الفصل السادس: الـــــدوال ذات عـــــدة متغيـــرات

1. تعـــاريف

تعريف:

التابع الحقيقي بـــ n متغير حقيقي هو التابع المعرف بالشكل:

$$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

حيث $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$، و بالتالي فإن:

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ تعني $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

ملاحظة:

سنهتم بالحالة عندما $n = 2$ لأجل تسهيل التصور و تعاد المناقشات بطريقة مشابهة لأجل $n > 2$.

مثال:

الحجم V لغاز معين يتبع درجة الحرارة t و الضغط P. إذن فهو تابع بمتغيرين $V(t, P)$

2. البيـــان

هو مجموعة النقاط $\{(x, y, z):\ z = f(x, y)\}$ أي تلك الأزواج (x, y) من المستوي xoy التي ترتبط بـــ z. و بالتالي يحتاج الأمر إلى ثلاث محاور لتمثيل هذا البيان.

3. مجموعة التعريف

هي قيم (x, y) التي تجعل التابع $z = f(x, y)$ معرفا.

مثال:

ليكن $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ معطى بـــ : $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ يكون f معرفا إذاا كان $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftarrow x^2 + y^2 \leq 1$. و بالتالي فإن f معرف على القرص ذي المركز $(0, 0)$ و نصف القطر $r = 1$. فإذا رمزنا بـــ D_f لمجموعة تعريف f فإن:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2:\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

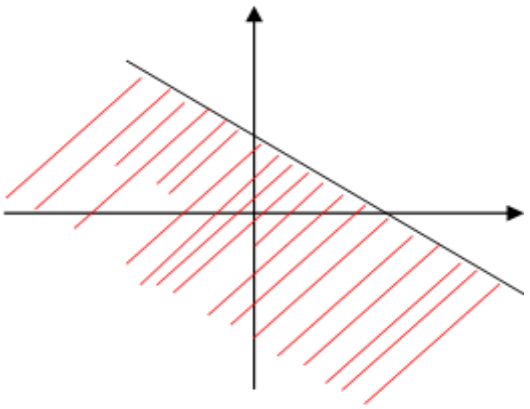
مثال: أوجد مجموعة التعريف للتابع f و g و مثله بيانيا

1. لدينا $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y}$ إذن:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2:\ 6 - (2x - 3y) \geq 0\}$$

$\Rightarrow 2x - 3y \leq 6$

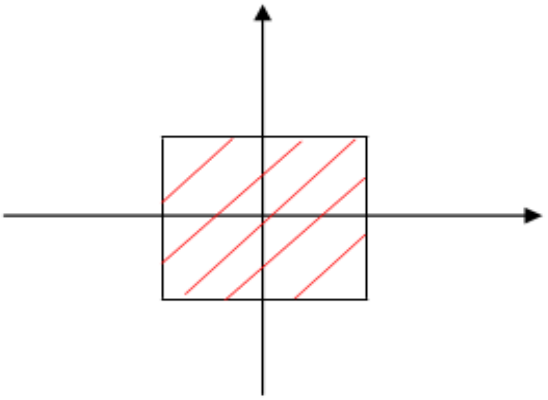
و بالتالي فإن f معرفة على نقاط خط المستقيم و أسفل خط المستقيم كما هو موضح في البيان التالي:



2. لدينا $g(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ **إذن**

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \geq 0 \text{ و } 1 - y \geq 0\}$$

$$1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1 \quad \text{و} \quad 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$



4. النهايات

تعريف:

إذا كان f تابعا معرفا على ساحة D $(D \in \mathbb{R}^2)$ بإستثناء (x_0, y_0)، نقول أن l هي نهاية التابع f عند (x_0, y_0) و نكتب:

$$\lim_{(x\ ,y\ ) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

مثال:

1. ليكن $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ **نريد حساب** $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ **إن وجدت.**

لاحظ أن f غير معرف عند $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

بفرض أن $(x, y) \to (0, 0)$ عبر المستقيم $y = mx$ فإن:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

و بما أنه كلما غيرنا المستقيم الذي تقترب عبره النقطة (x, y) نحو $(0, 0)$ فإن m تتغير و بالتالي فالنهاية $l = \frac{m}{1+m^2}$ تتغير حسب السبيل. لذلك لا توجد نهاية

2. ليكن $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$$

النهاية غير موجودة.

ملاحظة:

تبقى النظريات المتعلقة بالنهايات في حالة تابع بمتغير واحد، صحيحة في حالة تابع بعدة متغيرات، و تبرهن بطريقة مشابهة.

5. الاستمرار

تعريف:

ليكن f معرفا على ساحة D تشمل (x_0, y_0). $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$. نقول أن التابع f مستمر عند النقطة (x_0, y_0) من ساحة تعريفه إذاا تحقق:

$$\lim_{(x\ ,y\ ) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

أي أن الإستمرار هو حالة خاصة للنهاية.

ملاحظة:

تبقى كل النظريات المتعلقة بالإستمرار في حالة تابع بمتغير واحد، صحيحة في حالة تابع بعدة متغيرات، و تبرهن بطريقة مشابهة.

مثال:

إذا كان f و g مستمرتين عند (x_0, y_0) فإن $f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}(g(x, y) \neq (0, 0))$ كلها توابع مستمرة عند (x_0, y_0).

مثال: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & : (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & : (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

فنرى أن $f(x,y) = 1$ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,1)}$ **إذن** f **يقبل نهاية عند** $(0,1)$ **و لكنه غير مستمر عند** $(0,1)$ **لأن :** $\lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} f(x,y) \neq f(0,1) = 0$

6. الاشتقاق

المشتقات الجزئية

ليكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **. نقول أن** f **يقبل مشتقا جزئيا عند النقطة** (x_0, y_0) **بالنسبة للمتحول** x **إذاا كانت النهاية التالية موجودة ووحيدة:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

و نرمز لهذه النهاية عندئذ بـ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ **أو** $f_x'(x_0, y_0)$**.**

و نقول أنه يقبل مشتقا حزئيا عند نقطة (x, y) **بالنسبة للمتحول** x **إذاا كانت النهاية التالية موجودة ووحيدة:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

و نرمز لهذه النهاية عندئذ بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ **أو** $f'(x, y)$**. أو بإختصار بالرمز** $\frac{\partial f}{\partial x}$**.**

و نقول أنه يقبل مشتقا حزئيا عند نقطة (x_0, y_0) **بالنسبة للمتحول** y **إذاا كانت النهاية التالية موجودة ووحيدة:**

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

و نرمز لهذه النهاية عندئذ بـ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$**.**

أي أنه لحساب $\frac{\partial f}{\partial x}$ **يمكن اعتبار** $g(x) = f(x,y)$ **و يكون** $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ **فنعود إلى تعريف مشتق تابع بمتغير واحد، بإعتبار** y **كوسيط.**

مثال: لتكن $f(x,y) = x^2 + y^2$ **فإن:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

المشتقات الجزئية المتتابعة

إذا كان لـ $f(x,y)$ **مشتقين جزئيين** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **و** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **و قبل هذان المشتقان الجزئيان بدورهما الإشتقاق الجزئي، فنسمي المشتقات الجزئية الأخيرة بالمشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لـ** f **و نرمز لها بـ:** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\ ,y\ )$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\ ,y\ )$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x\ ,y\ )$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

حيث أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ **أي أننا نقوم بإشتقاق** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **جزئيا بالنسبة للمتحول** x.

بينما $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ **تعني أننا نقوم بإشتقاق** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **جزئيا بالنسبة للمتحول** x**، أي نقوم بإشتقاق** f **جزئيا بالنسبة لـ** y **أولا ثم نقوم بإشتقاق الناتج بالنسبة لـ** x **ثانيا.**

مثال:

فإن : $f(x,y) = x^2 y + x$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 1) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 1) = 2x$$

لاحظ أن: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

و هكذا فإن $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ **تعني أن:** $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$ **فنحسب** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **أولا ثم الناتج لـ** x **ثم الناتج نشتقه بالنسبة لـ** x **مرة أخرى.**

مثال:

لدينا $\frac{\partial^3 f}{\partial x\ \partial y^2}$. **نحسب** $f(x,y) = x^4 y + y^3$ **و حيث:** $\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 3y^2$ **و حيث:**

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

فإن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(x\ ,y\ ) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(x^4 + 3y^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6y\ ) = 0$$

نظرية: **إذا كان** $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **مستمرا و كان مشتقاه الجزئيان من المرتبة الثانية**

$$(x,y) \to z = f(x,y)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ **و** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ **مستمران، عندئذ يكون:** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$