3-1-1-خواص مقدرات المربعات الصغرى

أ-الخواص الحسابية لمقدرات المربعات الصغرى العادية: وتتمثل الخواص الحسابية لمقدرات المربعات الصغرى في:

- يمر الخط المقدر من نقطة متوسطات العينة لـ Xو Y كما توضحه المعادلة التالية:

$$\bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\bar{X}$$

- مجموع البواقي يساوي الصفر $\sum e_i = 0$ أي $\sum e_i = \sum(Y - \hat{Y}) = 0$

وبالتالي القيمة المتوسطة للبواقي تساوي الصفر $\bar{e} = 0$

- البواقي لا ترتبط بالمتغير المفسر X_i أي $\sum e_i X_i = 0$

ب-الخواص الإحصائية لمقدرات طريقة المربعات الصغرى

تتميز المعالم المبنية على طريقة المربعات الصغرى العادية بالخصائص الإحصائية المرغوبة التالية:

- **خاصية الخطية:** تكتسب مقدرات المربعات الصغرى خاصية الخطية والتي يقصد بها إمكانية كتابتها في شكل تركيب خطي أو دالة خطية لمشاهدات المتغير التابع Y.

– **خاصية عدم التحيز:** تتميز مقدرات المربعات الصغرى بخاصية عدم التحيز أي أن قيمة وسطها يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة أي:

$$E(\hat{B}) = B.$$

- **خاصية أقل تباين:** كما تتميز مقدرات المربعات الصغرى العادية بخاصية أقل تباين ولأجل هذه الخاصية يكثر استخدامها على وجه التحديد أي أنها تتسم بالكفاية.

- **أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE:** وتستنبط هذه الخاصية من نظرية Gauss Markov والتي تقول من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة تكون مقدرتي المربعات الصغرى العادية $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين حيث أن لها أصغر تباين ممكن وغير متحيزة مقارنة مع بقية المقدرات الخطية الأخرى.

وطالما أن مقدرات المربعات الصغرى في نموذج الانحدار الخطي البسيط عبارة عن تركيب خطي لمشاهدات المتغير التابع، ولكونها غير متحيزة ولها أقل تباين ممكن، وبالتالي استيفائها لهاته الخصائص الثلاثة يجعلها أفضل مقدر خطي غير متحيز.

– **خاصية الاتساق:** كما تتصف مقدرات المربعات الصغرى أنها مقدرات متسقة وهذا لاستيفائها على الشروط الأساسية لهاته الخاصية وهي أن يكون توزيع المعاينة لـ $\hat{B}$ يقترب من القيمة الحقيقية B وهذا كلما كان $n \to \infty$ أي النهاية الاحتمالية للمقدر $\hat{B}$ هي B والتي يعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$\underset{n \to \infty}{\text{Plim}}(\hat{B}) = B$$

ولكون هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق بل ينبغي أن تكون قيمتي التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما اقترب حجم العينة n من مالا نهاية.

1) $\lim_{n \to \infty} E(\hat{B}) = P\ lim(\hat{B}) = B$

2) $\lim_{n \to \infty} var(\hat{B}) = P\ lim\ var(\hat{B}) = 0$

وبتوفر هذين الشرطين نقول عن المقدر $\hat{B}$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية B.

2-3-توزيع المعاينة للمقدرات والتقدير المجالي للمعالم:

3-2-1-تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ وتباين المقدرات $V(\hat{B}_0)$ و$V(\hat{B}_1)$:

أ-تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$: كون أن تباين $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ يستعمل في إجراء اختبارات المعنوية الخاصة بتلك المقدرات، غير أن هذا التباين يحتوي على معلمة مجهولة وهي σ^2 والتي تمثل تباين حد الخطأ العشوائي الأمر الذي يستدعي ضرورة تقديره من أجل القيام بالاختبارات الإحصائية لمعالم النموذج ويمكن الحصول على الصيغة التقديرية لتباين حد الخطأ العشوائي كما يلي:

انطلاقا من المعادلة التقديرية والتي تكتب كما يلي:

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \ \cdots\cdots\ (02)$$

وبإدخال $\sum$ إلى طرفي المعادلة نجد:

$$\sum \hat{Y} = \sum \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبقسمة طرفي المعادلة على n تصبح المعادلة كما يلي:

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{n\ .\ \hat{B}_0}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 \ + \hat{B}_1\ \bar{X} \ \cdots\cdots\ (03)$$

وبطرح المعادلة رقم (03) من المعادلة رقم (02) نجد:

$$\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\ X_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \bar{X}$$

وبعد التبسيط نحصل على:

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \bar{X}$$

أي $\hat{y}_i = \hat{B}_1 (X_i - \bar{X})$ ، أو بعبارة أخرى $\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i$

وبما أن $e_i = y_i - \hat{y}_i$ أي أن $e_i = y_i - \hat{B}_1\ x_i$

وبتربيع الطرفين نجد:

$$e_i{}^2 = (\ y_i - \hat{B}_1 x_i)^2$$

وبفك الأقواس وإدخال المجموع $\sum$ على طرفي المعادلة نحصل على:

$$\sum e_i{}^2 = \sum y_i{}^2 + \hat{B}_1{}^2 \sum x_i{}^2 - 2\hat{B}_1 \sum x_i\, y_i \ \cdots\cdots\ (04)$$

ومن الصيغة التقديرية لـ $\hat{B}_1$ في نموذج الانحدار الخطي البسيط المتوصل إليها سابقا:

$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i{}^2}$ وبضرب طرفي المعادلة في الوسطين نجد:

$$\hat{B}_1 . \sum x_i{}^2 = \sum x_i\, .\, y_i \ \cdots\cdots\ (05)$$

وبتعويض المعادلة رقم (05) في المعادلة رقم (04) نجد:

$$\sum e_i{}^2 = \sum y_i{}^2 - \hat{B}_1 \sum x_i\, y_i \cdots\cdots \quad (06)$$

ويعبر عن σ^2 بالشكل التالي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i{}^2}{n-2} \quad \cdots\cdots \quad (07)$$

وبتعويض المعادلة رقم (06) في المعادلة رقم (07) نجد:

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i{}^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i}{n-2}$$

ويعني ذلك أن تباين أخطاء العينة تمثل النسبة بين مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن خط انحدار العينة إلى درجة الحرية للخطأ.

وإذا كان يرمز إلى التقدير الخطي غير المتحيز لتباين الخطأ بالرمز $(S_e{}^2)$ فإن صيغته التقديرية تكتب بالشكل التالي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = S_e{}^2 = \frac{\sum e_i{}^2}{n-2}$$

ب-تباينات المقدرات:

-تباين المقدر $\widehat{B}_0$:

لدينا:

$$\hat{B}_0 = B_0 - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} + \bar{u} \Rightarrow \hat{B}_0 - B_0 = \bar{u} - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$$

نضع $w_i = (x_i - \bar{x})$

نجد:

$$\hat{B}_0 - B_0 = \bar{u} - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}$$

$$\hat{B}_0 - B_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}\right)u_i$$

$$E(\hat{B}_0 - B_0)^2 = E\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}u_i - \bar{x}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i\right)\right]^2 = E\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}u_i - \bar{x}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i\right)^2$$

$$E(\hat{B}_0 - B_0)^2 = E\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2}u_i^2 - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i^2 + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2\right)}u_i^2\right)\right]$$

$$V(\hat{B}_0) = E(\hat{B}_0 - B_0)^2 = \sum_{i=1}^n E\left(\frac{1}{n^2}u_i^2 - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i^2 + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2\right)^2}u_i^2\right)$$

$$V(\hat{B}_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}E(u_i^2) - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i^2}E(u_i^2) + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^2\right)^2}E(u_i^2)\right)$$

$$V(\hat{B}_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}\sigma_u^2 - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\sigma_u^2 + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^2\right)^2}\sigma_u^2\right)$$

وبما أن:

$$\sum_{i=1}^{n}w_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

ومنه

$$V(\hat{B}_0) = \left(\frac{n}{n^2} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\right)\sigma_u^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\sigma_u^2$$

وعليه:

$$V(\hat{B}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\sigma_u^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\sigma_u^2$$

-تباين المقدر $\hat{B}_1$:

$$\hat{B}_1 = B_1 + \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \Rightarrow \hat{B}_1 - B_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$V(\hat{B}_1) = E(\hat{B}_1 - B_1)^2 = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]^2$$

نضع $w_i = (x_i - \bar{x})$

$$V(\hat{B}_1) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i w_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\right]^2 = \frac{1}{[\sum_{i=1}^{n}w_i^2]^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i w_i\right]^2$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i w_i\right]^2 = E(u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n)^2$$

$$= E(u_1^2w_1^2 + u_2^2w_2^2 + \cdots + u_n^2w_n^2 + 2u_1w_1u_2w_2 + \cdots + 2u_{n-1}w_{n-1}u_nw_n)$$

$$= w_1^2E(u_1^2) + w_2^2E(u_2^2) + \cdots + w_n^2E(u_n^2) + 2w_1w_2E(u_1u_2) + \cdots + w_{n-1}w_nE(u_{n-1}u_n)$$

ومن فرضيات النموذج:

$$E(u_iu_j) = 0 \ ,\forall(i \neq j), \qquad E(u_i)^2 = \sigma_u^2 \quad \forall i$$

نجد:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i w_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}E(u_iw_i)^2 = \sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2 + 0 = \sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2$$

$$V(\hat{B}_1) = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right)^2} = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}$$

وبتعويض w_i بقيمتها نجد:

$$V(\hat{B}_1) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

وعليه يكون تباين كلا من $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ بتعويض تباين الأخطاء σ_u^2 بمقدره $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ كما يلي:

$$V(\hat{B}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$$

$$V(\hat{B}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

أما الانحرافات المعيارية المقدرة لـ $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ فتكتب على الترتيب:

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = \sqrt{V(\hat{B}_0)} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2} = \hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = \sqrt{V(\hat{B}_1)} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = \hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

مثال رقم(02): بالعودة إلى المثال السابق أحسب كلا من:

-تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$؛

-تباين $\hat{B}_0$، وتباين $\hat{B}_1$ ثم الانحراف المعياري لكل منها؛

الحل:

ومن اجل حساب تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ نحسب أولا $\hat{Y}_i$ من المعادلة التقديرية للمثال السابق:

$$\hat{Y}_i = 12.84 + 0{,}52X_i$$

e_i^2	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i$	Y_i	x_i	القيم
16.3216	-4.04	44.04	40	60	1
21.5296	-4.64	59.64	55	90	2
15.6816	-3.96	41.96	38	56	3
104.04	-10.2	22.2	12	18	4
0.1024	0.32	34.68	35	42	5
6.76	-2.6	32.6	30	38	6
152.7696	12.36	59.64	72	90	7
30.9136	5.56	54.44	60	80	8
51.84	7.2	37.8	45	48	9
399.9584					المجموع

-حساب تباين حد الخطأ العشوائي$\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$(البواقي):

$$\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{\sum {e_i}^2}{n-2} = \frac{399.9584}{9-2} = 57.137$$

-حساب تباين كل مقدر على حدى:

$$V(\hat{B}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \left(\frac{1}{9} + \frac{(58)^2}{6756}\right)57.137 = 34.797$$

$$V(\hat{B}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{57.137}{6756} = 0.0084$$

-الانحرافات المعيارية للمقدرات:

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = \sqrt{V(\hat{B}_0)} = \sqrt{34.797} = 5.898$$
$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = \sqrt{V(\hat{B}_1)} = \sqrt{0.0084} = 0.0916$$

4-تقييم المعلمات المقدرة:

تتمثل المعايير الإحصائية التي يمكن اعتمادها في تقييم معلمات النموذج المقدرة في نوعين:

- اختبار جودة الارتباط للحكم على مدى المقدرة التفسيرية للنموذج.
- اختبارات المعنوية لقياس درجة الثقة في المعلمات المقدرة من العينة كأساس جيد للوصول إلى معلمات المجتمع.

4-1-اختبار جودة الارتباط: يستخدم معامل التحديد R^2كمقياس لاختبار جودة الارتباط أو المقدرة التفسيرية للنموذج، فيعرف على أنه "النسبة المئوية من التغير الكلي في المتغير التابع(Y_i) التي يمكن تفسيرها بدلالة المتغير المستقل المدرج بالدالة محل القياس (X_i)"، كما يعرف على أنه "نسبة التغيرات في المتغير التابع التي يمكن إرجاعها إلى التغير في المتغير المستقل"، كما يعرف كذلك بأنه "معيار يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع".

ويتم حسابه رياضيا كما يلي:

إذا كان $Y_i = \hat{Y}_i + e_i$ فإن: $Y_i - \bar{Y} = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i$

فبتربيع طرفي المعادلة نجد:

$$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum\left[(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i)\right]^2$$

ولأن $\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})\ e_i = 0$ فإن المعادلة تصبح كما يلي:

$$\boxed{\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i\ - \bar{Y}\ )^2 + \sum {e_i}^2}$$

حيث:

$\sum(Y_i - \bar{Y})^2$: يعبر عن مجموع مربعات الانحرافات الكلية للمتغير التابع(Total Sum of squares) والتي يرمز لها بالرمز TSS.

$\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$: تمثل مجموع مربعات الانحرافات المشروحة أو الموضحة التي تقيس تأثير المتغير المفسر على المتغير التابع (Explained Sum of Squares)ويرمز لها بالرمز ESS.

$\sum {e_i}^2$: تمثل مجموع مربعات البواقي التي تقيس تأثير المتغير العشوائي على المتغير التابع (Residual Sum of Squares) ويرمز لها بالرمز RSS.

وعليه يمكن إعادة صياغة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$TSS = ESS + RSS \quad \cdots\cdots \quad (08)$$

وبقسمة طرفي المعادلة رقم (08) على الانحرافات الكلية TSS نجد:

$$\frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} = 1$$

ولأن معامل التحديد R^2 هو المعيار الإحصائي الذي يقيس التغيرات التي تحدث في المتغير التابع بواسطة تغيرات المتغير المستقل(X_i) فإنه يمكن كتابة صيغته كما يلي

$$\boxed{R^2 = r^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}\ = 1 - \frac{\sum {e_i}^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

وطالما أن RSS محصور ما بين الصفر والقيمة TSS، وطبقا لقانون المربعات الصغرى فإن R^2 يكون معرف وينتمي إلى المجال التالي: $0 \leq\ R^2 \leq 1$

وعليه نميز عدة حالات:

- عندما يكون $RSS = 0$ مجموع مربعات البواقي معدوم معناه أن R^2 يأخذ أكبر قيمة له وهي الواحد مما يعني أن كل نقاط الملاحظة$(x_i، y_i)$ تقع على الخط المقدر $\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$، عندها يكون التوفيق جيد والارتباط قوي بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

- أما إذا كان $ESS = 0$ مجموع مربعات الانحرافات المشروحة أو الموضحة معدومة مما يعني أن

$TSS = RSS$ أي أن مجموع مربعات الانحرافات الكلية تكون ناتجة عن مجموع مربعات البواقي عندها يأخذ معامل التحديد أدنى قيمة له والتي تعادل الصـــفر لتعني بذلك أنه لا توجد أية علاقة خطية بين المتغير المستقل(X_i) والمتغير التابع (Y_i) وأن (X_i)لا تشرح تغيرات(Y_i).

ملاحظة:

يجدر التذكير أن الفرق بين معامل التحديد ومعامل الارتباط يكمن في الســببية، حيث أن معامل الارتباط يقيس العلاقة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير التابع أو المســتقل وهو محصــور بين $(+1)$و(-1)، أما معامل التحديد فيقيس أيضــا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار الســببية، حيث أن المتغير(X_i) هو الذي يفسر الظاهرة(Y_i).

4-1-1-جدول تحليل التباين:

يمكن رسم جدول تحليل التباين في حالة نموذج انحدار خطي بسيط كما هو مبين أدناه:

مصدر التغير	درجـــــة الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	1	$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	$\frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1}$
البواقي	n-2	$RSS = \sum {e_i}^2$	$\frac{\sum {e_i}^2}{n-2}$
المجموع	n-1	$TSS = ESS + RSS$ $\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum {e_i}^2$	$\neq$

مثال رقم(03): بالاعتماد على معطيات المثال السابق

-أحسب معامل التحديدR^2، ماذا تستنتج؟

-أنشئ جدول تحليل التباين.

الحل:

-حساب معامل التحديد:R^2

لدينا $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum {e_i}^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$

ولدينا $\sum e_i^2 = 399.9584$ و $\bar{y} = 43$

إذن نحسب $\sum(Y_i - \bar{Y})^2$

القيم	x_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	60	40	44.04	9
2	90	55	59.64	144
3	56	38	41.96	25
4	18	12	22.2	961
5	42	35	34.68	64
6	38	30	32.6	169
7	90	72	59.64	841
8	80	60	54.44	289
9	48	45	37.8	4
المجموع				2506

ومنه $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i{}^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{399.9584}{2506} = 1 - 0.1596 = 0.8404$

الاستنتاج: أن الدخل الشهري يفسر تغيرات الانفاق الشهري بنسبة 84.04% وهو يدل على جودة وقوة الارتباط بين المتغير المفسر الدخل الشهري والمتغير التابع الانفاق الشهري، وبالتالي النموذج له قدرة تفسيرية عالية.

-إنشاء جدول التحليل التباين:

مصدر التغير	درجة الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	1	$ESS = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 2106.0416$	$\frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1} = 2106.0416$
البواقي	7	$RSS = \sum e_i{}^2 = 399.9584$	$\frac{\sum e_i{}^2}{\mathrm{n}-2} = \frac{399.9584}{7} = 57.1369$
المجموع	8	$TSS = ESS + RSS$ $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i{}^2 = 2506$	$\neq$

4-2-اختبارات المعنوية: تتمثل المعايير التي يتم اعتمادها في اختبار المعنوية لأجل الوقوف على مدى الملائمة الإحصائية لمعلمات النموذج من بيانات العينة ومدى اعتمادها كأساس جيد للوصول إلى معلمات المجتمع في:

- اختبار الخطأ المعياري $\hat{\sigma}_{\hat{B}}$.
- اختبار الإحصائية t.
- اختبار الإحصائية F لتقييم المعنوية الكلية للنموذج.

4-2-1-اختبار الخطأ المعياري: يعتبر الخطأ المعياري أحد المعايير التي يمكن الاستناد عليها للحكم على مدى معنوية معلمات النموذج ومقدرتها على التفسير ودرجة تأثيرها على المتغير التابع، فنرمز له بالرمز $S_{\hat{B}}$

حيث كلما كان الخطأ المعياري لمعلمات النموذج المقدرة$\hat{B}_0$،$\hat{B}_1$ منخفض كلما ارتفعت المعنوية الإحصائية$\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$وكانت بذلك أساس جيد لتفسير النموذج.

أما إذا كان الخطأ المعياري مرتفع فإن ذلك يشير إلى ضعفها في تمثيل معلمات المجتمع وعدم قدرتها على شرح وتفسير تغيرات المتغير التابع.

ولاختبار معنوية مقدرات العينة$\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$بواسطة الخطأ المعياري يتعين استخدام الفرض العدم والفرض البديل.

الفرض العدم: $H_0: \begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 0 \end{cases}$

ضد الفرض البديل: $H_1: \begin{cases} B_0 \neq 0 \\ B_1 \neq 0 \end{cases}$

ويتم حساب قيم الخطأ المعياري لكل من$\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$من خلال الصيغتين التاليتين:

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2 \sum x_i^2}{n\,(n-k)\sum x_i^2}} \quad ، \quad S_{\hat{B}_1} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-k)\sum x_i^2}}$$

حيث:

n: تمثل عدد المشاهدات في العينة.

k: عدد المعالم.

بعدها تتم مقارنة الخطأ المعياري لكل معلمة مقدرة بقيمتها المقدرة ونميز في هذه الحالة أكثر من احتمال.

- إذا كان الخطأ المعياري أقل من نصف القيمة المقدرة للمعلمة أي أقل من 50% من قيمة المعلمة المقدرة نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل على أن المقدرات لها معنوية إحصائية ويمكن اعتمادها كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع وأن المتغير المفسر يؤثر على المتغير التابع.

- أما إذا كان الخطأ المعياري أكبر من نصف القيمة المقدرة للمعلمة أي أكبر من 50% من قيمة المعلمة المقدرة، فإن ذلك مفاده قبول الفرض العدم ورفض الفرض البديل على أن المقدرات ليست معنوية إحصائيا ولا يمكن اعتمادها كأساس جيد لتمثيل المجتمع.

وتجدر الإشارة في هذا الإطار إلى أنه جرت العادة على كتابة الأخطاء المعيارية بين قوسين أسفل القيم المقدرة للمعلمات حتى تسهل عملية المقارنة بينهما.

4-2-2-اختبار الإحصائيةt: يتم اعتماد الإحصائية tكأحد المعايير التي تقيس معنوية المعلمات ومدى تأثيرها على الظاهرة محل الدراسة على أن تكون المعلمات المقدرة موزعة توزيعا معتدلا.

$$\hat{B}_0 \rightarrow N(B_0, \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2})$$

$$\hat{B}_1 \rightarrow N(B_1, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2})$$

وحتى يتم استخدام اختبارt في قياس معنوية المعلمات يتعين إتباع الخطوات التالية:

- تحديد قيمة "t"المحسوبة باستعمال الصيغة التالية:

$$t^* = \frac{\hat{B} - B}{\hat{\sigma}_{\hat{B}i}}$$

- تحديد قيمة "t" الجدولية من جدول توزيع ستيودنت tعند درجات حرية معينة ومستوى معنوية محدد، حيث درجة الحرية = حجم العينة – عدد المعلمات المقدرة أي$n - k$.

- القيام باختبار معنوية المعلمات المقدرة من العينة عن طريق استخدام فرض العدم والفرض البديل الخاصين بمعلمات المجتمع.

الفرض العدم: ينص على عدم وجود علاقة بين المتغيرينXوY.

أي أن $H_0: \begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 0 \end{cases}$

الفرض البديل: ينص على وجود علاقة بين المتغيرينXوY

أي أن: $H_1: \begin{cases} B_0 \neq 0 \\ B_1 \neq 0 \end{cases}$

ويتم حسابt بالنسبة لـ$\hat{B}_1$ وفق الصيغة التالية:

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}}$$

حيث أن:

t : هو اختبار عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية $(n - k)$علما أنn تمثل عدد المشاهدات في العينة وk عدد المعالم.

$\hat{B}_1$: تمثل القيمة التقديرية لـB_1 الحقيقية.

$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}$: تمثل الانحراف المعياري للمقدرة$\hat{B}_1$.

ونفس الشيء بالنسبة للإحصائيةt الخاصة بالمقدرة$\hat{B}_0$:

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}}$$

وبعد احتساب قيمة (t)للمقدرات نقارن مع قيمتها الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية$(n - 2)$ ومستوى المعنوية المطلوب (5% أو 1%) لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم.

- فإذا كانت القيمة المطلقة لـــ (t)المحسوبة أكبر من قيمة (t)الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة على أن المعلمة المقدرة لها معنوية إحصائية وتؤثر في المتغير التابع.

- أما إذا كانت القيمة المطلقة لـــ (t)المحسوبة أقل من قيمة (t)الجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة على أن المعلمة المقدرة ليست لها معنوية إحصائية ولا تؤثر في المتغير التابع ويجب إزالتها من النموذج.

غير أنه تم تصميم صيغة تقريبية لاختبار"t" صالحة للاستخدام في حالة ما تكون درجة الحرية أكبر من 8 أي $n - k > 8$، فعند النظر إلى جدول توزيع "t" نجد أن قيمة t تتغير ببطء شديد بعدما تزداد درجة

الحرية عن 8، على سبيل المثال t الجدولية تساوي 2.3 عند درجة الحرية $n-k=8$ وتصبح تساوي 1.96 عند درجة حرية $n-k=\infty$ وذلك عند مستوى معنوية 5% ولا شك أن التغير من 2.3 إلى 1.96 يعتبر تغير بطيء جدا، مما يعني أن درجة الحرية لا تؤثر على قيمة t الجدولية بدرجة كبيرة بعد درجة حرية 8 ومن ثم يصبح من الممكن إهمال أثر هذا التغير دون خطأ كبير، ومن هذا المنطلق يمكن اعتبار "t" الجدولية عند جميع درجات الحرية أكبر من 8 تساوي 2 تقريبا، وفي هذه الحالة يصبح اختبار الطرفين عند مستوى معنوية 5% كما يلي:

- إذا كانت $|t^*|>2$ نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل على أن القيمة المقدرة للمعلمة لها معنوية إحصائية وتؤثر في المتغير التابع.

- أما إذا كانت $|t^*|<2$ نقبل الفرض العدم ونرفض الفرض البديل على أن القيمة المقدرة للمعلمة غير معنوية إحصائيا، ولا يمكن أن نثق فيها كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع.

4-2-2-1-بناء مجال الثقة للمعالم:

إن رفض فرضية العدم ليس معناه أن المقدر $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ هي المقدرة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 أو B_1 وإنما يعني أن المقدرة التي حصلنا عليها من العينة المسحوبة من المجتمع معلمته الحقيقية تختلف عن الصفر، لهذا يتم الاستعانة بمجال تنتمي إليه المعلمة يسمى مجال الثقة.

فيعرف مجال الثقة لمعالم الانحدار بأنه الحدود النهائية التي يكون من المتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بدرجة ثقة معينة، كما يمكن تعريفه على أنه مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة. ويمكن بناء مجالات الثقة لمعالم الانحدار B_0 وB_1 وذلك بمعرفة توزيع $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$، الذي يعطي مجالا للقيم التي تنتمي إليها معالم الانحدار الحقيقية عند مستوى معنوية. ونميز حالتين:

-الحالة الأولى: $n \leq 30$ وσ_u^2 مجهول:

ويبنى مجال الثقة في هذه الحالة كما يلي:

$$\frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightsquigarrow t_{(n-2)}$$

$$\frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightsquigarrow t_{(n-2)}$$

وعند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة (1-α) % لكلا المعلمين كما يلي:

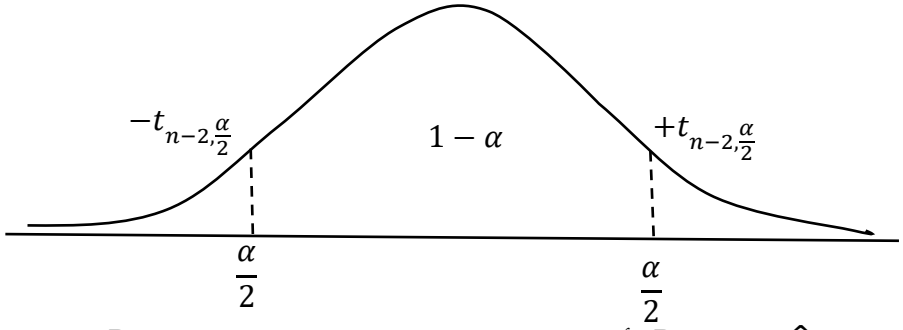
$$pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

حيث:

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة المقروءة الحرجة من جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية $n-2$ ومستوى معنوية $(\alpha\%)$ كما في الشكل التالي:

الشكل رقم (03): توزيع المعاينة لـ $\hat{B}_0$ ثنائي الطرف



بضرب كل الأطراف في $\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}$ وإضافة B_0 لأطراف المتراجحة نجد مجال الثقة للمعلمة B_0:

$$B_0 \in \left[\hat{B}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}, \hat{B}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}\right]$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مجال الثقة للمعلمة B_1:

$$B_1 \in \left[\hat{B}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}, \hat{B}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}\right]$$

فإذا أخذنا على سبيل المثال:

$$B \in \left[\hat{B} - \hat{\sigma}_{\hat{B}}.\, t_{n-2,\alpha/2}\ ,\ \hat{B} + \hat{\sigma}_{\hat{B}}.\, t_{n-2,\alpha/2}\right] = 0.95$$

نقول أن هناك احتمال 95% من الثقة بأن تقع المعلمة B في هذا المجال.

-الحالة الثانية: $n > 30$ و σ_u^2 معلوم:

$$\hat{B}_0 \rightsquigarrow N\left(B_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2\right)$$

$$\hat{B}_1 \rightsquigarrow N\left(B_1, \frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$$

$$\frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightsquigarrow N(0\,,1)$$

$$\frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightsquigarrow N(0\,,1)$$

وعند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين كما يلي:

$$pr\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$pr\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

بضرب كل الأطراف في $\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}$ و $\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}$ وإضافة B_0 و B_1 لأطراف المتراجحة نجد:

$$B_0 \in \left[\hat{B}_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}, \hat{B}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}\right]$$

$$B_1 \in \left[\hat{B}_1 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}, \hat{B}_1 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}\right]$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي الموجودة في الجدول بنسبة معنوية$(\alpha\%)$.

ملاحظة:

كلما كان مجال الثقة ضيقا كلما كان المقدر أحسن لأن الأخطاء المعيارية تكون أصغر.

-كما يمكن بناء مجال الثقة لـ $\boldsymbol{\sigma_u^2}$ كما يلي:

لدينا سابقا:

$$u_i \to \mathrm{N}(0, \sigma_u^2) \Longrightarrow \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \longrightarrow \chi^2_{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2(n-2) \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \Longrightarrow \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sigma_u^2} \longrightarrow \chi^2_{n-2}$$

ومنه يمكن إيجاد مجال الثقة لـ σ_u^2 عند مستوى معنوية α كما يلي:

$$pr\left[\chi^2_{n-2,\alpha/2} \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sigma_u^2} \le \chi^2_{n-2,1-\alpha/2}\right]1-\alpha \Longrightarrow \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}} \le \sigma_u^2 \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}$$

$\chi^2_{n-2,\alpha}$: القيمة الحرجة لتوزيع كاي مربع χ^2 بدرجة حرية $n-2$ وعند مستوى معنوية $\alpha\%$.

وعليه يكون مجال الثقة $\boldsymbol{\sigma_u^2}$ كما يلي:

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}\right]$$

مثال رقم(04): بالعودة إلى المثال السابق

-أحسب مجال الثقة للمعالم B_0، B_1، σ_u^2.

الحل:

-مجالات الثقة للمعالم:

$$B_0 \in \left[\hat{B}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}, \hat{B}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}\right]$$

$$B_1 \in \left[\hat{B}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}, \hat{B}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}\right]$$

حيث:

$t_{7,0.025}$: هي القيمة الحرجة لتوزيع ستيودنت عند مستوى معنوية 5% ودرجة الحرية $n-2=7$ والتي تساوي 2.365 من جدول توزيع ستيودنت، وبتعويض القيم في المجالات نجد:

$$B_0 \in [12.84 - 2.365(5.898), 12.84 + 2.365(5.898)\ ]$$

ومنه:

$$B_0 \in [-1.10877, 26.78877]$$

ومجال الثقة للمعلمة B_1 فهو كما يلي:

$$B_1 \in [0.52 - 2.365(0.0916), 0.52 + 2.365(0.0916)\ ]$$

أي:

$$B_1 \in [0.52 - 2.365(0.0916), 0.52 + 2.365(0.0916)\ ]$$
$$B_1 \in [0.303, 0.736]$$

4-2-3-اختبار الإحصائية F (اختبار المعنوية الكلية للنموذج):

تعرف الإحصائية F على أنها العلاقة بين مجموع مربعات الانحرافات المفسرة عن طريق المتغير المفسر ومجموع مربعات انحرافات البواقي وكل مجموع مقسوم على درجة حريته الموافقة له، حيث تستخدم لاختبار معنوية معادلة الانحدار ككل وتأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$F_c = \frac{\frac{\sum \hat{y}_i{}^2}{k}}{\frac{\sum e_i{}^2}{n-k-1}}$$

وفي هذا النموذج الذي يتضمن متغير مفسر واحد $k=1$ فإنه يمكن إعادة كتابة صيغة الإحصائية F كما يلي:

$$F_c = \frac{\frac{\sum \hat{y}_i}{1}}{\frac{\sum e_i{}^2}{n-2}} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{1-R^2}{n-2}} = \frac{R^2}{(1-R^2)}.(n-2)$$

وبعبارة أخرى:

$$F_c = \frac{\frac{ESS}{1}}{\frac{RSS}{n\ -\ 2}}$$

ويقوم هذا الاختبار على نوعين من الفرضيات:

- فرضية العدم: تنص فرضية العدم على عدم معنوية وجوهرية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المفسر أي أن: $H_0: B_1 = 0$

- الفرضـية البديلة: تنص على وجود علاقة معنوية وجوهرية من الناحية الإحصـائية بين المتغير التابع والمتغير المفسر أي أن: $H_1 : B_1 \neq 0$.

وبعد احتسـاب قيمة (F)يتم مقارنتها مع (F)الجدولية المعطاة في الجداول الخاصـة بها عند مسـتوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) ودرجة حرية $(k \ ، \ n-k-1)$للبسط والمقام.

- فإذا كانت قيمة (F)المحسوبة أكبر من قيمة (F)الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل فرضية البديلة أي معنوية العلاقة المقدرة.

- أما إذا كانت قيمة(F) المحسـوبة أقل من قيمة(F) الجدولية نقبل فرضـية العدم ونرفض الفرضـية البديلة على عدم معنوية معادلة الانحدار.

مثال رقم(05): بالاعتماد على معطيات المثال السابق

-اختبر المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج والمعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

-اختبار معنوية لمعالم لنموذج:

لدينا النموذج المقدر $\hat{Y}_i = 12.84 + 0{,}52X_i$

-اختبار معنوية المعلمة B_0

أن $\begin{cases} H_0 : B_0 = 0 \\ H_1 : B_0 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightarrow t_{n-2}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} = \frac{12.84}{5.898} = 2.177$

وعند مسـتوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n-2 = 9-2 = 7$ نجد القيمة الجدولية لـــtمن جدول ستيودنت $t_t = 2.3646$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 2.1177 < t_t = 2.3646$ وعليه نقبل الفرضية العدمية ونرفض الفرضية البديلة على أن المعلمةB_0 ليست لها معنوية إحصائية ولا تفسر النموذج المقدر.

-اختبار معنوية المعلمة B_1

أن $\begin{cases} H_0 : B_1 = 0 \\ H_1 : B_1 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightarrow t_{n-2}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} = \frac{0.52}{0.0916} = 5.676$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 2 = 9 - 2 = 7$ القيمة الجدولية لـــ tمن جدول ستيودنت $t_t = 2.3646$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 5.676 > t_t = 2.3646$ وعليه نرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة على أن المعلمة B_1 لها معنوية إحصائية وأن الدخل الشهري يفسر الانفاق الشهري.

-اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

لاختبار المعنوية الكلية للنموذج نعتمد على إحصائية فيشر F.

$$\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: ESS = 0 \\ H_1: SS \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{\frac{ESS}{1}}{\frac{RSS}{n - 2}} \rightarrow F_{(1,n-2,\alpha\%)}$$

$ESS = TSS - RSS = 2506 - 399.9584 = 2106.04$ ومنه $TSS = 2506$

$$F_c = \frac{2106.04}{\frac{399.9584}{7}} = \frac{2106.04}{57.137} = 36.859$$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية1 و $n - 2 = 7$ القيمة الجدولية لـــ $F_{(1,7,5\%)}$من جدول فيشر$F_t = 5.59$

نلاحظ أن $F_c = 36.859 > F_t = 5.59$وعليه نرفض الفرضية H_0ونقبل الفرضي H_1 ونقول أن النموذج معنوي كليا.