1-:مدخل الى نموذج الانحدار الخطي

في تحليل الانحدار البسيط، نجد أن الباحث يهتم بدراسة أثر أحد المتغيرين ويسمى بالمتغير المستقل أو المتنبأ منه، على المتغير الثاني ويسمى بالمتغير التابع أو المتنبأ به، ومن ثم يمكن عرض نموذج الانحدار الخطي في شكل معادلة خطية من الدرجة الأولى، تعكس المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل كما يلي:

يتأن: $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + e_i$

y :هو المتغير التابع (الذي يتأثر)

x :هو المتغير المستقل (الذي يؤثر)

$\hat{\alpha}$: هو الجزء المقطوع من المحور الرأسي y ، وهو يعكس قيمة المتغير التابع في حالة انعدام قيمة المتغير المستقل x ، أي في حالة $x = 0$

β : ميل الخط المستقيم $(\beta_0 + \beta_1 x)$ ، ويعكس مقدار التغير في y إذا تغيرت x بوحدة واحدة.

e :هو الخطأ العشوائي، والذي يعبر عن الفرق بين القيمة الفعلية y ،والقيمة المقدرة $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$ ، أي أن : $e = y - (\beta_0 + \beta_1 x)$.

1-1-تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط

يستخدم عادة أسلوب طريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات نماذج الانحدار باعتباره يعطي أفضل التقديرات، غير متحيزة وذات تباين اصغر. وتعتمد هذه الطريقة .

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل α معلمة القاطع، β، معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البواقي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البواقي وبعد ذلك يشرع في الحصول على , α، β بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له. طريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار , α، , β ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.ويمكن توضيح طريقة تقدير معلمات نموذج الانحدار من خلال هده الطريقة كالأتي:

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + e_i$$

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$e_i^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X))^2$$

مجموع مربعات البواقي $=\sum e^2$

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولى يتطلب أجراء التفاضل بالنسبة للمجاهيل $\alpha\ \beta$ نستخدم التفاضل الجزئي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم أل تحصل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات.

نشتق المعادلة بالنسبة ل $\hat{\alpha}$ نحصل على:

$$\frac{\partial\left(\sum e_i^2\right)}{\partial\hat{\alpha}} = (2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

نساوي بالصفر $\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$

بإدخال المجموع Σ وحيث ان αعدد ثابت فأن $\Sigma\ \alpha = n\ \alpha$ ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

$$\sum Y_i - \sum{}_i\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum{}_i X = 0$$

$$\sum{}_i\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum{}_i X$$

$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum{}_i X$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum{}_i X}{n}$$

$$\boxed{\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}}$$

نشتق المعادلة السابقة بالنسبة لـ B

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$\Rightarrow (\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$\Rightarrow -\sum XY + \sum X\alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum XY = \alpha\sum X + \beta\sum X^2$$

بالتعويض بقيمة α نحصل على

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta\sum X^2$$

بالضرب في n نحصل على:

$$n\sum XY = \sum X\sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$

$$n\sum XY - \sum X\sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$

$$\Rightarrow n\sum XY - \sum X\sum Y = Bn\sum X^2 - Bn(\sum X)^2$$

$$\Rightarrow n\sum XY - \sum X\sum Y = B(n\sum X^2 - (\sum X)^2$$

في الأخير نحصل على قيمة معامل الانحدار b المقدر

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

وهذه الصيغة يطلق عليها بالقانون العام لحساب معامل الانحدار.

من الممكن الحصول على المقدرات باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum y_i = \sum (Y - \overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$

$$\sum xy = \sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$

$$\sum x^2 = \sum (X - \overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

ولكن

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i (\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\overline{Y} - \hat{\beta}n\overline{X}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\overline{Y} = -\hat{\beta}n\overline{X}\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta}n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$

$$\sum xy = \beta\sum x^2$$

$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

وهذا ما يسمى بالقانون المختصر لمعامل الانحدار ويستعمل عادة في حالة المعطيات ذات قيم كبيرة جدا.

مثال 01: لتكن لديك المعطيات التالية والخاصة بالعلاقة بين متغير تابع Y ومتغير مستقل X

X	2	3	1	5	9
Y	4	7	3	9	17

المطلوب: قدر معادلة نموذج الانحدار البسيط من الشكل $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + e_i$

أ- باستعمال القانون العام

ب-باستعمال القانون المختصر

أ- ما هي قيمة Y في حالة X يساوي 10

الحل:

X	Y	X^2	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	XY	xy	x^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4
3	7	9	-1	-1	21	1	1
1	3	1	-3	-5	3	15	9

1	1	45	1	1	25	9	5
25	45	153	9	5	81	17	9
40	**70**	**230**			**120**	**40**	**20**

أ- بالاعتماد على القانون العام:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230) - (20)(40)}{5(120) - (20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X =$$

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

ب-بالاعتماد على القانون المختص:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

حساب قيمة Y في حالة X يساوي 10:

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$
$$\Longrightarrow \hat{Y} = 1 + 1.75(10) = 18.5$$

1- فرضيات نموذج الانحدار البسيط:

لطريقة المربعات الصغر 06 فرضيات أساسية، فالإحلال بإحدى منها يؤدي إلى نتائج مضللة خاصة عند دراسة صلاحية النموذج،وتكمن هذه الفرضيات في النقاط التالية:

- أن تكون العلاقة خطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل، وبالتالي فان الشكل الوظيفي للعلاقة بين Yو X يكون بالشكل التالي: $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + e_i$
- التوقع أو الأمل الرياضي أو متوسط البواقي معدوم: $E(\varepsilon_i) = 0$
- تجانس تباين الأخطاء: أي أن تباين أو تشتت البواقي أو المتغير العشوائي متجانس وثابت من اجل كل القيم $v(\varepsilon_i\ k) = \delta^2\ \forall i$
- عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء بين البواقي: معناه أن التباين المشترك بين البواقي يساوي الصفر إذا كانت $i \neq j$ حيث $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \forall i \neq j$

عدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي، معناه أن التباين المشترك بينهما يساوي الصفر:

$cov(\ \ _i, \varepsilon_i) = 0 \forall i$

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو التوزيع الطبيعي:

$\varepsilon_i \rightarrow \mathrm{N}(0, \delta^2)$

2- المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة

- **المميزات العددية:** نتناول في هذه الفقرة المميزات العددية للمعلمات المقدرة لنموذج الانحدار البسيط وسوف نقتصر على التوقع والتباين:

ليكن النموذج الهيكلي الخطي البسيط التالي: $Y_i = \alpha + \beta x + e_i$ حيث النموذج ان المقدر له هو:

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

علما أن $\hat{\alpha}$ و $\widehat{\mathrm{B}}$ هي مقدرات لكل من $\propto$ و B على التوالي.

أ- التوقع الرياضي للمعلمات المقدرة:

الامل الرياضي: $\widehat{B}$

$$\hat{B} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})y_i}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{B} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(\propto + Bx + \varepsilon_i)}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\Longrightarrow \hat{B} = \frac{\propto \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{B\sum x\sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sum \varepsilon_i \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{B} = \frac{\propto \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{B\sum(X_i - \bar{X})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sum \varepsilon_i \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

لدينا: $E(\varepsilon_i) = 0$ و $\sum(\ _i - \bar{X}) = 0$ ومنه:

$$\hat{B} = B + \frac{\sum \varepsilon_i \sum (X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

بوضع: $C_{\mathrm{i}} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$ نحصل على:

$$\hat{B} = B + \sum \varepsilon_i \, C_{\mathrm{i}}$$

$$\Longrightarrow E(\hat{B}) = E(B) + \sum C_{\mathrm{i}} \, E(\varepsilon_i)$$

$$\Longrightarrow E(\hat{B}) = B + 0$$

$$\boxed{E(\hat{B}) = B}$$

1- الأمل الرياضي لـ $\hat{\propto}$

$$\hat{\propto} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X}$$

$$\hat{\propto} = \frac{\sum y}{n} - \hat{B}\bar{X} = \frac{\propto + Bx + \varepsilon_i}{n} - \hat{B}\bar{X}$$

وبالتالي فان:

$$\hat{\propto} = \propto + \mathrm{B}\overline{\mathrm{X}} + \frac{\sum \varepsilon_{\mathrm{i}}}{\mathrm{n}} - \widehat{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{X}}$$

$$\hat{\propto} = \propto + \frac{\sum \varepsilon_{\mathrm{i}}}{\mathrm{n}} - \overline{\mathrm{X}}\left(\widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{B}\right) = \propto + \frac{\sum \varepsilon_{\mathrm{i}}}{\mathrm{n}} - \bar{\mathrm{x}} \sum \varepsilon_i \, C_{\mathrm{i}}$$

بما أن التوقع الرياضي للخطأ يساوي الصفر

$E(\varepsilon_i) = 0$ ومنه

$$\boxed{E(\hat{\propto}) = \propto}$$

ب- تباين المعلمات المقدرة:

2- التباين $(\hat{B})$ والخطأ المعياري $\delta(\widehat{\ })$

توصلنا سابقا أن: $\hat{B} = B + \sum \varepsilon_i \, C_{\mathrm{i}}$

حيث يعطى الصيغة العامة لتباين بالشكل التالي:

$$v(\hat{B}) = v(\hat{B} - B) = v(= \sum \varepsilon_{\mathrm{i}} C_{\mathrm{i}})$$

$$v(\hat{B}) = \sum C_i^2 \, v(\varepsilon_i) = \frac{v(\varepsilon_i)}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

علما أن: $v(\varepsilon_i) = S^2 = \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}$ ومنه نجد:

$v(\hat{B}) = \frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{S^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$	تباين $\hat{B}$
$\delta(\hat{B}) = \sqrt{\frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{\sum(X_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{S^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}}$	الانحراف المعياري $\hat{B}$

3- التباين $(\hat{\propto})$ **والخطأ المعياري** $\delta(\hat{\propto})$: نقوم بإيجاد الخطأ المعياري $\hat{\propto}$ بنفس الطريقة السابقة:

$$\hat{\propto} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X}$$

$$\hat{\propto} = \frac{\sum y}{n} - \hat{B}\bar{X} = \frac{\propto + Bx + \varepsilon_i}{n} - \hat{B}\bar{X}$$

$$\hat{\propto} = \propto + B\bar{X} + \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - \hat{B}\bar{X}$$

$$\hat{\propto} = \propto + \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - \bar{X}(\hat{B} - B) = \propto + \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - \bar{x} = \sum \varepsilon_i C_i$$

ومنه:

$$(\hat{\propto} - \propto) == \sum \varepsilon_i (\frac{1}{n} - \bar{x} C_i)$$

بوضع : $d_i = (\frac{1}{n} - \bar{x} \cdot C_i)$ ثم نعوض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$(\hat{\propto} - \propto) = \sum \varepsilon_i d_i$$

$$v(\hat{\propto}) = v(\hat{\propto} - \propto) = v(= \sum \varepsilon_i d_i) = \sum d_i^2 V(\varepsilon_i)$$

$$v(\hat{\propto}) = V(\varepsilon_i) \cdot \sum (\frac{1}{n} - \bar{x} C_i)^2 = V(\varepsilon_i) \cdot (\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \cdot \sum C_i^2)$$

$$v(\hat{\propto}) = V(\varepsilon_i) \cdot (\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2})$$

$$v(\hat{\propto}) = \frac{V(\varepsilon_i)}{n} + \frac{V(\varepsilon_i) \cdot \bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{V(\varepsilon_i)}{n} + \bar{X}^2 \cdot v(\hat{B})$$

وبالتعويض عن: $v(\varepsilon_i) = S^2 = \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}$ نجد:

$v(\hat{\propto}) == \frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{n} + \bar{X}^2 \cdot v(\hat{B})$	تباين $(\hat{\propto})$
$\delta(\hat{\propto}) = \sqrt{\frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{n} + \bar{X}^2 \cdot v(\hat{B})}$	الانحراف المعياري $(\hat{\propto})$

- **الخصائص الإحصائية**

للمعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى ثلاث خصائص إحصائية وهي خاصية عدم التحيز وخاصية الكفاءة وخاصية الاتساق

- **خاصية عدم التحيز:نقول أن** $\hat{B}$ هو أفضل مقدر غير متحيز للمعلمة B اذا كان توقع المعلمة المقدرة $\hat{B}$ يساوي B
- **خاصية الكفاءة: نقول أن المعلمة المقدرة** $\hat{B}$ مقدر كفؤ إذا كان يتميز بأصغر تباين.
- **خاصية الاتساق:** نقول أن المعلمات المقدرة هي مقدرات متسقة إذا تحقق مل يلي: كلما كبر حجم العينة فان قيمة المعلمة المقدرة $\hat{B}$ تقترب من قيمة المعلمة الحقيقية B، وتباين المعلمة المقدرة يقترب من الصفر، يمن التعبير رياضيا ذلك كما يلي:

<u>أولا:</u>

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{B}) = B \quad , \qquad \lim_{n \to \infty} E(\hat{\propto}) = \propto$$

<u>ثانيا:</u>

$$limv(\hat{B}) = 0 \qquad limv(\hat{B}) = 0$$

مثال: بالاعتماد على معطيات ونتائج حل المثال 01 ، احسب التباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.

الحل:

$e_i{}^2 = (y - \hat{y})^2$	$e_i = y - \hat{y}$	$\hat{y}$	Y	X
0.2500	*0.50*	*4.5*	*4*	*2*
0.5625	*0.75*	*6.25*	*7*	*3*
0.0625	*0.25*	*2.75*	*3*	*1*
0.5625	*0.75*	*9.75*	*9*	*5*
0.0625	*0.25*	*16.75*	*17*	*9*
1.5			**40**	**20**

حساب التباين والانحراف المعياري للمعلمة $(\hat{B})$

$$v(\hat{B}) = \frac{S^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\frac{1.5}{5-3}}{40} = 0.125$$

$$\delta(\hat{B}) = \sqrt{\frac{S^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{\sum(X_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1.5}{5-3}}{40}} = 0.112$$

حساب التباين والانحراف المعياري للمعلمة $(\hat{\propto})$

$$v(\hat{\propto}) == \frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{n} + \bar{X}^2 \cdot v(\hat{B}) = \frac{\frac{1.5}{5-3}}{5} + (4)^2 \cdot 0.125 = 0.3$$

$$\delta(\widehat{\propto}) = \sqrt{\frac{\frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{n} + \overline{X}^2 \cdot v(\widehat{B})} = \sqrt{\frac{\frac{1.5}{5-3}}{5} + (4)^2 \cdot 0.125} = 0.548$$

1- دراسة صلاحية النموذج

لدراسة صلاحية النموذج نتبع الخطوات التالية:

أ- **قياس القدرة التفسيرية والقوة الارتباطية للنموذج:** ولهذا الغرض يستعمل معامل الارتباط لقياس القوة الارتباطية r ومعامل التحديد R^2 لقياس القوة التفسيرية

ب-معامل الارتباط: ولحساب معامل الارتباط ، تستخدم صيغة التالية :

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

- إشارة معامل الارتباط سالبة ($r < 0$) توجد علاقة عكسية بين المتغيرين، بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يصاحبه انخفاض في المتغير الثاني، والعكس.
- إذا كانت إشارة معامل الارتباط موجبة ($r > 0$)توجد علاقة طردية بين المتغيرين، بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الثاني، والعكس .
- إذا كان معامل الارتباط قيمته صفرا ($r = 0$) دل ذلك على انعدام العلاقة بين المتغيرين.

قوة العلاقة:. ويمكن الحكم على قوة العلاقة من حيث درجة قربها أو بعدها عن (± 1)، حيث أن قيمة معامل الارتباط تقع في المدى($-1 < r < 1$)، فكلما اقتربت قيمة من +1 دل على وجود علاقة قوية بين المتغير التابع والمتغير المستقل والعكس صحيح.

- **معامل التحديد** : وهو عبارة عن النسبة بين التغير في القيم المقدرة على التغير الكلي، كما يمكن حسابه عن طريق المتممة بالنسبة لتغير البواقي على التغير الكلي:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\hat{B}^2 \sum(X_i - \bar{X})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

علما ان: $\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$

كما يمكن حساب معامل التحديد انطلاقا من معامل الارتباط حيث $^2 = R^2$

ويقيس لنا معامل التحديد القدرة التفسيرية لنموذج الانحدار فمثلا معامل التحديد $^2 = 0.75$ معناه أن

75 % من تغير المتغير التابع Y يرجع إلى تغير المتغير المستقل X ، أما النسبة المتبقية فترجع إلى عوامل أخرى لم تأخذ بعين الاعتبار في هذا النموذج.

مثال:

$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{B}x + \varepsilon_i \qquad \bar{Y} = 793.43 \quad \bar{X} = 879.24 \quad SST = 64972.12$
$S_{xx} = \sum(X_i - \bar{X})^2 = 67192.44 \quad S_{yx} = \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 65799.34$
$\sum \varepsilon_i = \sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = 537 \qquad n = 10$

المطلوب:

- قدر معلمات النموذج $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{B}x + \varepsilon_i$
- احسب التباين الغير مفسر $\sum(\mathrm{X_i} - \overline{\mathrm{X}})^2$ بطرقتين مختلفتين
- احسب معامل التحديد ومعامل الارتباط

الحل:

- حساب معلمات النموذج:

$$\hat{B} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{65799.34}{67192.44} = 0.9792$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{X} = 793.43 - (0.9792)(879.24) = 67.52$$

حساب التباين الغير المفسر $\sum(\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2$ بطرقتين

الطريقة الأولى:

$$\sum(\mathrm{y_i} - \bar{\mathrm{y}})^2 = \sum(\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2 + \sum(\mathrm{y_i} - \hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i})^2 = 64972.12 - 537 = 64435.12$$

الطريقة الثانية:

$$\sum(\mathrm{y_i} - \bar{\mathrm{y}})^2 = \hat{B}^2\sum(\mathrm{X_i} - \overline{\mathrm{X}})^2 = (0.9792)^2 \cdot 67192.44 = 64435.12$$

- حساب معامل التحديد

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum(\hat{\mathrm{y}}_\mathrm{i} - \bar{\mathrm{y}})^2}{\sum(\mathrm{y_i} - \bar{\mathrm{y}})^2}\frac{64435.12}{64972.12} = 0.9917$$

أي أن 99.17% من تغير y يرجع الى تغير X والنسبة المتبقية 0.83 % ترجع الى عوامل اخرى لم تدرج في النموذج.

- حساب معامل الارتباط :

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.9917} = 0.9958$$

- العلاقة بين X و Y هي علاقة قوية وطردية، بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الثاني، والعكس .

2- اختبار المعنوية الكلية لنموذج:

يمكن اختبار المعنوية الكلية لنموذج الانحدار البسيط من خلال تشكيل جدول التباين، وهو تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار. الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعامل β. ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين:

مصدر التغير	التغير	درجات الحرية	المتوسط التربيعي
الانحدار	$SSR = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	*K-1*	$\frac{SSR}{K-1}$
البواقي	$SSE = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	*n-K*	$\frac{SSE}{n-K}$
المجموع	$SST = \sum(y_i - \bar{y})^2$	*n-1*	$F = \frac{SSR}{\frac{SSE}{n-k}}$

مثال05:بالاعتماد عل معطيات المثال رقم04 كون جدول تحليل التباين واحسب إحصائية فيشر

مصدر التغير	التغير	درجات الحرية	المتوسط التربيعي
الانحدار	$SSR = 64435.13$	*1*	64435.13
البواقي	$SSE = 537$	*8*	67.125
المجموع	$SST64972.12$	*9*	$F_c = \frac{64435.13}{67.125} = 959.94$

اختبار F هو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع. وتقارن قيمة فيشر المحسوبةF_c مع قيمة فيشر الجدولية F_t بدرجة حرية للبسط تساوي k-1 ودرجة حرية المقام n-k. وعند مستوى معنوية معين وفي حالة فيشر المحسوبة اكبر من فيشر الجدولية نقول النموذج معنوي في مجمله. وفي مثالنا هذا فيشر المحسوبة اكبر من فيشر الجدولية عند مستوى معنوي 5% والتي تساوي 5.32 .

ج- اختبار معنوية المعلمات المقدرة

لاختبار معنوية المعلمات المقدرة بالنسبة لنموذج الانحدار البسيط نستعمل اختبار ستودنت، ويمكن توضيح خطوات تطبيق هذا الاختبار لدراسة معنوية المعلمات المقدرة كما يلي:

- **الخطوة الأولى:** وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة، حيث ان الفرضية الصفرية H_0 تقول ان $\hat{B}_i$ (معلمة نمودج الانحدار المراد اختبارها) غير معنوية، والفرضية البديلة H_1 تقول ان معلمة الانحدار لها معنوية احصائية ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: B_i = 0 \\ H_1: B_i \neq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية:** حساب قيمة ستودنت المحسوبة t_{cal} :

$$t_{cal} = \frac{\hat{B}_i - B_i}{\sqrt{v(\hat{B}_i)}} = \frac{B_i}{\delta(\hat{B}_i)}$$

- **الخطوة الثالثة:** اتخاذ القرار: لاتخاذ القرار حول معنوية $\hat{B}_i$ نقوم بمقارنة قيمة ستودنت المحسوبة t_{cal} مع قيمة ستودنت الجدولية $t^{\propto\%}_{tab(n-2)}$ عند درجة حرية $n-2$ ومستوى معنوية $\propto$ فادا كان:

$t_{cal} > t^{\propto\%}_{tab(n-2)}$ فإننا نقبل الفرضية البديلة $_1$ ونقول أن $\hat{B}_i$ معنوي ويختلف عن الصفر.

$t_{cal} < t^{\propto\%}_{tab(n-2)}$ فإننا نقبل الفرضية البديلة ونقول أن $\hat{B}$ غير معنوي

1- التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:

معادلة الانحدار المقدرة $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + e_t$ تستخدم في عملية التنبؤ لقيم Y لقيم محدده من X . إذا كانت X_0 تمثل القيمة المحددة منX تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_0 من قيم Y.

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 + e_0$$

حيث e تمثل حد الخطأ.

حيث يمثل خطأ التنبؤ $\hat{Y}_0 - Y_0 = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0 + e_0$

حيث إن $E(\hat{\alpha} - \alpha) = 0, E(\hat{\beta} - \beta) = 0, E(e_0) = 0$

إذا تكون $\mathrm{E}(\hat{\mathrm{y}}_0 - \mathrm{y}_0) = 0$

هذه تعني إن قيمة Y هي قيمه غير متحيزة ويكون تباين يساوي:

$$V(\hat{y}_0 - y_0) = V(\hat{\alpha} - \alpha) + X_0^2 V(\hat{\beta} - \beta) + 2X_0 COV(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta) + V(e)$$

$$= v(e)\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X - \overline{X})^2}\right] + v(e)\frac{X_0^2}{\sum (X - \overline{X})^2} - 2X_0 v(e)\frac{\overline{X}}{\sum (X - \overline{X})^2} + v(e)$$

$$\boxed{= v(e)\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum (X - \overline{X})^2}\right]}$$

وبتعويض $v(e)$ بـ $S^2 = \frac{(\mathrm{y_i} - \hat{\mathrm{y}})^2}{\mathrm{n}-2}$ نحصل على مجال الثقة لـ $\hat{y}$ بالشكل التالي:

$$\hat{\mathrm{y}}_{\mathrm{t+h}} \in \left[\hat{\mathrm{y}} - \mathrm{t}_{\mathrm{n}-2}^{\propto\%} \mathrm{S}\sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{n}} + \frac{(\mathrm{X}_0 - \overline{\mathrm{X}})^2}{\sum (\mathrm{X} - \overline{\mathrm{X}})^2}} \quad , \quad \hat{\mathrm{y}} + \mathrm{t}_{\mathrm{n}-2}^{\propto\%} \mathrm{S}\sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{n}} + \frac{(\mathrm{X}_0 - \overline{\mathrm{X}})^2}{\sum (\mathrm{X} - \overline{\mathrm{X}})^2}}\right]$$