المحاضرة (13): الارتباط والانحدار الخطي البسيط

1- الارتباط الخطي: يعتبر معامل الإرتباط من أهم المقاييس التي تعنى بالعلاقات بين المتغيرات حيث يقيس لنا مدى تعلق متغير بمتغير آخر سواء طرديا أو عكسيا، وسنتطرق إلى مفهوم معامل الإرتباط ومصفوفة الإرتباط، ونركز على المتغيرات الكمية.

1-1- معامل الإرتباط الخطي لـ Pearson: يعتبر معامل "بيرسون" للإرتباط من أهم وأكثر المعاملات المستخدمة في المواد العلمية، وبشكل خاص في العلوم الإنسانية والاجتماعية، وعند تطبيق قانونه يجب أن يكون كلا المتغيرين بيانات كمية.

ويستعمل عادة معامل الإرتباط الخطي البسيط r_{xy} في قياس قوة ومتانة العلاقة الإرتباطية الخطية بين الظاهرتين المدروستين x،y وتعطى صيغته الرياضية كما يلي:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2]\,[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2]}}$$

حيث يأخذ قيما في المجال $[-1, 1]$ فالإشارة السالبة تدل على العلاقة العكسية، أما الموجبة فتدل على العلاقة الطردية، كلما اقترب من الصفر دل على ضعف العلاقة أما إقترابه من الواحد يدل على قوة العلاقة.

تجدر الإشارة إلى أن: $r_{xy} = r_{yx}$

يختبر الارتباط الخطي البسيط الفرضيات التالية :

H0: لا يوجد ارتباط ذو دلالة إحصائية بين المتغير x والمتغير y،

H1: يوجد ارتباط ذو دلالة إحصائية بين المتغير x والمتغير y،

1-2- مصفوفة الإرتباط: إن حساب معامل الإرتباط الخطي السابق بين عدة متغيرات مثنى مثنى، وتنظيمها على شكل جدول يسمى مصفوفة الإرتباط، وتكون تفسيرات النتائج لمعامل الإرتباط بين كل متغيرين كما هو موضح في البند السابق.

إذا كان لدينا $x1$،$x2$، ...، xn متغيرات لظواهر ما، وحسبنا معامل الإرتباط الخطي لها مثنى ورتبناها في جدول كما يلي:

$$\begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_n} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & \dots & r_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & r_{x_ix_i} & \vdots \\ r_{x_nx_1} & r_{x_nx_2} & \dots & r_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

نسمي هذا الجدول بمصفوفة الإرتباط وهذه المصفوفة تكون متناظرة لأن:

$$r_{xy} = r_{yx}$$

وعناصر قطرها تساوي الواحد، لأن:

$$r_{x_i x_i} = 1$$

كما أنها مصفوفة مربعة

2- الانحدار الخطي البسيط:

يهدف تحليل الانحدار إلى تقدير مقدار التغير في أحد المتغيرات المصاحب للتغير في متغير آخر، حيث يستخدم لاختبار فرضية العلاقة بين متغير تابع ومتغير أو عدة متغيرات مستقلة أو مفسرة. تتحدد طبيعة الانحدار بالنظر إلى طبيعة العلاقة بين المتغيرات، فقد تكون العلاقة خطية، وقد تكون أسية أو لوغاريتمية.

يفترض الانحدار الخطي وجود علاقة خطية تقريبية، بمعنى أن الثنائيات X وY تقع قريبا من خط مستقيم، وبالتالي تحليل الانحدار الخطي يدرس العلاقة الخطية بين المتغير الأول المراد تحديد سبب تغيره، والمتغير الثاني الذي قد يكون متغيرا واحدا أو عدة متغيرات متمثلة في المتغيرات المستقلة والتي تمثل المتغيرات المتسببة في تغير المتغير التابع، ففي حالة وجود متغير مستقل واحد نكون أمام حالة الانحدار الخطي البسيط، وفي حالة وجود متغيرين مستقلين أو أكثر نكون أمام حالة الانحدار الخطي المتعدد، وسيتم التطرق إلى الانحدار الخطي البسيط.

✓ **الصيغة العامة لمعادلة الانحدار الخطي البسيط هي:** $y_i = a + b.x_i + \varepsilon_i$

حيث:

y_i المتغير التابع

x_i المتغير المستقل

a، b : ثوابت (معلمات)

i *رقم المشاهدة*

ε_i حد الخطأ

✓ **يختبر تحليل الانحدار الخطي البسيط الفرضيات التالية:**

H0: لا يوجد تأثير ذو دلالة إحصائية للمتغير المستقل على المتغير التابع.

H1: يوجد تأثير ذو دلالة إحصائية للمتغير المستقل على المتغير التابع.

✓ **يسمح تحليل الانحدار الخطي البسيط بالتعرف على:**

- مقدار التغير في المتغير التابع عندما يتغير المتغير المستقل بوحدة واحدة.
- الدلالة الإحصائية الجزئية لمعلمات النموذج من خلال اختبار t.
- الدلالة الإحصائية الكلية لمعاملات النموذج من خلال اختبار F.
- قوة التفسير (درجة التأثير، جودة التوفيق) من خلال معامل التحديد.
- تحليل التباين للمتغير التابع الذي يتكون من مصدرين: أحدهما المتغير المستقل والثاني من تباين البواقي.

مثال:

تم الحصول على البيانات المالية الخاصة بمتغير الربح ومتغير العائد على الاستثمار لعينة دراسة مكونة من 12 مؤسسة اقتصادية، كما في الجدول الآتي:

معدل الربح (x)	150	120	180	100	140	110	160	90	130	120	150	100
معدل العائد على الاستثمار (y)	120	100	150	80	110	90	130	70	100	90	120	80

المطلوب:

1- تسجيل البيانات في برنامج spss؟

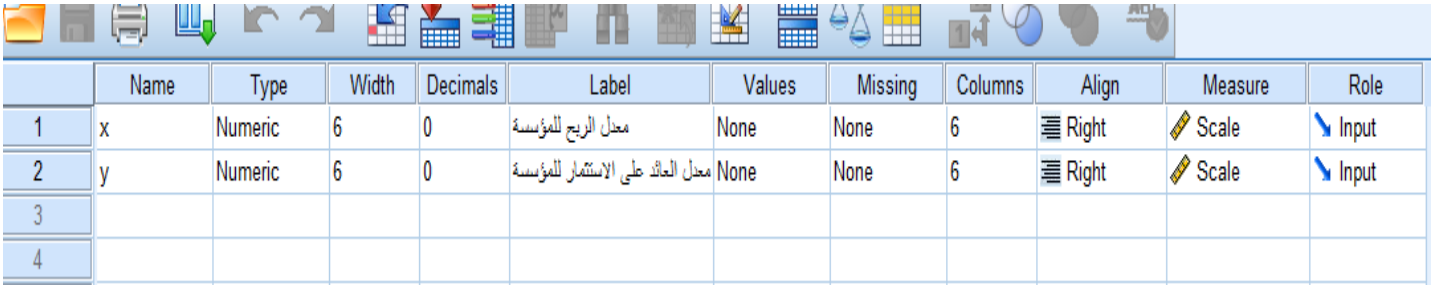
2- هل هناك علاقة ارتباط بين معدل الربح ومعدل العائد على الاستثمار؟

3- هل هناك أثر بين معدل الربح ومعدل العائد على الاستثمار؟

4- استخرج معادلة الانحدار الخطي البسيط؟

الحل:

1- تسجيل البيانات في برنامج spss:

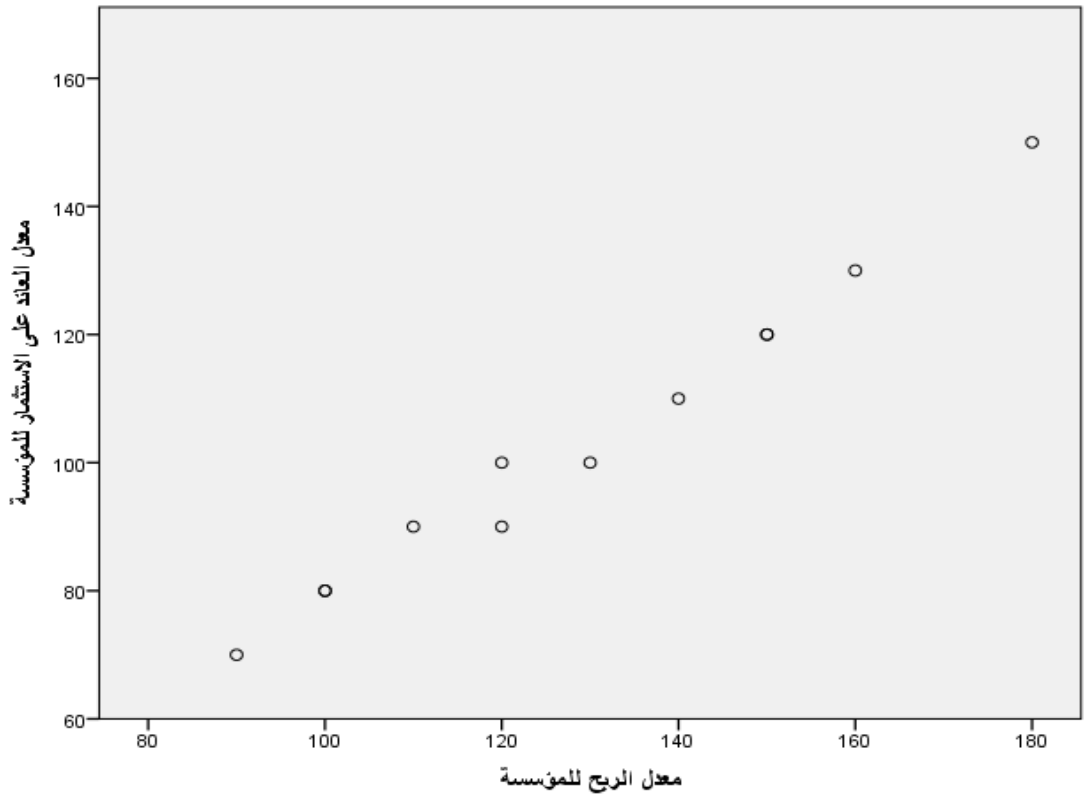


	Name	Type	Width	Decimals	Label	Values	Missing	Columns	Align	Measure	Role
1	x	Numeric	6	0	معدل الربح للمؤسسة	None	None	6	Right	Scale	Input
2	y	Numeric	6	0	معدل العائد على الاستثمار للمؤسسة	None	None	6	Right	Scale	Input
3											
4											

	x	y	var	var
1	150	120		
2	120	100		
3	180	150		
4	100	80		
5	140	110		
6	110	90		
7	160	130		
8	90	70		
9	130	100		
10	120	90		
11	150	120		
12	100	80		
13				
14				
15				

2- هل هناك علاقة ارتباط بين معدل الربح و معدل العائد على الاستثمار؟

باتباع التعليمة ...scatter/dot ⇒ chart builder ⇒ graphs نحصل على الرسم الآتي:



باتباع التعليمة ... explore ⇒ descriptive statistics ⇒ analyze نحصل على نافذة جديدة ننقل كلا المتغيرين الى الخانة dependent list ثم نضغط على plots ونؤشر على normality plots with tests...الخ نحصل على الجدول الآتي:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
معدل الربح للمؤسسة	.131	12	.200*	.965	12	.854
معدل العائد على الاستثمار للمؤسسة	.140	12	.200*	.963	12	.821

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

- ✓ نلاحظ من شكل الانتشار (السحابة النقطية) أنه أقرب الى الخط المستقيم أي أن العلاقة بين المتغيرين أقرب الى العلاقة الخطية.
- ✓ الجدول في الأعلى لاختبار التوزيع الطبيعي يتضمن اختبارين، اختبار شابيرو (Shapiro-Wilk) واختبار كولموغوروف سميرنوف (Kolmogorov-Smirnov) ، وبما أن حجم العينة 12 يعتبر صغير أقل من 50 نعتمد على اختبار شابيرو لأنه الأنسب في هذه الحالة (العينات الصغيرة)، نلاحظ أن توزيع كلا المتغيرين يتبع التوزيع الطبيعي، وهذا لأن القيمة الاحتمالية المقدرة sig تساوي 0.854 0.821 لكلا المتغيرين هي أكبر من مستوى المعنوية المفروض $\alpha=0.05$ ، أي نقبل الفرضية H0 بأن توزيع كل من المتغيرين يتبع التوزيع الطبيعي.
- ✓ الشرطين محققين، إذن نستخدم معامل ارتباط بيرسون

✓ **الفرضيات الخاصة بالعلاقة الارتباطية هي:**

الفرضية H0: لا توجد علاقة ارتباط ذات دلالة احصائية عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$ بين معدل الربح ومعدل العائد على الاستثمار

الفرضية H1: توجد علاقة ارتباط ذات دلالة احصائية عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$ بين معدل الربح ومعدل العائد على الاستثمار

باتباع التعليمة ...bivariate ⇒ correlate ⇒ Analyze نحصل على الجدول الآتي:

Correlations

		معدل الربح للمؤسسة	معدل العائد على الاستثمار للمؤسسة
معدل الربح للمؤسسة	Pearson Correlation	1	.992**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	12	12
معدل العائد على الاستثمار للمؤسسة	Pearson Correlation	.992**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	12	12

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

من خلال الجدول نلاحظ أن قيمة معامل ارتباط بيرسون تساوي 0.992، ما يدل على قوة علاقة الارتباط بين المتغيرين، وأيضا نلاحظ أن القيمة الاحتمالية المقدرة sig أقل من مستوى المعنوية المفروض 0.05، مما يقودنا الى رفض الفرضية الصفرية، وبالتالي قبول الفرضية البديلة لها (فرضية البحث)؛ أي توجد علاقة ارتباط ذات دلالة احصائية بين المتغيرين، بالاضافة الى أنها علاقة موجبة (طردية) بالنظر الى القيمة الموجبة لمعامل الارتباط،

✓ **باختصار هناك علاقة ارتباط ذات دلالة احصائية موجبة وقوية.**

3- هل هناك أثر بين معدل الربح و معدل العائد على الاستثمار؟

الفرضية H0: لا توجد علاقة تأثير ذات دلالة احصائية (عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$) بين معدل الربح كمتغير مسقل، ومعدل العائد على الاستثمار كمتغير تابع.

الفرضية H1: توجد علاقة تأثير ذات دلالة احصائية (عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$) بين معدل الربح كمتغير مسقل، ومعدل العائد على الاستثمار كمتغير تابع.

باتباع التعليمة ...linear ⇒ regression ⇒ Analyze نحصل على الجداول الآتية:

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	معدل الربح للمؤسسة[b]	.	Enter

a. Dependent Variable: معدل العائد على الاستثمار للمؤسسة

b. All requested variables entered.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.992[a]	.983	.982	3.173

a. Predictors: (Constant), للمؤسسة الربح معدل

ANOVA[a]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	5965.963	1	5965.963	592.428	.000[b]
	Residual	100.704	10	10.070		
	Total	6066.667	11			

a. Dependent Variable: للمؤسسة الاستثمار على العائد معدل

b. Predictors: (Constant), للمؤسسة الربح معدل

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-6.231	4.594		-1.356	.205
	للمؤسسة الربح معدل	.848	.035	.992	24.340	.000

a. Dependent Variable: للمؤسسة الاستثمار على العائد معدل

- ✓ قدرت قيمة معامل الانحدار بـ ، 0.848 حيث أنه كلما يتغير معدل الربح للشركة بدرجة واحدة (1) يتغير معدل العائد على الاستثمار بـ 0.848 درجة وفي نفس الاتجاه.
- ✓ يوجد تأثير موجب لمعدل الربح للشركة على معدل العائد على الاستثمار نظرا لأن قيمة المعامل موجبة 0.848
- ✓ قيمة المعامل لها دلالة إحصائية (معنوية احصائية) نظرا لأن القيمة الاحتمالية المقدرة (sig) تساوي 0.000 وهي أقل من مستوى الدلالة المفروضα=0.05 .
- ✓ معلمات النموذج (الثابت ومعامل المتغير المستقل) لها دلالة إحصائية كلية (معنوية احصائية كلية)، واختبار F يثبت ذلك، حيث القيمة الاحتمالية المقدرة (sig) لاختبار F تساوي 0.000 وهي أقل من مستوى الدلالة المفروض α=0.05 أي النموذج ككل مقبول احصائيا ويجب قبوله.
- ✓ بلغت قيمة معامل التحديد 0.983 ، أي 98.3% وهذا يدل على أن نموذج الدراسة له قوة تفسير كبيرة جدا (قوة التأثير / جودة التوفيق)، حيث أن 98.3% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع معدل العائد على الاستثمار تفسرها (تشرحها) التغيرات التي تحدث في المتغير المستقل معدل الربح (النموذج المقترح يعبر عن العلاقة بين المتغيرين تعبيرا صادقا)، أما النسبة الباقية 1.7% فتعود إلى عوامل أخرى خارج النموذج.
- ✓ من خلال جدول تحليل التباين يلاحظ أن تباين المتغير التابع يقدر بـ 6066.667 حيث أن 5965.963 منها مصدره المتغير المستقل في حين أن التباين الباقي 100.704 يتمثل في تباين البواقي، وهذا ما يثبت االتأثير (التفسير) القوي جدا للمتغير المستقل على المتغير التابع بحكم أن قيمة معامل التحديد تمثل نسبة تباين الانحدار إلى التباين الكلي.
- ✓ **الخلاصة:** يوجد تأثير دال إحصائيا موجب وقوي لمعدل الربح للشركة على معدل العائد على الاستثمار.

ملاحظات:

- ✓ رغم أن القيمة الاحتمالية المقدرة للمعلمة الثابتة (0.205) أكبر من مستوى المعنوية المفروض، إلا أنه لا يؤثر على اختبار الفرضية، لأنه فقط معناه المعلمة الثابتة تساوي صفر أي خط الانحدار يمر من المركز، يمكن أن لا نأخذ ذلك بعين الاعتبار.
- ✓ قيمة معامل الارتباط R من (الجدول 2) تكون موجبة دائما ، حيث هي القيمة المطلقة لمعامل الارتباط بيرسون في حالة الانحدار البسيط (غير المتعدد).

4-استخرج معادلة الانحدار الخطي البسيط: مما سبق وبالنظر الى المعاملات (B)غير المعيارية (العادية) Unstandardized Coefficients يمكن صياغة معادلة خط الانحدار كالآتي:

$$y = -6.231 + 0.848(x)$$