جامعة محمد خيضر (بسكرة)
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير
قسم العلوم التجارية

السنة الجامعية: 2026/2025
المستوى: أولى ماستر تسويق
مقياس: الأساليب الكمية في التسويق 2

حل سلسلة تمارين رقم (04) حول التحليل بالمركبات الأساسية

التمرين الأول:

1. تشكيل مصفوفة البيانات وحساب مركز ثقلها مصفوفة الأوزان، وحساب الانحرافات المعيارية، ومن ثم إيجاد كل من المصفوفة الممركزة والمصفوفة المعيارية (المخفضّة):

$$X=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \\ 10 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

مركز ثقل سحابة النقط للمصفوفة X

$$G_X=\begin{bmatrix} 1/n\ \sum x_{i1} \\ 1/n\ \sum x_{i2} \\ 1/n\ \sum x_{i3} \end{bmatrix} = 1/6 \begin{bmatrix} (8+4+6+10+8+0) \\ (1+6+8+4+2+3) \\ (0+5+7+7+5++6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأوزان: $D_p=1/n\ I_n$

$$D_p=\frac{1}{n}\ I_n$$

$$D_p = 1/6\ I_6= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

حساب الانحرافات المعيارية:

$s_1^2= 1/6([8^2+ 4^2+ 6^2+ 10^2+ 8^2+ 0^2)- 6^2= 10 \Rightarrow s_1= 3{,}266$

$s_2^2= 1/6([1^2+ 6^2+ 8^2+ 4^2+ 2^2+ 3^2)- 4^2= 5{,}667 \Rightarrow s_2= 2{,}3805$

$s_3^2= 1/6([0^2+ 5^2+ 7^2+ 7^2+ 5^2+ 6^2)- 5^2= 5{,}667 \Rightarrow s_3= 2{,}3805$

$$D_{1/S}= \begin{bmatrix} 0{,}306 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}420 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}420 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الممركزة : Matrice centré

$$X_C= X - 1_n\ G_X{}^t$$

$$1_n= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad G_X{}^t= (6 \quad 4 \quad 5)$$

$$X_C=\begin{bmatrix}8&1&0\\4&6&5\\6&8&7\\10&4&7\\8&2&5\\0&3&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}(6\quad 4\quad 5)=\begin{bmatrix}8&1&0\\4&6&5\\6&8&7\\10&4&7\\8&2&5\\0&3&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&4&5\\6&4&5\\6&4&5\\6&4&5\\6&4&5\\6&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-2&2&0\\0&4&2\\4&0&2\\2&-2&0\\-6&-1&1\end{bmatrix}$$

المصفوفة الممركزة المعيارية: $X_{CR}= X_C * D_{1/S}$

$$X_{CR}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-2&2&0\\0&4&2\\4&0&2\\2&-2&0\\-6&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}306&0&0\\0&0{,}420&0\\0&0&0{,}420\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}612&-1{,}260&-2{,}1\\-0{,}612&0{,}84&0\\0&1{,}68&0{,}84\\1{,}224&0&0{,}84\\0{,}612&-0{,}84&0\\-1{,}837&-0{,}42&0{,}42\end{bmatrix}$$

2. طريقة المركبات الأساسية التي تستخدم في التحليل (البسيطة المرجحة):

بما أنّ المتغيارت متجانسة ولها نفس وحدات القياس، يمكننا استخدام طريقة المركبات الأساسية البسيطة.

3. حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك (V)

يمكننا حسابها بطريقتين:

أ. باستخدام علاقتي التباين والتباين المشترك لإيجاد العناصر: ($V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{23}, V_{33}$)

$$V(X,X)=1/n\ \Sigma\ (x_{ij}-\bar{x}_j)^2 \quad j=1 \dots p$$

نستخدم قيم X الممركزة.

$$X_C=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-2&2&0\\0&4&2\\4&0&2\\2&-2&0\\-6&-1&1\end{bmatrix}$$

$V_{11}= 1/6\ [(2)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (4)^2 + (2)^2 +(6)^2\ ]=10.666$

$V_{22}= 1/6\ [(-3)^2 + (2)^2 + (4)^2 + (0)^2 +(-2)^2 + (-1)^2]= 5{,}666$

$V_{33}= 1/6\ [(-5)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (2)^2 +(0)^2 + (1)^2]= 5{,}666$

حساب التباين المشترك من العلاقة التالية:

$$Cov(X,Y)=1/n\ \Sigma(x_{ij}-\bar{x}j) * (y_{ij}-\bar{y}_j) \quad j=1 \dots p$$

$V_{12}= V_{21}= 1/6\ [(2)(-3)+ (-2)(2)+ (0)(4)+ (4)(0)+ (2)(-2)+ (-6)(-1)]= -1{,}333$

$V_{13}= V_{31}= 1/6\ [(2)(-5)+ (-2)(0)+ (0)(2)+ (4)(2)+ (2)(0)+ (-6)(1)]= -1{,}333$

$V_{23}=V_{32} = 16[(-3)(-5)+ (2)(0)+ (4)(2)+ (0)(2)+ (-2)(0)+ (-1)(1)]= 3{,}666$

$$V=\begin{bmatrix}10{,}666&-1{,}333&-1{,}333\\-1{,}333&5{,}666&3{,}666\\-1{,}333&3{,}666&5{,}666\end{bmatrix}$$

يمكن حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك مستخدمين الصيغة المصفوفية:

$$V=1/n\ X_C{}^T.X_C$$

X_C هي المصفوفة الممركزة، و $X_C{}^T$ هي منقول المصفوفة الممركزة.

$$V=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10,666 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 5,666 & 3,666 \\ -1,333 & 3,666 & 5,666 \end{bmatrix}$$

حساب مصفوفة الارتباطات:

بتطبيق الصيغة: $R= D_{1/S}\ VD_{1/S}$

$$R=\begin{bmatrix} 0,306 & 0 & 0 \\ 0 & 0,420 & 0 \\ 0 & 0 & 0,420 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10,666 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 5,666 & 3,666 \\ -1,333 & 3,666 & 5,666 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,306 & 0 & 0 \\ 0 & 0,420 & 0 \\ 0 & 0 & 0,420 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} 1 & -0,171 & -0,171 \\ -0,171 & 1 & 0,647 \\ -0,171 & 0,647 & 1 \end{bmatrix}$$

4. حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمصفوفة التباين والتباين المشترك

لحساب القيم الذاتية، نبحث عن جذور كثير الحدود المميز، المعرف بمحدد $(V-\lambda I_3)$

$$|V-\lambda I_3|=\begin{bmatrix} 10,666 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 5,666 & 3,666 \\ -1,333 & 3,666 & 5,666 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$|V-\lambda I_3|=\begin{bmatrix} 10,666-\lambda & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 5,666-\lambda & 3,666 \\ -1,333 & 3,666 & \lambda-5,666 \end{bmatrix}$$

$$|V-\lambda I_3|=(10,666-\lambda)\begin{bmatrix} 5,666-\lambda & 3,666 \\ 3,666 & \lambda-5,666 \end{bmatrix}+1,333\begin{bmatrix} -1,333 & 3,666 \\ -1,333 & \lambda-5,666 \end{bmatrix}+1,333\begin{bmatrix} -1,333 & 3,666 \\ -1,333 & \lambda-5,666 \end{bmatrix}$$

$$\det(V-\lambda I_3)=-\lambda^3+22\lambda^2-136\lambda+192=-(\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda-12)$$

توجد ثلاث قيم ذاتية (جذور كامنة) هي: $\lambda_1=12,\ \lambda_2=8,\ \lambda_3=2$

المصفوفة القطرية D_3

$$D_3=\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

الأشعة الذاتية

لكل قيمة ذاتية نحسب شعاعها الذاتي الخاص: $Vu_j=\lambda_j u_j \Rightarrow (V-\lambda_j I_n)u_j=0$

$\lambda_1=12 \Rightarrow Vu_1=12\ u_1$

$$\begin{bmatrix} 10,666 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & 5,666 & 3,666 \\ -1,333 & 3,666 & 5,666 \end{bmatrix}-12\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -,333 & -1,333 & -1,333 \\ -1,333 & -6,666 & 3,666 \\ -1,333 & 3,666 & -6,666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$-1,333\ x_1 - 1,333\ x_2 - 1,333\ x_3 = 0$ .... *(1)*

$-1,333\ x_1 - 6,333\ x_2 + 3,333\ x_3 = 0$ .... *(2)*

$-1,333\ x_1 + 3,666\ x_2 - 6,333\ x_3 = 0$ .... *(3)*

بضرب المعادلة (1) في (-1) وجمعها مع المعادلة (3) نجد:

$+1,333\ x_1 + 1,333\ x_2 + 1,333\ x_3 = 0$ .... *(1)*

$-1,333\ x_1 - 6,333\ x_2 + 3,333\ x_3 = 0$ .... *(2)*

$5\ x_2 - 5\ x_3 = 0$ .... *(3)*

من (3) نجد: $x_3 = x_2$، بالتعويض في (1) نجد: $1,333\ x_1 + 2,666\ x_2 = 0$، ومنه: $x_1 = -2\ x_2$

إذن:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2\ x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولكي يكون متجه موجه للمحور العاملي الأول (u_1)، يجب أن تكون طويلته تساوي1:

$$||u_1||^2 = (-2)^2 + (1)^2 + (1)^2 = 6 \Rightarrow ||u_1|| = 2,499$$

نقوم بتعديل u_1، بقسمة مركباته على طويلته:

$$u_1' = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \Rightarrow u_1' = \begin{bmatrix} -2/2,499 \\ 1/2,499 \\ 1/2,499 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,800 \\ 0,400 \\ 0,400 \end{bmatrix}$$

بنفس الطريقة نجد الأشعة الذاتية المتبقية المتعلقة بـ: $\lambda_2 = 8$، و: $\lambda_3 = 2$

$$u_2' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow u_2' = \begin{bmatrix} 0,577 \\ 0,577 \\ 0,577 \end{bmatrix} \qquad u_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \Rightarrow u_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد مصفوفة الأشعة الذاتية U:

$$U = \begin{bmatrix} -0,800 & 0,577 & 0 \\ 0,400 & 0,577 & -0,707 \\ 0,400 & 0,577 & 0,707 \end{bmatrix}$$

5. حساب التباين الكلي بطريقتين.

الطريقة الأولى: التباين الكلي يساوي أثر مصفوفة التباين والتباين المشترك V

$I_T = \text{trac}\ (V) = 10.666 + 5.666 + 5.666 = 22$

الطريقة الثانية: التباين يساوي مجموع القيم الذاتية للمصفوفة V

$I_T = \Sigma_\alpha \lambda_\alpha \qquad \alpha = 1 \ldots p \Rightarrow I_T = 12 + 8 + 2 = 22$

6. تشكيل جدول القيم الذاتية، وتحديد موثوقية المركبات الرئيسية المتحصل عليها

المركبات الرئيسية F_α	القيمة الذاتية $(\alpha = 1, 2, 3)\ \lambda_\alpha$	النسبة المئوية $(\alpha = 1, 2, 3)\ \lambda_\alpha / \sum\lambda_\alpha$	النسبة المئوية المتصاعدة
F_1	12	12/22= 0,5454= 54,54%	54,545 %
F_2	8	8/22= 0,3636= 36,36%	90,909 %

F_3	2	2/22= 0,0909= 9,09%	100 %

تكون المركبات الرئيسية المتحصل عليها جيدة وكافية لإعطاء صورة واضحة عن سحابة النقط في المخطط العاملي إذا كانت نسبة التباين الكلي المفسر بالمركبات الرئيسية أكبر من 75 %. نلاحظ أنّ نسبة التباين المفسّر بواسطة المركبة الأساسية الأولى يساوي 54.54 %، ونسبة التباين المفسّر بالمركبة الرئيسية الثانية يساوي 36.36 %. فتكون نسبة التباين المفسّر بواسطة المركبتين معا 90.90 %، وهي نسبة كافية لإعطاء صورة واضحة جدا لسحابة النقاط على المخطط العاملي، أي حفظ أكبر قدر من المعلومات.

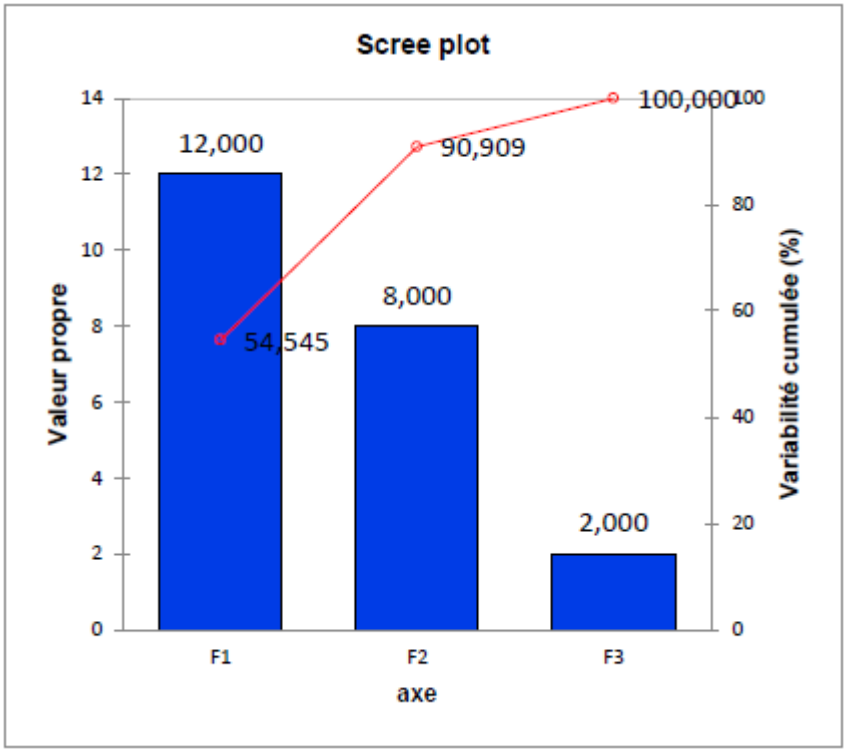
معايير اختيار عدد المحاور:

حسب محك كايزر: كل قيمة ذاتية تفوق متوسط القيم الذاتية تأخذ كمركبة رئيسية:

$\bar{\lambda}= 1/p\ \Sigma_\alpha \lambda\alpha \quad \alpha=1\dots p \Rightarrow \bar{\lambda}= (12+8+2)/3 = 22/3 = 7{,}333$

وعليه، نحتفظ بالمحورين الأول والثاني فقط.

حسب معيار التمثيل البياني Scree plot :



بحسب معيار التمثيل البياني نحتفظ فقط بالمحورين الأول والثاني.

7. حساب احداثيات الأفراد على المحاور

$$F = X_C\, U$$

$$F= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}800 & 0{,}577 & 0 \\ 0{,}400 & 0{,}577 & -0{,}707 \\ 0{,}400 & 0{,}577 & 0{,}707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\ ,90 & -3{,}46 & -1{,}41 \\ 2{,}45 & 0 & -1{,}41 \\ 2{,}45 & 3{,}46 & -1{,}41 \\ -2{,}45 & 3{,}46 & 1{,}41 \\ -2{,}45 & 0 & 1{,}41 \\ 4{,}90 & -3{,}46 & 1{,}41 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

مجموع عناصر كل عمود (مركبة من المركبات)= 0، أي أن متوسط نقاط الطلبة على كل مركبة = 0: $\bar{F} = 0$

الطالب	F_1	F_2	F_3
1	-4,90	-3,464	-1,41
2	2,45	0	-1,41

3	2,45	3,464	-1,41
4	-2,45	3,464	1 ,41
5	-2,45	0	1,41
6	4,90	-3,464	4,41

8. حساب جودة تمثيل الأفراد على المحاور

$$Cos^2(\theta_{i\alpha})=\frac{F_\alpha^2(i)}{\Sigma_\alpha F_\alpha^2(i)} \qquad \alpha= 1 \dots p$$

$Cos^2(\theta_{i\alpha})$ مربع تجب الزاوية بين الفرد i والمحور α.

$F_\alpha^2(i)$ نسبة التباين في نقاط الطالب (i) الذي يفسره المحور α.

$\Sigma_\alpha F_\alpha^2(i)$ يمثل إجمالي التباين في نقاط الطالب (i) الذي تفسره كل المحاور (المحاور الثلاث)

كلما اقتربت هذه القيمة من الواحد، كان الفرد ممثلا أحسن تمثيل.

مثلا بالنسبة للطالب الأول (1)، فإنه ممثل بشكل جيد المحور الأول F_1، وهذا لأن تجب الزاوية قريب من 1.

$$Cos^2(\theta_{11})=\frac{(4,90)^2}{(-4,90)^2+(-3,464)^2+(-1,41)^2}=0,632$$

الطالب	F_1	F_2	F_3
1	0,632	0,316	0,053
2	0,750	0,000	0,250
3	0,300	0,600	0,100
4	0,300	0,600	0,100
5	0,750	0,000	0,250
6	0,632	0,316	0,053

يظهر من الجدول أنّ الطلبة (1)، (2)، (5)، و(6) ممثلين جيدا على المحور الأول F_1، أما الطالبين (3) و(4) ممثلين جيدا على المحور الثاني F_2، وكل الأفراد غير ممثلين بشكل جيد على المحور الثالث F_3.

9. حساب نسبة مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور

$$\boldsymbol{C_i^\alpha}=\frac{F_\alpha^2(i)}{\boldsymbol{n\lambda_\alpha}}$$

$\boldsymbol{C_{i\alpha}}$ نسبة مساهمة الفرد (i) في المحور F_α.

$F_\alpha^2(i)$ نسبة التباين في نقاط الطالب (i) الذي يفسره المحور α.

λ_α القيمة الذاتية للمحور α (وهو نسبة التباين في نقاط الأفراد الذي يفسره المحور α).

$$\boldsymbol{C_1}^1=\frac{F_1^2(1)}{6\lambda_1}=\frac{(-4,90)}{6(12)}=0,333=33,33\%$$

$$\boldsymbol{C_1}^2=\frac{F_2^2(1)}{6\lambda_2}=\frac{(-0,316)}{6(8)}=0,25=25\ \%$$

الطالب	F_1	F_2	F_3
1	33,33	25,00	16,66

2	8,33	0,00	16,66
3	8,33	25,00	16,66
4	8,33	25,00	16,66
5	8,33	0,00	16,66
6	33,33	25,00	16,66

نسبة مساهمة الطالبين (1) و(6) في تشكيل المحور الأول متساوية، ونسبة مساهمة الطلبة (1)، (3)، (4) و(6) في تشكيل المحور الثاني متساوية.

10. حساب احداثيات المتغيرات على المحاور، ورسم دائرة الارتباط

أ. حساب احداثيات المتغيرات على المحاور: $G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} U_\alpha$

$$G_1 = \sqrt{\lambda_1} U_1 = \sqrt{12} \begin{bmatrix} -0,800 \\ 0,400 \\ 0,400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,771 \\ 1,385 \\ 1,385 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \sqrt{\lambda_2} U_2 = \sqrt{8} \begin{bmatrix} 0,577 \\ 0,577 \\ 0,577 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,632 \\ 1,632 \\ 1,632 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \sqrt{\lambda_3} U_3 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

	F_1	F_2	F_3
تحليل المعطيات	-2,771	1,632	0
جزئي	1,385	1,632	-1
رياضيات	1,385	1,362	1

ب. الارتباط بين المتغيرات والمركبات الأساسية

$$\mathbf{Cor} = D_{\sqrt{\lambda}} * \mathbf{U^T} * D_{1/S}$$

لدينا: $\sqrt{12} = 3,464$؛ $\sqrt{8} = 2,828$؛ $\sqrt{2} = 1,414$ ، ومنه المصفوفة القطرية لجذور القيم الكامنة هي:

$$D_{\sqrt{\lambda}} = \begin{bmatrix} 3,464 & 0 & 0 \\ 0 & 2,828 & 0 \\ 0 & 0 & 1,414 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0,800 & 0,577 & 0 \\ 0,400 & 0,577 & -0,707 \\ 0,400 & 0,577 & 0,707 \end{bmatrix} \Rightarrow U^T = \begin{bmatrix} -0,800 & 0,400 & 0,400 \\ 0,577 & 0,577 & 0,577 \\ 0 & -0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$$

$$D_{1/S} = \begin{bmatrix} 0,306 & 0 & 0 \\ 0 & 0,420 & 0 \\ 0 & 0 & 0,420 \end{bmatrix}$$

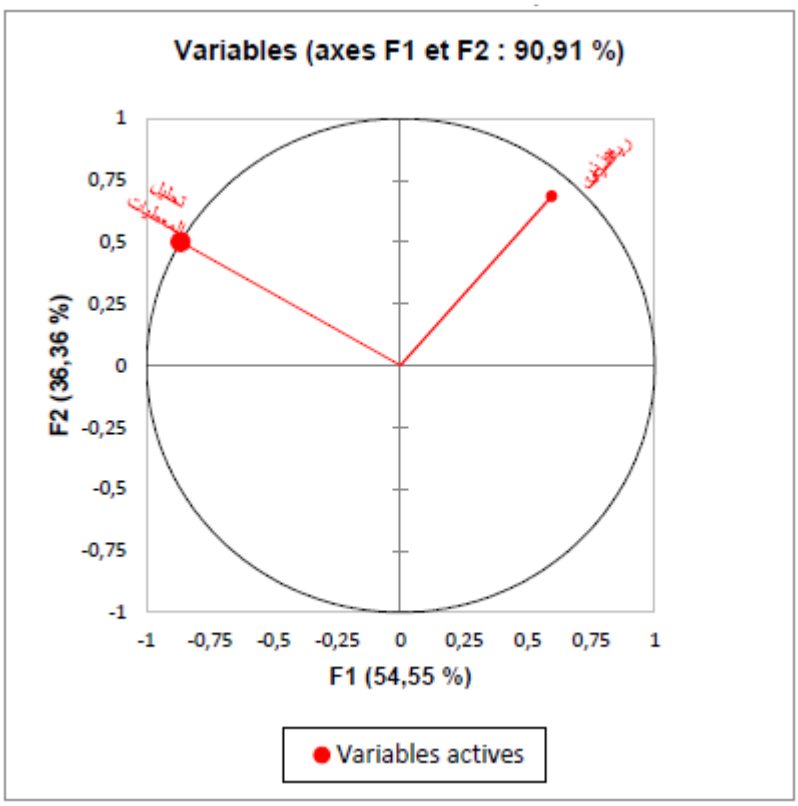
$$Cor = \begin{bmatrix} 3,464 & 0 & 0 \\ 0 & 2,828 & 0 \\ 0 & 0 & 1,414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,800 & 0,400 & 0,400 \\ 0,577 & 0,577 & 0,577 \\ 0 & -0,707 & 0,707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,306 & 0 & 0 \\ 0 & 0,420 & 0 \\ 0 & 0 & 0,420 \end{bmatrix}$$

$$Cor = \begin{bmatrix} -0,848 & 0,582 & 0,582 \\ 0,499 & 0,685 & 0,685 \\ 0 & -0,420 & 0,420 \end{bmatrix}$$

	F_1	F_2	F_3
تحليل المعطيات	-0,848	0,582	0,582
جزئي	0,499	0,685	0,685
رياضيات	0	-0,420	0,420

ج. رسم دائرة الارتباط

نرسم دائرة الارتباط بتحديد احداثية كل متغير على المخطط العاملي، ثم نرسم دائرة انطلاقا من المركز نصف قطرها يساوي 1.



يظهر أنّ الارتباط بين متغير تحليل المعطيات والمركبة الأساسية الأولى قوي وعكسي (سالب)، كما يرتبط ايجابيا بشكل متوسط مع المركبة الأساسية الثانية. في حين أنّ الارتباط بين متغير الجزئي والمركبة الأساسية الأولى متوسط، وهو متوسط كذلك مع المركبة الثانية. ولا يوجد ارتباط بين متغير الرياضيات مع المركبة الأولى، ويرتبط بالمركبة الثانية ارتباطا سلبيا متوسطا.

11. جودة تمثيل المتغيرات على المحاور: $Cos^2(j,\alpha)=G_{j\alpha}^2 / d^2_{(j,\alpha)}$

$$Cos^2(j,\alpha)=\frac{G_{j\alpha}^2}{d^2_{(j,\alpha)}}$$

$Cos^2_{(1,1)} = G_{11}^2 / d^2_{(1,0)}$ $\quad G_{11}^2 = (-2.828)^2 = 8$ $\quad d^2_{(1,0)}=(3.262)^2 = 10.666$

$$Cos^2(1,1)=\frac{G_{11}^2}{d^2_{(1,0)}} = \frac{(-2,818)^2}{(10,666)} = 0,749$$

$Cos^2_{(1,2)} = G_{12}^2 / d^2_{(1,2)}$ $\quad G_{12}^2 = (1,632)^2 = 2,663$ $\quad d^2_{(1,0)}=(3.262)^2 = 10.666$

$$Cos^2(1,2)=\frac{G_{12}^2}{d^2_{(1,0)}} = \frac{(1,632)^2}{(10,666)} = 0,249$$

$Cos^2_{(2,1)} = G_{21}^2 / d^2_{(2,1)}$ $G_{21}^2 = (1,385)^2 = 1,918$ $d^2_{(2,1)}=(2,380)^2 = 5,666$

$$Cos^2(2,1) = \frac{G_{21}^2}{d^2_{(2,0)}} = \frac{(1,385)^2}{(5,666)} = 0,338$$

وبعد اتمام جميع العمليات نجد:

	F_1	F_2	F_3
تحليل المعطيات	0,749	0,249	0
جزئي	0,338	0,470	0,176
رياضيات	0,388	0,470	0,176

12. نسبة مساهمة المتغيرات في تشكيل المحاور: $Ctr_{(j,\alpha)} = G_{j\alpha}^2 / \lambda_\alpha$

$$Ctr_{(j,\alpha)} = \frac{G_{j\alpha}^2}{\lambda_\alpha}$$

$$Ctr_{(1,1)} = \frac{G_{11}^2}{\lambda_1} = \frac{(-2,828)^2}{12} = 0,6664$$

وبعد اتمام جميع العمليات نجد:

	F_1	F_2	F_3
تحليل المعطيات	66,64 %	33,33 %	0,00 %
جزئي	15,98 %	33,33 %	50,00 %
رياضيات	15,98 %	33,33 %	50,00 %

13. تمثيل الأفراد والمتغيرات على المخطط العاملي والتعليق عليه

في هذا المخطط يتم تمثيل احداثيات كل من الأفراد والمتغيرات على نفس المخطط.

لتفسير هذا المخطط، نتبع القواعد التالية:

- تقارب نقطتي فردين تعني التشابه، وتقارب نقطتي متغيرين تعني الترابط؛
- تقارب نقطة فرد مع نقطة متغير تعني أنّ المتغير يؤثر في سلوك ذلك الفرد؛

ومن خلال المخطط أعلاه نستنتج ما يلي:

- يرتبط متغير تحليل المعطيات مع المحور الأول بقوة وفي اتجاه عكسي، معنى ذلك أنّ الأفراد المتواجدين على يمين المخطط نقاطهم ضعيفة في تحليل المعطيات (أحلام، فريد، يوسف)، نقطة يوسف ضعيفة جدا، والأفراد المتواجدين يسار المخطط نقاطهم أفضل (صابر، محمد، سهام).
- نقاط أحلام في الجزئي والرياضيات متقاربة وأفضل من بقية الأفراد، نقطة محمد في تحليل المعطيات أفضل من البقية.
- نقطتي فريد وسهام متعاكسة في تحليل المعطيات، سهام أفضل، ونقطة فريد في الجزئي أفضل من سهام، بينما تتقارب نقاطهما في الرياضيات (يقعان على المحور الأول ولا ترتبط الرياضيات مع هذا المحور).

➢ نقاط صابر ضعيفة جدا في الجزئي والرياضيات، وجيدة في تحليل المعطيات(تمثيل صابر جيد على المحور الأول، ونسبة مساهمته في تشكيل المحور أفضل من البقية، كما أنّ الجزئي والرياضيات لا يرتبطان بالمحور الأول، في حين يرتبط تحليل المعطيات بقوة مع المحور الأول).

14. حساب المركبات الأساسية للفرد المضاف (صالح)

المركبات الأساسية للفرد المضاف في حالة استخدام طريقة المركبات الأساسية البسيطة: $F_\alpha^+ = X_C^+ U$

X_C^+ شعاع الفرد المضاف (+) الممركزة (C) .

U مصفوفة الأشعة الذاتية.

$$X = [8 \quad 7 \quad 11] \Rightarrow X_C^+ = [8-6 \quad 7-4 \quad 11-5] = [2 \quad 3 \quad 6]$$

$$F_\alpha^+ = [2 \quad 3 \quad 6] \begin{bmatrix} -0{,}800 & 0{,}577 & 0 \\ 0{,}400 & 0{,}577 & -0{,}707 \\ 0{,}400 & 0{,}577 & 0{,}707 \end{bmatrix} = [0{,}4 \quad 4{,}039 \quad -0{,}707]$$

15. احداثيات المتغير(المقياس) الإضافي: تاريخ الفكر الاقتصادي: 4، 6، 3، 10، 4، وأخيرا 9.

$$G_\alpha^+ = 1/n \; X_C^{+T}(X_C U_\alpha / \sqrt{\lambda_\alpha})$$

$$G_\alpha^+ = \frac{1}{n} \; X_C^{+T}\left(\frac{X_C U_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\right)$$

$$X_4^t = [4 \quad 6 \quad 3 \quad 10 \quad 4 \quad 9] \Rightarrow \bar{x}_4 = (4+6+3+10+4+9)/6 = 6 \Rightarrow \quad G_X^+ = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$X_C^+ = X - 1_n G_X^{+t} \Rightarrow \quad X_C^+ = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 7 & 3 \\ 10 & 4 & 7 & 10 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (6 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$$

$$X_C^+ = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 7 & 3 \\ 10 & 4 & 7 & 10 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ -6 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G_1^+ = \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}822 \\ 1{,}411 \\ 1{,}411 \\ 0{,}588 \end{bmatrix}$$

$$G_2^+ = \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}630 \\ 1{,}630 \\ 1{,}630 \\ 0 \end{bmatrix}$$