تمهيد:

تطرقنا فيما سبق إلى الانحدار الخطي البسيط الذي يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما متغير مستقل (X_i) والآخر تابع(Y_i) ، غير أنه وما يمليه واقع الحياة الاقتصادية والاجتماعية على أنه أية ظاهرة تتأثر بأكثر من متغير مستقل، كان من الضروري توسيع وتمديد الانحدار السابق ليشمل الانحدار المتغير التابع(Y_i)والعديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ بغرض دراسة وتحليل الظواهر الحقيقية المستمدة من واقعها ويسمى هذا النموذج بالانحدار الخطي المتعدد أو العام، أما البروفيسور جوتستن أطلق عليه اسم النموذج الخطي لأكثر من متغيرين .

1-طبيعة النموذج الخطي المتعدد (العام) وفرضياته:

1-1-طبيعة النموذج الخطي المتعدد (العام): يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين المتغير التابع (Y_i)وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1,\ X_2\ \ldots\ldots\ X_n$ والحد العشوائي (U_i) الذي يتم إدراجه في المعادلة بغرض تقريبها من الواقع كما سبق وذكرنا في الانحدار الخطي البسيط.

ويتم التعبير عن العلاقة الخطية بالنسبة لـ nمن المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة كما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + \ldots\ldots + B_kX_{ki} + U_i$$

حيث:

Y_i: يمثل المتغير التابع للفترةi.

B_0: الحد الثابت.

X_{1i}: يمثل المتغير المستقل (المفسر) 1 للفترةi.

X_{2i} : يمثل المتغير المستقل (المفسر) 2للفترةi.

X_{ki} : يمثل المتغير المستقل kللفترةi.

$B_k \ldots\ldots B_3\ ،B_1\ ،B_0$: تمثل معلمات النموذج.

U_i: يمثل حد الخطأ (وهو عبارة عن الفرق بين النموذج الحقيقي والنموذج المقدر) هذا الخطأ غير معلوم ويبقى كذلك.

n: عدد المشاهدات.

k: عدد المتغيرات المستقلة.

ويمكن اختصار صيغة النموذج جبريا بالشكل التالي:

$Y_i = \sum_{j=1}^{k} B_j X_{ji} + U_i$، حيث تشير $j = 1\ldots\ldots k$ إلى عدد المتغيرات المستقلة و(i)إلى عدد المشاهدات المدروسة($i = 1\ldots\ldots n$).

ولأن هذه الكتابة تعد أقل تطبيقا فلتبسيطها وتسهيل التعبير عن بعض النتائج، يتم الاستعانة بالشكل المصفوفي وهذا بإعادة كتابة النموذج مشاهدة بمشاهدة كما يلي:

$$Y_1 = B_0 + B_1X_{11} + B_2X_{21} + B_3X_{31} + \ldots\ldots B_kX_{k1} + U_1$$
$$Y_2 = B_0 + B_1\ X_{12} + B_2X_{22} + B_3X_{32} + \ldots\ldots B_kX_{k2} + U_2$$

$$Y_3 = B_0 + B_1X_{13} + B_2X_{23} + B_3X_{33} + \ldots\ldots B_kX_{k3} + U_3$$
$$\vdots$$
$$Y_n = B_0 + B_1X_{1n} + B_2X_{2n} + B_3X_{3n} + \ldots\ldots B_kX_{kn} + U_n$$

فتكون الصيغة بالشكل المصفوفي التالي:

$$Y_{(n,1)} = X_{(n\ ,\ k+1\ )} . B_{(k+1\ ,\ 1\ )} + U_{(\ n\ ,\ 1\ )} \ldots\ldots\ldots (\ 10\ )$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{(n\ ,1)} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}_{(\ n,k+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}_{(k+1\ ,1)} \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}_{(n\ ,1)}$$

حيث:

Y : مصفوفة مشاهدات المتغير التابع ذو بعد $(n،1)$أي nسطر وعمود واحد.

X: مصفوفة مشاهدات المتغير المستقل ذات بعد $(n،k+1)$أي nسطر و$(k+1)$ عمود حيث يمثل kعدد المتغيرات المفسرة الحقيقية بدون متغير ثابت، يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح الذي يمثل الحد الثابت.

B: مصفوفة المعالم المطلوب تقديرها ذو بعد $(k+1،1\ )$أي $(k+1)$سطر وعمود واحد.

U: مصفوفة الأخطاء العشوائية ذو بعد $(n\ ،\ 1)$أي nسطر وعمود واحد.

وبما أن المعادلة رقم (10) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصائيات المتوفرة عن المتغير التابع والمتغيرات المستقلة$X_k \ldots\ldots\ldots X_2$ ،X_1فإن الأمر يتطلب مجموعة من الفروض الأساسية يستند إليها النموذج الخطي العام.

2-1 -فرضيات النموذج الخطي العام:

كما هو الحال بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط، فإنه لتقدير معلمات النموذج الخطي العام لابد من الارتكاز إلى مجموعة من الفروض الأساسية منها ما هو متعلق بالخطأ العشوائي والأخرى تتعلق بهيكل النموذج.

تتمثل إجمالا في:

أ-قيم المتغير المفسر يتم مشاهدتها بدون أخطاء.

ب-القيمة المتوقعة لمصفوفة حدود الخطأ تساوي المصفوفة الصفرية أي $E(U) = 0$أو بشكل آخر

$$E(U) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

بمعنى أن القيمة المتوقعة لكل عنصر من العناصر العشوائية للمصفوفة حد الخطأ تساوي الصفر

ج-عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء الداخلة في دالة الانحدار المتعدد أو انعدام التغاير بينهما ويعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$E(U_i U_j) = 0$$

د-تباين العناصر العشوائية ثابت أي$var(U) = \sigma^2 I_n$ويعبر عنها بشكل آخر:

$$var(U) = E(UU') = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}[U_1 U_2 \ \cdots \ U_n \ ]$$

$$= \begin{bmatrix} E({U_1}^2) & E(U_1U_2)\cdots & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2U_2) \ \cdots & E(U_2U_n) \\ \vdots & & \\ E(U_uU_1) & E(U_uU_2) \ \cdots & E(U_uU_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} =$$

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 . I_n$$

حيث:

(In): مصفوفة أحادية أو متطابقة ذات مرتبة$(n \ ، \ n)$ تسمى بمصفوفة التباين والتغاير لحد الخطأ، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين حدود الخطأ والعناصر التي تقع خارج القطر انعدام التغاير فيما بينها.

ومنه تتوزع مصفوفة حدود الخطأU توزيع طبيعي بوسط يساوي الصفر ومصفوفة تباين وتغاير $\sigma^2 \ I_n$أي $U \to N(0 \ ، \ \sigma^2 I_n)$

هـ-$cov(X_t \ U_t) = 0$تعني هذه الفرضية أن حد الخطأ غير مرتبط بالمتغيرات المفسرة.

و-مصفوفة البياناتXمصفوفة غير عشوائية، أي أنها تحتوي على قيم ثابتة في المعاينات المتكررة.

فضلا عن هذه الفرضيات المتعلقة بالمتغير العشوائي يجب ألا تكون هناك علاقة خطية تامة (تعدد خطي تام) بين المتغيرات المستقلة حتى تكون المصفوفة(XX') نظامية قابلة للقلب$(XX')^{-1}$، فينبغي أن تكون

عدد المشاهدات أكبر من عدد المعالم المراد تقديرها، ليكون عدد أعمدة المصفوفة(X) والبالغ$(K+1)$ أقل من عدد صفوفها البالغ(n) أي$k+1<n$، ونعبر عن هذا المفهوم رياضيا كما يلي:

$p(X)=rank(X)=K+1<n$ حيث تمثل$P(X)$ رتبة المصفوفة(X)، وعند تحقق الفروض أعلاه يمكن تقدير معلمات النموذج.

2-تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد وتباين حد الخطأ العشوائي:

على ضوء الفرضيات السابقة فإنه يتم تقدير معلمات النموذج الخطي العام المكون من$(k+1)$ معلمة غير معلومة $B_0\ ,\ B_1\ \ldots\ B_k$وتباين الخطأ σ^2باستعمال طريقة المربعات الصغرى التي تقوم على مبدأ تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى حد ممكن.

2-1-تقدير معلمات النموذج:

ويتم تقدير معلمات النموذج على النحو التالي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}e_i^2=Min(e'e)=Min(Y-XB)'(Y-XB)=MinS\ \cdots\cdots\ (11)$$

حيث:

e: عبارة عن شعاع البواقي.

e': منقول شعاع البواقي.

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة رقم (11) بالنسبة لشعاع$\hat{B}$مع مساواتها إلى الصفر نحصل على المعادلات الطبيعية التالية:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{B}}=-2\ X'Y+2X'X\hat{B}=0\cdots\cdots(12)$$

ومنه:

$$\hat{B}=(X'X)^{-1}.X'Y$$

حيث:

X: تمثل مصفوفة المتغيرات المستقلة ذات بعد nسطر معبرة عن عدد المشاهدات و$(k+1)$ عمود معبر عن عدد المعلمات المراد تقديرها.

$(X'X)^{-1}$: مقلوب المصفوفة$(X'X)$.

وتتمثل الصيغة الحسابية للمصفوفة$(X'X)$كما يلي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & & & \cdots & \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}X_{2i} & & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة $(X'X)$هو $(X'X)^{-1}$يحسب كما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{adj(X'X)}{|X'X|}$$

حيث:

$adj(X'X)$: مرافق المصفوفة$(X'X)$.

$|X'X|$: محدد المصفوفة$(X'X)$.

أما$X'Y$فيحسب كما يلي:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \vdots \\ \hat{B}_K \end{bmatrix} \qquad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki}Y_i \end{bmatrix}$$

وعليه تكتب الصيغة التقديرية للنموذج الخطي العام كما يلي:

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i} + \cdots\cdots + \hat{B}_k X_{ki} + U_i$$

مثال رقم (01): لتكن البيانات الإحصائية الافتراضية الخاصة بY_i، X_1، X_2والمبينة في الجدول التالي:

X_{2i}	X_{1i}	Y_i	i
1	1	2	1
2	2	3	2
4	3	5	3
3	4	6	4
2	5	8	5
12	15	24	المجموع

المطلوب:

-أكتب الشكل المصفوفي للنموذج.

-قدر معالم النموذج.

-أكتب معادلة الانحدار الخطي المتعدد للنموذج المقدر.

الحل:

$X_{2i}Y_i$	$X_{1i}Y_i$	$X_{1i}X_{2i}$	X_{2i}^2	X_{1i}^2	X_{2i}	X_{1i}	Y_i	i
2	2	1	1	1	1	1	2	1
6	6	4	4	4	2	2	3	2
20	15	12	16	9	4	3	5	3
18	24	12	9	16	3	4	6	4
16	40	10	4	25	2	5	8	5
62	87	39	34	55	12	15	24	المجموع

لدينا عدد المتغيرات المفسرة في هذا النموذج $k = 2$ مع إضافة الحد الثابت للنموذج نتحصل على:

$k + 1 = 2 + 1 = 3$ وعدد المشاهدات $n = 5$.

-كتابة الشكل المصفوفي للنموذج:

$$Y_i = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + u_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = B_0 + B_1X_{11} + B_2X_{21} + u_1 \\ Y_2 = B_0 + B_1X_{12} + B_2X_{22} + u_2 \\ Y_3 = B_0 + B_1X_{13} + B_2X_{23} + u_3 \\ Y_4 = B_0 + B_1X_{14} + B_2X_{24} + u_4 \\ Y_5 = B_0 + B_1X_{15} + B_2X_{25} + u_5 \\ Y_6 = B_0 + B_1X_{16} + B_2X_{26} + u_6 \\ Y_7 = B_0 + B_1X_{17} + B_2X_{27} + u_7 \\ Y_8 = B_0 + B_1X_{18} + B_2X_{28} + u_8 \end{cases}$$

ومنه صيغة الشكل المصفوفي هي:

$$Y_{(8,1)} = X_{(8\ ,\ 3)}.B_{(3\ ,\ 1)} + U_{(8\ ,\ 1)}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}_{(5,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{(5,3)} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_{(3,1)} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}_{(5,1)}$$

-تقدير معالم النموذج:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 12 \\ 15 & 55 & 39 \\ 12 & 39 & 34 \end{bmatrix}$$

نحسب مقلوب المصفوفة $(X'X)$هو $(X'X)^{-1}$كما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{adj(X'X)}{|X'X|}$$

حيث:

$adj(X'X)$: مرافق المصفوفة$(X'X)$.

$|X'X|$: محدد المصفوفة$(X'X)$.

$$adj(X'X) = \begin{bmatrix} 349 & 42 & -75 \\ 42 & 26 & 15 \\ -75 & 15 & 50 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 5315$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{5315}\begin{bmatrix} 349 & 42 & -75 \\ 42 & 26 & 15 \\ -75 & 15 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}$$

نحسب الآن

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 87 \\ 62 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 87 \\ 62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.516 \\ 0.751 \\ 0.579 \end{bmatrix}$$

-كتابة معادلة الانحدار الخطي المتعدد للنموذج المقدر:

$$\hat{Y}_i = 1.516 + 0.751X_{1i} + 0.579X_{2i}$$

كما يمكن كتابة النموذج المقدر كما يلي:

$$Y_i = 1.51 + 0.75X_{1i} + 0.58X_{2i} + e_i$$

حيث $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

1-1-2-خواص مقدرات المربعات الصغرى في نموذج الخطي العام:

انطلاقا من الشكل المصفوفي للنموذج الخطي العام يمكن حصر خواص المقدرات في:

- تتميز مقدرات المربعات الصغرى في نموذج الانحدار المتعدد بعدم التحيز كما هو الحال بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط بحيث القيمة المتوقعة للمقدرات تعادل القيمة الحقيقية، ويمكن التعبير عن هذه الخاصية رياضيا على النحو التالي:

$$E(\hat{B}) = E[(X'X)^{-1}X'(XB + U)]$$

ولأن $E(U) = 0$

فإن $E(\hat{B}) = B + (X'X)^{-1}X'E(U) = B$

- كما تتميز بأن قيمة تباين أي عنصر من عناصر المصفوفة$(\hat{B})$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة σ^2 لما يقابلها من عناصر الواقعة على القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$أي:

$var(\hat{B}) = \sigma^2 a_{ij}$ أما التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر المتجه$(\hat{B})$ عبارة عن حاصل ضرب σ^2بالعنصر المقابل والواقع خارج القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة$(X'X)^{-1}$ ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$var(\hat{B}) = E\left[(\hat{B} - E(\hat{B}))\ (\hat{B} - E(\hat{B}))\right]$$

ولأن $E(\hat{B}) = B$ يكون

$$var(\hat{B}) = E\left[(\hat{B} - B)\ (\hat{B} - B)'\right] = E[(X'X)^{-1}X'U]\ [(X'X)^{-1}X'U]$$
$$= (X'X)^{-1}X'E(U'U)X(X'X)^{-1}$$

وبما أن $E(UU') = \sigma^2.In$فإن:

$$var(\hat{B}) = (X'X)^{-1}X'.\sigma^2.I_n.X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}.X'X.\sigma^2.I_n(X'X)^{-1}$$

ومنه:

$$\boxed{var(\hat{B}) = \hat{\Omega}_{\hat{B}} = \hat{\sigma}_u{}^2.(X'X)^{-1}}$$

حيث:

$\hat{\Omega}_{\hat{B}}$: تسمى مصفوفة التباين والتباين المشترك بعدها $(k+1, k+1)$وتكتب كما يلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} v(\hat{B}_0) & cov(\hat{B}_1, \hat{B}_0) & \cdots & cov(\hat{B}_k, \hat{B}_0) \\ cov(\hat{B}_0, \hat{B}_1) & v(\hat{B}_1) & \cdots & cov(\hat{B}_k, \hat{B}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\hat{B}_0, \hat{B}_k) & cov(\hat{B}_1, \hat{B}_k) & \cdots & v(\hat{B}_k) \end{bmatrix}$$

ويمثل قطر المصفوفة $\hat{\Omega}_{\hat{B}}$ تباين المقدرات.

2-2 -تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_u^2$: بعد تقدير معلمات النموذج $\hat{B}$ غير المعلومة نقوم بتقدير تباين حد الخطأ $\hat{\sigma}_u^2$على النحو التالي:

نذكر أنه يمكن كتابة النموذج بالشكل التالي:

$$e = Y - X\hat{B}$$

وبتعويض قيم Y و$\hat{B}$ بقيمهم على التوالي نحصل على:

$$e = XB + U - X(X'X)^{-1}\ X'(XB + U) = U - X(X'X)^{-1}X'.U$$
$$= [\ I_n\ - X(X'X)^{-1}X']U$$
$$= MU$$

علما أن M مصفوفة نظامية وصماء صيغتها $M = I_n.X(X'X)^{-1}X$.

ومنه فإن مجموع مربعات البواقي تكتب كما يلي:

$$e'e = U'MU = U'[I_n - X(X'X)^{-1}X']U$$

وبأخذ الأمل الرياضي للكمية $e'e$ نتحصل على:

$$E(e'e) = E[U'(I_n - X(X'\ X)^{-1}X')]U$$

ولأن $E(U_iU_j) = 0 \quad , \quad i \neq j$ يصبح الأمل الرياضي للكمية e'e بالشكل التالي:

$$E(e'e) = \sigma^2 Tr(I_n - X(X'X)^{-1}\ X') = \sigma^2[TrIn - Tr((X'X)^{-1}X'X)]$$

حيث يشير الرمز Tr إلى أثر المصفوفة[1] مع العلم أن $Tr.I_n = n$ .1 و$Tr(AB) = Tr(BA)$ فيكون:

$$Tr\sum_{i\ =\ 1}^{n} 1 = k + 1\ Tr[X((X'X)^{-1}X')] = Tr[((X'X)^{-1}X')X] = TrI(k+1) = k+1$$

ومنه يصبح $E(e'e) = \sigma^2(n - k - 1)$

وبما أن $(e'e)$ مقدر غير متحيز لتباين ${\sigma_u}^2$، فإن تقدير ${\sigma_u}^2$ يكتب بالصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}_u{}^2 = \frac{E(\ e'\ e\ )}{n\ -\ k\ -\ 1} = \frac{e'e}{n\ -\ k\ -\ 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} = {S_e}^2$$

مثال رقم(02): بالاعتماد على معطيات المثال السابق أحسب:

-تباين حد الخطأ العشوائي؛

-تباين المقدرات.

الحل:

e_i^2	e_i	$\hat{Y}_i$	X_{2i}	X_{1i}	Y_i	i
0.715	-0.846	2.846	1	1	2	1
1.382	-1.176	4.176	2	2	3	2
1.177	-1.085	6.085	4	3	5	3
0.066	-0.257	6.257	3	4	6	4
2.468	1.571	6.429	2	5	8	5
5.808	/	/	12	15	24	المجموع

[1] يشير الرمز Tr إلى أثر المصفوفة والذي يساوي مجموع العناصر القطرية للمصفوفة.

-حساب تباين حد الخطأ العشوائي:

لحساب تباين حد الخطأ العشوائي نحسب بواقي تقدر e_i من المعادلة $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

لكن نحسب أولا قيم$\hat{Y}_i$ من المعادلة التالية:

$$\hat{Y}_i = 1.516 + 0.751X_{1i} + 0.579X_{2i}$$

$$\hat{\sigma_u}^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} = \frac{5.808}{5-2-1} = \frac{5.808}{2} = 2.904$$

-حساب تباين المقدرات:

لإيجاد تباين المقدرات نضرب قطر المصفوفة في مقدر تباين الخطأ كما يلي:

$$var(\hat{B}) = \hat{\Omega}_{\hat{B}} = \hat{\sigma_u}^2.(X'X)^{-1} = 2.904\begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.174 & 0.023 & -0.029 \\ 0.023 & 0.014 & 0.008 \\ -0.029 & 0.008 & 0.026 \end{bmatrix}$$

ومنه تمثل عناصر قطر المصفوفة تباين المقدرات كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_2} = 0.026 \ , \hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = 0.014 \ \ , \ \hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = 0.174$$

3-تقييم النموذج الخطي المتعدد:

كما هو الشأن بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط، بعد تقدير معلمات النموذج وتباين حد الخطأ تأتي المرحلة تقييم النموذج أي قياس مدى قدرة المتغيرات التي يتضمنها النموذج في تفسير تغيرات المتغير التابع المعبر عن الظاهرة محل الدراسة، حيث يتم استخدام نوعين من الاختبارات:

- اختبار جودة الارتباط؛
- اختبارات المعنوية.

3-1-اختبار جودة الارتباط: من أجل تقييم النموذج المتحصل عليه بعد تقدير معلماته، وكما هو الحال بالنسبة للنموذج الخطي البسيط، فإنه يتم استخدام اختبار جودة الارتباط اعتمادا على المؤشر السابق الذكر معامل التحديدR^2 الذي يقيس مدى ارتباط المتغير التابع بالمتغيرات المفسرة، حيث توصلنا إلى صيغته الرياضية والتي كانت على الشكل التالي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

ولأن:

- مجموع مربعات الانحرافات الكليةTSS في نموذج الانحدار الخطي المتعدد تكتب كما يلي:

$$TSS = \sum Y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = Y'Y - n\bar{Y}^2$$

- ومجموع مربعات انحرافات التي يمكن تفسيرها بواسطة المتغيرات المفسرة ESSفي نموذج الانحدار المتعدد تكتب على الشكل التالي:

$$ESS = \sum \hat{Y}_i^2 = \sum Y_i - \sum e_i^2 = Y'Y - n\bar{Y}^2 - e'e = Y'Y - e'e - n\bar{Y}^2$$

$$= \hat{B}'X'Y - n\bar{Y}^2$$

- أما مجموع مربعات البواقي RSS فتكون كما يلي:

$$RSS = \sum e_i{}^2 = e'e$$

وبتعويض قيم ESS و TSS في صيغة R^2 نجد:

$$R^2 = \frac{\hat{B}'X'Y - n\bar{Y}^{\,2}}{Y'Y - n\bar{Y}^2} = \frac{\hat{B}'X'X\hat{B} - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

وحسب التجربة تبين أن هذا المؤشر لا يمكن الاعتماد عليه في نموذج يتضمن أكثر من متغير مفسر، وذلك لأنه يرتفع دوما بارتفاع عدد المتغيرات المستقلة، وهذا بغض النظر عما إذا كانت المتغيرات تلعب دورا أم لا في النموذج أي بغض النظر من وجود علاقة سببية بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع أم لا، ولتلاشي هذا القصور يتم الاستعاضة بمؤشر آخر يطلق عليه بمعامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$ والتي تكون صيغته على النحو التالي:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{(1-R^2)(n-1)}{(n-k)}\right]$$

وهذا ليقضي على كافة تساؤلات الباحثين الخاصة بأهمية زيادة عدد المتغيرات المفسرة في النموذج دون التفكير في سبب ظهورها، حيث يتميز معامل التحديد المعدل أنه يأخذ في الاعتبار عند حسابه درجات الحرية، وذلك لأن إدخال أي متغير تفسيري جديد يقلل من درجات الحرية مع ثبات حجم العينة، مما يؤثر سلبا على قيمة معامل التحديد المعدل ومن ثم يزداد الفرق بين R^2 و $\bar{R}^2$.

أما فيما يخص القيم فيمكن أن يتخذ معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$ قيما سالبة عند عدد معين من المتغيرات التفسيرية ففي هذه الحالة يفسر $\bar{R}^2$ على أنه يعادل الصفر، في حين معامل التحديد تبقى قيمه دائما موجبة.

مثال رقم (03): بالاعتماد على معطيات المثال السابق:

أحسب معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$ مع شرح النتيجة.

الحل:

لدينا $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = RSS = 5.808$

نحسب $\sum_{i=1}^{5}(Y_i - \bar{Y})^2$

i	Y_i	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	2	7.84
2	3	3.24
3	5	0.04
4	6	1.44
5	8	10.24
المجموع	24	22.8

-نحسب $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} Y_i}{n} = \frac{24}{5} = 4.8$

-نحسب $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{5.808}{22.8} = 0.7807$

-نحسب $\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{(1-R^2)\ (n-1)}{(n-k)}\right] = 1 - \left[\frac{(1-0.7807)(5-1)}{(5-2)}\right] = 1 - \frac{0.8772}{3} = 0.7076$

الشرح:

$\bar{R}^2 = 0.7076$ يعني أن 70.76% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع Y_i سببها X_1 و X_2 أو بمعنى آخر أن X_1 و X_2 تفسر تغيرات المتغير التابع Y_i بنسبة 70.76%.

3-2-اختبارات المعنوية:

3-2-1-اختبار المعنوية الإحصائية لكل مقدرة على حدى: كما هو الشأن بالنسبة للنموذج الخطي البسيط، يتم اختبار المعنوية الإحصائية للمقدرات وذلك بالاعتماد على إحصائية (t) لمعرفة مدى تأثير المتغيرات المستقلة $X_1\ ,\ X_2\ \ldots\ldots X_k$ على المتغير التابع (Y) في نموذج الانحدار المتعدد، حيث يقوم هذا الاختبار على نوعين من الفروض.

فرضية العدم $H_0: B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_k = 0$

الفرضية البديلة $H_1: B_1 \neq B_2 \neq \ldots\ldots \neq B_k \neq 0$

فبافتراض أن المتغير العشوائي (U_i) موزع توزيع طبيعي $U \to N(0, \sigma^2 I_n)$ وفي ظل الفرضيات السابقة للنموذج الخطي العام أي $\hat{B} \to N(B_j, a_{ij}\sigma^2) \quad , \quad j = 1\ldots\ldots k$

حيث:

(a_{ij}): تمثل العناصر القطرية في المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

فإن الإحصائية (t) تكتب بالصيغة التالية:

$$t_c = \frac{\hat{B}_j - B_j}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}}\sqrt{a_{ij}}}$$

وإذا كانت B_j تساوي صفر، وهذا لما تنص عليه فرضية العدم أي المتغيرات المستقلة لا تؤثر في المتغير التابع، فإن الصيغة (t) تصبح كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{B}_j}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}}\sqrt{a_{ij}}}$$

ويتم استخدام هذا الاختبار باحتساب قيمة t ومقارنتها مع نظيرتها الجدولية:

- فإذا كانت (t) المحسوبة أكبر من قيمة (t) الجدولية، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة على أن (B_j) لا تساوي الصفر وهذا يعني أن المتغير المستقل (X_j) يؤثر على المتغير التابع (Y_i).
- أما إذا كانت (t) المحسوبة أقل من قيمتها الجدولية فإن ذلك معناه أن المتغير التابع لا يتأثر بتغيرات المتغير المستقل وأن المتغير العشوائي (U_i) هو المصدر الوحيد للتأثير في (Y_i).

وكما هو الحال بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط فإنه يمكن استخدام الصيغة التقريبية السابقة الذكر الخاصة باختبار t لاختبار المعنوية الإحصائية لكل مقدر على حدى.

أما فيما يخص مجال الثقة لمعلمات النموذج الخطي المتعدد فإنه يمكن إعطاءه بالصيغة التالية:

$$C.I = B_k \pm t_{\alpha/2,n-k-1}\sqrt{\frac{e'e}{n-k-1}}\sqrt{a_{ij}}$$

3-2-2-اختبار المعنوية الإحصـــائية لكل مقدرات النموذج: وكما هو الحال بالنســبة للنموذج الخطي البسيط يتم اختبار المعنوية الإحصائية لكل مقدرات النموذج في آن واحد، باستخدام اختبار الإحصائية F التي تهدف إلى قياس مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \ldots\ldots X_k$ والمتغير التابع، أي معنوية الانحدار ككل، من خلال التساؤل التالي:

يوجد على الأقل متغير مفسر معنوي؟ وكما هو الحال بالنسبة للنموذج الخطي البسيط فإنه يعتمد على نوعين من الفروض:

فرضية العدم H_0: تنص على انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \ldots\ldots X_k$ والمتغير التابع أي: $H_0: B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_k = 0$

الفرضية البديلة H_1: يوجد على الأقل معامل من بين المعاملات التي يتضمنها النموذج غير معدوم.

دون الأخذ في الاعتبار الحالة التي يكون فيها الحد الثابت B_0 معدوم، وهذا لأن الذي يهم هو المتغيرات التفسيرية وأن النموذج الذي يحتوي على الحد الثابت فقط معنوي ليس له أي معنى من الناحية الاقتصادية.

وبالرجوع إلى المعادلة الأساسية لتحليل التباين:

$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2$ وبالاستناد إلى الجدول الموالي الذي يبين تحليل تباين الانحدار المتعدد فإنه يمكن احتساب الإحصائية F، كما تكمن أهمية هذا الجدول في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع ومن ثم اعتماد المتغيرات المؤثرة في النموذج.

الجدول رقم (02): يبين تحليل تباين الانحدار المتعدد

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	المربعات المتوسطة
المفسر	$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	k	$\frac{ESS}{k}$
البواقي	$RSS = \sum e_i^2$	$n-k-1$	$\frac{RSS}{n-k-1}$
الكلي	$TSS = \sum(Y_i - \bar{Y})^2$	$n-1$	$\neq$

Source: Régis Bourbonnais, op.cit, p.66

وتعطى الصيغة الرياضية للإحصائية F كما يلي:

$$F^* = \frac{\frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{k}}{\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}} = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}}$$

بعد احتساب قيمة Fتقارن مع نظيرتها الجدولية بدرجة حرية (k)و$(n-k-1)$ للبسط والمقام عند مستوى دلالة معين.

فإذا كانت قيمةFالمحتسبة أكبر من قيمتها الجدولية نرفض فرضية العدم H_0ونقبل الفرضية البديلة H_1على أن النموذج تفسيري كليا.

أما إذا كانت قيمة Fالمحتسبة أقل من قيمتها الجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة على أنه لا توجد أي علاقة خطية معنوية بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة أي مجموع مربعات الانحرافات التفسيرية معنويا تساوي الصفر.

مثال رقم (04): بالاستناد على معطيات المثال السابق

-اختبر معنوية المعالم:$\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$، $\hat{B}_2$ عند مستوى معنوية 5%

-اختير المعنوية لكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5%

-أنشئ مجال الثقة للمعلمات.

الحل:

اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم:

لدينا النموذج المقدر $\hat{Y}_i = 1.516 + 0.751X_{1i} + 0.579X_{2i}$

-اختبار معنوية المعلمة B_0

أن $\begin{cases} H_0: B_0 = 0 \\ H_1: B_0 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightarrow t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} = \frac{1.516}{0.174} = 6.64$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n-3 = 5-3 = 2$ نجد القيمة الجدولية لـ $t_{2,0.025}$ من جدول ستيودنت $t_t = 4.403$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 6.64 > t_t = 4.403$ وعليه نقبل الفرضية البديلة ونرفض الفرضية العدمية على أن المعلمةB_0 لها معنوية إحصائية وتفسر النموذج المقدر.

-اختبار معنوية المعلمة B_1

أن $\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightarrow t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} = \frac{0.751}{0.014} = 53.64$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 3 = 5 - 3 = 2$ القيمة الجدولية لـــ$t_{2,0.025}$ من جدول ستيودنت $t_t = 4.403$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 53.64 > t_t = 4.403$ وعليه نرفض الفرضـــية العدمية ونقبل الفرضـــية البديلة على أن المعلمةB_1 لها معنوية إحصائية وتفسر النموذج.

-اختبار معنوية المعلمةB_2

أن $\begin{cases} H_0: B_2 = 0 \\ H_1: B_2 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_2 - B_2}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_2}} \rightarrow t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_2}} = \frac{0.579}{0.026} = 22.27$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 3 = 5 - 3 = 2$ القيمة الجدولية لـــ$t_{2,0.025}$ من جدول ستيودنت$t_t = 4.403$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 22.27 > t_t = 4.403$ وعليه نرفض الفرضـــية العدمية ونقبل الفرضـــية البديلة على أن المعلمةB_2 لها معنوية إحصائية وتفسر النموذج.

-اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

لاختبار المعنوية الكلية للنموذج نعتمد على إحصائية فيشر F.

$$H_0: B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_k = 0:$$
$$H_1: \exists B_j \neq 0, j = 1,2$$

$$F_c = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{(1 - R^2)}{(n - k - 1)}} \rightarrow F_{(1,n-2,\alpha\%)}$$

$$F_c = \frac{\frac{0.7807}{2}}{\frac{1 - 0.7807}{5 - 3}} = \frac{0.39035}{0.10965} = 3.56$$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية2 و$n - 3 = 2$ القيمة الجدولية لـــ $F_{(2,2,5\%)}$من جدول فيشر$F_t = 19$

نلاحظ أن $F_c = 3.56 < F_t = 19$وعليه نقبل الفرضـية H_0ونرفض الفرضـيةH_1 ونقول أن النموذج ليس معنوي كليا.

4-اختبار صلاحية النموذج لكل الفترة

4-1-اختبار استقرارية معاملات النموذج (اختبار chow):

يعد اختبار اســتقرارية معاملات النموذج chow من بين الاختبارات التي يمكن القيام بها لغرض اختبار مدى صلاحية النموذج المتحصل عليه خلال كل الفترة خاصة إذا تعلق الأمر بالبيانات في شكل سلاسل زمنية. حيث غالبا ما تطرأ أحداث سواء اقتصادية أو سياسية أو اجتماعية من شأنها أن تؤثر على معلمات النموذج ومن ثم يصــبح النموذج المتحصــل عليه غير صــالح ابتداء من النقطة الزمنية التي حدثت فيها التغيرات، فيصبح من الغير الممكن الاعتماد على نموذج واحد لتمثيل كل الفترة.

فيتم تقسيم العينة إلى قسمين واختبار إذا ما كانت معاملات النموذج خلال كل الفترة تشهد استقرار أو أن تقسـيم العينة إلى جزئين يحسـن من جودة النموذج، على أن تبقى خصـوصـية النموذج نفسـها فيما تتغير قيم المعاملات المقدرة للعينتين، ويتم هذا الاختبار على النحو التالي:

ليكن النموذج المقدر كمثال خلال فترة واحدة كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i} + \hat{B}_3 X_{3i} + e_i$$

وبتقسـيم العينة إلى جزئين عند نقطة زمنية معينة تسـمى بنقطة الانعطاف، يكون النموذج المقدر خلال الفترة الأولى كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0{}^{(1)} + \hat{B}_1{}^{(1)} X_{1i} + \hat{B}_2{}^{(1)} X_{2i} + \hat{B}_3{}^{(1)} X_{3i} + e_i$$

أما النموذج المقدر خلال الفترة الثانية يكون بالشكل التالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0{}^{(2)} + \hat{B}_1{}^{(2)} X_{1i} + \hat{B}_2{}^{(2)} X_{2i} + \hat{B}_3{}^{(2)} X_{3i} + e_i$$

ويقوم هذا الاختبار على فرضيتين هي:

$$H_0 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 = \hat{B}_1{}^{(1)} = \hat{B}_1{}^{(2)} \\ \hat{B}_2 = \hat{B}_2{}^{(1)} = \hat{B}_2{}^{(2)} \\ \hat{B}_3 = \hat{B}_3{}^{(1)} = \hat{B}_3{}^{(2)} \\ \hat{B}_0 = \hat{B}_0{}^{(1)} = \hat{B}_0{}^{(2)} \end{bmatrix} \text{ الفرضية} \quad H_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \neq \hat{B}_1{}^{(1)} \neq \hat{B}_1{}^{(2)} \\ \hat{B}_2 \neq \hat{B}_2{}^{(1)} \neq \hat{B}_2{}^{(2)} \\ \hat{B}_3 \neq \hat{B}_3{}^{(1)} \neq \hat{B}_3{}^{(2)} \\ \hat{B}_0 \neq \hat{B}_0{}^{(1)} \neq \hat{B}_0{}^{(2)} \end{bmatrix} \text{ ضد الفرضية}$$

ويسمى اختبار استقرارية المعاملات باختبار chow والذي يتم من خلال التساؤل التالي:

هـل يوجـد اختلاف معنوي بين مجموع مربعـات البواقيRSSعلى طول الفترة ومجموع مربعـات البواقي المحسوبة خلال الفترتين$(RSS^{(1)}، RSS^{(2)})$؟

ويمر هذا الاختبار بالمراحل التالية:

- **المرحلة الأولى:** يتم على مســتوى هذه المرحلة تقدير النموذج خلال كل الفترة وحســاب مجموع مربعات البواقيRSS.

- **المرحلة الثانية:** وفي هذه المرحلة يتم حســاب مجموع مربعات البواقي للعينتين$RSS^{(1)}$ و$RSS^{(2)}$ ليتم حساب فيشر Fisher التطبيقية بأخذ في المقام مجموع المربعات$(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})$

وتعطى صيغة فيشر التطبيقية كما يلي:

$$F^* = \frac{\left[(RSS - (RSS^{(1)} + RSS^{(2)})\right]/ddln}{\frac{(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})}{ddld}}$$

حيث:

$ddln$: يعبر عن درجة الحرية بالنسبة للبسط وتحسب بالشكل التالي:

$$ddln = (n - k - 1) - [(n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1)]$$

علما أن $n_1 + n_2 = n$

$ddld$: يعبر عن درجة الحرية بالنسبة للمقام وتحسب بالصيغة التالية:

$$ddld = (n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1) = n - 2(k + 1)$$

مع العلم أن n_1 تمثل حجم العينة الأولى و n_2 تمثل حجم العينة الثانية.

وبعد احتساب قيمة F التطبيقية يتم مقارنتها مع نظيرتها الجدولية، فإذا تبين أن F المحسوبة أقل من F الجدولية نقبل الفرضية H_0 على أن المعاملات معنويا مستقرة على طول الفترة ويمكن الاعتماد على النموذج في التنبؤ أو لأغراض أخرى.

وتجدر الإشارة إلى أن أغلب برامج الإعلام الآلي الخاصة بالقياس الاقتصادي، وهذا على غرار برنامج EVIEWS تتيح فرصة ايجاد نقطة الانعطاف (Break point) بسهولة كبيرة وذلك عن طريق اختيار عدة نقاط واختيار النقطة المرتبطة بأقل احتمال للخطأ.

مثال رقم(05): ليكن لدينا النموذج المقدر التالي على عينة حجمها $n = 20$:

$$\hat{Y}_i = \underset{(12.32)}{22.79} + \underset{(0.16)}{0.6}X_{1i} - \underset{(0.21)}{0.05}X_{2i} - \underset{(0.02)}{0.028}X_{3i})$$

$$R^2 = 0.804$$

$$n = 20$$

القيم التي بين القوسين هي قيم الأخطاء المعيارية.

المطلوب:

دراسة استقرارية النموذج.

الحل:

لدراسة استقرارية النموذج المقدر نتبع الخطوات التالية:

-الخطوة الأولى: تقدير النموذج على عينتين جزئيتين وحساب مجموع مربعات البواقي.

الفترة الأولى:

$$\hat{Y}_i = \underset{(11.19)}{12.54} + \underset{(0.34)}{0.53}X_{1i} - \underset{(0.42)}{0.03}X_{2i} - \underset{(0.01)}{0.015}X_{3i})$$

$$R^2 = 0.705$$

$$n_1 = 10$$

$$TSS^1 = 107.177 \quad , \quad ESS^1 = 75.56 \, , \quad RSS^1 = 31.61$$

الفترة الثانية:

$$\hat{Y}_i = \underset{(14.25)}{43.19} + \underset{(0.47)}{0.78}X_{1i} - \underset{(0.67)}{0.86}X_{2i} - \underset{(0.2)}{0.23}X_{3i})$$

$$R^2 = 0.643$$

$$n_2 = 10$$

$$TSS^2 = 71.12 \quad , \quad ESS^2 = 45.73 \, , \quad RSS^2 = 25.38$$

-**الخطوة الثانية:** حساب إحصائية فيشر

$$F^* = \frac{\left[(RSS - (RSS^{(1)} + RSS^{(2)})\right]/ddln}{\frac{(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})}{ddld}}$$

نحسب$ddln$:

$$ddln = (n - k - 1) - [(n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1)]$$
$$= (20 - 3 - 1) - [(10 - 3 - 1) + (10 - 3 - 1)] = 16 - 12 = 4$$

-نحسب $ddld$

$$ddld = (n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1) = n \ - 2(k + 1)$$
$$= (10 - 3 - 1) + (10 - 3 - 1) = 12$$

$$F^* = \frac{\left[(RSS - (RSS^{(1)} + RSS^{(2)})\right]/ddln}{\frac{(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})}{ddld}} = \frac{[(77.32 - (31.61 + 25.38)]/4}{\frac{(31.61 + 25.38)}{12}}$$
$$= \frac{5.08}{4.75} = 1.07$$

نلاحظ أن الإحصـــائيـة $F^* = 1.07 < F_{0.05,(4,12)} = 3.26$وعليـه نقبـل الفرضـيـة H_0ونقول أن المعاملات معنويا مستقرة خلال طول الفترة.

5-التنبؤ:

كما هو الحال بالنســبة لنموذج الانحدار البســيط فبعد تقدير وتقييم النموذج واختبار اســتقرارية معلماته، يصبح صـالح للتنبؤ بالقيم المسـتقبلية بإيجاد قيم للمتغير التابع بتغير قيم المتغيرات المسـتقلة. وذلك على النحو التالي:

نعتبر المعادلة المقدرة لعينة مسحوبة بحجم nكما يلي:

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i} + \ldots\ldots\ldots + \hat{B}_k X_{k_i}$$

وبافتراض أن الزمن$(t + 1)$هو الزمن الذي يتوافق مع زمن تحقيقY_{i+1} بحيث يكون شـعاع المشـاهدات المتعلق بالمتغيرات المفسرة هو$C' = (1 \ , X_{1,i+1} \ , \ \ldots\ldots\ldots X_{k,i+1})$

وأن التنبؤ بالأمل الرياضي$E(Y_{i+1})$ لـ$Y_{i \ + \ 1}$هو:

$$E(Y_{i+1}) = E(C'B + U_{i+1} \ ) = B$$

فيكون $C'\hat{B}$مقدر غير متحيز لـ$C'B$.

وعليه يكون التقدير النقطي لـ (Y_{i+1}) كما يلي:

$$\hat{Y}_{i+1} = C'\hat{B} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1,i+1} + \hat{B}_2 X_{2,i+1} + \ldots\ldots\ldots + \hat{B}_k X_{k,i+1}$$

أما فيما يتعلق بالتنبؤ بمجال لـــ$E(Y_{i+1})$فإن الأمر يتطلب توضـيح توزيع المقدر، حيث نذكر أولا أن:$E(C'\hat{B}) = C'B$

$$var(C'\hat{B}) = \sigma_u{}^2 C(X'X)^{-1}.C$$

وطالما أن $\hat{B}$ يتبع التوزيع الطبيعي فإن $C'\hat{B}$ هو كذلك حيث:

$$C'\hat{B} \rightarrow N(C'B, {\sigma_u}^2 C(X'X)^{-1}.C)$$

ولأن تباين المجتمع σ_u^2 مجهول فإنه يتم تعويضه بمقدره $\hat{\sigma}_u^2$ فنكتب:

$$\frac{C'\hat{B} - C'B}{\sqrt{(\hat{\sigma}_u^2 C'.(X'X)^{-1}.C}} \rightarrow t_{\alpha/2\ ,n-k-1}$$

حيث تشير α إلى درجة المخاطرة التي يتم اختيارها.

ليتم بناء مجال التنبؤ للمشاهدات Y_{i+1} بالطريقة التالية:

$$Y_{i+1} = C'B + U_{i+1} \quad ، \quad \hat{Y}_{i+1} = C'\hat{B}$$

ونعرف مصـــفوفة خطأ التنبؤ σ على أنه الفرق بين القيمة المتوقع بها $\hat{Y}_{i+1}$ والقيمة الحقيقية Y_{i+1} والذي يكتب رياضيا كما يلي:

$$\sigma = Y_{i+1} - \hat{Y}_{i+1} = C'B - C'\hat{B} - U_{i+1} = C'(B - \hat{B}) - U_{i+1}$$

أما توقعه الرياضي وتباينه فهو كالتالي:

$$E(\sigma) = C'E(B - \hat{B}) - E(U_{i+1}) = 0$$
$$var(\sigma) = E(C'(B - \hat{B}) - U_{i+1})^2 = {\sigma_u}^2(1 + C'(X'X)^{-1}.C$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لمصفوفة أخطاء التنبؤ فهو:

$$\sigma \rightarrow N(0\ , {\sigma_u}^2(1 + C'(X'X)^{-1}.C)$$

وبتعويض ${\sigma_u}^2$ بـ $\hat{\sigma}_u^2$ تباين العينة يمكن أن نكتب الكتابة التالية:

$$t = \frac{\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}} = \frac{Y_{i\ +1} - \hat{Y}_{i+1}}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}}$$

وعليه يكون مجال التنبؤ لـ Y_{i+1} كما يلي:

$$Y_{i+1} \in \left[C'\hat{B} \pm t_{\alpha/2,n-k-1}.\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}\right]$$

حيث:

C': مصفوفة المتغيرات المفسرة المستقبلية $(1, X_{1,i+1}\ ,\ \ldots\ldots X_{k,i+1})$

C: منقول مصفوفة المتغيرات المفسرة المستقبلية.

مثال رقم(06): بالاعتماد على معطيات المثال السابق لـ Y من أجل المشاهدة $i = 6$ علما أن $X_{16} = 7$

$X_{26} = 6$

-أوجد القيمة التنبئية لـ Y

-أوجد مجال الثقة لهذه القيمة التنبئية.

الحل:

-إيجاد القيمة التنبئية:

$$\hat{Y}_{5+1} = \hat{Y}_6 = B_0 + B_1X_{16} + B_2X_{26} = 1.516 + 0.751 \times 7 + 0.579 \times 6 = 10.247$$

-إيجاد مجال الثقة للقيمة التنبئية:

$$Y_{i+1} \in \left[\hat{Y}_{i+1} \pm t_{\alpha/2,n-k-1}.\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}\right]$$

نحسب $(C'(X'X)^{-1}.C)$

$$(C'(X'X)^{-1}.C) = (1 \quad 7 \quad 6)\begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = 0.873$$

ومن جدول توزيع ستيودنت $t_{\alpha/2,n-k-1} = t_{0.025,n-k-1} = t_{0.025,2} = 4.303$

ولدينا $\hat{\sigma}_u^2 = 2.904$ومنه:

$$Y_{5+1} \in \left[10.247 - 4.303.\sqrt{2.904.(1 + 0.873)}, 10.247 + 4.303.\sqrt{2.904.(1 + 0.873)}\right]$$

ومنه مجال الثقة هو: $Y_6 \in [-0.21\ ,\ 20.28]$