طريقة2

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = M_f \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

المحـــددات

طريقة النشر (*La règle de développement*)

لتكن $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة مربعة حيث $1 \leq i,j \leq n$.

محدد المصفوفة A هو العدد الحقيقي $det(A)$ أو $|A|$ الذي يحسب العلاقة التالية :

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

بالنسبة للأولى تعطي نشر لـ $|A|$ بالنسبة لعناصر السطر i من A ، أما الثانية تعطي نشر لـ $|A|$ بالنسبة لعناصر العمود j من A.

حيث $|A_{ij}|$ هي المصفوفة الناتجة من حذف السطر i و العمود j من المصفوفة A .

ملاحـــظة:

يعطي محدد المصفوفة ذات العنصر الوحيد (سطر وعمود واحد) كما يلي :

$$det(a_{11}) = a_{11}$$

أمثلـــــة :

- إذا كانت المصفوفة من الدرجة الثانية فإن محددها يحسب كما يلي : (لنختر $i = 1$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det(A_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11}\, det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}\, det(A_{12})$$

$$= (-1)^{2} a_{11} a_{22} + (-1)^{3} a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1) - (-2)(1) = 2$$

- أما محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة فيحسب كما يلي : (باختيار $i = 1$)

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det(A_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11}\, det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12}\, det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13}\, det(A_{13})$$

$$= a_{11}\, det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\, det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\, det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

نطبــق محــدد مصفــوفة من الدرجـــة الثانيـــة لكل من المحددات الثلاثة فيكون

$$= a_{11} a_{11} a_{22} - a_{11} a_{12} a_{21} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22}$$

مثـــــــال:

لنحسب محدد المصفوفة A حيث: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(0) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 12$$

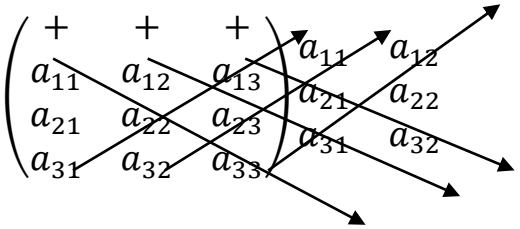
ملاحـــــظة:

لتسهيــل عمليـــة الحســـاب نختـــار السطـــر أو العمـــود الذي يحتـــوي على أكبـــر عدد من الأصـــفار

طريقـــــة سايـــــري (La règle de Saurrs)

تطبق هذه الطريقة لحساب محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة

نقوم بإعادة كتابة العمودين الأول و الثاني أمام المصفوفة A ثم نستعمل أسهم قطرية مع إشارات موجبة وسالبة هكذا :



$$|A| = a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}a_{23}\,a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{22}$$

لنطبق هذه الطريقة على المثال السابق

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= (24 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 24$$

ملاحظـــــات :

1) **محدد المصفوفة القطرية أو المثلثية أو السفلية يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي .**
2) **إذا كان صفين من مصفوفة متساويين إذن محددها معدوم.**
3) **إذا غير صفين من مصفوفة إذن محددها يغير إشارته.**
4) **إذا كان أحد صفوف مصفوفة مضروب بسلمي α فإن محددها يكون مضروب بـ α.**
5) **إذا كان أحد صفوف المصفوفة معدوم إذن محددها معدوم.**

نظـــــــرية :

محدد مصفوفة مربعة يساوي محدد منقول هذه المصفوفة أي :

$$det(B) = det(B^T)$$

حســـاب المقلـــوب

لتكن المصفـــوفة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

- A قـــابلة للقلـــب ⇔ التطبيـــق الخطـــي المـــرافق لهـــا تقـــابلي.
- A قـــابلة للقلـــب ⇔ أشـــعة أعمـــدة المصفـــوفة A مستقـــلة خطيـــا.
- A قـــابلة للقلـــب ⇔ $\det(A) = |A| \neq 0$

نرمـــز لمقـــلوب A بـــ A^{-1} و يحســـب بالعلاقـــة التـــالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (adj(A))^t, \qquad |A| \neq 0$$

حيث $adj(A) = (a'_{ij})$ هي مصفـــوفة ناتجـــةمن المصفـوفةA بالعلاقـــة التالية:

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

أي

$$adj(A) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى $(adj(A))^t$ بالمصفـــوفة المرافقـــة لـــ A

مثـــــال :

أحسب مقلـــوب المصفـــوفة التـــالية

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 24 \neq 0$$

إذن A قابلة للتقلب

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (adj(A))^t$$

$$\text{adj(A)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

إذن

$$\text{adj(A)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ -16 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

و منه المصفوفة المرفقة $\big(adj(A)\big)^t$ **للمصفوفة** A **هي**

$$\big(adj(A)\big)^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -16 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

و التالي

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -16 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$