الفصـــــل الرابع: حـل جملـــة معـــادلات خطيـــة

درسنا في الفصل السابق المصفوفات و المحددات وأنواعها المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية . ندرس في هذا الفصل حل جملة m معادلة خطية بـ n مجهول باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة، طريقة كرامر، طريقة الحذف المتتالي للمجاهل وطريقة غوص

1. جملة m معادلة خطية بـ n مجهول:

إن الشكل العام لجملة m معادلة خطية بـ n مجهول هو

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

- تسمى العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال للجملة.
- وتسمى العناصر b_i المقادير الحرة أو الثابتة.
- العناصر x_i المجاهل.
- تسمى المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ مصفوفة المعاملات

فإذا رمزنا $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ و بالإستفادة من جداء المصفوفات يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بالشكل المختصر:

$$AX = B \ldots\ldots \quad (2)$$

ملاحظـــة:

إذا كانت جميع العناصر b_i معدومة سميت الجملة متجانسة و إذا كان أحدها على الأقل غير معدوم سميت الجملة غير متجانسة.

أن حل جملة المعادالت الخطية (1) يعني إيجاد الشعاع X الذي يحقق (1) وهنا نطرح ثلاثة أسئلة:

1. هل هذه الجملة قابلة للحل ام مستحيلة الحل.
2. إذا كانت الجملة قابلة للحل فكم حال لها ؟
3. كيف يمكن إيجاد جميع حلول هذه الجملة ؟

2. حل جملة n معادلة و n مجهول:

في هذه الحالة تكون A مصفوفة مربعة ويوجد طرق عديدة لحل الجملة نذكر أهم هذه الطرق:

1.2. طريقــة مقـلوب المصفــوفة:

من العلاقة (2) ... ... $AX = B$ حيث A مصفوفة المعاملات و B مصفوفة العمود للمقادير الثابتة فإذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب أي $|A| \neq 0$ فانه يوجد لـ A معكوس A^{-1} . لذلك بضرب طرفي العلاقة (2) من اليسار بـ A^{-1} نجد :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

أي ,

$$X = A^{-1}B$$

ويكون الحل وحيدا. وإذا كانت الجملة متجانسة يكون الحل الوحيد هو الشعاع معدوم. تدعى هذه الطريقة بالطريقة المصفوفية لحل جملة المعادلات الخطية

مثـــال: حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_n = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_n = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_n = 3 \end{cases}$$

أولا نقوم بكتابة الجملة الخطية على شكل كتابة مصفوفيه أي:

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

يمكن ايجاد أن $|A| \neq 0$ و أن: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و بالتالي فإن:

$$X = A^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.2. طريقــــة كـــــرامر :

إن صعوبة الطريقة السابقة كانت بإيجاد A^{-1} معكوس المصفوفة A .

نعرف الأن المحدد التالي Δ_i نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من محدد المصفوفة A بعمود المقادير الحرة أو الثابتة

- إذا كان $|A| \neq 0$ فلجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$
- أما إذا كان $|A| = 0$ نميز حالتين:

<u>الحالة الأولى:</u> $\Delta_i \neq 0,\ i = 1, \dots, n$: عندئذ جملة المعادلات لخطية (1) ستحيلة الحل

<u>الحالة الثانية:</u> $\Delta_i = 0,\ i = 1, \dots, n$: عندئذ يوجد لجملة المعادلات الخطية (1) عدد غير منته من الحلول.

مثـــــال: استخدم طريقة كرامر لحل جملة المعادلات الخطية في المثال السابق

بما أن $|A| \neq 0$ فان لجملة المعادلات حل وحيد يعطى بالشكل $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|} , i = 1,2,3$

أي أن

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} \quad , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|}$$

و منه

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 13 \ , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = -12 \ ,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = 4$$

2.3. حل جملة معادلات خطية بطريقة غوص (Gauss) :

نكتب الجملة الخطية على الشكل المصفوفي $AX = B$

نضع المصفوفة A على اليسار و المصفوفة B على اليمين

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & : b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & : b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & : b_n \end{pmatrix}$$

تعتمد طريقة غوص على إجراء تحويلات للمصفوفة A حتى تتحصل على مصفوفة مثلثيه علوية أو مثلثيه سفلية، من ثم نحل الجملة الجديدة مباشرة.

مثـــــال : لتكن الجملة :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \quad \ldots\ldots \quad (1) \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \ldots\ldots \quad (2) \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \ldots\ldots \quad (3) \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \ldots (4) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 : 2 \\ 3 & 1 & -2 : 1 \\ 4 & -3 & -1 : 3 \\ 2 & 4 & 2 : 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 : 2 \\ 0 & -5 & -5 : -5 \\ 0 & -11 & -5 : -5 \\ 0 & 0 & 0 : 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 : 2 \\ 0 & 1 & 1 : 1 \\ 0 & -11 & -5 : -5 \\ 0 & 0 & 0 : 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & : & 0\\ 0 & 1 & 1 & : & 1\\ 0 & 0 & 1 & : & 1\\ 0 & 0 & 0 & : & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & : & 1\\ 0 & 1 & 0 & : & 0\\ 0 & 0 & 1 & : & 1\\ 0 & 0 & 0 & : & 0\end{pmatrix}$$

و منه حل الجملة السابقة مكافئ لحل الجملة التالية :

$$\begin{cases}x_1 = 1\\ 2x_2 = 0\\ x_3 = 1\end{cases}$$

أي أن الحل هو : $X=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. حل جمـــلة المعـــادلات الخطيـــة المتجانســـة

في هذه الحالة تكون أعمدة المقادير الحرة أو الثابتة يساوي الصفر وتصبح الجملة بالشكل

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots(2)\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0\end{cases}$$

أو بالشكل المختصر

$$AX = 0$$

وكما وجدنا سابقا أنه من الواضح أن x_i أيا كان $i = 1, 2, \ldots, n$ حل لجملة المعادلات الخطية المتجانسة .

ونعلم أيضا أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة حلولا غير الحل الصفري هو أن يكون محدد الجملة مساويا للصفر.

مثـــــال:

ناقش حلول الجملة الخطية المتجانسة التالية بحسب قيم k :

$$\begin{cases}3x_1 + kx_2 - x_n = 0\\ 2x_1 + x_2 + x_n = 0\\ x_1 + kx_2 - x_n = 0\end{cases}$$

نحسب محدد الجملة

$$\begin{vmatrix}3 & k & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & k & -1\end{vmatrix} = 2k - 8$$

نلاحظ أن $\Delta \neq 0$ عندما $k \neq 4$ و عندها يكون للجملة الحل الصفري وحيد.

أما من أجل $k = 4$ يكون $\Delta = 0$ و للجملة عدد غير منته من الحلول وتصبح الجملة بالشكل: