نموذج الانحدار المتعدد ويسمى أحيانا النموذج الخطي العام هو امتداد للنموذج البسيط حيث انه يتضمن اكثر من متغير مستقل واحد، في حالة النموذج البسيط كان الأمر يعتمد على متغيرين متغير تابع والآخر متغير مستقل، لكن في حالة النموذج العام قد يتضمن عدد من المتغيرات من بينها قد يكون هناك تابع واحد والعديد من المتغيرات المستقلة.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + u_i$$

المتغيرات المستقلة هي X_1 X_2 الى X_k و β_0 هي القاطع . أي نموذج يتضمن اكثر من متغيرين يعتبر نموذج انحدار متعدد مثل نموذج الاستهلاك قد يتضمن التالي:-

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + u_i$$

حيث Y_I تمثل الاستهلاك و X_1 تمثل الدخل و X_2 تمثل السعر X_3 الثروة. أن النماذج المتعددة تكون هي الحالة السائدة بالاقتصاد حيث انه من العسير إن تجد متغير نحدده بأنه هو المتغير التابع ومفسر من قبل متغير مفسر واحد هو الذي يؤثر على المتغير التابع، ففي العادة يتوقع كثير من التأثيرات.

في العادة تكون β_1 مضروبة في 1 وذلك للحصول على القاطع. وتمثل β_3 β_2 β_1 معلمة الميل والتي تمثل مدى استجابة المتغير التابع للتغيرات في و X_1 و X_2 و X_3 . يتضمن نموذج الانحدار عدد من المتغيرات المستقلة يساوي $K-1$.

تكثر النماذج المتعددة في الاقتصاد لا نه من العسير أن نجد متغير تابع مفسر من قبل متغير واحد فقط أي متغير واحد هو الذي يؤثر على المتغير التابع. نتوقع كثير من التأثيرات فدوال الاستهلاك على سبيل المثال تتأثر بمتغير الدخل، الثروة والسعر. فتكاد تكون نماذج الانحدار المتعدد او العام هي الحالة العامة وليس الاستثناء، الاستثناء هو النموذج البسيط.

1- الفروض الاساسيه للنموذج العام:

بالاضافى الى الفرضيات السابق ذكرها في نماذج الانحدار البسيط يجب تحقق الفرضيتين التاليتين حتى نستطيع تقدير نموذج الانحدار المتعدد بالاعتماد على طريقة المربعات الصغرى وهي :

1- يضيف الى افتراض افتراض ثبات التباين فرض يشمل ثبات التباين وانعدام التغاير $COV(u_i, u_j) = 0$ عندما تكون $i \neq j$. وبالمقابل لو كانت $j= i$ فان $COV(u_i,u_j) = COV(u_i,u_j) = V(u_i)^2$

2 -لا توجد علاقة خطيه بين المتغيرات المستقلة، على سبيل المثال لا توجد علاقة بين X_1 , X_2 كالتالي:

$$X_2 = X_3 \qquad \text{أو} \qquad X_3 = 2X_4 \qquad \text{أو} \qquad X_2 = X_3 + X_4$$

هذه علاقات خطيه يفترض أنها لا توجد لاحظي أننا نحدد المتغيرات المستقلة فقط وبعلاقة خطيه إي انه لا يوجد اعتراض على العلاقات الغير خطيه. ولا يوجد اعتراض على العلاقة القوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع في الواقع يفض أن يكون هناك علاقة قوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع، ولكن لا يكون هناك علاقات قوية تربط

بين المتغيرات المستقلة بعضها مع بعض لا نه يترتب عليها شئ في غاية الخطورة وبالحد الأقصى يمكن أن يؤدي إلى انهيار طريقة المربعات الصغرى.

لا توجد علاقة خطيه محدده بين المتغيرات المفسرة. على سبيل المثال إذا كانت $2X_1 + X_2 = 4$ فإننا نستطيع أن نعبر عن X_2 بقيمه لـ X_1 ويمكن استخدامها في علاقة الانحدار $X_2 = 4 - 2X_1$

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 (4 - 2X_1) + u$$

$$Y = (\alpha + 4\beta_2) + (\beta_1 - 2\beta_2) X_1 + u$$

نستطيع أن نقدر القيم بين الأقواس ولا نستطيع أن نقدر المعالم β_1, β_2, α بمفردها.

2- تقدير معلمات النموذج الانحدار المتعدد

2-1- التقدرير باستعمال المصفوفات

ليكن لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_{1t} + B_2 X_{2t} \cdots\cdots\cdots\cdots B_K X_{kt} + e_t$$

إن الشكل المصفوفي لهذا النموذج هو: $Y_t = XB + e_t$

$$SSE = \acute{e}e = \left(y - X\hat{B}\right)^{/}\left(y - X\hat{B}\right)$$

$$\acute{Y}Y - \acute{Y}XB - \acute{X}\hat{\acute{B}}Y + \acute{B}\acute{X}XB$$

$$\acute{Y}Y - 2\acute{B}\acute{X}Y + \acute{B}\acute{X}XB$$

وحتى يكون هذا المقدر $\acute{Y}Y - 2\hat{\acute{B}}\acute{X}Y + \hat{\acute{B}}\acute{X}XB$ اصغر ما يمكن نأخذ المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمعلمات المقدرة:

$$\frac{\partial \acute{e}e}{\partial} = -2\acute{X}Y + 2\hat{\acute{B}}\acute{X}Y = 0 \Longrightarrow \acute{X}Y = \hat{B}\acute{X}X$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{B}} = \left(\acute{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\acute{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}}$$

علما ان:

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{0}} \\ \hat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}} \\ \cdots \\ \hat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} ، \left(\acute{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\right) = \begin{pmatrix} n & \sum X_{1t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{1t} & \sum X^2{}_{1t} & \cdots & \sum X_{1t}X_{kt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{kt}X_{1t} & \cdots & \sum X^2{}_{kt} \end{pmatrix} ، \acute{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum X_{1t}y_t \\ \cdots \\ \sum X_{kt}y_t \end{pmatrix}$$

حالة خاصة: في حالة المعطيات الخاصة بقيم Y و X هي معطيات مركزية في هذه الحالة يمكن حساب قيم معلمات نموذج الانحدار المتعدد بالاعتماد على مصفوفة التباين المشترك بالشكل التالي:

$$\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{B}}_1\\ \widehat{\boldsymbol{B}}_2\\ \cdots\\ \widehat{\boldsymbol{B}}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v(X_1) & cov(X_1،X_2) & \cdots & cov(X_1،X_K)\\ cov(X_2،X_1) & v(X_2) & \cdots & cov(X_2،X_K)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ cov(X_K،X_1) & cov(X_K،X_2) & \cdots & v(X_K)\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}cov(X_1،Y_t)\\ cov(X_2،Y_t)\\ \cdots\\ cov(X_K،Y_t)\end{pmatrix}$$

اما $\widehat{B}_0$ في هذه الحالة فيتم حسابه من خلال الصيغة التالية:

$$\widehat{B}_0=\overline{\mathrm{Y}}-\mathrm{B}_1\overline{\mathrm{X}}-\mathrm{B}_2\overline{\mathrm{X}}-\cdots B_{\mathrm{k}}\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{K}}$$

2-2- التقدير بالاعتماد على طريقة المعادلات :

المعيار الذي تعتمد علية المربعات الصغرى في الحصول على المقدرات حيث يتطلب المعيار تصغير مجموع مربعات البواقي ألي أدنى قيمه لها. اختبار مقدرات تعطي مربعات بواقي تعطي أدنى مجموع من بين هذه المجاميع أي أن المعيار تصغير $\sum u_i^2$

أي تحويل مربعات البواقي ألي شكل تظهر فيه المقدرات المراد الحصول عليها ويتسنى ذلك بإعادة كتابة المعيار على النحو التالي:

$$\sum u_i^2=\sum(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_1....\hat{\beta}_kX_k)^2$$

تفاضل البواقي بالنسبه لـ $\hat{\beta}_0$ ويساوى بالصفر ويعاد كذلك لقيم $\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\ldots\hat{\beta}_k$ وهكذا

$$\frac{\partial\sum u_i^2}{\partial\hat{\beta}_0}=+2\sum(Y_I-\hat{\beta}_1X_1-\hat{\beta}_2X_2..\hat{\beta}_KX_K)=0$$

$$\frac{\partial\sum u_i^2}{\partial\hat{\beta}_1}=-2\sum X_{I1}(Y_I-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_2X_2-\hat{\beta}_3X_3..\hat{\beta}_KX_K)=0$$

.

.

$$\frac{\partial\sum u_i^2}{\partial\hat{\beta}_K}=-2\sum X_{IK}(Y_I-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_2X_2-\hat{\beta}_3X_3..\hat{\beta}_KX_K)=0$$

بفك الأقواس والقسمة على 2 وإعادة كتابة المعادلات الطبيعية مقابلة للنموذج الخطي العام

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+u_i$$

$$\sum u_i^2=\sum(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_1-\hat{\beta}_2X_2)^2$$

نحصل على مقدرات النموذج العام وعلى سبيل المثال سنكتفي بنموذج بثلاث متغيرات

$$\sum Y_I = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}$$

$$\sum X_{1I} Y = \hat{\beta}_0 \sum X_{1I} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1I}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{1I} X_{2I}$$

$$\sum X_{2I} Y = \hat{\beta}_0 \sum X_{2II} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1I} X_{2I} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2I}^2$$

وباستخدام الانحرافات نتحصل على

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

1- دراسة صلاحية نموذج الانحدار المتعدد

لدراسة صلاحية نموذج الانحدار المتعدد نتبع الخطوات التالية:

أ- قياس القدرة التفسيرية والقوة الارتباطية للنموذج:

- **قياس القدرة التفسيرية للنموذج: ويتم ذلك من خلال حساب معامل التحديد** ^{2} وذلك بإحدى الصيغ التالية:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2}{\sum(\mathrm{y}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2} = 1 - \frac{\sum(\mathrm{y}_\mathrm{i} - \hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i})^2}{\sum(\mathrm{y}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2}{\sum(\mathrm{y}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2} = \frac{\hat{\acute{\mathrm{B}}}\,\acute{X}Y - n(\bar{Y})^2}{\sum Y^2 - \mathrm{n}(\bar{\mathrm{Y}})^2}$$

ب- قياس القوة الارتباطية للنمودج: ويتم ذلك من خلال حساب معامل الارتباط والذي هو عبارة الجدر التربيعي لمعامل التحديد.

$$r = \sqrt{R^2}$$

ج - اختبار المعنوية الكلية لنموذج : لاختبار المعنوية الكلية لنموذج نقوم باستعمال اختبار فيشر F وهو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع ويمكن التعبير عن هذه الفرضية بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 \ : B_0 = B_1 = B_2 \cdots = B_J = 0 \\ \mathrm{H}_1 : \mathrm{B}_0 \neq B_1 \neq B_2 \neq \cdots \neq B_J \neq 0 \end{cases}$$

ولاختبار هذه الفرضية نستعمل احصائية فيشر حيث:

$$\boxed{F_{Cal} = \frac{\frac{R^2}{K-1}}{\frac{1-R^2}{n-K-1}} \rightarrow F^{\propto\%}_{(k-1\,,n-k-1)}}$$

حيث k يمثل عدد المعلمات المقدرة و R^2 يمثل معامل التحديد

ولاتخاذ القرار حول هذه الفرضية نقوم بمقارنة قيمة فيشر المحسوبة F_{cal} مع قيمة فيشر الجدولية F_t بدرجة حرية للبسط تساوي k-1 ودرجة حرية المقام n-k-1. وعند مستوى معنوية معين $\propto \%$. وفي حالة فيشر المحسوبة اكبر من فيشر الجدولية نقول النموذج معنوي في مجمله. أي توجد معلمة على الأقل تختلف عن الصفر.

د - اختبار معنوية المعلمات المقدرة (اختبار المعنوية الجزئية)

لاختبار معنوية المعلمات المقدرة بالنسبة لنموذج الانحدار المتعدد نستعمل كذلك اختبار ستودنت، حيث يتم وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة، حيث أن الفرضية الصفرية H_0 تقول ان $\widehat{B}_i$ (معلمة نمودج الانحدار المراد اختبارها) غير معنوية، والفرضية البديلة H_1 تقول ان معلمة الانحدار لها معنوية احصائية ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : B_i = 0 (i = 0,1,2 \cdots k) \\ \mathrm{H}_1 : \mathrm{B}_\mathrm{i} \neq 0 (i = 0,1,2 \cdots k) \end{cases}$$

ولاتخاذ القرار نقوم بحساب احصائية ستودنت والتي تعطى بالصيغة التالية

$$t_{cal} = \frac{\hat{B}_i - B_i}{\sqrt{v(\hat{B}_i)}} = \frac{B_i}{\delta(\hat{B}_i)}$$

فإذا كان:

$t_{cal} > t^{\propto\%}_{\mathrm{tab}(n-k-1)}$ فإننا نقبل الفرضية البديلة $_1$ ونقول أن $\hat{B}_i$ معنوي ويختلف عن الصفر.

$t_{cal} < t^{\propto\%}_{\mathrm{tab(n-k-1)}}$ فإننا نقبل الفرضية البديلة ونقول أن $\hat{B}$ غير معنوي