000
11	-9,2	9,5	-87,400	90,2500	-9,762214	0,562214	0,316085	15,210	22,532390	17,511006	3,9	-4,1846154	-16,3200
12	-10,5	11,4	-119,700	129,9600	-12,074772	1,574772	2,479907	33,640	49,834951	30,081006	5,8	-5,4846154	-31,8108
13	-13,7	12,1	-165,770	146,4100	-12,926767	-0,773233	0,597889	42,250	62,589973	75,422544	6,5	-8,6846154	-56,4500
المجموع	-65,2	72,8	-590,85	593,1400		0,000000	8,4928656	185,460	274,744057	283,236923	0,0000	0,0000	-225,730
المتوسط	-5,01538	5,6											

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum X_t Y_t - n\bar{X}_t\bar{Y}_t}{\sum X_t^2 - n(\bar{X}_t)^2} = \frac{(-590.85) - 13 * 5.6 * (-5.01538)}{593.14 - 13 * (5.6)^2} = -1.217135$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y}_t - \hat{b}_1\bar{X}_t = -5.01538 - (-1.217135) * 5.6 = 1.8005757$$

وعليه يكون النموذج المقدر كما يلي: $\hat{Y}_t = 1.8005757 - 1.217135X_t$

ملاحظة: يمكن تقدير المعلمة $\hat{b}_1$ باستعمال الصيغة المختصرة التالية: $\hat{b}_1 = \frac{\sum(X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum(X_t - \bar{X})^2}$ وبالتعويض في العلاقة نجد $\hat{b}_1 = \frac{-225.730}{283,236923} = 1.480655$

2- حساب معامل التحديد R^2 :

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} \Rightarrow R^2 = \frac{274.744057}{283.236923} = 0.9700 = 97.00\%$$

أي أن 97.00% من التغيرات في الظاهرة المدروسة Y يفسرها المتغير التفسيري X في حين أن النسبة المتبقية $(100 - 97.00 = 3\%)$ يمكن ردها إلى متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج محل الدراسة.

3- اختبارات المعنوية الكلية للنموذج:

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$H_1: b_1 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين يمكننا استخدام معامل التحديد R^2 لحساب F_{cal} حيث

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}} = \frac{0.97}{\frac{(1-0.97)}{13-2}} = 355.8498$$

بالاعتماد على جدول فيشر نحسب F_{tab} عند درجة حرية البسط $(v1 = 1)$ ودرجة حرية المقام$(v2 = 11)$وعند مستوى معنوية$(\alpha = 5\%)$

أي: $F^{5\%}_{tab(v1=1,v2=11)} = 4.84$

بما أن: $F_{cal} > F_{tab}$ فإننا نرفض H_0 ونقبل H_1، أي أنه يوجد على الأقل متغير يفسر الظاهرة Y

4- حساب كل من $\sigma_{\hat{b}_0}$، $\sigma_{\hat{b}_1}$

$$\sigma^2_{\hat{b}_0} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \frac{\sum X^2}{n\sum(X - \bar{X})^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \frac{1}{\sum(X - \bar{X})^2} \dots\dots\dots (2)$$

حيث $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{n-(k+1)} \sum e_t^2$

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{1}{n-(k+1)} \sum e_t^2 = \frac{1}{13\ \ (1+1)} 8.4928656 = 0.77207869$$

بالاعتماد على الجدول المساعد وبالتعويض في العلاقة (1)

$$\sigma^2_{\hat{b}_0} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \frac{\sum X^2}{n\sum(X-\bar{X})^2} = 0.77207869 * \frac{593.14}{13*185.46} = 0.18994382$$

إذن $\sigma_{\hat{b}_0} = \sqrt{0.18994382} = 0.43582544$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$\sigma^2_{\hat{b}_1} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \frac{1}{\sum(X-\bar{X})^2} = 0.77207869 * \frac{1}{185.46} = 0.00416304$$

إذن: $\sigma_{\hat{b}_1} = \sqrt{0.00416304} = 0.0645216$

5- اختبارات المعنوية الجزئية(الفردية) لمعلمات النموذج

أولا- بالنسبة لـ b_0

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_0 = 0$

$H_1: b_0 \neq 0$

نستعمل إحصاءة t لستودنت Student ثم نحسب t_{cal} و t_{tab} حيث:

أ- **إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal}** : وتحسب باستخدام العلاقة التالية: $t_{cal} = \frac{\hat{b}_0}{\sigma_{\hat{b}_0}}$ حيث :

$$t_{cal} = \frac{1.8005757}{0.43582544} = 4.1314$$

ب- **إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab}** : وتحدد بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2=11)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\ \%\right)$ أي أن: $t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(11)} = 2.201$

ج –القرار:

نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}0}| > (t_{tab})$ أي $|6.2828| > 2.447$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_0 \neq 0$ يختلف عن الصفر بشكل معنوي

ثانيا- بالنسبة لـ b_1

سيتم اختبار الفرضيتين التاليتين: $H_0: b_1 = 0$

$H_1: b_1 \neq 0$

لاختبار الفرضيتين نستعمل إحصاءة t لستودنت Student ونحسب t_{cal} ثم نحدد t_{tab} حيث:

أ- **إحصاءة ستودنت المحسوبة t_{cal}** : وتحسب باستخدام العلاقة التالية: $t_{cal\ b1} = \frac{\hat{b}_1}{\sigma_{\hat{b}_1}}$

حيث $t_{cal} = \frac{-1.217135}{0.0645216} = -18.8639$

ب- **إحصاءة ستودنت الجدولية t_{tab}** : وتحدد t_{tab} بالاعتماد على جداول t لستودنت عند درجة حرية $(n-2=11)$ وعند مستوى دلالة $\left(\alpha/2 = 5/2\ \%\right)$ أي: $t^{\frac{5}{2}\%}_{tab(11)} = 2.201$

ج –القرار: نلاحظ أن $|(t_{cal})_{\hat{b}1}| > (t_{tab})$ أي $|7.6506| > 2.447$ فنقرر رفض H_0 وقبول H_1 أي أن $b_1 \neq 0$ يختلف عن الصفر بشكل معنوي

نتيجة: إجمالا يمكن القول أن للنموذج الاحصائي المقدر معنوية إحصائية كلية و معنوية إحصائية جزئية لكل معلماته، كما أنه يتمتع بقدرة تفسيرية عالية تفوق97 % مما يعني مبدئيا أن النموذج مقبول لتفسير الظاهرة المدروسة في انتظار استكمال الاختبارات القياسية التي سندرها في الفصل الرابع.