1. المعادلات التفاضلية

1- تعريف:

نسمي كل معادلة تحتوي على مشتق واحد على الأقل معادلة تفاضلية

- فإذا كان $y=f(x)$ تابعا حقيقيا بمتغير حقيقي واحد فإن المعادلة التي تحتوي على هذا التابع و مشتقاته معادلة تفاضلية عادية
- إذا كانت $y=f(x)$ و $z=g(x)$ و ... عدة توابع بمتغير واحد، فإن المعادلة التي تحتوي على هذه التوابع و مشتقاتها تسمى معادلة تفاضلية كلية.
- إذا كان $z=f(x,y)$ تابعا بعدة متغيرات (هنا متغيرين y و x) فإن المعادلة التي تحتوي على هذا التابع و مشتقاته الجزئية تسمى معادلة تفاضلية جزئية أو معادلة تفاضلية ذات مشتقات جزئية

2- المعادلة التفاضلية العادية

هي إذن معادلة من الشكل $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$

3- مرتبة و درجة معادلة تفاضلية

- المرتبة هي أعلى مرتبة اشتقاق
- الدرجة هي أكبر أس لأكبر مشتق يظهر في المعادلة

أمثلة:

$y'+y=5$: من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

$x=y''+y^3$: من المرتبة الثانية والدرجة الأولى

$4=y'''^{2}+y''$: من المرتبة الثالثة والدرجة الثانية

4- تشكيل المعادلة التفاضلية:

تكمن أهمية المعادلة التفاضلية في أنه يمكن التعبير عن معظم الظواهر الطبيعية بمعادلة تفاضلية، وذلك كما يلي:

نشكل أولا المعادلة الجبرية التي تمثل الظاهرة الطبيعية المراد دراستها ثم نقوم بحذف الثوابت الوسيطية التي تظهر في المعادلة وذلك باشتقاق المعادلة الجبرية عددا من المرات يساوي

عدد الثوابت الموجودة في المعادلة الجبرية، وتعيين الثوابت بدلالة التابع و مشتقاته وتعويضها في المعادلة الجبرية فنحصل على المعادلة التفاضلية التي تمثل هذه الظاهرة.

مثلا:

يتحرك قارب في مستوى مزرعة وفق قطوع مكافئة.

- ماهي المعادلة التفاضلية المعبرة عن هذه الحركة ؟

الحل:

المعادلة الجبرية هي $y = cx^2$

لدينا وسيط واحد c

اذن نشتق مرة واحدة لحذفه:

$$y' = 2cx \Rightarrow c = \frac{y'}{2x} \Rightarrow y = \frac{y'}{2x} \cdot x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{y'}{2} \cdot x$$

ومنه

$$y' = \frac{2}{x} y$$ هي المعادلة التفاضلية للحركة

نتيجة:

عدد الثوابت الوسيطية المختلفة = مرتبة المعادلة التفاضلية الناتجة

5 - حل المعادلة التفاضلية:

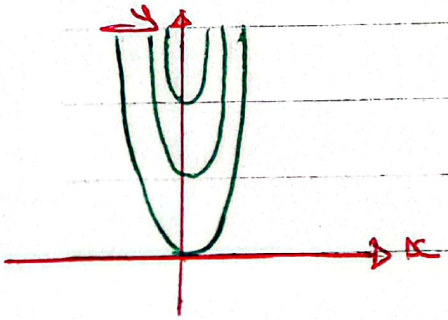
نسمي كل تابع $y = f(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ حلا لها (أو تكاملا لها أو متحنيا تكامليا لها) أو تابعا أصليا لها.

مثلا:

$y = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow y' = x$ هو حل للمعادلة لأنه يحققها.

$y = f(x)$: تكامل للمعادلة لأنه يأتي من تكاملها

وهو منحنى تكامليا لها لأن كل حل يقابله منحنى حسب قيم c.



6- الحل العام، الحل الخاص والحل الشاذ لمعادلة تفاضلية

- الحل العام: هو الحل الذي يكون فيه عدد الثوابت يساوي مرتبة المعادلة
- الحل الخاص: هو الحل الذي ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت قيما خاصة
- الحل الشاذ: هو حل لا ينتج عن الحل العام

مثلا:

$y' = x$ حلها العام هو $y = \frac{x^2}{2} + c$ حيث $x \in \mathbb{R}$

كلها حلول خاصة $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{x^2}{2} + 1 \\ y = \frac{x^2}{2} + 4 \\ \vdots \end{cases}$

II- المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

1- تعريف:

المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى هي معادلة من الشكل $F(x,y,y') = 0$

وإذا أمكن استخراج y' من هذه المعادلة فنكتب:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \dots\dots\dots (1)$$

أو بشكل مكافئ:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad / \quad \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y) \quad \dots\dots (e)$$

حيث التوابع: f ، P و Q تقبل الاشتقاق الجزئي

2- الحل العام للمعادلة (1):

هو من الشكل $y = \varphi(x,c)$ أو من الشكل $\psi(x,y,c) = 0$،

حيث c وسيط ثابت

أ/ إذا كان f في المعادلة (1) تابعا لـ x فقط، أي أن:

$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$ فإن $y = \int f(x)dx + c$ هو الحل العام لـ (1)

ب/ إذا كان f في المعادلة (1) تابعا لـ y فقط. أي أن:

$y' = \frac{dy}{dx} = f(y)$ فإن $dy = f(y)dx$ ومنه $\frac{dy}{f(y)} = dx$، ويكون الحل العام لـ (1) هو: $x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ج/ إذا كان f في المعادلة (1) هو جداء تابعين أحدهما تابع لـ x فقط والآخر تابع لـ y فقط، أي أن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

فإن:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx$$

ومنه الحل العام لـ (1) هو:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + c$$

3- تعريف:

تسمى المعادلة (1) في الحالة (ج) بمعادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة.

4- المعادلات ذات المتحولات المنفصلة

تعريف:

نقول عن المعادلة (1) أنها قابلة لتفصل المتحولات إذا استطعنا كتابتها بالشكل التالي:

$$P_1(x)\,dx + P_2(y)\,dy = 0 \quad \text{---------- (3)}$$

ويكون حلها العام هو:

$$\int P_1(x)\,dx + \int P_2(y)\,dy = c$$

أمثلة:

أ/ $y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot y \iff y' = 3x^2 y$

$$\frac{dy}{y} = 3x^2\,dx$$

$$3x^2\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0$$

وبالتالي فهي ذات متحولات منفصلة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\int 3x^2 dx - \int \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow x^3 - \ln y = C$ وحلها العام هو:

ومنه:

$$\Rightarrow y = e^{x^3 - C} = e^{x^3} \times e^{-C}$$

$C_1 = e^{-C}$ حيث $y = C_1 e^{x^3}$

4) $xy\,dy + (x^2+1)(y^2-1)dx = 0$ نقبل $y = \pm 1$ و $x = 0$ حلولها

ولما $x(y^2-1) \neq 0$ نقسم عليه فيكون:

$$\frac{x^2+1}{x} dx + \frac{2y}{y^2-1} dy = 0$$

وبالتالي فطبيعة معادلة ذات متحولات منفصلة. حلها العام هو:

$$\int \frac{x^2+1}{x} dx + \int \frac{2y}{y^2-1} dy = C$$

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx + \int \frac{2y}{y^2-1} dy = C$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln x + \ln(y^2-1) = C$$

$$\ln(y^2-1) = -\frac{x^2 + \ln x}{2} + C$$

$$e^{\ln(y^2-1)} = e^{-\frac{x^2+\ln x}{2} + C}$$

$$y^2 - 1 = e^C \times e^{-\frac{x^2+\ln x}{2}}$$

$$y^2 = C_1 \times e^{-\frac{x^2+\ln x}{2}} + 1$$

$$y = \pm \sqrt{C_1 e^{-\frac{x^2+\ln x}{2}} + 1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ف/ $y' + 2xy^2 = 0$ أي أن: $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -2x\,dx$$

وبالتالي فهي ذات متغيرات منفصلة، لدينا حلها العام هو:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$$

$$y = \frac{1}{x^2 - C}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + C}$$

5. التوابع المتجانسة:

تعريف:

نقول عن تابع f يتغيرين أنه متجانس من الدرجة m إذا حقق الشرط التالي:

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall \lambda \neq 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

مثال:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$ متجانس من الدرجة 2 ($m=2$) لأنه:

$$\forall \lambda \neq 0;\ f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - 3(\lambda x)(\lambda y)$$
$$= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - 3\lambda^2 xy$$
$$= \lambda^2 (x^2 + y^2 - 3xy)$$
$$= \lambda^2 f(x,y)$$

اذا كان f متجانسا وأخذنا $\lambda = \frac{1}{y}$ و $\lambda = \frac{1}{x}$ حيث $(x \neq 0, y \neq 0)$ فإن:

$$f\left(\frac{1}{x}\cdot x;\ \frac{1}{x}\cdot y\right) = f\left(1;\ \frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\cdot x;\ \frac{1}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y};\ 1\right) = H\left(\frac{x}{y}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أي أن: $f(x,y)$ يصبح كتابع لـ $\frac{y}{x}$ فقط أو كتابع لـ $\frac{x}{y}$ فقط.

6. المعادلة التفاضلية المتجانسة:

لتكن $y'=f(x,y)$ أو $\left(\frac{dy}{dx}=f(x,y)\right)$ معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى

- نقول أن $y'=f(x,y)$ متجانسة إذا كان f متجانسا.
- نقول أن: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ متجانسة إذا كان $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ متجانسين من نفس الدرجة

7. إرجاع المعادلة المتجانسة إلى معادلة ذات متحولات منفصلة

إذا كانت المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى من الشكل $y'=f(x,y)$ متجانسة فإن: $y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$ أو $y'=H\left(\frac{x}{y}\right)$ ومنه نضع $y=ux$

$u=\frac{y}{x}$ (بنفس الطريقة $u=\frac{x}{y}$) $\Leftrightarrow y=ux$

ومنه:

$y=ux$

$y'=u+x\frac{du}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$dy=u\,dx+x\,du$ .....(1)

من جهة أخرى لدينا:

$y'=F\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=F(u)$

$\Rightarrow dy=F(u)\,dx$ ....(2)

إذن من (1) و (2) نجد:

$u\,dx+x\,du=F(u)\,dx$

$\Rightarrow x\,du=F(u)\,dx-u\,dx$

$\Rightarrow x\,du=[F(u)-u]\,dx$

$\Rightarrow \frac{du}{F(u)-u}=\frac{dx}{x}$

ومنه $\frac{1}{F(u)-u}du-\frac{dx}{x}=0$ هي معادلة ذات متحولات منفصلة حلها العام هو: $\int\frac{du}{F(u)-u}+\int\frac{dx}{x}=c$

وبعد حساب التكامل، نعوض كل u بـ $\frac{y}{x}$ فنجد الحل العام للمعادلة المفروضة

مثال: بين أن المعادلة $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ متجانسة ثم أوجد حلها العام

الحل: لدينا:

$$(x^2+y^2)dx+2xydy=0$$

$$2xydy=-(x^2+y^2)dx$$

نعلم أن: $y'=\frac{dy}{dx}$ اذن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x^2+y^2)}{2xy}$$

بما أن: $y'=-\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ اذن فهي متجانسة

لحلها نضع: $u=\frac{y}{x}$ فيكون: $y=xu$ اذن: $y'=\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

فتصبح:

$$-\frac{1+u^2}{2u}=u+x\frac{du}{dx} \Rightarrow -\frac{1+u^2}{2u}-u=\frac{dx}{x}.du$$

$$\Rightarrow -\frac{1+u^2+2u^2}{2u}=\frac{dx}{x}.du$$

$$\Rightarrow -\frac{1+3u^2}{2u}=\frac{dx}{x}.du$$

$$\Rightarrow -\frac{2u}{1+3u^2}du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{2u}{3u^2+1}du=0$$

وبالتالي الحل العام هو:

$$\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{6u}{3u^2+1}du=C$$

$$\Rightarrow \ln x+\frac{1}{3}\ln(3u^2+1)=C \Rightarrow \ln(3u^2+1)=3(-\ln x+C)$$

$$\Rightarrow \ln(3u^2+1)=+\ln x^{-3}+C_1$$

$$\Rightarrow 3u^2+1=x^{-3}+D$$

$$\Rightarrow u^2=\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{3}+D_1$$

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{3}+D_1} \text{ و منه } \frac{y}{x}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{3}+D_1} \text{ اذن: } y=\pm x\sqrt{\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{3}+D_1}$$

(8

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

8. المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الأولى

تعريف:

سمي كل معادلة من الشكل $y'+f(x)y=g(x)$ معادلة خطية (حيث f دالة ومستمرة)

- إذا كان $g(x)=0$ فتسمى المعادلة معادلة متجانسة أو بدون طرف
- إذا كان $g(x)\neq 0$ " " " غير متجانسة أو مع طرف

ملاحظة:

في دروسنا سنهتم فقط بالمعادلات المتجانسة

حل المعادلة المتجانسة $y'+f(x)y=0$

تطرقنا إلى حل هذا الشكل من المعادلة في العنصر (V) الخاص بالمعادلات ذات المتحولات المنفصلة

تطبيقات المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

التطبيقات الميدانية كثيرة نذكر على سبيل المثال:

مثال:

إذا تضاعف طلاب جامعة ما مرتين خلال 25 عاما. فكم يلزم من عام كي يتضاعف عدد طلبة نفس الجامعة ثلاث مرات؟

مع العلم أن معدل ازدياد الطلبة يتناسب مع عددهم

الحل:

- ليكن: y عدد الطلبة في الزمن t عام.

$t=0$ " " " " y_0

حيث: $\frac{dy}{dt}=ky$ فإن: $y=ce^{kt}$

في الوقت $t=0$ لدينا $y=y_0$ إذن: $c=y_0$ ومنه $y=y_0e^{kt}$

لما $t=25$ فإن: $y=2y_0$ إذن $2y_0=y_0e^{25k}$ $\Leftrightarrow$ $2=e^{25k}$

وفي العام t يكون:

$3y_0=y_0e^{kt}$ ومنه $3e^{kt}$

إذن $3^{25}=(e^{kt})^{25}=(e^{25k})^t=2^t$

وبالتالي: $t=\frac{25\log 3}{\log 2}$ ومنه $t=79$ عاما (وبعض الأشهر والأيام) إذن يلزم 79 عاما حتى يتضاعف عددهم 3 مرات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

6. المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

تعريف:

نسمي كل معادلة تفاضلية من الشكل: $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$ معادلة تفاضلية خطية (f و g و h توابع مستمرة)

- إذا كان $h(x) = 0$ فتسمى المعادلة خطية متجانسة أو بدون طرف
- " " $h(x) \neq 0$ " " " غير متجانسة

ملاحظة:

في هذا الجزء سنهتم بالمعادلات الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية بأمثال ثابتة في حالة المميز موجب أو معدوم.

حل المعادلة المتجانسة

المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بأمثال ثابتة هي معادلة من الشكل $y'' + ay' + by = 0$ حيث a, b ثوابت من $\mathbb{R}$

لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة نعرف المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المتجانسة ونحصل على حل المعادلة كما في الحالات الآتية:

أ) إذا كان $r_1 \neq r_2$ جذران مختلفان للمعادلة المميزة وبالتالي فالحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

ب) إذا كان $r_1 = r_2$ جذر مضاعف للمعادلة المميزة ومنه فالحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 4y = 0$

نضع: $y = 1$ ، $y' = r$ / $y'' = r^2$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

إذن لها جذر مضاعف $r = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2}$. إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال 2 : عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

المعادلة المميزة $r^2 + 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$

اذن :

$r_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$

$r_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$

اذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

نعين الحل الخاص بحيث :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$y'(x) = -3c_1 e^{-3x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$y'(0) = -3c_1 - 2c_2 \Rightarrow -3c_1 - 2c_2 = -1 \quad \cdots (1)$$

من جهة اخرى

$$y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \quad \cdots (2)$$

اذن :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \quad \cdots (1) \\ -3c_1 - 2c_2 = -1 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

نجد حل جملة المعادلتين بأحد الطرق المعروفة لنجد

$$y(x) = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner