

ملخصات شوم  
نظريات ومسائل

فـ

الإحصاء والاقتصاد القياسي





ملخصات شوم  
نظريات ومسائل  
في

# الإحصاء والاقتصاد القياسي

تأليف

دومينيك سالفاتور Ph.D

أستاذ لإقتصاد

جامعة فورد هام

ترجمة

لدكتورة سعاد حافظ منتصر

قسم لإحصاء - كلية التجارة

جامعة عين شمس - جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور عبد العظيم أنيس

أستاذ غير مصرع - جامعة عين شمس

جمهورية مصر العربية



الدار الدولية للنشر والتوزيع



بسم الله الرحمن الرحيم

### مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة ،

والكلمة هي مصدر المعرفة ،

والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والاعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً .  
حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضاراتها وإضاعة  
الطريق بنور العلم والمعرفة

والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ثم  
توزيعها ، وذلك وحده هو الذي يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الأفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود . ويوم  
يحظى القارئ بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية لهر اليوم الذي تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للنشر والتوزيع تشمر بالرضا عن مساهمتها في هذا المجال بتقديم الطبقات العربية  
للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها . مستهدفة توفير  
احتياجات القارئ العربي استاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية  
للتعاون معنا في إصدار طبقات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمي والحضاري  
للقارئ العربي

والله ولي التوفيق

محمد وفائي كامل

مدير عام

الدار الدولية للنشر والتوزيع

## مقدمة

يقدم هذا الكتاب مدخلا واضحا ومحكما في الإحصاء والاقتصاد القياسى . وغالباً ماتكون مادة الإحصاء أو الاقتصاد القياسى واحدة من أكثر المواد صعوبة وأكثرها فائدة في نفس الوقت ، من بين المواد التى تدرس بالكلية والجامعات . ومن ثم ، فإن الهدف من هذا الكتاب هو التغلب على هذه الصعوبة باستخدام مدخل يعتمد على الشرح من خلال حل المسائل .

ويبدأ كل فصل بتقرير النظرية ، والمبادئ أو الخلفية اللازمة من المعلومات ، موضحة تماماً بأمثلة . ثم يتبع ذلك العديد من المسائل النظرية والعملية مصحوبة بحلول تفصيلية « خطوة بعد خطوة » . وبهذا قصد أساساً من هذا الكتاب أن يكون مكملاً للكتب القياسية المتداولة في الإحصاء والاقتصاد القياسى ، فإنه يمكن استخدامه أيضاً ك مرجع مستقل بذاته أو بالإضافة إلى المحاضرات .

ويقدم الكتاب مادة في الإحصاء والاقتصاد القياسى تكفى فصلاً دراسياً واحداً أو سنة كاملة لطلاب الجامعة في الاقتصاد ، إدارة الأعمال ، والعلوم الاجتماعية . كما أنه يقدم مرجعاً مفيداً جداً لطلاب الماجستير ولكل من يستخدمون أو يرغبون في استخدام الإحصاء والاقتصاد القياسى في أعمالهم . وهو لا يفترض خلفية إحصائية لدى القارئ .

ويعتبر الكتاب متكاملًا من حيث أنه يغطى مواد الإحصاء ( الفصول ١ - ٥ ) المطلوبة لدراسة الاقتصاد القياسى ( الفصول ٦ - ١٠ ) ، ويركز الكتاب على الجانب التطبيقى حيث تأتى البراهين في قسم المسائل وليس في سياق الشرح . كما يستخدم الكتاب كلما أمكن بيانات واقعية اقتصادية - اجتماعية وفي مجال الأعمال لتوضيح أساليب ونماذج الاقتصاد القياسى الأكثر تقدماً . وقد تضمن الكتاب برنامج كميوتر كامل لتوضيح كيفية استخدام وتفسير النتائج باستخدام واحد من أكثر البرامج الإحصائية شيوعاً :

*The Statistical Package for the Social Sciences (SPSS)* وقد تعرض الكتاب بوضوح وأحكام لموضوعات في الاقتصاد القياسى تترى الباحثين كثيراً ، مثل تعدد العلاقات الخطية والارتباط الذاتى حيث يناقش المشاكل الناجمة عنها وطرق اختبار وجودها والأساليب الممكنة لتصويبها . كما يتضمن الكتاب عينة من امتحانات الإحصاء والاقتصاد القياسى .

وقد تم اختبار منهجية هذا الكتاب والكثير من محتوياته عند تدريس الإحصاء والاقتصاد القياسى على مستوى البكالوريوس والدراسات العليا بجامعة فورد هام ، ووجد الطلاب أن منهجية ومحتويات الكتاب بالغة الفائدة وقدموا اقتراحات قيمة عديدة لتحسينه . كما تلقت اقتراحات مفيدة جداً من الأساتذة جون بيدريه وإدوارد داولنج من جامعة فورد هام . كما أن الطلاب التالية أسماءهم قد قرأوا بعناية أصول الكتاب وقدموا الكثير من الاقتراحات المفيدة : وليم فوت ، فرانك التيرى ، سيسليا ونترز ، توماس لودر ، ريتشارد مايكلفيلدر أنيتا باسمانتير وكوفى ومورين رايز . وإليهم جميعاً أقدم عميق امتنانى . كما أننى مدين علمياً لأساتذتى السابقين في الإحصاء والاقتصاد القياسى : جاك جونستون ، لورانس كلاين وبرنارد أوكن . وأخيراً ، أود أن أعبر عن امتنانى لجوزيف ميدلتون ، وتشارلز بارسيلونا ، ومارى جرير من مركز كميوتر جامعة فورد هام وكذلك للعاملين بسلسلة شوم فى دار ماكجروهيل للنشر ، خصوصاً جون آليانو ونك مونى لمساعدتهم الطيبة والماهرة .

كما أننى ممن لمنفذ وصية المرحوم سيررونالد أ . فيشر وللدكتور فرانك ياتس ومجموعة لونيغان ليمتد ، لندن ، لسماحهم باستخدام وتمديد الجداول ٣ و ٤ من كتابهم « جداول إحصائية للبحوث البيولوجية والزراعية الطبية » .

إن سلسلة شوم فى الاقتصاد تتضمن بالإضافة إلى كتاب الإحصاء والاقتصاد القياسى الكتب التالية : نظرية التحليل الجزئى ، نظرية التحليل الكلى ، الاقتصاد الدولى ، اقتصاديات التنمية ، الرياضيات للاقتصاديين ، وأصول الاقتصاد .

دومينيك سالفاتور

# المحتويات

|     |                                                           |
|-----|-----------------------------------------------------------|
| ٧   | الفصل الأول : تمهيد                                       |
| ٧   | ١ - ١ طبيعة علم الإحصاء                                   |
| ٧   | ٢ - ١ الإحصاء والاقتصاد القياسي                           |
| ٨   | ٣ - ١ منهاج الاقتصاد القياسي                              |
| ١٥  | الفصل الثاني : الإحصاء الوصفي                             |
| ١٥  | ١ - ٢ التوزيعات التكرارية                                 |
| ١٧  | ٢ - ٢ مقاييس النزعة المركزية                              |
| ١٩  | ٣ - ٢ مقاييس التشتت                                       |
| ٢١  | ٤ - ٢ أشكال التوزيعات التكرارية                           |
| ٤٢  | الفصل الثالث : الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية             |
| ٤٢  | ١ - ٣ احتمال حدث منفرد                                    |
| ٤٣  | ٢ - ٣ احتمال الأحداث المتعددة                             |
| ٤٥  | ٣ - ٣ التوزيعات الاحتمالية المنفصلة : توزيع ذي الحدين     |
| ٤٦  | ٤ - ٣ توزيع بواسون                                        |
| ٤٧  | ٥ - ٣ اتوزيعات الاحتمالية المتصلة : التوزيع الطبيعي       |
| ٧٦  | الفصل الرابع : الاستدلال الإحصائي : التقدير               |
| ٧٦  | ١ - ٤ المصانة                                             |
| ٧٦  | ٢ - ٤ توزيع المصانة للمتوسط                               |
| ٧٨  | ٣ - ٤ التقدير باستخدام التوزيع الطبيعي                    |
| ٨٠  | ٤ - ٤ فترات الثقة للمتوسط باستخدام توزيع t                |
| ٩٩  | الفصل الخامس : الاستدلال الإحصائي : اختبار الفروض         |
| ٩٩  | ١ - ٥ اختبار الفروض                                       |
| ٩٩  | ٢ - ٥ اختبار الفروض عن الوسط والنسبة في المجتمع           |
| ١٠١ | ٣ - ٥ اختبار الفروض عن الفرق بين وسطين أو الفرق بين نسبين |
| ١٠٢ | ٤ - ٥ اختبار كاي - تربيع لجودة التوفيق والاستقلال         |
| ١٠٤ | ٥ - ٥ تحليل التباين                                       |
| ١٣٤ | إمتحان إحصاء                                              |
| ١٣٨ | الفصل السادس : تحليل الانحدار البسيط                      |
| ١٣٨ | ١ - ٦ النموذج الخطي لتغيرين                               |
| ١٣٨ | ٢ - ٦ طريقة المربعات الصغرى                               |

|     |                                                              |
|-----|--------------------------------------------------------------|
| ١٤٠ | ٦ - ٣ اختبارات المنوية لتقديرات المعالم                      |
| ١٤٢ | ٦ - ٤ اختبار جودة التوفيق والارتباط                          |
| ١٤٣ | ٦ - ٥ خواص مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية              |
| ١٦٥ | <b>الفصل السابع : تحليل الانحدار المتعدد</b>                 |
| ١٦٥ | ٧ - ١ النموذج الخطي لثلاثة متغيرات                           |
| ١٦٧ | ٧ - ٢ اختبارات المنوية لتقديرات المعالم                      |
| ١٦٨ | ٧ - ٣ معامل التحديد المتعدد                                  |
| ١٦٨ | ٧ - ٤ اختبار المنوية الكلية للانحدار                         |
| ١٦٩ | ٧ - ٥ معاملات الارتباط الجزئي                                |
| ١٨٩ | <b>الفصل الثامن : أساليب وتطبيقات أخرى في تحليل الانحدار</b> |
| ١٨٩ | ٨ - ١ شكل الدالة                                             |
| ١٨٩ | ٨ - ٢ المتغيرات الصورية                                      |
| ١٩٠ | ٨ - ٣ نماذج فترات الإبطاء الموزعة                            |
| ١٩٢ | ٨ - ٤ التنبؤ                                                 |
| ٢١٥ | <b>الفصل التاسع : مشاكل في تحليل الانحدار</b>                |
| ٢١٥ | ٩ - ١ تمدد العلاقات الخطية                                   |
| ٢١١ | ٩ - ٢ اختلاف التباين                                         |
| ٢١١ | ٩ - ٣ الارتباط الذاتي                                        |
| ٢١٣ | ٩ - ٤ أخطاء في المتغيرات                                     |
| ٢٣٢ | <b>الفصل العاشر : طرق المعادلات الآتية</b>                   |
| ٢٣٢ | ١٠ - ١ نماذج المعادلات الآتية                                |
| ٢٣٢ | ١٠ - ٢ التمييز                                               |
| ٢٣٣ | ١٠ - ٣ التقدير : المربعات الصغرى المباشرة                    |
| ٢٣٤ | ١٠ - ٤ المربعات الصغرى على مرحلتين                           |
| ٢٤٩ | امتحان التصديق القياسي                                       |
| ٢٥٦ | ملحق ١ : توزيع ذي الحدين                                     |
| ٢٥٧ | ملحق ٢ : توزيع بواسون                                        |
| ٢٥٨ | ملحق ٣ : التوزيع الطبيعي                                     |
| ٢٥٩ | ملحق ٤ : جدول الأعداد العشوائية                              |
| ٢٥٩ | ملحق ٥ : توزيع $t$                                           |
| ٢٦٠ | ملحق ٦ : توزيع كاي - تربيع                                   |
| ٢٦١ | ملحق ٧ : توزيع $F$                                           |
| ٢٦٤ | ملحق ٨ : احصاء ديربين - واتسون                               |
| ٢٦٥ | المصطلحات العلمية (عربي - انجليزي)                           |
| ٢٧٠ | المصطلحات العلمية (انجليزي - عربي)                           |
| ٢٧٥ | الفهرس الإجمالي                                              |

# الفصل الأول

## تمهيد

### ١-١ طبيعة علم الإحصاء

يختص علم الإحصاء بجمع وعرض وتحليل واستخدام البيانات الرقمية لعمل استدلالات واتخاذ قرارات في ظل عدم التأكد في مجالات الاقتصاد والأعمال وغيرها من العلوم الاجتماعية والطبيعية .

وينقسم الإحصاء إلى الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي . ويختص الإحصاء الوصفي بتلخيص وتوصيف مجموعة من البيانات . بينما يختص الإحصاء الاستدلالي بالوصول إلى تعميم عن خواص الكل ( ويسمى المجتمع ) من واقع فحص جزء من هذا الكل ( ويسمى العينة ) . ولكي يكون هذا التعميم سليماً فإن العينة يجب أن تكون ممثلة للمجتمع وأن يتم تحديد احتمال الخطأ في هذا التعميم .

وسوف نناقش الإحصاء الوصفي بالتفصيل في الفصل الثاني ، ويل ذلك الاستدلال الإحصائي ( وهو الأهم ) ، حيث نتناول موضوع الاحتمال في الفصل الثالث وموضوع التقدير في الفصل الرابع واختبارات الفروض في الفصل الخامس .

مثال ( ١ ) : افترض أن لدينا بيانات عن دخل 1000 أسرة أمريكية . فإن هذه البيانات يمكن تلخيصها بإيجاد متوسط دخل الأسرة وتعيين مدى انتشار دخل الأسر حول هذا المتوسط . ويمكن أيضاً توصيف البيانات بإنشاء جدول أو رسم بياني لعدد أو نسبة العائلات في كل فئة من فئات الدخل . أن هذا مانعته بالإحصاء الوصفي . أما إذا كانت هذه الأسر ( 1000 أسرة ) ممثلة لجميع العائلات الأمريكية فإنه يمكننا تقدير متوسط دخل الأسرة في الولايات المتحدة كلها وإجراء اختبارات للفروض عن هذا المتوسط . وحيث أن هذه النتائج معرضة للخطأ فإن علينا أيضاً أن نحدد احتمال الخطأ في هذه النتائج . إن هذا هو موضوع الاستدلال الإحصائي .

### ٢-١ الإحصاء والاقتصاد القياسي

يختص الاقتصاد القياسي بتطبيق النظرية الاقتصادية ، والرياضيات ، والأساليب الإحصائية في اختبار الفروض ، والتقدير ، والتنبؤ بالظواهر الاقتصادية . وقد ارتبط الاقتصاد القياسي ارتباطاً وثيقاً بتحليل الانحدار . وينصب تحليل الانحدار على قياس العلاقة بين متغير تابع ومتغير مستقل أو أكثر . وحيث أن العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية تكون بصفة عامة غير دقيقة فإنه يجب إضافة عنصر يمثل الخطأ أو التشويش ( له خواص احتمالية محددة ) في العلاقة ( أنظر المسألة ١ - ٨ ) .

ويتعلق الفصلان السادس والسابع بتحليل الانحدار ، ويمثل الفصل الثامن امتداد نموذج الانحدار الأساسي ، ويتناول الفصل التاسع طرقاً لاختبار فروض نموذج الانحدار الأساسي ولإجراء التصحيحات الناتجة عن الخروج عن فروض النموذج في حين يتناول الفصل العاشر طرق التقدير للمعادلات الآتية . ومن ثم فإن الفصول من ( ١ - ٥ ) تتناول الإحصاء اللازم لدراسة الاقتصاد القياسي ( الفصول من ٦ - ١٠ ) .

مثال ( ٢ ) : تخبرنا نظرية الاستهلاك أن الناس عموماً يزيدون من إنفاقهم على الاستهلاك  $C$  كلما زاد الدخل ( بعد الضرائب ) المتاح  $Y_d$  . ولكن الزيادة في الاستهلاك لا تكون بنفس قدر الزيادة في الدخل المتاح . ويمكن التعبير عن ذلك بمعادلة خطية صريحة كالآتي :

$$C = b_0 + b_1 Y_d \quad (1-1)$$

حيث  $b_0$  و  $b_1$  ثوابت مجهولة تسمى معالم . فالمعلمة  $b_1$  هي ميل خط الانحدار وتمثل الميل الحدى للاستهلاك MPC . وحيث أنه من المرجح حتى بالنسبة للأفراد الذين تتساوى دخولهم المتاحة أن يختلف إنفاقهم الاستهلاكي ، فإن العلاقة الدقيقة نظرياً والمحددة بالمعادلة (١-١) يجب أن تعدل بإضافة عنصر تشويش عشوائي أو حد الخطأ  $u$  بحيث تكون المعادلة ذات طابع احتمالي على النحو التالي .

$$C = b_0 + b_1 Y_d + u \quad (٢-١)$$

### ٣-١ منهاج الاقتصاد القياسي

تتضمن بحوث الاقتصاد القياسي ، بصفة عامة ، المراحل الثلاث الآتية :

المرحلة ١ : تحديد النموذج أو الفرض المستخدم في شكل معادلة احتمالية صريحة ، مع توقعات نظرية مسبقة عن إشارة وحجم معالم الدالة .

المرحلة ٢ : جمع بيانات عن متغيرات النموذج وتقدير معاملات الدالة باستخدام أساليب الاقتصاد القياسي المناسبة ( الفصول من ٦ إلى ٨ ) .

المرحلة ٣ : تقييم المعاملات المقدرة في الدالة باستخدام معايير الاقتصاد والإحصاء والاقتصاد القياسي .

مثال ( ٣ ) : المرحلة الأولى لبحوث الاقتصاد القياسي في نظرية الاستهلاك تكون بتقديم النظرية في شكل معادلة احتمالية صريحة ، كما في معادلة (١-١) ، مع توقع أن تكون  $b_0 > 0$  ( أى أنه عند  $Y_d = 0$  فإن  $C > 0$  ) إذ أن المستهلك يسحب من مدخراته أو يقترض لكي يستهلك ) ، وأن  $0 < b_1 < 1$  . وتتضمن المرحلة الثانية جمع بيانات عن الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح واستخدامها في تقدير المعادلة (١-١) . وتتضمن المرحلة الثالثة في بحوث الاقتصاد القياسي ( ١ ) التأكد عما إذا كانت القيمة المقدرة  $b_0 > 0$  ، والقيمة المقدرة  $0 < b_1 < 1$  ، ( ٢ ) تحديد ما إذا كانت نسبة « مرضية » من التغير في  $C$  يمكن تفسيرها « كنتيجة للتغير في  $Y_d$  ، وكذلك ما إذا كانت كل من  $b_0$  ،  $b_1$  « معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية مقبول » ( أنظر المسألة ١ - ١٣ ( ح ) والقمم ٥ - ٣ ) ، ( ٣ ) اختبار ما إذا كانت شروط نموذج الانحدار 'الأساسي متوافرة' ، فإن لم تتوافر ، يحدد كيفية إجراء تصحيح نتيجة الخروج على هذه الشروط . فإذا لم تجتز العلاقة المقدرة هذه الاختبارات ، فيجب تعديل العلاقة المفترضة وإعادة التقدير حتى يتم التوصل إلى علاقة استهلاك مقدرة مرضية

### مسائل محلولة

#### طبيعة علم الإحصاء :

- ١ - ١ ماهو الفرض وما هي وظيفة كل من ( أ ) مجال دراسة الإحصاء ؟ ( ب ) الإحصاء الوصفي ؟ ( ج ) الاستدلال الإحصائي ؟
- ( أ ) الإحصاء مجموعة من الإجراءات والأساليب المستخدمة في جمع وعرض تحليل البيانات التي تبني عليها القرارات في مواجهة عدم التأكد أو في مواجهة معلومات ناقصة . وفي الوقت الحاضر نجد أن التحليل الإحصائي يستخدم تقريباً في كل مهنة . فالإحصاء يستخدم لاختبار كفاءة أساليب الإنتاج المختلفة ، ورجل الأعمال قد يستخدمه لاختبار تصميم أو تغليف المنتج بما يعظم المبيعات ، والباحث الاجتماعي يستخدمه لتحليل نتائج عقار معين على برنامج تأهيل ، وعالم النفس الصناعي لدراسة استجابات العمال لظروف العمل بالمصنع ، والعالم السياسي للتنبؤ بأنماط التصويت ، والطبيب لاختبار فعالية عقار جديد ، والكيميائي لإنتاج أسمدة أرخص ، وهكذا . . .
- ( ب ) الإحصاء الوصفي يختزل مجموعة البيانات إلى معلومة أو اثنتين تميزان كل البيانات . ويتعلق أيضاً الإحصاء الوصفي بتقديم مجموعة البيانات على شكل جداول أو رسوم بيانية ، وغيرها من وسائل العرض البياني .
- ( ج ) الإحصاء الاستدلالي ( ويشمل التقدير واختبارات الفروض ) ويتعلق باستخلاص تعميمات عن خواص المجتمع من واقع خواص عينة مأخوذة من هذا المجتمع . ومن ثم فإن الإحصاء الاستدلالي يتضمن تعميلاً استقرائياً . ( وذلك على نقيض التعليل الاستنباطي الذي يستنبط خواص الجزء مبتدئاً بالكل ) .



١ - ٢ (أ) أيها أكثر أهمية في الوقت الحاضر ؟ الإحصاء الوصفي أم الإحصاء الاستدلالي ؟

(ب) ماهي أهمية استخدام عينة ممثلة في الاستدلال الإحصائي ؟

(ج) لماذا نحتاج نظرية الاحتمالات ؟

(أ) بدأ الإحصاء كعلم وصفي بحث ، ولكنه تطور إلى أداة قوية لاتخاذ القرارات مع نمو فرع الاستدلال فيه . وأصبح التحليل الإحصائي الحديث ينصب أساساً على الإحصاء الاستدلالي . ومع ذلك فإن الإحصاء الاستدلالي والإحصاء الاستنباطي مكملان أحدهما للآخر . وقبل أن نتعلم التعميم من العينات إلى المجتمعات يجب أن نتعلم كيفية توليد العينات من المجتمع .

(ب) لكي يكون الاستدلال الإحصائي سليماً يجب أن يستند إلى عينة تعكس تماماً صفات وخواص المجتمع الذي سميت منه . وتكون العينة ممثلة إذا كانت المماثلة عشوائية حيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع نفس الفرصة للدخول في العينة ( أنظر قسم ٤ - ١ ) .

(ج) حيث أن احتمال الخطأ وارد في الاستدلال الإحصائي فإن تقديرات واختبارات خواص المجتمع تعطى ومعهما فرصة أو احتمال الخطأ في هذه التقديرات أو الاختبارات ومن هنا فإن نظرية الاحتمالات تعتبر عنصراً أساسياً في الاستدلال الإحصائي .

١ - ٣ كيف يمكن لمدير شركة تنتج مصابيح كهربائية أن يلخص ويصف لاجتماع مجلس الإدارة نتائج اختبار عمر عينة من 100 مصباح من إنتاج الشركة ؟

إن عرض البيانات ( الخام ) عن عمر كل مصباح في العينة أمر غير ملائم ويستغرق وقتاً طويلاً من أعضاء المجلس لتقويمها . ويمكن بدلاً من ذلك أن يقوم المدير باختزال البيانات بتوضيح أن متوسط عمر المصابيح التي تم اختبارها في العينة هو 360 ساعة وأن 95% من المصابيح التي فحصت قد عاشت بين 320 و 400 ساعة . ويكون المدير بذلك قد قدم معلومتين ( متوسط العمر وانتشار المفردات حول القيمة الوسطى ) تميزان عمر المصابيح المائة التي تم فحصها . وقد يرى المدير أيضاً أن يصف البيانات باستخدام جدول أو رسم بياني يوضح عدد أو نسبة المصابيح موزعة على فئات طول كل منها عشرة ساعات طبقاً للعمر الذي قضاه كل مصباح . ويكون مثل هذا العرض الجدولي أو البياني مفيداً في الإلمام العام السريع بالبيانات . وبتلخيص وتوصيف البيانات على النحو الموضح يكون المدير قد استخدم الإحصاء الوصفي . وجدير بالذكر أن الإحصاء الوصفي يمكن استخدامه في تلخيص وتوصيف أي مجموعة من البيانات سواء كانت عينة ( كالمثال السابق ) أو مجتمعاً ( عندما تكون مفردات المجتمع معروفة ويمكن قياس خواصها ) .

١ - ٤ (أ) لماذا قد يرغب المدير في مسألة ١ - ٣ أن يتطرق إلى الاستدلال الإحصائي ؟

(ب) ماذا يتضمن هذا وماذا يتطلب ؟

(أ) تتطلب مراقبة جودة الإنتاج أن يكون لدى المدير فكرة جيدة تماماً عن متوسط عمر المصابيح الكهربائية التي تنتجها الشركة والانتشار حول هذا المتوسط . غير أن فحص جميع المصابيح الكهربائية يؤدي إلى تدمير إنتاج الشركة كله . وحتى عندما لا يؤدي الفحص إلى تدمير المنتج ، فإن فحص الإنتاج كله يكون عادة باهظ التكلفة ويستغرق وقتاً طويلاً . وعليه ، فإن الإجراء المتبع هو أخذ عينة من الإنتاج والاستدلال على خواص وصفات الإنتاج كله ( المجتمع ) من الصفات المناظرة للعينة المسحوبة من المجتمع .

(ب) يتطلب الاستدلال الإحصائي أولاً أن تكون العينة ممثلة للمجتمع الذي تؤخذ منه . فإذا كانت الشركة تنتج المصابيح الكهربائية في مصانع مختلفة ، باستخدام أكثر من ورديّة واحدة ، وباستخدام مواد خام مشتركة من أكثر من مورد فهذه جميعاً يجب أن تمثل في العينة بنسبة مساهمتها في الإنتاج الكلي للشركة . فباستخدام متوسط عمر المصابيح في العينة والانتشار حول هذا المتوسط يمكن لمدير الشركة أن يقدر ، باحتمال 95% أن يكون تقديره صحيحاً واحتمال 5% أن يكون

تقديره خاطئاً ، أن متوسط العمر لكل المصايح التي تنتجها الشركة يقع بين 320 و 400 ساعة ( أنظر قسم ٤ - ٣ ) .  
وكبدل يمكن للمدير أن يستخدم معلومات العينة لكي يختبر ، باحتمال 95% أن يكون على صواب ، واحتمال 5% أن يكون على خطأ ، أن متوسط العمر في مجتمع جميع المصايح التي تنتجها الشركة أكبر من 320 ساعة ( أنظر قسم ٥ - ٢ ) . وسواء في التقدير أو في اختبار متوسط المجتمع باستخدام بيانات العينة يكون المدير مستخدماً للاستدلال الإحصائي .

#### الإحصاء والاقتصاد القياسي :

١ - ٥ ماذا يقصد بالآتي ( أ ) اقتصاد قياسي ؟ ( ب ) تحليل الانحدار ؟ ( ح ) حد التشويش أو الخطأ ؟ ( د ) نماذج المعادلات الآتية ؟  
( أ ) الاقتصاد القياسي هو تكامل للنظرية الاقتصادية مع الرياضيات والأساليب الإحصائية بهدف اختبار فروض عن الظواهر الاقتصادية ، وتقدير معاملات العلاقات الاقتصادية أو التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات أو الظواهر الاقتصادية . ويقسم الاقتصاد القياسي إلى جزئين : نظري وتطبيقي . وبصفة عامة يتضمن الاقتصاد القياسي النظري طرق قياس العلاقات الاقتصادية ، بينما يبحث الاقتصاد القياسي التطبيقي المشاكل والتناج في مجال اقتصاد معين ، مثل نظرية الطلب الإنتاج ، الاستثمار ، الاستهلاك ، وغيرها من مجالات بحوث الاقتصاد التطبيقية . وعلى أية حال ، فإن الاقتصاد القياسي هو من ناحية علم ومن ناحية أخرى فن إذ أن الحدس والحكم الجيد للباحث يلعبان غالباً دوراً حاسماً .  
( ب ) يبحث تحليل الانحدار العلاقة السببية بين متغير اقتصادي يحتاج إلى تفسير ( المتغير التابع ) ومتغير آخر أو أكثر من المتغيرات المستقلة أو المتغيرات التفسيرية . وعندما يكون هناك متغير مستقل أو تفسيري واحد نكون في مجال الانحدار البسيط . بينما في الحالات الأكثر شيوعاً عندما يستخدم أكثر من متغير مستقل أو تفسيري فإننا نكون في مجال الانحدار المتعدد .

( ح ) أن التشويش ( المشوائ ) أو الخطأ يجب أن تتضمنه العلاقات الدقيقة التي تفترضها النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي حتى تكون هذه العلاقات ذات طابع احتمالي . ( ليعكس ذلك حقيقة أن العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات الاقتصادية هي في العالم الحقيقي غير دقيقة وإلى حد ما شاذة ) .

( د ) نماذج المعادلات الآتية تشير إلى العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية معبراً عنها بأكثر من معادلة وبحيث تتبادل المتغيرات الاقتصادية التأثير في المعادلات المختلفة . وتعتبر نماذج المعادلات الآتية أكثر نماذج الاقتصاد القياسي تعقيداً ويتم تناوؤها في الفصل العاشر .

١ - ٦ ( أ ) ماهي وظائف الاقتصاد القياسي ؟ ( ب ) ماهي نواحي الاقتصاد القياسي ( وغيره من العلوم الاجتماعية ) التي تجعله يختلف اختلافاً أساسياً عن معظم العلوم الطبيعية ؟

( أ ) للاقتصاد القياسي ثلاث وظائف متداخلة ، الأولى هي اختبار النظريات أو الفروض الاقتصادية . على سبيل المثال ، هل الاستهلاك مرتبط مباشرة بالدخل ؟ هل هناك علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وبين سعرها ؟ والوظيفة الثانية للاقتصاد القياسي هي أنه يمد الباحث بتقديرات رقمية لمعاملات العلاقات الاقتصادية . وهذه التقديرات أساسية عند اتخاذ القرار . فعلى سبيل المثال ، فإن متخذ القرار في الحكومة يحتاج إلى تقدير دقيق لمعاملات العلاقة بين الاستهلاك والدخل لكي يحدد التأثير المتوقع ( المضاعف ) لخفض مقترح للضرائب . والمدير يحتاج أن يعرف ما إذا كان تخفيض السعر يؤدي إلى زيادة أو نقصان الإيرادات الكلية للمبيعات بالشركة وبأي قدر . والوظيفة الثالثة للاقتصاد القياسي هي التنبؤ بالأحداث الاقتصادية . وهذا أيضاً ضروري لمتخذ القرار لكي يتخذ الإجراءات التصحيحية المناسبة إذا كان من المتوقع أن يرتفع معدل البطالة أو التضخم في المستقبل .

( ب ) هناك اختلافان أساسيان بين الاقتصاد القياسي ( وغيره من العلوم الاجتماعية ) من ناحية ومعظم العلوم الطبيعية ( مثل الفيزياء ) من ناحية أخرى . الاختلاف الأول ( كما ذكر من قبل ) هو أن العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية هي

علاقات غير دقيقة وإلى حد ما شاذة . والاختلاف الثاني أن معظم الظواهر الاقتصادية تحدث متزامنة ومن هنا لا يمكن إجراء تجارب معملية عليها . وهذه الاختلافات تتطلب طرقاً خاصة في التحليل ( مثل إضافة حد التشويش أو الخطأ إلى العلاقات الدقيقة التي تفترضها النظرية الاقتصادية ) وفي التحليل المتعدد المتغيرات ( مثل تحليل الانحدار المتعدد ) . وهذا الأخير يزيل تأثير كل متغير مستقل أو تفسيري على المتغير التابع عند مواجهة تغير متزامن في كل المتغيرات التفسيرية .

١ - ٧ بأي شكل ولأي غرض تجتمع المجالات الآتية لتكون معاً مجال الاقتصاد القياسي

(أ) النظرية الاقتصادية (ب) الرياضيات (ج) التحليل الإحصائي ؟

(أ) يفترض الاقتصاد القياسي مسبقاً وجود مجموعة من النظريات أو الفروض الاقتصادية التي تحتاج إلى اختبار . فإذا كانت المتغيرات التي تقترحها النظرية الاقتصادية لا تغطي تفسيراً مرضياً فيمكن للباحث تجربة صياغات ومتغيرات بديلة قد تكون ناجمة عن اختبارات سابقة أو نظريات معارضة . ومن هنا فإن بحوث الاقتصاد القياسي يمكن أن تؤدي إلى قبول أو رفض أو إعادة صياغة النظريات الاقتصادية .

(ب) تستخدم الرياضيات للتعبير عن التقريبات اللفظية للنظريات الاقتصادية في صورة رياضية ، وذلك بالتعبير - على شكل علاقات دالية دقيقة أو محددة - عن العلاقات بين المتغير التابع وبين واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة أو التفسيرية .

(ج) يستخدم التحليل الإحصائي الأساليب الملائمة لتقدير علاقات غير دقيقة وغير قابلة للتجريب بين المتغيرات الاقتصادية باستخدام البيانات الاقتصادية المناسبة ولتقويم النتائج .

١ - ٨ لماذا تبرز إضافة حد التشويش أو الخطأ إلى تحليل الانحدار ؟

إن إضافة حد التشويش (العشوائي) أو حد الخطأ (مواصفات احتمالية معروفة بدقة) مطلوب في تحليل الانحدار لثلاثة أسباب هامة . الأول ، ظالماً أن الفرض من النظرية هو التعميم والتبسيط ، فإن العلاقات الاقتصادية عادة تتضمن فقط أهم القوى المؤثرة . ويعني هذا أن العديد من المتغيرات الأخرى ذات التأثير الضعيف أو غير المنتظم لا تدخل في الحساب . فيمكن النظر إلى حد الخطأ على أنه يمثل التأثير الصافي لعدد كبير من القوى ذات التأثير الصغير أو غير المنتظم . والسبب الثاني ، أنه يمكن تبرير إضافة حد الخطأ بأنه يأخذ في الاعتبار التأثير الصافي للأخطاء الممكنة في قياس المتغير التابع أو المتغير الذي يتم تفسيره . وأخيراً ، حيث أن السلوك الإنساني ، في ظل ظروف متطابقة ، يتباين عادة بصورة عشوائية فإن حد التشويش أو الخطأ يمكن استخدامه للإسكاف هذا السلوك . أي أن عنصر الخطأ هذا يسمح بانحرافات فردية عشوائية عن العلاقات المحددة الدقيقة التي تقترحها النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي .

١ - ٩ تنص نظرية طلب المستهلك على أن الكمية المطلوبة من سلعة ما  $D_X$  ، هي دالة في سعرها  $P_X$  ، ودخل المستهلك  $Y$  ، وأسعار سلع أخرى (بديلة أو مكملة) مثلاً السعر  $P_Z$  للسلعة  $Z$  . بافتراض أن أذواق المستهلكين ثابتة خلال فترة الدراسة فالمطلوب التعبير عن النظرية السابقة (أ) في صورة خطية أو معادلة صريحة أو محددة (ب) في صورة عشوائية (ج) ما هي المعاملات التي يجب تقديرها وماذا تسمى ؟

$$D_X = b_0 + b_1 P_X + b_2 Y + b_3 P_Z \quad (1-3) \quad (أ)$$

$$D_X = b_0 + b_1 P_X + b_2 Y + b_3 P_Z + u \quad (1-4) \quad (ب)$$

(ج) المعاملات التي يلزم تقديرها هي  $b_0$  ،  $b_1$  ،  $b_2$  و  $b_3$  . وتسمى بالمعالم .

منهج الاقتصاد القياسي :

١ - ١٠ بالإشارة إلى نظرية طلب المستهلك في مسألة ١ - ٩ وضح (أ) ما هي الخطوة الأولى في بحث الاقتصاد القياسي (ب) ما هي التوقعات النظرية المسبقة لإشارة وحجم المعالم في دالة الطلب المذكورة في المعادلة (١ - ٤) .

(أ) الخطوة الأولى في التحليل الاقتصادي القياسي هي التعبير عن نظرية طلب المستهلك في صورة معادلة احتمالية كما في معادلة (١ - ٤) ، ثم تحديد التوقعات النظرية المسبقة عن إشارة وحجم معالم الدالة .

(ب) تفترض نظرية طلب المستهلك أنه في المعادلة (١ - ٤) ،  $b_1 < 0$  (بمعنى أن العلاقة بين السعر والكمية هي علاقة عكسية) ، وأن  $b_2 > 0$  إذا كانت السلعة عادية (بمعنى أن المستهلك يشتري أكثر من السلعة عند مستوى الدخل الأعلى) ،  $b_3 > 0$  إذا كانت  $X$  و  $Z$  سلماً بديلة ، و  $b_3 < 0$  إذا كانت  $X$  و  $Z$  سلماً مكمل .

١ - ١١ اذكر المرحلة الثانية لبحث الاقتصاد القياسي (أ) بصفة عامة (ب) فيما يتعلق بدالة الطلب المحددة في معادلة (١ - ٤) .

(أ) المرحلة الثانية في بحث الاقتصاد القياسي تتضمن جمع البيانات عن المتغير التابع وعن كل من المتغيرات المستقلة أو التفسيرية في النموذج واستخدام هذه البيانات للتقدير المعمل لمعالم النموذج . ويتم هذا عادة باستخدام تحليل الانحدار المتعدد (ونتناوله في الفصل السابع) .

(ب) لتقدير دالة الطلب في المعادلة (١ - ٤) ، يجب تجميع بيانات عن (١) كمية طلب المستهلكين على السلعة  $X$  ، (٢) سعر السلعة  $X$  ، (٣) دخول المستهلكين ، و (٤) سعر السلعة  $Z$  في وحدة الزمن (أى في اليوم ، أو الشهر ، أو السنة) وعلى مدى الأيام أو الشهور أو السنوات . ويتم تقدير علاقة انحدار  $D_x$  على  $P_x$  ،  $Y$  و  $P_z$  من خلال تقدير المعاملات  $b_0$  ،  $b_1$  ،  $b_2$  و  $b_3$  .

١٢ - كيف يمكن أن تختلف نوعية البيانات المطلوبة لتقدير دالة الطلب المذكورة في معادلة (١ - ٤) عن نوعية البيانات اللازمة لتقدير دالة الاستهلاك لمجموعة من العائلات عند نقطة زمنية معينة ؟

لتقدير معادلة الطلب في المعادلة (١ - ٤) ، يلزمنا بيانات عن قيم المتغيرات خلال فترة زمنية ممتدة . فعلى سبيل المثال لتقدير دالة الطلب على البن ، نحتاج إلى بيانات عن كمية البن المطلوبة سنوياً ، على مدى عدة سنوات وليكن من ١٩٦٠ إلى ١٩٨٠ . وبالمثل ، نحتاج إلى بيانات عن متوسط سعر البن ، ودخول المستهلكين ، وسعر الشاي (مثلاً ، كبديل للبن) للسنوات من ١٩٦٠ - ١٩٨٠ . وتسمى البيانات عن المتغيرات خلال فترة زمنية ببيانات السلاسل الزمنية . أما تقدير دالة الاستهلاك لمجموعة من العائلات عند نقطة زمنية معينة فإنه يحتاج إلى بيانات مستعرضة *cross-sectional* (بمعنى بيانات عن قيم الإنفاق الاستهلاكي ، والدخل المتاح لكل عائلة في المجموعة عند نقطة زمنية معينة ولتكن ١٩٨٢) .

١٣ - ماذا يقصد بالآتي : (أ) المرحلة الثالثة لتحليل الاقتصاد القياسي ؟ (ب) المعايير النظرية المسبقة ؟ (ج) المعايير الإحصائية ؟ (د) معايير الاقتصاد القياسي ؟ (هـ) قدرة النموذج على التنبؤ ؟

(أ) المرحلة الثالثة لبحث الاقتصاد القياسي تتضمن تقييم النموذج المقدر على أساس معايير النظرية الاقتصادية المسبقة ، والمعايير الإحصائية ، ومعايير الاقتصاد القياسي وقدرة النموذج على التنبؤ .

(ب) المعايير الاقتصادية المسبقة تشير إلى إشارة وحجم معالم النموذج الذي تفترضه النظرية الاقتصادية . فإذا كانت المعاملات المقدرة لا تتفق وهذه الفروض أو المسلمات ، فإن النموذج يجب أن يعدل أو يرفض .

(ج) المعايير الإحصائية تشير إلى (١) نسبة التغير في المتغير التابع التي يمكن أن « يشرحها » التغير في المتغير المستقل أو التفسيرى (٢) التحقق أن مدى تشتت أو انتشار كل معامل مقدر حول القيمة الحقيقية للمعلمة صغير بدرجة كافية لإعطاء الثقة في التقديرات .

(د) تتعلق معايير الاقتصاد القياسي باختبار ما إذا كانت فروض نموذج الانحدار الأساسى ، وخاصة فيما يتعلق بحد التشويش أو حد الخطأ متحققة .

(هـ) تشير قدرة النموذج على التنبؤ إلى قدرته على التنبؤ بدقة بقيم المتغير التابع باستخدام قيم متوقعة أو معروفة للمتغيرات المستقلة أو التفسيرية .

١ - ١٤ كيف يمكن تقويم دالة الاستهلاك المقدرة في المعادلة (١ - ٤) من حيث (أ) المعايير النظرية المسبقة ؟

(ب) المعايير الإحصائية ؟ (ج) معايير الاقتصاد القياسي ؟ (د) قدرة النموذج على التنبؤ ؟

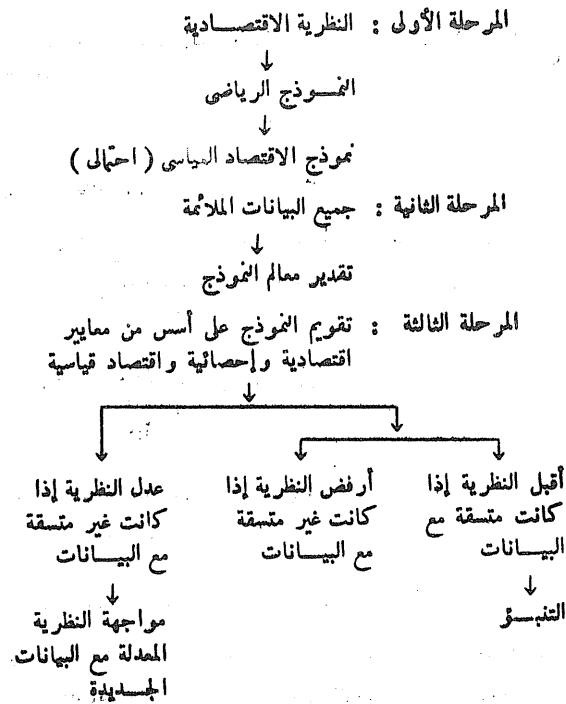
(أ) دالة الاستهلاك المقدرة في المعادلة (١ - ٤) يمكن تقويمها من حيث المعايير النظرية المسبقة بفحص ما إذا كانت المعاملات المقدرة تتفق مع توقعاتها النظرية من حيث الإشارة والحجم كما افترض في المسألة (١ - ١٠) . فنظرية الطلب كما وردت في المعادلة (١ - ٤) تتأكد فقط إذا كانت  $b_1 < 0$  ،  $b_2 > 0$  (إذا كانت  $X$  سلعة عادية) ،  $b_3 > 0$  (إذا كانت  $Z$  سلعة بديلة للسلعة  $X$ ) ، كما افترض في نظرية الطلب .

(ب) المعايير الإحصائية تتحقق فقط إذا كانت نسبة «عالية» من التنبؤ في  $D_{yx}$  مع الزمن يمكن «تفسيرها» بالتغيرات في  $P_x$  ،  $Y$  ،  $P_z$  وإذا كان تشتت تقديرات  $b_1$  ،  $b_2$  و  $b_3$  حول المعالم الحقيقية «صغير بدرجة كافية» . وليس هناك إجابة عامة مقبولة لما يعتبر نسبة «عالية» للتنبؤ في  $D_{yx}$  «تفسيرها» المتغيرات  $P_x$  ،  $Y$  و  $P_z$  . ومع ذلك فبسبب النزعات المشتركة في بيانات السلاسل الزمنية يمكن أن نتوقع أن أكثر من 50% إلى 70% من التغير في المتغير التابع لا بد أن يجد تفسيره في المتغيرات المستقلة إذا حكمنا على النموذج بأنه مرض . وبالمثل ، للحكم على المعاملات المقدرة بأنها «معنوية إحصائياً» ، فأننا نتوقع أن يكون تشتت كل معامل مقدر حول المعلمة الحقيقية (مقيساً بانحرافه المعياري ، أنظر قسم ٢ - ٣) أقل عموماً من نصف القيمة المقدرة للمعامل .

(ج) تستخدم معايير الاقتصاد القياسي لتحديد ما إذا كانت فروض طرق الاقتصاد القياسي المستخدمة متحققة في تقدير دالة الطلب في المعادلة (١ - ٤) . وفي هذه الحالة فقط فإن المعاملات المقدرة يتوفر لها المواصفات المرغوبة من حيث عدم التحيز والاتساق ، والكفاءة ، وهكذا (أنظر قسم ٦ - ٤)

(د) من طرق اختبار مقدرة نموذج الطلب في المعادلة (١ - ٤) على التنبؤ ، استخدام الدالة المقدرة للتنبؤ بقيمة  $D_{yx}$  لفترة لاتشملها العينة وفحص ما إذا كانت القيم المقدرة «قريبة بدرجة كافية» من القيم الفعلية المشاهدة للمتغير  $D_{yx}$  خلال هذه الفترة .

١٥ - ١٥ استخدم رسماً تخطيطياً للتعبير عن المراحل المختلفة لبحوث الاقتصاد القياسي .



### مسائل إضافية

طبيعة علم الإحصاء :

١ - ١٦ (أ) في أى المجالات يعتبر التحليل الإحصائي مهماً ؟ (ب) ماهى أهم وظائف الإحصاء الوصفي ؟ (ج) ماهى أهم وظائف الإحصاء الاستدلالي ؟

الإجابة : (أ) في مجالات الاقتصاد والأعمال وغيرها من العلوم الاجتماعية والعلوم الطبيعية .

(ب) تلخيص وتوصيف مجموعات البيانات

(ج) استنتاج خصائص المجتمع مامن واقع الخصائص المناظرة لمينة مأخوذة من هذا المجتمع

١ - ١٧ (أ) هل الاستدلال الإحصائي مرتبط بمنطق استنباطي أو استقرائي ؟ (ب) ماهى شروط صحة الاستدلال الإحصائي ؟

الإجابة : (أ) يرتبط الاستدلال الإحصائي بمنطق استقرائي . (ب) أن يكون من خلال عينة ممثلة ونظرية الاحتمال

الإحصاء والاقتصاد القياس :

١ - ١٨ عبر في معادلة خطية صريحة عن التقرير القائل بأن مستوى الإنفاق الاستهلاكي  $I$  يرتبط عكسياً مع معدل الفائدة  $R$

الإجابة : (١ - ٥)  $I_0 = b_0 + b_1 R$  مع افتراض أن  $b_1$  سالبة

١ - ١٩ ماذا تمثل الإجابة على مسألة ١ - ١٨ ؟

الإجابة : تمثل نظرية اقتصادية معبراً عنها في شكل رياضى دقيق أو محدد

١ - ٢٠ عبر عن المعادلة (١ - ٥) في صورة احتمالية

الإجابة : (١ - ٦)  $I = b_0 + b_1 R + u$

١ - ٢١ لماذا يتطلب تحليل الاقتصاد القياس استخدام صيغ احتمالية ؟

الإجابة : لأن العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية غير دقيقة وإلى حد ما شاذة على عكس العلاقات المحددة والدقيقة التي

تفترضها النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضى .

منهج الاقتصاد القياس :

١ - ٢٢ ماهى المراحل (أ) الأولى (ب) الثانية (ج) الثالثة للاقتصاد القياس ؟

الإجابة : (أ) وضع النظرية في صيغة معادلة احتمالية مع توضيح الإشارات والقيم المتوقعة للمعالم المقدرة (ب) جميع البيانات

عن متغيرات النموذج وتقدير معاملات الدالة (ج) تقويم المعاملات المقدرة على أسس من الاقتصاد : الإحصاء : والاقتصاد

القياسى .

١ - ٢٣ ماهى المرحلة الأولى في التحليل الاقتصادى القياسى لنظرية الاستثمار الواردة و، مسألة (١ - ٨) ؟

الإجابة : وضع النظرية في صيغة المعادلة (١ - ٦) والتنبؤ بأن  $b_1 < 0$

١ - ٢٤ ماهى المرحلة الثانية في التحليل الاقتصادى القياسى لنظرية الاستثمار الواردة في مسألة (١ - ١٨) ؟

الإجابة : جمع بيانات سلسلة زمنية عن  $I$  و  $R$  وتقدير المعادلة (١ - ٦) .

١ - ٢٥ ماهى المرحلة الثالثة في التحليل الاقتصادى القياسى لنظرية الاستثمار في مسألة (١ - ١٨) ؟

الإجابة : تحديد ما إذا كان المعامل المقدر  $b_1 < 0$  وأن نسبة « كافية » من التغير في  $I$  مع الزمن « يفسره » التغير

في  $R$  ، وأن  $b_1$  « معنوية إحصائياً عند المستويات المعنوية » ، وأن فروض الاقتصاد القياسى متحققة

## الفصل الثاني

### الاحصاء الوصفي

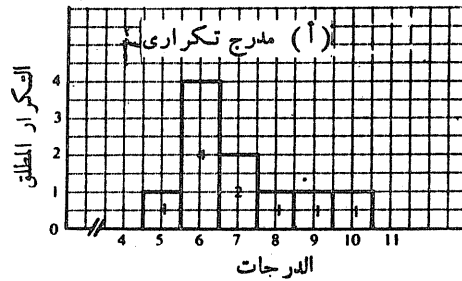
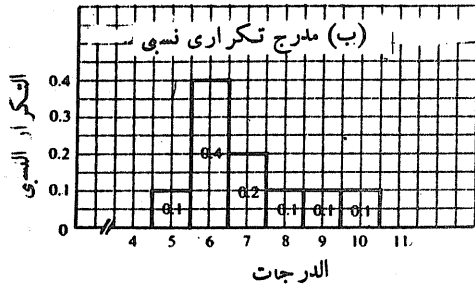
#### ٢ - ١ التوزيعات التكرارية

عادة يكون من المفيد تنظيم مجموعة البيانات على شكل توزيع تكرارى . ويكون ذلك بتقسيم البيانات إلى مجموعات أو فئات وتحديد عدد المشاهدات في كل فئة . ويكون عدد الفئات عادة بين 5 و 15 ويمكن إيجاد التوزيع التكرارى النسبي بقسمة عدد المشاهدات في كل فئة على العدد الإجمالى للمشاهدات ، وبذلك فإن مجموع التكرارات النسبية يساوى 1 . ويمثل التوزيع التكرارى بيانياً باستخدام « المدرج التكرارى » حيث تمثل الفئات على المحور الأفقى وتمثل التكرارات على المحور الرأسى أما المصطلح التكرارى فهو تمثيل بياني خطى للتوزيع التكرارى ناتج عن توصيل النقاط التى إحداثياتها منتصف الفئة والتكرار ببعضها البعض ويوضح التوزيع التكرارى المتجمع بالنسبة لكل فئة إجمالى عدد المشاهدات لجميع الفئات التى تسبق وتشمل هذه الفئة وبرسم التوزيع التكرارى المتجمع نحصل على منحنى التوزيع أو المنحنى التكرارى المتجمع .

مثال ١ - حصل طالب على الدرجات الآتية ( النهاية المظمى 10 ) فى عشرة اختبارات أداها أثناء الفصل الدراسى 6 ، 7 ، 6 ، 8 ، 5 ، 7 ، 6 ، 9 ، 10 ، 6 . هذه الدرجات يمكن ترتيبها فى شكل توزيع تكرارى كما فى جدول ٢ - ١ كما يمكن عرضها بيانياً كما فى شكل ٢ - ١

جدول ٢ - ١ التوزيع التكرارى للبيانات

| الدرجة | التكرار المطلق | التكرار النسبى |
|--------|----------------|----------------|
| 5      | 1              | 0.1            |
| 6      | 4              | 0.4            |
| 7      | 2              | 0.2            |
| 8      | 1              | 0.1            |
| 9      | 1              | 0.1            |
| 10     | 1              | 0.1            |
|        | 10             | 1.0            |



شكل ٢ - ١

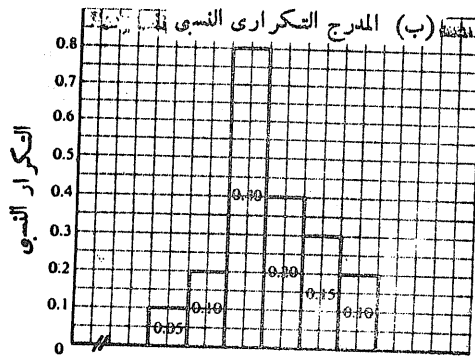
مثال ٢ - تحتوي عينة مكونة من 20 علبة من معلبات الفواكه المحفوظة على وزن صاف يتراوح من 19.3 إلى 20.9 أوقية كما في جدول ٢-٢. فإذا أردنا تجميع هذه البيانات في 6 فئات فإن طول الفئة يكون 0.3 أوقية ( $0.3 = 6 / (21.0 - 19.2)$ ) ويمكن ترتيب بيانات جدول ٢ - ٢ في شكل جدول تكراري كما في جدول ٢ - ٣ وبيانياً كما في شكل ٢ - ٢.

جدول ٢ - ٢ الوزن الصافي للفواكه بالأوقية

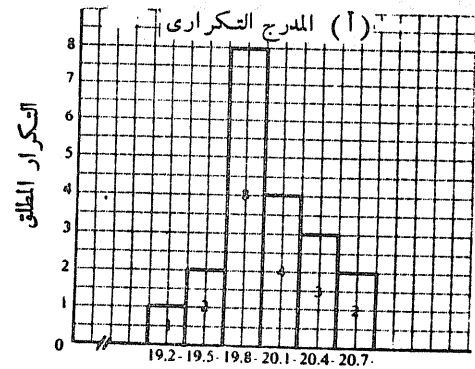
|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 19.7 | 19.9 | 20.2 | 19.9 | 20.0 | 20.6 | 19.3 | 20.4 | 19.9 | 20.3 |
| 20.1 | 19.5 | 20.9 | 20.3 | 20.8 | 19.9 | 20.0 | 20.6 | 19.9 | 19.8 |

جدول ٢ - ٣ التوزيع التكراري للأوزان

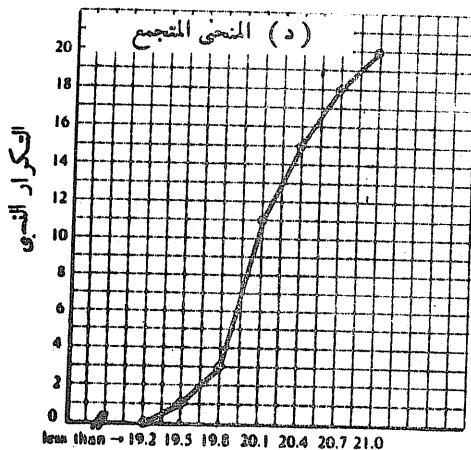
| الوزن بالأوقية | مركز الفئة | التكرار المطلق | التكرار النسبي | التكرار المتجمع |
|----------------|------------|----------------|----------------|-----------------|
| 19.2-19.4      | 19.3       | 1              | 0.05           | 1               |
| 19.5-19.7      | 19.6       | 2              | 0.10           | 3               |
| 19.8-20.0      | 19.9       | 8              | 0.40           | 11              |
| 20.1-20.3      | 20.2       | 4              | 0.20           | 15              |
| 20.4-20.6      | 20.5       | 3              | 0.15           | 18              |
| 20.7-20.9      | 20.8       | 2              | 0.10           | 20              |
|                |            | 20             | 1.00           |                 |



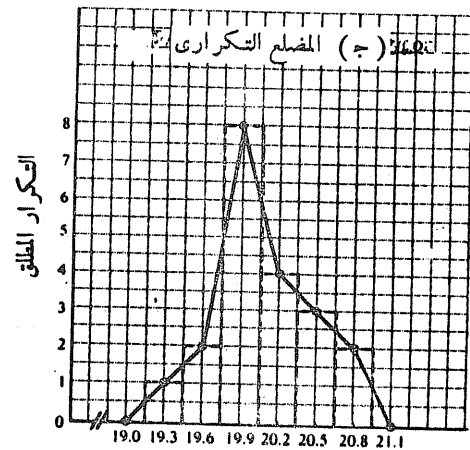
الأوزان



الأوزان



الأوزان



الأوزان

شكل ٢ - ٢



## ٢-٢ مقاييس النزعة المركزية

تشير النزعة المركزية إلى موقع التوزيع . وأهم مقاييس النزعة المركزية هي : ( ١ ) الوسط الحسابي ( ٢ ) الوسيط ، ( ٣ ) المنوال . وسوف نقوم بقياس هذه المقاييس بالنسبة للمجتمعات ( بمعنى مجموعات تشمل جميع العناصر موضع الدراسة ) وبالنسبة لعينات مسحوبة من المجتمعات وكذلك بالنسبة للبيانات المبوبة والبيانات غير المبوبة .

١ - الوسط الحسابي أو المتوسط ، مجتمع ما يرمز له بالرمز  $\mu$  ( الحرف اليوناني ميو ) ، أما الوسط الحسابي للعينة فيرمز له بالرمز  $\bar{X}$  ( وتقرأ  $X$  بار ) . وتحسب  $\mu$  ،  $\bar{X}$  في حالة البيانات غير المبوبة باستخدام المعادلات الآتية :

$$\mu = \frac{\sum X}{N} \quad \text{و} \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{n} \quad (٣ - ١، ب)$$

حيث  $\sum X$  هي مجموع قيم المشاهدات بينما  $n$  تشير إلى عدد المشاهدات في المجتمع والعينة على الترتيب . أما في حالة البيانات المبوبة فإن  $\mu$  ،  $\bar{X}$  تحسب كالاتي :

$$\mu = \frac{\sum fX}{N} \quad \text{و} \quad \bar{X} = \frac{\sum fX}{n} \quad (٣ - ١٣، ب)$$

حيث  $\sum fX$  تشير إلى مجموع حاصل ضرب تكرار كل فئة  $f$  في مركز الفئة  $X$  .

٢ - الوسيط لبيانات غير مبوبة يشير إلى قيمة المفردة التي تقع في منتصف المفردات ، بعد ترتيب هذه المفردات تصاعدياً أو تنازلياً . أي أن

$$(٣ - ٢) \text{ الوسيط} = \text{الحد الذي ترتيبه } \left( \frac{N+1}{2} \right) \text{ في مجموعة البيانات .}$$

حيث  $N$  عدد المفردات في المجتمع ( ويستخدم  $n$  بدلا منها في حالة العينة ) . وتحسب قيمة الوسيط من بيانات مبوبة كالاتي :

$$(٢ - ٤) \text{ الوسيط} = L + \frac{n/2 - F}{f_m} c$$

حيث  $L$  = الحد الأدنى للفئة الوسيطة ( أي الفئة التي تضم المفردة الوسطى للتوزيع ) .

$n$  = عدد المفردات في مجموعة البيانات

$F$  = مجموع التكرارات في الفئات السابقة على الفئة الوسيطة .

$f_m$  = تكرار الفئة الوسيطة .

$c$  = طول الفئة

٣ - المنوال هو القيمة الأكثر تكرارا في مجموعة البيانات . أما بالنسبة للبيانات المبوبة فإن المنوال يحسب كالاتي :

$$(٢ - ٥) \text{ المنوال} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} c$$

حيث  $L$  = الحد الأدنى للفئة المنوالية ( أي الفئة ذات أكبر تكرار ) .

$d_1$  = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة عليها

$d_2$  = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة عليها .

$c$  = طول الفئة .

يعتبر الوسط الحسابي أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً في الاستخدام ، غير أن الوسط الحسابي يتأثر بالقيمة المتطرفة ، بينما

لا يتأثر الوسيط أو المنوال بها . وهناك أيضاً كفاييس للزعة المركزية ، الوسط الحسابي المرجح ، الوسط الهندسي ، والوسط التوافقي ، ( انظر مسائل ٢ - ٧ إلى ٢ - ٩ ) .

مثال ٣ - الوسط الحسابي لدرجات 10 امتحانات المعطاة في مثال ١ بحسب باستخدام معادلة الوسط الحسابي لبيانات غير مبوبة كالآتي :

$$\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{6+7+6+8+5+7+6+9+10+6}{10} = \frac{70}{10} = 7 \text{ درجات}$$

ولإيجاد الوسيط لهذه البيانات غير المبوبة فإننا نرتب أولاً القيم العشر للدرجات تصاعدياً : 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10 . ثم نحدد الدرجة التي ترتيبها  $(N+1)/2 = 5.5$  أو  $(10+1)/2 = 5.5$  . أي أن الوسيط هو متوسط قيمتي المفردة الخامسة والمفردة السادسة أو  $(6+7)/2 = 6.5$  . أما المنوال لهذه المجموعة غير المبوبة من البيانات فهو 6 ( القيمة التي تكررت أكثر من غيرها في مجموعة البيانات ) .

مثال ٤ - يمكن تقدير الوسط الحسابي للبيانات المبوبة المعطاة في جدول ٢ - ٣ بمساعدة جدول ٢ - ٤ .

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{401.6}{20} = 20.08 \text{ أوقية}$$

ويمكن تبسيط الحسابات باستخدام الترميز ( انظر مسألة ٢ - ٦ ) .

جدول ٢ - ٤ حساب الوسط الحسابي لبيانات المبينة في جدول ٢ - ٣

| الوزن بالأوقية | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | $fX$              |
|----------------|----------------|-------------------|-------------------|
| 19.2-19.4      | 19.3           | 1                 | 19.3              |
| 19.5-19.7      | 19.6           | 2                 | 39.2              |
| 19.8-20.0      | 19.9           | 8                 | 159.2             |
| 20.1-20.3      | 20.2           | 4                 | 80.8              |
| 20.4-20.6      | 20.5           | 3                 | 61.5              |
| 20.7-20.9      | 20.8           | 2                 | 41.6              |
|                |                | $\sum f = n = 20$ | $\sum fX = 401.6$ |

ويمكن تقدير الوسيط لنفس البيانات المبوبة كالآتي :

$$\begin{aligned} \text{الوسيط} &= L + \frac{n/2 - F}{f_m} c = 19.8 + \frac{20/2 - 3}{8} 0.3 = 19.8 + \frac{7}{8} 0.3 \\ &= 19.8 + 0.2625 \approx 20.06 \text{ oz} \end{aligned}$$

حيث  $L = 19.8$  = الحد الأدنى للفئة الوسيطة ( أي الفئة 19.8 — 20.0 والتي تحتوي على المشاهدات العاشرة والحادية عشرة ) .

$n = 20$  = عدد المشاهدات أو العناصر .

$F = 3$  = مجموع التكرارات في الفئات السابقة على الفئة الوسيطة .

$f_m = 8$  = تكرار الفئة الوسيطة .

$c = 0.3$  = طول الفئة .

وبالمثل ،

$$\text{أوقية} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} c = 19.8 + \frac{6}{6+4} 0.3 = 19.8 + \frac{1.8}{10} = 19.8 + 0.18 = 19.98$$

وكما ذكر في المسألة ٢ - ٤ ، فإن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات المبوبة تعتبر تقديرات تستخدم فقط عندما تكون البيانات المبوبة متاحة أو عندما يراد اختصار الحسابات لمجموعة كبيرة من البيانات غير المبوبة .

### ٣-٢ مقاييس التشتت

يشير التشتت إلى اختلاف أو انتشار البيانات . وأهم مقاييس التشتت هي ( ١ ) الانحراف المتوسط ، ( ٢ ) التباين ، ( ٣ ) الانحراف المعياري ، وسنقوم بقياس هذه المقاييس بالنسبة للمجموعات والعينات وكذلك بالنسبة للبيانات المبوبة والبيانات غير المبوبة .

١ - الانحراف المتوسط (AD) للبيانات غير المبوبة يحسب كالآتي :

$$AD = \frac{\sum |X - \mu|}{N} \quad \text{للمجموعات} \quad (٢ - ٦ أ)$$

$$AD = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{n} \quad \text{للعينات} \quad (٢ - ٦ ب)$$

حيث يشير الخطان الرأسيان إلى استخدام القيمة المطلقة للانحراف ، أى القيمة الموجبة للانحراف ، مع بقاء باقى الرموز بنفس المعنى المستخدم في قسم ٢ - ٢ . وبالنسبة للبيانات المبوبة

$$AD = \frac{\sum f|X - \mu|}{N} \quad \text{للمجموعات} \quad (٢ - ٧ أ)$$

$$AD = \frac{\sum f|X - \bar{X}|}{n} \quad \text{للعينات} \quad (٢ - ٧ ب)$$

حيث  $f$  ترمز إلى تكرار الفئة و  $X$  ترمز إلى مركز الفئة .

٢ - التباين . تباين المجتمع  $\sigma^2$  (الحرف اليوناني سيجمما تربيع) وتباين العينة  $s^2$  للبيانات غير المبوبة تحسب كالآتي :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} \quad \text{و} \quad s^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n - 1} \quad (٢ - ٨ أ ، ب)$$

والبيانات المبوبة ،

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(X - \mu)^2}{N} \quad \text{و} \quad s^2 = \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1} \quad (٢ - ٩ أ ، ب)$$

٣ - الانحراف المعياري . الانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  وللعينة  $s$  هما الجذر التربيعي الموجب للتباين المناظر لكل منهما . فبالنسبة للبيانات غير المبوبة ،

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{N}} \quad \text{و} \quad s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (٢ - ١٠ أ ، ب)$$

وبالنسبة للبيانات المبوبة ،

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(X - \mu)^2}{N}} \quad \text{و} \quad s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (٢ - ١١ أ ، ب)$$

ويشتهر الانحراف المعياري أكثر مقاييس التشتت المطلق شيوعاً في الاستخدام . وهناك مقاييس أخرى ( بجانب التباين والانحراف المتوسط ) وهى المدى ، المدى الربيعي ، والانحراف الربيعي ( انظر مسائل ٢ - ١١ و ٢ - ١٢ ) .

٤ - معامل الاختلاف  $V$  يقيس التشتت النسبي :

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \quad \text{للمجموعات} \quad (٢ - ١٢ أ)$$

$$V = \frac{s}{\bar{X}} \quad \text{للعينات} \quad (٢ - ١٢ ب)$$

مثال ٥ - يمكن إيجاد الانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للبيانات غير المبوبة في مثال ١ بالاستعانة بجدول ٢ - ٥ ( $\mu = 7$  ، انظر مثال ٣) :

$$AD = \frac{\sum |X - \mu|}{N} = \frac{12}{10} = 1.2 \text{ درجات}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} = \frac{22}{10} = 2.2 \text{ درجات مربعة}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{22}{10}} = \sqrt{2.2} \approx 1.48 \text{ درجات}$$

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \approx \frac{1.48}{7} \approx 0.21, \text{ أو } 21\%$$

جدول ٢ - ٥ عمليات حسابية على بيانات المثال ١

| الدرجة | $\mu$ | $X - \mu$            | $ X - \mu $           | $(X - \mu)^2$           |
|--------|-------|----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 6      | 7     | -1                   | 1                     | 1                       |
| 7      | 7     | 0                    | 0                     | 0                       |
| 6      | 7     | -1                   | 1                     | 1                       |
| 8      | 7     | 1                    | 1                     | 1                       |
| 5      | 7     | -2                   | 2                     | 4                       |
| 7      | 7     | 0                    | 0                     | 0                       |
| 6      | 7     | -1                   | 1                     | 1                       |
| 9      | 7     | 2                    | 2                     | 4                       |
| 10     | 7     | 3                    | 3                     | 9                       |
| 6      | 7     | -1                   | 1                     | 1                       |
|        |       | $\sum (X - \mu) = 0$ | $\sum  X - \mu  = 12$ | $\sum (X - \mu)^2 = 22$ |

مثال ٦ - يمكن حساب الانحراف المتوسط والتباين ، والانحراف المعياري ، ومعامل الاختلاف للتوزيع التكراري للأوزان (بيانات مبوبة) الواردة بجدول ٢ - ٣ بالاستعانة بجدول ٢ - ٦ (أوقية  $X = 20.08$  ، انظر مثال ٤) :

$$AD = \frac{\sum f|X - \bar{X}|}{n} = \frac{6.36}{20} = 0.318 \text{ أوقية}$$

$$s^2 = \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{2.9520}{19} \approx 0.1554 \text{ أوقية مربعة}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{2.9520}{19}} = \sqrt{0.1544} \approx 0.3942 \text{ أوقية}$$

$$V = \frac{s}{\bar{X}} \approx \frac{0.3942 \text{ oz}}{20.08 \text{ oz}} \approx 0.0196, \text{ أو } 1.96\%$$

لاحظ أنه في معادلة تقدير كل من  $s^2$  و  $s$  ، نستخدم  $n - 1$  وليس  $n$  في المقام (انظر مسألة ٢ - ١٦ للتحليل) . ويمكن من المعادلات المستخدمة لتقدير  $\sigma^2$  ،  $\sigma$  ،  $s^2$  و  $s$  اشتقاق معادلات أخرى لتبسيط الحسابات إذا كان حجم البيانات كبيراً (انظر مسائل ٢ - ١٧ إلى ٢ - ١٩ لمعرفة كيفية اشتقاق وتطبيق هذه المعادلات) .

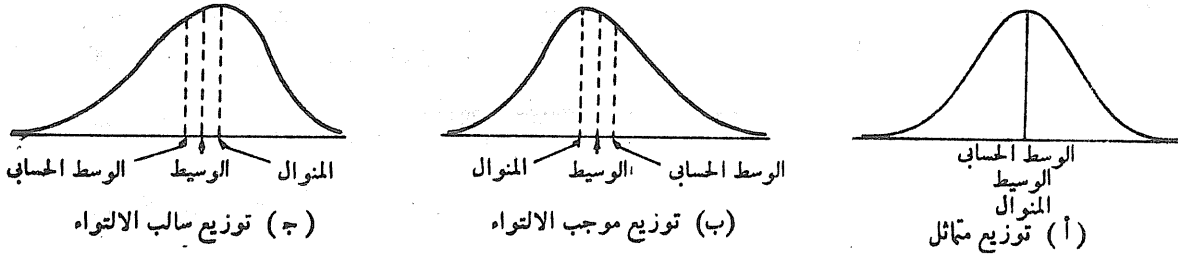
جدول ٢ - ٦ عمليات حسابية على بيانات جدول ٢ - ٤

| الوسط الحسابي | التكرار | الوزن بالأوقية    | مركز الفئة | $x - \bar{x}$ | $ x - \bar{x} $ | $\sum f x - \bar{x} $        | $(x - \bar{x})^2$ | $f(x - \bar{x})^2$               |
|---------------|---------|-------------------|------------|---------------|-----------------|------------------------------|-------------------|----------------------------------|
| 19.20-19.40   | 19.30   | 1                 | 20.08      | - 0.78        | 0.78            | 0.78                         | 0.6084            | 0.6084                           |
| 19.50-19.70   | 19.60   | 2                 | 20.08      | - 0.48        | 0.48            | 0.96                         | 0.2304            | 0.4608                           |
| 19.80-20.00   | 19.90   | 8                 | 20.08      | - 0.18        | 0.18            | 1.44                         | 0.0324            | 0.2592                           |
| 20.10-20.30   | 20.20   | 4                 | 20.08      | 0.12          | 0.12            | 0.48                         | 0.0144            | 0.0576                           |
| 20.40-20.60   | 20.50   | 3                 | 20.08      | 0.42          | 0.42            | 1.26                         | 0.1764            | 0.5292                           |
| 20.70-20.90   | 20.80   | 2                 | 20.08      | 0.72          | 0.72            | 1.44                         | 0.5184            | 1.0368                           |
|               |         | $\sum f = n = 20$ |            |               |                 | $\sum f x - \bar{x}  = 6.36$ |                   | $\sum f(x - \bar{x})^2 = 2.9520$ |

## ٢-٤ أشكال التوزيعات التكرارية

يشير شكل التوزيع التكراري إلى (١) تماثل التوزيع من عدمه (التواء التوزيع) (٢) تدبب التوزيع (تفرطح).

١ - الالتواء . يكون التواء التوزيع صفراً إذا كان التوزيع متماثلاً حول الوسط الحسابي . وفي حالة التوزيع المتماثل (ذو المنوال الواحد) فإن الوسط الحسابي يساوي الوسيط يساوي المنوال . والتوزيع موجب الالتواء هو التوزيع الذي يكون طرفه الأيمن أطول . وعندئذ يكون الوسط الحسابي < الوسيط < المنوال . ويكون التوزيع سالب الالتواء هو التوزيع الذي يكون طرفه الأيسر أطول . وعندئذ يكون المنوال < الوسيط < الوسط الحسابي (انظر شكل ٢ - ٣) .



شكل ٢ - ٣

ويمكن قياس الالتواء باستخدام معامل بيرسون للالتواء :

$$S_k = \frac{3(\mu - \text{med})}{\sigma} \quad \text{للمجتمعات} \quad (٢ - ١٣ أ)$$

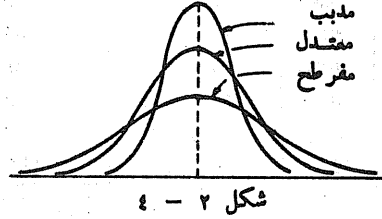
$$S_k = \frac{3(\bar{X} - \text{med})}{s} \quad \text{للعينات} \quad (٢ - ١٣ ب)$$

والالتواء أيضاً يمكن قياسه بالعزم الثالث (بسطة المعادلة ٢ - ١٤ ، ب) مقسوماً على مكعب الانحراف المعياري :

$$S_k = \frac{\sum f(X - \mu)^3}{N\sigma^3} \quad \text{للمجتمعات} \quad (٢ - ١٤ أ)$$

$$S_k = \frac{\sum f(X - \bar{X})^3}{n s^3} \quad \text{للعينات} \quad (٢ - ١٤ ب)$$

٢ - التفرطح . التوزيع ذو القمة العالية يسمى مدبباً ، وعلى العكس يسمى التوزيع ذو القمة المنبسطة مفرطحاً وذلك بالقياس إلى المعتدل أو متوسط التفرطح (انظر شكل ٢ - ٤) . ويمكن لقياس التفرطح استخدام العزم الرابع (البسط في المعادلة ٢ - ١٥ أ ، ب) مقسوماً على الانحراف المعياري مرفوعاً للقوة الرابعة . علماً بأن معامل التفرطح للتوزيع المعتدل = 3



$$\begin{aligned} \text{معامل التفرطح للمجمعات} &= \frac{\sum f(X - \mu)^4}{N\sigma^4} \quad (٢ - ١٥ أ) \\ \text{معامل التفرطح للمينات} &= \frac{\sum f(X - \bar{X})^4}{n.s^4} \quad (٢ - ١٥ ب) \end{aligned}$$

مثال ٧ - يمكن تقدير معامل بيرسون للالتواء للدرجات في مثال ١ باستخدام  $\mu = 7$  ،  $med = 6.5$  (انظر مثال ٢) ، و  $\sigma = 1.48$  (انظر مثال ٥) :

$$Sk = \frac{3(\mu - med)}{\sigma} = \frac{3(7 - 6.5)}{1.48} = \frac{3(0.5)}{1.48} \approx 1.01 \quad (\text{انظر شكل ٢ - ١})$$

وبالمثل ، باستخدام  $\bar{X} = 20.08$  oz ، الوسيط = 20.06 oz (انظر مثال ٤) ، و  $s = 0.39$  oz (انظر مثال ٦) ، يمكن تقدير معامل بيرسون للالتواء للتوزيع التكراري للأوزان في جدول ٢ - ٣ كما يأتي :

$$Sk = \frac{3(\bar{X} - med)}{s} = \frac{3(20.08 - 20.06)}{0.39} \approx 0.15 \quad (\text{انظر شكل ٢ - ٢})$$

بالنسبة للتفرطح ، انظر مسألة ٢ - ٢٣ .

### مسائل محلولة

#### التوزيعات التكرارية :

٢ - ١ جدول ٢ - ٧ يبين درجات اختبار ما لفصل من 40 طالباً . (أ) رتب هذه الدرجات (مجموعة البيانات الخام) في جدول يبدأ بأصغر الدرجات وينتهي بأكبرها . (ب) كون جدولاً موضحاً أطوال الفئات ومراكز الفئات والتكرار المطلق والنسبي والمتجمع لكل درجة (ج) اعرض البيانات في شكل مدرج تكراري ، مدرج تكراري نسبي ، مضلع تكراري ، ومنحنى متجمع صاعد .

جدول ٢ - ٧ درجات الاختبار لفصل من 40 طالباً

|    |   |   |   |   |   |   |   |    |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|----|---|
| 7  | 5 | 6 | 2 | 8 | 7 | 6 | 7 | 3  | 9 |
| 10 | 4 | 5 | 5 | 4 | 6 | 7 | 4 | 8  | 2 |
| 3  | 5 | 6 | 7 | 9 | 8 | 2 | 4 | 7  | 9 |
| 4  | 6 | 7 | 8 | 3 | 6 | 7 | 9 | 10 | 5 |

(أ) انظر جدول ٢ - ٨

جدول ٢ - ٨ بيان الدرجات مرتبة تصاعدياً

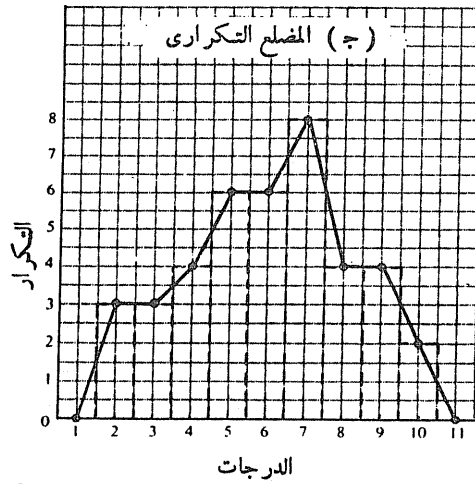
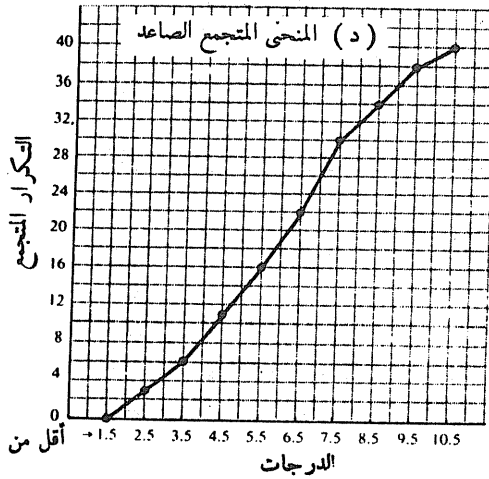
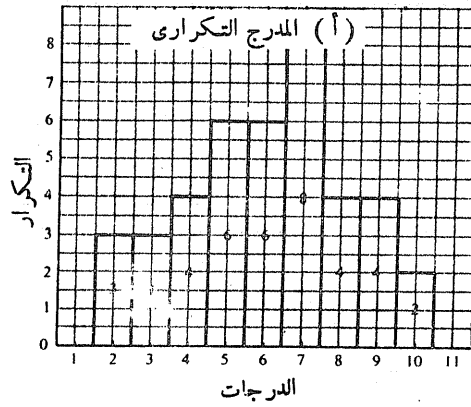
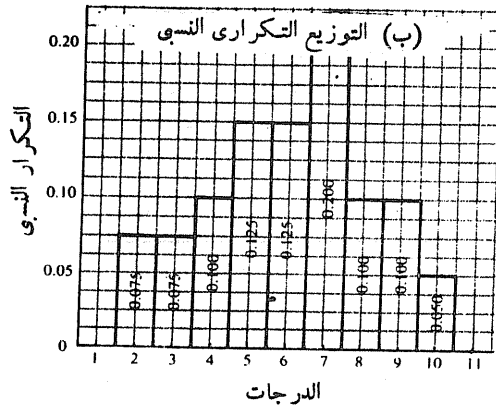
|   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4  | 4  |
| 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6  | 6  |
| 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7  | 7  |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 |

(ب) انظر جدول ٢ - ٩ . لاحظ أنه طالما أننا نتعامل هنا مع بيانات منفصلة (أي مبراً عنها باستخدام أعداد صحيحة) ، فقد استخدمنا الدرجات الفعلية كركاز للفتات .

جدول ٢ - ٩ توزيع تكراري للدرجات

| الدرجة   | مركز الفتة | التكرار المطلق | التكرار النسبي | التكرار المتجمع |
|----------|------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1.5-2.4  | 2          | 3              | 0.075          | 3               |
| 2.5-3.4  | 3          | 3              | 0.075          | 6               |
| 3.5-4.4  | 4          | 5              | 0.125          | 11              |
| 4.5-5.4  | 5          | 5              | 0.125          | 16              |
| 5.5-6.4  | 6          | 6              | 0.150          | 22              |
| 6.5-7.4  | 7          | 8              | 0.200          | 30              |
| 7.5-8.4  | 8          | 4              | 0.100          | 34              |
| 8.5-9.4  | 9          | 4              | 0.100          | 38              |
| 9.5-10.4 | 10         | 2              | 0.050          | 40              |
|          |            | 40             | 1.000          |                 |

(ج) انظر شكل ٢ - ٥ .



شكل ٢ - ٥

٧ - ٢ إذا كان أجر الساعة لمينة مكونة من 25 عاملاً بأحد المصانع هو كما في جدول ٢ - ١٠ .

(أ) رتب هذه البيانات الخام في جدول تبدأ بالأجر الأصغر وتنتهي بالأجر الأعلى .

(ب) جمع هذه البيانات في فئات .

(ج) أعرض البيانات في شكل مجمع تكرارى ، مدرج تكرارى نسبي ، مضلع تكرارى ، ومنحنى متجميع صاعد .

جدول ٢ - ١٠ أجر الساعة بالدولار

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 3.65 | 3.78 | 3.85 | 3.95 | 4.00 | 4.10 | 4.25 | 3.55 | 3.85 | 3.96 |
| 3.60 | 3.90 | 4.26 | 3.75 | 3.95 | 4.05 | 4.08 | 4.15 | 3.80 | 4.05 |
| 3.88 | 3.95 | 4.06 | 4.18 | 4.05 |      |      |      |      |      |

(أ) انظر جدول ٢ - ١١ .

جدول ٢ - ١١ بيان الأجور بالدولار مرتبة تصاعدياً

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 3.55 | 3.60 | 3.65 | 3.75 | 3.78 | 3.80 | 3.85 | 3.85 | 3.88 | 3.90 |
| 3.95 | 3.95 | 3.95 | 3.96 | 4.00 | 4.05 | 4.05 | 4.05 | 4.06 | 4.08 |
| 4.10 | 4.15 | 4.18 | 4.25 | 4.26 |      |      |      |      |      |

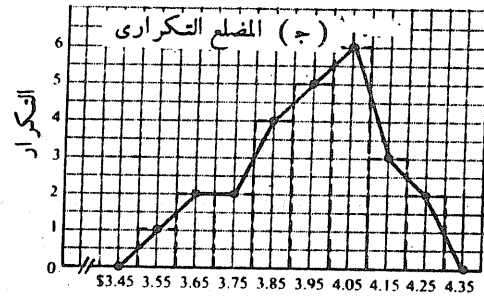
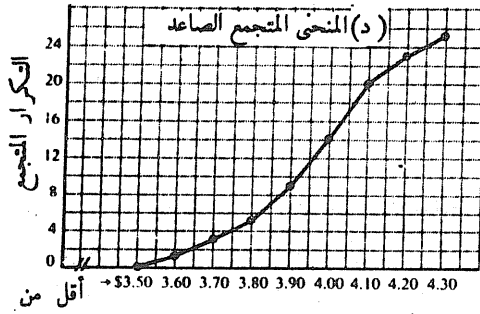
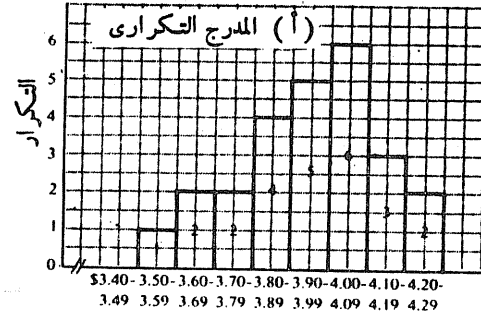
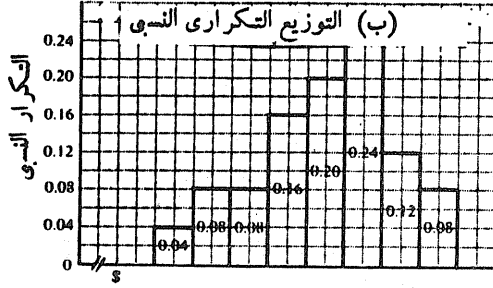
(ب) من جدول ٢ - ١٠ يلاحظ أن أقل أجر للساعة 3.55 \$ وأعلى أجر 4.26 \$ . ويمكن تقسيم هذا المدى إلى 8 فئات متساوية طول كل منها 0.10 \$ . أى ،  $0.10 = \frac{0.80}{8} = \frac{4.30 - 3.50}{8}$  \$ لاحظ أنه قد تم توسيع المدى إلى « من 3.50 \$ إلى 4.30 \$ » وذلك حتى يقع أقل أجر 3.55 \$ داخل الفئة الأولى ، ويقع أعلى أجر ، 4.26 \$ داخل الفئة الأخيرة . ومن الملائم أيضاً إيجاد مركز كل فئة (وسوف نحتاج هذا لرسم المضلع التكرارى) . وتوضح هذه في الجدول ٢ - ١٢ .

جدول ٢ - ١٢ التوزيع التكرارى للأجور

| أجر الساعة  | مركز الفئة | التكرار المطلق | التكرار النسبي | التكرار المتجمع |
|-------------|------------|----------------|----------------|-----------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55     | 1              | 0.04           | 1               |
| 3.60-3.69   | 3.65       | 2              | 0.08           | 3               |
| 3.70-3.79   | 3.75       | 2              | 0.08           | 5               |
| 3.80-3.89   | 3.85       | 4              | 0.16           | 9               |
| 3.90-3.99   | 3.95       | 5              | 0.20           | 14              |
| 4.00-4.09   | 4.05       | 6              | 0.24           | 20              |
| 4.10-4.19   | 4.15       | 3              | 0.12           | 23              |
| 4.20-4.29   | 4.25       | 2              | 0.08           | 25              |
|             |            | 25             | 1.00           |                 |

(ج) انظر شكل ٢ - ٦ . ويمكن الحصول على المنحنى المتجميع الصاعد برسم التكرار المتجمع عند القيم 3.595 \$ ، 3.695 \$ ، 3.795 \$ وهكذا ( وذلك حتى تشمل الحد الأعلى لكل فئة ) وعادة يستخدم تعبير حدود الفئات أو الحدود الدقيقة للإشارة إلى القيم 3.595 \$ ، 3.695 \$ ، 3.795 \$ إلى آخره . لاحظ أن مركز الفئة يتم الحصول عليه بإضافة الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة والقسمة على 2 . فمثلاً ، مركز الفئة الثانية يساوى  $3.65 = \frac{3.595 + 3.695}{2} = \frac{7.290}{2}$  ( انظر جدول ٢ - ١٢ )





شكل ٢ - ٦

مقاييس النزعة المركزية :

٢ - ٣ أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمتوال (أ) لدرجات اختبار الفصل المكون من 40 طالباً المغطاة في جدول ٢ - ٧ (بيانات غير مبوبة) ، (ب) للبيانات المبوبة لهذه الدرجات المغطاة في جدول ٢ - ٩ .

(أ) حيث أننا نتعامل هنا مع كل الدرجات ، فنحن نريد حساب الوسط الحسابي للمجتمع :

$$\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{7+5+6+\dots+5}{40} = \frac{240}{40} = 6 \text{ درجات}$$

أي أن  $\mu$  يمكن الحصول عليها بجمع كل الدرجات الأربعين المغطاة في جدول ٢ - ٧ والقسمة على 40 وضعت النقاط الثلاث في وسط الأرقام في معادلة حساب الوسط الحسابي بعاليه لتجنب سرد كل الأربعين مفردة الواردة في جدول ٢ - ٧ .

الوسيط هو قيمة العنصر الذي ترتيبه  $(N+1)/2$  في البيانات الواردة في جدول ٢ - ٨ . ومن ثم ، فإن الوسيط هو قيمة العنصر الذي ترتيبه  $(40+1)/2 = 20.5$  ، أي متوسط قيمة المفردتين اللتين تقعان عند ترتيب 20 ، 21 وحيث أن كلا منهما تساوى 6 ، فإن الوسيط يكون 6 . أما المتوال فقيمته 7 (القيمة الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات) .

(ب) يمكن إيجاد الوسط الحسابي للمجتمع مع البيانات المبوبة في جدول ٢ - ٩ مع الاستعانة بجدول ٢ - ١٣ :

$$\mu = \frac{\sum fX}{N} = \frac{240}{40} = 6$$

وهو نفس الوسط الحسابي السابق الحصول عليه من البيانات غير المبوبة . لاحظ أن مجموعة التكرارات  $\sum f$  يساوي عدد المشاهدات في المجتمع  $N$  وأن  $\sum fX = \sum X$  . أما الوسيط من البيانات المبوبة في جدول ٢ - ١٣ فيكون

$$\text{الوسيط} = L + \frac{N/2 - F}{f_m} c = 5.5 + \frac{40/2 - 16}{6} 1 = 5.5 + 0.67 = 6.17$$

حيث  $L = 5.5$  = الحد الأدنى للفترة الوسيطة ( أى الفترة من 5.5 إلى 6.4 ، والتي تحتوى على المشاهدات التي ترتيبها 20 و 21 ) .

$$N = 40 = \text{عدد المشاهدات}$$

$$F = 16 = \text{مجموع المشاهدات في الفئات السابقة على الفترة الوسيطة}$$

$$f_m = 6 = \text{تكرار الفترة الوسيطة}$$

$$c = 1 = \text{طول الفترة}$$

ويحسب المنوال للبيانات المبوبة في جدول ٢ - ١٣ كما يلي :

$$\text{المنوال} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} c = 6.5 + \frac{2}{2 + 4} 1 = 6.5 + 0.33 = 6.83$$

حيث  $L = 6.5$  = الحد الأدنى للفترة المنوالية ( أى الفترة من 6.5 إلى 7.4 والتي يقابلها أعلى تكرار 8 ) .

$$d_1 = 2 = \text{تكرار الفترة المنوالية } 8 \text{ ، مطروحاً منه تكرار الفترة قبل المنوالية } 6 .$$

$$d_2 = 4 = \text{تكرار الفترة المنوالية } 8 \text{ ، مطروحاً منه تكرار الفترة بعد المنوالية } 4$$

$$c = 1 = \text{طول الفترة}$$

لاحظ أنه بينما يتطابق الوسط الحسابي المحسوب من بيانات مبوبة مع الوسط الحسابي المحسوب من بيانات غير مبوبة فإن كلا من الوسيط والمنوال يعطى فقط تقديراً تقريبياً .

جدول ٢ - ١٣ حساب الوسط الحسابي للمجتمع للبيانات المبوبة في جدول ٢ - ٩

| الدرجة   | مركز الفترة $X$ | التكرار $f$       | $fX$            |
|----------|-----------------|-------------------|-----------------|
| 1.5-2.4  | 2               | 3                 | 6               |
| 2.5-3.4  | 3               | 3                 | 9               |
| 3.5-4.4  | 4               | 5                 | 20              |
| 4.5-5.4  | 5               | 5                 | 25              |
| 5.5-6.4  | 6               | 6                 | 36              |
| 6.5-7.4  | 7               | 8                 | 56              |
| 7.5-8.4  | 8               | 4                 | 32              |
| 8.5-9.4  | 9               | 4                 | 36              |
| 9.5-10.4 | 10              | 2                 | 20              |
|          |                 | $\sum f = N = 40$ | $\sum fX = 240$ |

٢ - ٤ أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال (أ) لعينة الأجور لعدد 25 عاملاً الواردة في جدول ٢ - ١٠ (البيانات غير المبوبة) (ب) للبيانات المبوبة لهذه الأجور المعطاة في جدول ٢ - ١٢ .

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\$3.65 + \$3.78 + \$3.85 + \dots + \$4.05}{25} = \frac{\$98.65}{25} = \$3.946 \text{ أو } \$3.95 \text{ (أ)}$$

الوسيط = \$3.95 (قيمة المفردة التي ترتيبها  $(n+1)/2 = (25+1)/2 = 13$  في مجموعة البيانات في جدول (١١-٢) .

المونال = \$3.95 و \$4.05 ، حيث هناك 3 مفردات تقابل كل قيمة منهما . أي أن التوزيع ذو متوالين .

(ب) يمكن إيجاد الوسط الحسابي للعينة للبيانات المبوبة الواردة في جدول ٢ - ١٢ مع الاستمارة بجدول ٢ - ١٤ :

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{\$98.75}{25} = \$3.95$$

لاحظ أنه في هذه الحالة  $\sum X = \$98.65 \neq \sum fX = \$98.75$  (كما في أ) حيث أن متوسط المشاهدات في كل فئة لا يساوي مركز الفئة لكل الفئات (كما في مسألة ٢ - ٣ (ب) . وعليه فإن  $\bar{X}$  المحسوبة للبيانات المبوبة تعتبر فقط تقريباً لقيمة  $X$  الحقيقية المحسوبة من البيانات غير المبوبة . وكثيراً ما تتوافر لدينا البيانات فقط في صورة مبوبة ، أو قد تتوفر البيانات غير مبوبة في مجموعة كبيرة جداً بحيث أن تقدير الوسط الحسابي بعد تجميع البيانات في فئات يوفر كثيراً في العمل الحسابي .

$$\text{الوسيط} = L + \frac{n/2 - F}{f_m} c = \$3.90 + \frac{25/2 - 9}{5} (0.10) = \$3.90 + \$0.07 = \$3.97$$

بالمقارنة مع قيمة الوسيط الحقيقية \$3.95 للبيانات غير المبوبة (انظر أ)

$$\text{المونال} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} c = \$4.00 + \frac{1}{1+3} (0.10) = \$4.00 + \$0.025 = \$4.025 \text{ or } \$4.03$$

بالمقارنة مع القيم الحقيقية للمونال \$3.95 و \$4.05 للبيانات غير المبوبة (انظر أ) . وأحياناً يستخدم مركز الفئة المتوالية كتقريب للمونال .

جدول ٢ - ١٤ حساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة في جدول ٢ - ١٢

| أجر الساعة  | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | $fX$                |
|-------------|----------------|-------------------|---------------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55         | 1                 | \$3.55              |
| 3.60-3.69   | 3.65           | 2                 | 7.30                |
| 3.70-3.79   | 3.75           | 2                 | 7.50                |
| 3.80-3.89   | 3.85           | 4                 | 15.40               |
| 3.90-3.99   | 3.95           | 5                 | 19.75               |
| 4.00-4.09   | 4.05           | 6                 | 24.30               |
| 4.10-4.19   | 4.15           | 3                 | 12.45               |
| 4.20-4.29   | 4.25           | 2                 | 8.45                |
|             |                | $\sum f = n = 25$ | $\sum fX = \$98.75$ |

٢ - ه أذكر مزايا وعيوب (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط ، (ج) المونال ، كقاييس للزعة المركزية .

(أ) مزايا الوسط الحسابي هي (١) أنه مقياس مألوف وسهل الفهم (٢) أنه يأخذ جميع مفردات المجموعة في الاعتبار (٣) أنه يستخدم في حساب كثير من المقاييس والاختبارات الإحصائية الأخرى . عيوب الوسط الحسابي هي (١) أنه يتأثر بالقيم المتطرفة (٢) أنه يستغرق وقتاً طويلاً للحساب من مجموعة كبيرة من البيانات غير المبوبة (٣) لا يمكن حسابه إذا كان الجدول في حالة البيانات المبوبة مفتوحاً من أحد طرفيه .

(ب) مزايا الوسيط هي (١) لا يتأثر بالقيم المتطرفة (٢) يمكن فهمه بسهولة (نصف البيانات أصغر من الوسيط والنصف الثاني أكبر منه) (٣) يمكن حسابه في جداول مفتوحة وأيضاً إذا كانت البيانات كمية وليس فقط للبيانات

الكية . عيوب الوسيط هي (أ) لا يستخدم الكثير من البيانات المتاحة (ب) نحتاج معه إلى ترتيب المفردات تصاعدياً مما يستغرق وقتاً طويلاً إذا كانت مجموعة البيانات كبيرة .

(ج) مزايا المتوال هي نفس مزايا الوسيط . عيوب المتوال هي (١) كما في حالة الوسيط ، لا يستخدم المتوال الكثير من البيانات المتاحة . (٢) في بعض الأحيان لا يوجد متوال حيث لا يتكرر أى من القيم أكثر من مرة ، وفي أحيان أخرى يكون هناك أكثر من متوال . وبصفة عامة فإن الوسط الحسابي يعتبر أكثر مقاييس النزعة المركزية استخداماً ، كما يعتبر المتوال أقلها استخداماً .

٢ - ٦ أوجد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة في جدول ٢ - ١٢ باستخدام الترميز ( الطريقة المختصرة ، وذلك بتعيين القيمة  $\mu = 0$  للفتة الرابعة أو الخامسة والقيم  $\mu = -1$  ،  $\mu = -2$  وهكذا للفتات السابقة عليها والقيم  $\mu = 1$  ،  $\mu = 2$  وهكذا للفتات اللاحقة ثم استخدام الصيغة .

$$\bar{X} = X_0 + \frac{\sum f\mu}{n} c \quad (٢ - ١٦)$$

حيث  $X_0$  هي مركز الفتة التي عين لها القيمة  $\mu = 0$  ،  $c$  هي طول الفتات . انظر جدول ٢ - ١٥ .

جدول ٢ - ١٥ حساب الوسط الحسابي باستخدام الترميز للبيانات المبوبة في جدول ٢ - ١٢

| $f\mu$           | التكرار $f$       | الرمز $\mu$ | مركز الفتة $X$ | أجر الساعة  |
|------------------|-------------------|-------------|----------------|-------------|
| -3               | 1                 | -3          | \$3.55         | \$3.50-3.59 |
| -4               | 2                 | -2          | 3.65           | 3.60-3.69   |
| -2               | 2                 | -1          | 3.75           | 3.70-3.79   |
| 0                | 4                 | 0           | 3.85           | 3.80-3.89   |
| 5                | 5                 | 1           | 3.95           | 3.90-3.99   |
| 12               | 6                 | 2           | 4.05           | 4.00-4.09   |
| 9                | 3                 | 3           | 4.15           | 4.10-4.19   |
| 8                | 2                 | 4           | 4.25           | 4.20-4.29   |
| $\sum f\mu = 25$ | $\sum f = n = 25$ |             |                |             |

$$\bar{X} = X_0 + \frac{\sum f\mu}{n} c = \$3.85 + \frac{25}{25} (\$0.10) = \$3.85 + \$0.10 = \$3.95$$

ويلاحظ أن الوسط الحسابي  $\bar{X}$  المحسوب باستخدام الترميز يتطابق مع ذلك المحسوب بدون استخدامه في مسألة ٢ - ٤ ب .  
بينما يتخلص الترميز من مشاكل التعامل مع القيم الكبيرة لمراكز الفتات ، ومن ثم فإنه يساهم في تبسيط العمليات الحسابية .

٢ - ٧ شركة تدفع أجراً قدره \$4 في الساعة لعمالها غير المهرة وعددهم 25 و \$6 في الساعة للعمال شبه المهرة وعددهم 15 ، و \$8 للعمال المهرة وعددهم 10 . ما هو المتوسط المرجح أو الوسط الحسابي المرجح للأجور التي تدفعها الشركة ؟

لإيجاد الوسط الحسابي المرجح ، أو المتوسط المرجح ، للمجتمع  $\mu_w$  أو للعينة  $\bar{X}_w$  ، فإن الأوزان  $w$  لها نفس وضع التكرار عند إيجاد الوسط الحسابي من بيانات مبوبة . أى أن

$$\bar{X}_w \quad \text{أو} \quad \mu_w = \frac{\sum wX}{\sum w} \quad (٢ - ١٧)$$

وبالنسبة لهذه المسألة فإن الأوزان هي عدد العمال المقابلة لكل أجر ، ومجموع الأوزان  $\sum w$  يساوي مجموع العمال :

$$\mu_w = \frac{(\$4)(25) + (\$6)(15) + (\$8)(10)}{25 + 15 + 10} = \frac{\$100 + \$90 + \$80}{50} = \frac{\$270}{50} = \$5.40$$

بينما أن المتوسط البسيط  $[ \$6 = (\$4 + \$6 + \$8)/3 ]$  . يمكن القول أن المتوسط المرجح هو مقياس أفضل لمتوسط الأجور .

٢ - ٨ إذا كان معدل التضخم لشعب ما هو 2% في السنة الأولى ، 5% في السنة الثانية ، 12.5% في السنة الثالثة ، أوجد الوسط الهندسي لمعدلات التضخم (الوسط الهندسي  $\mu_G$  أو  $\bar{X}_G$  لمجموعة موجبة من الأرقام  $n$  هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الأرقام ويستخدم أساساً لإيجاد متوسط لمعدلات التغير وللأرقام القياسية ) . أي

$$\mu_G \text{ or } \bar{X}_G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n} \quad (٢ - ١٨)$$

حيث  $X_1, X_2, \dots, X_n$  تشير إلى عدد  $n$  (أو  $N$ ) من المشاهدات .

$$\mu_G = \sqrt[3]{(2)(5)(12.5)} = \sqrt[3]{125} = 5\%$$

بينما أن الوسط الحسابي البسيط  $\mu = (2 + 5 + 12.5)/3 = 19.5/3 = 6.5\%$  وإذا تساوت قيم جميع المفردات فإن  $\mu_G$  تساوى  $\mu$  ، وفي غير ذلك فإن  $\mu_G$  تكون أصغر من  $\mu$  . وعادة يتم حساب  $\mu_G$  باستخدام اللوغاريتمات :

$$\log \mu_G = \frac{\sum \log \mu}{N} \quad (٢ - ١٩)$$

ويستخدم الوسط الهندسي أساساً في رياضيات التمويل والإدارة المالية .

٢ - ٩ تقطع مسافرة مسافة قدرها 10 mi على الطريق خارج المدينة بسرعة قدرها 60 mi/h ومسافة قدرها 10 mi على طرق داخل المدينة بسرعة قدرها 15 mi/h . أوجد الوسط التوافقي . يستخدم الوسط التوافقي  $\mu_H$  أساساً لإيجاد متوسط المعدلات :

$$\mu_H = \frac{N}{\sum (1/X)} \quad (٢ - ٢٠)$$

$$\mu_H = \frac{2}{(1/60) + (1/15)} = \frac{2}{(1+4)/60} = \frac{2}{5/60} = 2 \cdot \frac{60}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ mi/h}$$

بينما أن الوسط الحسابي  $\mu = \Sigma X/N = (60 + 15)/2 = 75/2 = 37.5 \text{ mi/h}$  لاحظ أنه إذا كان متوسط سرعة المسافرة 37.5 mi/h فإنه يلزمها 60 min لقطع مسافة 20 mi (20 m / 37.5 mi) = 32 min . ولكنها تستغرق 10 min على الطريق خارج المدينة (10 mi) بمعدل 60 mi/h و 40 min على الطريق داخل المدينة (10 mi) بمعدل 15 mi/h فيكون مجموع الزمن 50 min ، والإجابة الصحيحة نحصل عليها باستخدام  $\mu_H = 24 \text{ mi/h}$  أي  $(20 \text{ mi} / 24 \text{ min/h}) \times 60 \text{ min} = 50 \text{ min}$

٢ - ١٠ (أ) بالنسبة للبيانات غير المبوبة الواردة في جدول (٢ - ٧) ، أوجد الربيع الأول والثاني والثالث ، أوجد كذلك العشير الثالث والمئين الستين (ب) أوجد نفس المقاييس للبيانات المبوبة في جدول (٢ - ١٢) . ( وتقسيم الربيعات البيانات إلى أربعة أجزاء ، وتقسيمها العشيرات إلى عشرة أجزاء ، بينما المئينات تقسمها إلى مائة جزء ) .

$$(أ) Q_1 = 4 \text{ (الربيع الأول) (متوسط قيمتي المفردتين العاشرة والحادية عشرة في جدول ٢-٨)}$$

$$Q_2 = 6 \text{ (الربيع الثاني) قيمة المنصر الذي ترتيبه 20.5 = الوسط}$$

$$Q_3 = 7.5 \text{ (الربيع الثالث) قيمة المنصر الذي ترتيبه 30.5}$$

$$D_3 = 5 \text{ (العشير الثالث) قيمة المنصر الذي ترتيبه 12.5}$$

$$P_{60} = 7 \text{ (المئين الستون) قيمة المنصر الذي ترتيبه 24.5}$$

$$Q_1 = L + \frac{n/4 - F}{f_1} c$$

$$= \$3.80 + \frac{25/4 - 5}{4} (\$0.10) = \$3.80 + \$0.03125 \approx \$3.83 \quad (ب) (٢١ - ٢)$$

$$Q_2 = L + \frac{n/2 - F}{f_2} c$$

$$= \$3.90 + \frac{25/2 - 9}{5} (\$0.10) = \$3.90 + \$0.07 = \$3.97 = \text{الوسيط} \quad (٢٢ - ٢)$$

$$Q_3 = L + \frac{3n/4 - F}{f_3} c$$

$$= \$4.00 + \frac{75/4 - 14}{6} (\$0.10) = \$4.00 + \$0.0792 \approx \$4.08 \quad (٢٣ - ٢)$$

$$D_3 = L + \frac{3n/10 - F}{f_3} c$$

$$= \$3.80 + \frac{75/10 - 5}{4} (\$0.10) = \$3.80 + \$0.0625 = \$3.86 \quad (٢٤ - ٢)$$

$$P_{60} = L + \frac{60n/100 - F}{f_{60}} c$$

$$= \$4.00 + \frac{1500/100 - 14}{6} (\$0.10) = \$4.00 + \$0.0167 \approx \$4.02 \quad (٢٥ - ٢)$$

مقاييس التشتت :

٢ - ١١ (أ) أوجد المدى للبيانات غير المبوبة في جدول (٧ - ٢) .

(ب) أوجد المدى للبيانات غير المبوبة في جدول (١٠ - ٢) والبيانات المبوبة في جدول ١٢ - ٢ .

(ج) ماهي مزايا وعيوب المدى .

(أ) المدى لبيانات غير مبوبة يساوي أكبر قيمة للملاحظات مطروحاً منها أصغر قيمة للملاحظات في مجموعة البيانات . المدى للبيانات غير المبوبة في جدول (٧ - ٢) هو من 2 إلى 10 أى 8 درجات .

(ب) المدى للبيانات غير المبوبة في جدول (١٠ - ٢) هو من \$3.55 إلى \$4.26 أى \$0.71 . ويمتد المدى للبيانات المبوبة من الحد الأدنى للفئة الصفرى إلى الحد الأعلى للفئة الكبرى . المدى للبيانات المبوبة في جدول (١٢ - ٢) يمتد من \$3.50 إلى \$4.29 .

(ج) مزايا المدى أنه سهل الحساب والفهم . أما عيوبه فهي أنه يأخذ في الاعتبار فقط أصغر وأكبر قيمة للتوزيع ، ومن ثم فإنه يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة ، كذلك لا يمكن حسابه للتوزيعات المفتوحة . هذه العيوب للمدى تجعل فائدته محدودة . ( باستثناء استخدامه في مراقبة الجودة ) .

٢ - ١٢ أوجد المدى الربيعي والانحراف الربيعي ( نصف المدى الربيعي )

(أ) للبيانات غير المبوبة في جدول (٧ - ٢) ، (ب) للبيانات المبوبة في جدول (١٢ - ٢) .

(أ) المدى الربيعي هو الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول أى

$$IR = Q_3 - Q_1 \quad (٢٦ - ٢)$$

المدى الربيعي للبيانات غير المبوبة في جدول (٧ - ٢) ،  $IR = 7.5 - 4 = 3.5$  ( باستخدام قيم  $Q_1$  و  $Q_3$  السابق إيجادها في مسألة (١٠ - ٢) (أ) ) لاحظ أن المدى الربيعي لا يتأثر بالقيم المتطرفة لأنها تستخدم فقط النصف

الأوسط للبيانات . ومن هنا فإنه أفضل من المدى ، ولكن استخدامه ليس بدرجة شيوع استخدام المقاييس الأخرى للتشتت . أما الانحراف الربيعي .

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad (٢٧ - ٢)$$

ومن ثم فإن الانحراف الربيعي  $QD = (7.5 - 4)/2 = 3.5/2 = 1.75$  وقياس الانحراف الربيعي المدى المتوسط لربع البيانات .

(ب) المدى الربيعي  $IR = Q_3 - Q_1 = \$4.08 - \$3.83 = \$0.25$  ( باستخدام قيم  $Q_1$  و  $Q_3$  السابق إيجادها في مسألة (٢ - ١٠) (ب) ) :

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{\$4.08 - \$3.83}{2} = \$0.125$$

٢ - ١٣ أوجد الانحراف المتوسط (أ) للبيانات غير المبوبة في جدول (٧ - ٢) . (ب) للبيانات المبوبة في جدول (٩ - ٢) . (أ) حيث  $\mu = 6$  ( انظر مسألة ٢ - ٣ (أ) ) ، فإن

$$\begin{aligned} \sum |X - \mu| &= 1 + 1 + 0 + 4 + 2 + 1 + 0 + 1 + 3 + 3 + 4 + 2 + 1 + 1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 2 + 4 \\ &\quad + 3 + 1 + 0 + 1 + 3 + 2 + 4 + 2 + 1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 2 + 3 + 0 + 1 + 3 + 4 + 1 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$AD = \frac{\sum |X - \mu|}{N} = \frac{72}{40} = 1.8 \text{ درجة}$$

لاحظ أن الانحراف المتوسط يأخذ جميع المشاهدات في الاعتبار . أي أنه يقيس متوسط الانحراف المطلق لكل مشاهدة عن الوسط الحسابي . ونأخذ القيمة المطلقة ( المشار إليها باستخدام خطين رأسيين )

$$\text{إذ أن } \sum (X - \mu) = 0 \text{ ( انظر مثال ه )}$$

(ب) يمكن إيجاد الانحراف المتوسط لنفس البيانات المبوبة بالاستعانة بجدول (٢ - ١٦) :

$$AD = \frac{\sum F|X - \mu|}{N} = \frac{72}{40} = 1.8 \text{ درجات}$$

ويعطى نفس القيمة السابق الحصول عليها من البيانات غير المبوبة .

جدول (٢ - ١٦) حسابات الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة في جدول (٩ - ٢)

| الدرجة   | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | الوسط الحسابي $\mu$ | $X - \mu$ | $ X - \mu $ | $f X - \mu $          |
|----------|----------------|-------------------|---------------------|-----------|-------------|-----------------------|
| 1.5-2.4  | 2              | 3                 | 6                   | -4        | 4           | 12                    |
| 2.5-3.4  | 3              | 3                 | 6                   | -3        | 3           | 9                     |
| 3.5-4.4  | 4              | 5                 | 6                   | -2        | 2           | 10                    |
| 4.5-5.4  | 5              | 5                 | 6                   | -1        | 1           | 5                     |
| 5.5-6.4  | 6              | 6                 | 6                   | 0         | 0           | 0                     |
| 6.5-7.4  | 7              | 8                 | 6                   | 1         | 1           | 8                     |
| 7.5-8.4  | 8              | 4                 | 6                   | 2         | 2           | 8                     |
| 8.5-9.4  | 9              | 4                 | 6                   | 3         | 3           | 12                    |
| 9.5-10.4 | 10             | 2                 | 6                   | 4         | 4           | 8                     |
|          |                | $\sum f = N = 40$ |                     |           |             | $\sum  X - \mu  = 72$ |

٢- ١٤ أوجد الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة في جدول ٢- ١٢ .

يمكن إيجاد متوسط الانحراف للبيانات المبوبة عن الأجر بالساعة الواردة في جدول ( ٢- ١٢ ) بالاستمارة بجدول ( ٢- ١٧ ) [  $X = \$3.95$  ] ( انظر مسألة ٢- ٤ ) ( ب ) :

$$AD = \frac{\sum f|X - \bar{X}|}{n} = \frac{\$3.60}{25} = \$0.144$$

لاحظ أن الانحراف المتوسط المحسوب للبيانات المبوبة هو تقدير للانحراف المتوسط « الحقيقي » والذي يمكن إيجاده من البيانات غير المبوبة . وعادة ما يختلف قليلا عن الانحراف المتوسط الحقيقي لأننا نستخدم تقدير الوسط الحسابي من البيانات المبوبة في حساباتها ( قارن قيمتي  $\bar{X}$  السابق لإيجادهما في مسألتين ( ٢- ٤ ) ، ( أ ) ، ( ب ) ) .

جدول ( ٢- ١٧ ) حسابات الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة في جدول ( ٢- ١٢ )

| أجر الساعة  | مركز الفئة $\bar{X}$ | التكرار $f$       | الوسط الحسابي $\bar{X}$ | $X - \bar{X}$ | $ X - \bar{X} $ | $f X - \bar{X} $               |
|-------------|----------------------|-------------------|-------------------------|---------------|-----------------|--------------------------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55               | 1                 | \$3.95                  | -\$0.40       | \$0.40          | \$0.40                         |
| 3.60-3.69   | 3.65                 | 2                 | 3.95                    | -0.30         | 0.30            | 0.60                           |
| 3.70-3.79   | 3.75                 | 2                 | 3.95                    | -0.20         | 0.20            | 0.40                           |
| 3.80-3.89   | 3.85                 | 4                 | 3.95                    | -0.10         | 0.10            | 0.40                           |
| 3.90-3.99   | 3.95                 | 5                 | 3.95                    | 0.00          | 0.00            | 0.00                           |
| 4.00-4.09   | 4.05                 | 6                 | 3.95                    | 0.10          | 0.10            | 0.60                           |
| 4.10-4.19   | 4.15                 | 3                 | 3.95                    | 0.20          | 0.20            | 0.60                           |
| 4.20-4.29   | 4.25                 | 2                 | 3.95                    | 0.30          | 0.30            | 0.60                           |
|             |                      | $\sum f = n = 25$ |                         |               |                 | $\sum f X - \bar{X}  = \$3.60$ |

٢- ١٥ أوجد التباين والانحراف المعياري ( أ ) للبيانات المبوبة في جدول ( ٢- ٧ ) ( ب ) للبيانات المبوبة في جدول ( ٢- ٩ ) ( ج ) إذا امتاز الانحراف المعياري من التباين ؟

( أ )  $\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N}$  و  $\mu = 6$  ( انظر مسألة ٢- ٣ )

$$\sum (X - \mu)^2 = 1 + 1 + 0 + 16 + 4 + 1 + 0 + 1 + 9 + 9 + 16 + 4 + 1 + 1 + 4 + 0 + 1 + 4 + 4 + 16 + 9 + 1 + 0 + 1 + 9 + 4 + 16 + 4 + 1 + 9 + 4 + 0 + 1 + 4 + 9 + 0 + 1 + 9 + 16 + 1 = 192$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} = \frac{192}{40} = 4.8 \text{ درجات مربعة}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{192}{40}} = \sqrt{4.8} \approx 2.19 \text{ درجات}$$

( ب ) يمكن إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة للدرجات بالاستمارة بجدول ( ٢- ١٨ ) :

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(X - \mu)^2}{N} = \frac{192}{40} = 4.8 \text{ درجات مربعة}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.19 \text{ درجات}$$

وهي نفس القيم السابق لإيجادهما من البيانات غير المبوبة



جدول ( ٢ - ١٨ ) حسابات التباين والانحراف المعياري للبيانات في جدول ( ٢ - ٩ )

| الدرجة   | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$         | الوسط الحسابي $\mu$ | $X - \mu$ | $(X - \mu)^2$ | $f(X - \mu)^2$              |
|----------|----------------|---------------------|---------------------|-----------|---------------|-----------------------------|
| 1.5-2.4  | 2              | 3                   | 6                   | -4        | 16            | 48                          |
| 2.5-3.4  | 3              | 3                   | 6                   | -3        | 9             | 27                          |
| 3.5-4.4  | 4              | 5                   | 6                   | -2        | 4             | 20                          |
| 4.5-5.4  | 5              | 5                   | 6                   | -1        | 1             | 5                           |
| 5.5-6.4  | 6              | 6                   | 6                   | 0         | 0             | 0                           |
| 6.5-7.4  | 7              | 8                   | 6                   | 1         | 1             | 8                           |
| 7.5-8.4  | 8              | 4                   | 6                   | 2         | 4             | 16                          |
| 8.5-9.4  | 9              | 4                   | 6                   | 3         | 9             | 36                          |
| 9.5-10.4 | 10             | 2                   | 6                   | 4         | 16            | 32                          |
|          |                | $\Sigma f = N = 40$ |                     |           |               | $\Sigma f(X - \mu)^2 = 192$ |

( ج ) يمتاز الانحراف المعياري عن التباين بأنه يعبر عنه باستخدام نفس وحدات القياس كما في البيانات بينما يكون تمييز التباين « وحدات القياس مربعة » ويعتبر الانحراف المعياري أكثر مقاييس التشتت ( المطلق ) شيوعاً .

٢ - ١٦ أوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جدول ( ٢ - ١٠ ) .

يمكن إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة لأجر الساعة بالاستعانة بجدول ( ٢ - ١٩ ) (  $\bar{X} = \$3.95$  ) انظر مسألة (٢-٤) (ب) :

$$s^2 = \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{0.82}{24} \approx 0.0342 \text{ دولارات مربعة}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1}} = \sqrt{0.0342} = \$0.18 \text{ و}$$

جدول ( ٢ - ١٩ ) حسابات التباين والانحراف المعياري لبيانات جدول ( ٢ - ١٢ )

| أجر الساعة  | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$         | الوسط الحسابي $\bar{X}$ | $X - \bar{X}$ | $(X - \bar{X})^2$ | $f(X - \bar{X})^2$               |
|-------------|----------------|---------------------|-------------------------|---------------|-------------------|----------------------------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55         | 1                   | \$3.95                  | -\$0.40       | 0.16              | 0.16                             |
| 3.60-3.69   | 3.65           | 2                   | 3.95                    | -0.30         | 0.09              | 0.18                             |
| 3.70-3.79   | 3.75           | 2                   | 3.95                    | -0.20         | 0.04              | 0.08                             |
| 3.80-3.89   | 3.85           | 4                   | 3.95                    | -0.10         | 0.01              | 0.04                             |
| 3.90-3.99   | 3.95           | 5                   | 3.95                    | 0.00          | 0.00              | 0.00                             |
| 4.00-4.09   | 4.05           | 6                   | 3.95                    | 0.10          | 0.01              | 0.06                             |
| 4.10-4.19   | 4.15           | 3                   | 3.95                    | 0.20          | 0.04              | 0.12                             |
| 4.20-4.29   | 4.25           | 2                   | 3.95                    | 0.30          | 0.09              | 0.18                             |
|             |                | $\Sigma f = n = 25$ |                         |               |                   | $\Sigma f(X - \bar{X})^2 = 0.82$ |

لاحظ أنه في معادلتى حساب  $s^2$  و  $s$  ، يتم استخدام  $n-1$  في المقام بدلا من  $n$  . ويرجع ذلك إلى أنه إذا أخذنا عدداً كبيراً من العينات من المجتمع ، فإن متوسط تباين العينات لن يتجه لأن يكون مساوياً لتباين المجتمع  $\sigma^2$  إلا إذا استخدمنا  $n-1$  في المقام عند حساب  $s^2$  ( سوف نناقش ذلك ثانية في الفصل الخامس ) . هذا بالإضافة إلى أن  $s^2$  و  $s$  للبيانات المبوبة هي تقديرات للقيم الحقيقية  $\sigma^2$  و  $\sigma$  التي يمكن إيجادها من البيانات غير المبوبة لأننا نستخدم في حساباتنا تقدير  $\bar{X}$  من البيانات المبوبة .

٢ - ١٧ بدءاً بمعادلات  $\sigma^2$  و  $s^2$  المعطاة في قسم ( ٢ - ٣ ) أثبت أن

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum X^2 - N\mu^2}{N} \quad \text{و} \quad s^2 = \frac{\sum X^2 - n\bar{X}^2}{n-1} \quad (\text{أ}) \quad (٢-٢٨، ب) \\ \sigma^2 &= \frac{\sum fX^2 - N\mu^2}{N} \quad \text{و} \quad s^2 = \frac{\sum fX^2 - n\bar{X}^2}{n-1} \quad (\text{ب}) \quad (٢-٢٩، ب) \\ \sigma^2 &= \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} = \frac{\sum (X^2 - 2X\mu + \mu^2)}{N} = \frac{\sum X^2 - 2\mu \sum X + N\mu^2}{N} \\ &= \frac{\sum X^2}{N} - 2\mu^2 + \mu^2 = \frac{\sum X^2 - N\mu^2}{N} \quad (\text{أ}) \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على  $s^2$  باستبدال  $\mu$  واستخدام  $\bar{X}$  بدلا منها ، وكذلك باستخدام  $n$  بدلا من  $N$  في البسط ، واستخدام  $n-1$  بدلا من  $N$  في المقام في معادلة  $\sigma^2$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum f(X - \mu)^2}{N} = \frac{\sum f(X^2 - 2X\mu + \mu^2)}{N} = \frac{\sum fX^2 - 2\mu \sum fX + N\mu^2}{N} \\ &= \frac{\sum fX^2}{N} - 2\mu^2 + \mu^2 = \frac{\sum fX^2 - N\mu^2}{N} \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على  $s^2$  بنفس الطريقة كما في ( أ ) . وتستخدم الصيغ السابقة لتبسيط الحسابات اللازمة لإيجاد  $\sigma^2$  و  $s^2$  لمجموعة كبيرة من البيانات . ويمكن التبسيط أيضاً باستخدام الترميز ( انظر مسألة ( ٢ - ٦ ) ) .

٢ - ١٨ أوجد التباين والانحراف المعياري ( أ ) للبيانات غير المبوبة في جدول ( ٢ - ٧ ) و ( ب ) للبيانات المبوبة في جدول ( ٢ - ٩ ) باستخدام المعادلات المبسطة مسألة ( ٢ - ١٧ ) .

$$\begin{aligned} \sum X^2 &= 49 + 25 + 36 + 4 + 64 + 49 + 36 + 49 + 9 + 81 + 100 + 16 + 25 + 25 \\ &\quad + 16 + 36 + 49 + 18 + 64 + 4 + 9 + 25 + 36 + 49 + 81 + 64 + 4 + 16 + 49 \\ &\quad + 81 + 16 + 36 + 49 + 64 + 9 + 36 + 49 + 81 + 100 + 25 \\ &= 1,632 \quad (\text{أ}) \\ \mu &= \frac{\sum X}{N} = \frac{240}{40} = 6 \\ \sigma^2 &= \frac{\sum X^2 - N\mu^2}{N} = \frac{1,632 - (40)(36)}{40} = \frac{1,632 - 1,440}{40} = \frac{192}{40} = 4.8 \quad \text{درجات مربعة} \\ \sigma &= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.19 \quad \text{درجات} \end{aligned}$$

وهي نفس القيم السابق إيجادها في مسألة ( ٢ - ١٥ ) ( أ )

(ب) يمكن إيجاد  $\sigma^2$  و  $\sigma$  للبيانات المبوبة في جدول (٢ - ٩) بالاستعانة بجدول (٢ - ٢٠) :

$$\mu = \frac{\sum fX}{N} = \frac{240}{6} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum fX^2 - N\mu^2}{N} = \frac{1,632 - (40)(36)}{40} = \frac{1,632 - 1,440}{40} = \frac{192}{40} = 4.8 \quad \text{درجات مربعة}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.19 \quad \text{درجات}$$

وهي نفس القيم السابق الحصول عليها في (أ) وفي مسألة (٢ - ١٥) .

جدول (٢ - ٢٠) حسابات التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جدول (٢ - ٩)

| الدرجة   | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | $fX$            | $X^2$ | $fX^2$              |
|----------|----------------|-------------------|-----------------|-------|---------------------|
| 1.5-2.4  | 2              | 3                 | 6               | 4     | 12                  |
| 2.5-3.4  | 3              | 3                 | 9               | 9     | 27                  |
| 3.5-4.4  | 4              | 5                 | 20              | 16    | 80                  |
| 4.5-5.4  | 5              | 5                 | 25              | 25    | 125                 |
| 5.5-6.4  | 6              | 6                 | 36              | 36    | 216                 |
| 6.5-7.4  | 7              | 8                 | 56              | 49    | 392                 |
| 7.5-8.4  | 8              | 4                 | 32              | 64    | 256                 |
| 8.5-9.4  | 9              | 4                 | 36              | 81    | 324                 |
| 9.5-10.4 | 10             | 2                 | 20              | 100   | 200                 |
|          |                | $\sum f = N = 40$ | $\sum fX = 240$ |       | $\sum fX^2 = 1,632$ |

٢ - ١٩ أوجد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جدول (٢ - ١٢) باستخدام المعادلات المبسطة الواردة في مسألة (٢ - ١٧) (ب)

يمكن إيجاد  $s^2$  و  $s$  للبيانات المبوبة في جدول (٢ - ١٢) بالاستعانة بجدول (٢ - ٢١) :

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{98.75}{25} = \$3.95$$

$$s^2 = \frac{\sum fX^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{390.8825 - (25)(15.6025)}{24} = \frac{390.8825 - 390.0625}{24} = \frac{0.82}{24}$$

$\approx 0.0342$  دولارات مربعة

$$s \approx \sqrt{0.0342} \approx \$0.18 \quad \text{و}$$

وهي نفس القيم السابق الحصول عليها في مسألة (٢ - ١٦)

جدول ٢ - ٢١ حسابات التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جدول ( ٢ - ١٢ )

| أجر الساعة  | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$         | $fX$                  | $X^2$   | $fX^2$                   |
|-------------|----------------|---------------------|-----------------------|---------|--------------------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55         | 1                   | \$ 3.55               | 12.6025 | 12.6025                  |
| 3.60-3.69   | 3.65           | 2                   | 7.30                  | 13.3225 | 26.6450                  |
| 3.70-3.79   | 3.75           | 2                   | 7.50                  | 14.0625 | 28.1250                  |
| 3.80-3.89   | 3.85           | 4                   | 15.40                 | 14.8225 | 59.2900                  |
| 3.90-3.99   | 3.95           | 5                   | 19.75                 | 15.6025 | 78.0125                  |
| 4.00-4.09   | 4.05           | 6                   | 24.30                 | 16.4025 | 98.4150                  |
| 4.10-4.19   | 4.15           | 3                   | 12.45                 | 17.2225 | 51.6675                  |
| 4.20-4.29   | 4.25           | 2                   | 8.50                  | 18.0625 | 36.1250                  |
|             |                | $\Sigma f = n = 25$ | $\Sigma fX = \$98.75$ |         | $\Sigma fX^2 = 390.8825$ |

٢ - ٢٠ أوجد معامل الاختلاف  $V$  ( أ ) لبيانات جدول ( ٢ - ٧ ) ( ب ) لبيانات جدول ( ٢ - ١٢ ) ( ج ) مافائدة معامل الاختلاف ؟

( أ ) عندما  $\mu = 6$  ،  $\sigma \approx 2.19$  ( انظر مسألة ( ٢ - ١٨ ) )

$$V = \frac{\sigma}{\mu} \approx \frac{2.19 \text{ points}}{6 \text{ points}} \approx 0.635, \text{ or } 6.35\%$$

( ب ) عندما  $\bar{X} = \$3.95$  ،  $s \approx \$0.18$  ( انظر مسألة ( ٢ - ١٩ ) )

$$V = \frac{s}{\bar{X}} \approx \frac{\$0.18}{\$3.95} \approx 0.046, \text{ or } 4.6\%$$

( ج ) يقيس معامل الاختلاف تشتت النسبي في البيانات ويعبر عنه بأرقام مطلقة وليس بوحدة . وذلك على عكس الانحراف المعياري والمقاييس الأخرى للتشتت المطلق والتي تأخذ أرقامها المحسوبة نفس وحدات البيانات الأصلية . ومن ثم فإن معامل الاختلاف يمكن استخدامه لمقارنة تشتت توزيعين أو أكثر إذا ما اختلفت وحدات القياس أو اختلفت متوسطاتها الحقيقية . فعلى سبيل المثال يمكننا القول أن تشتت بيانات جدول ( ٢ - ٧ ) أكبر من تشتت بيانات جدول ( ٢ - ١٢ ) . كما يمكن استخدام معامل الاختلاف لمقارنة تشتت نفس نوع البيانات على مدى عدة فترات زمنية ( عندما تتغير  $\mu$  أو  $\bar{X}$  وتتغير  $\sigma$  أو  $s$  ) .

شكل التوزيعات التكرارية :

٢ - ٢١ أوجد معامل بيرسون للالتواء للبيانات ( المبوبة ) ( أ ) في جدول ( ٢ - ٩ ) و ( ب ) في جدول ( ٢ - ١٢ )

( أ ) عندما  $\mu = 6$  ، الوسيط = 6.17 ( انظر مسألة ( ٢ - ٣ ) ) ( ب ) ،  $\sigma \approx 2.19$  ( انظر مسألة ( ٢ - ١٥ ) ) ( ب ) .

$$Sk = \frac{3(\mu - med)}{\sigma} \approx \frac{3(6 - 6.17)}{2.19} \approx \frac{3(-0.17)}{2.19} \approx -0.23 \text{ ( عدد مطلق )}$$

لاحظ أن الوسيط أكبر من الوسط الحسابي وأن التوزيع سالب الالتواء قليلا ( انظر شكل ( ٢ - ٥ ج ) ) .

( ب ) عندما  $\bar{X} = \$3.95$  ، الوسيط = \$ 3.97 ( انظر مسألة ( ٢ - ٤ ) ) ( ب ) ،  $s \approx \$0.18$  ( انظر مسألة ( ٢ - ١٦ ) )

$$Sk = \frac{3(\bar{X} - med)}{s} \approx \frac{3(3.95 - 3.97)}{0.18} = \frac{3(-0.02)}{0.18} = -0.33$$

( انظر شكل ( ٢ - ٦ ج ) )

٢ - ٢٢ باستخدام صيغة الالتواء افروسة على العزم الثالث أوجد معامل الالتواء لبيانات

( أ ) جدول ( ٢ - ٩ ) ( ب ) جدول ( ٢ - ١٢ )

(أ) يمكن إيجاد معامل الالتواء لبيانات جدول (٢ - ٩) باستخدام الصيغة المبينة على العزم الثالث بالاستعانة بجدول (٢٢ - ٢) :

$$S K = \frac{\sum f(X-\mu)^3}{N\sigma^3} \approx \frac{-1.05}{2.19^3} = -0.1$$

ويشير هذا إلى أن التوزيع سالب الالتواء ولكن درجة الالتواء تقاس بأسلوب مختلف عنه في مسألة (٢١ - ٢)

جدول (٢٢ - ٢) حسابات الالتواء لبيانات جدول (٢ - ٩) .

| الدرجة   | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | الوسط الحسابي $\mu$ | $X - \mu$ | $(X - \mu)^3$ | $f(X - \mu)^3$            |
|----------|----------------|-------------------|---------------------|-----------|---------------|---------------------------|
| 1.5-2.4  | 2              | 3                 | 6                   | -4        | -64           | -192                      |
| 2.5-3.4  | 3              | 3                 | 6                   | -3        | -27           | -81                       |
| 3.5-4.4  | 4              | 5                 | 6                   | -2        | -8            | -40                       |
| 4.5-5.4  | 5              | 5                 | 6                   | -1        | -1            | -5                        |
| 5.5-6.4  | 6              | 6                 | 6                   | 0         | 0             | 0                         |
| 6.5-7.4  | 7              | 8                 | 6                   | 1         | 1             | 8                         |
| 7.5-8.4  | 8              | 4                 | 6                   | 2         | 8             | 32                        |
| 8.5-9.4  | 9              | 4                 | 6                   | 3         | 27            | 108                       |
| 9.5-10.4 | 10             | 2                 | 6                   | 4         | 64            | 128                       |
|          |                | $\sum f = N = 40$ |                     |           |               | $\sum f(X - \mu)^3 = -42$ |

(ب) انظر جدول (٢٣ - ٢)

$$S K = \frac{\sum f(X - \bar{X})^3}{n s^3} = \frac{-0.0216}{0.18^3} = -0.36$$

لاحظ أنه بصرف النظر عن مقياس الالتواء المستخدم ، فإن توزيعات بيانات جدول (٢ - ٩) و جدول (٢ - ١٢) سالبة الالتواء ، والتواء الأخير أكبر من الأول .

جدول (٢٣ - ٢) حسابات الالتواء لبيانات جدول (٢ - ١٢)

| أجر الساعة  | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$ | الوسط الحسابي $\bar{X}$ | $X - \bar{X}$ | $(X - \bar{X})^3$ | $f(X - \bar{X})^3$               |
|-------------|----------------|-------------|-------------------------|---------------|-------------------|----------------------------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55         | 1           | \$3.95                  | -\$0.40       | -0.064            | -0.064                           |
| 3.60-3.69   | 3.65           | 2           | 3.95                    | -0.30         | -0.027            | -0.054                           |
| 3.70-3.79   | 3.75           | 2           | 3.95                    | -0.20         | -0.008            | -0.016                           |
| 3.80-3.89   | 3.85           | 4           | 3.95                    | -0.10         | -0.001            | -0.004                           |
| 3.90-3.99   | 3.95           | 5           | 3.95                    | 0             | 0                 | 0                                |
| 4.00-4.09   | 4.05           | 6           | 3.95                    | 0.10          | 0.001             | 0.006                            |
| 4.10-4.19   | 4.15           | 3           | 3.95                    | 0.20          | 0.008             | 0.024                            |
| 4.20-4.29   | 4.25           | 2           | 3.95                    | 0.30          | 0.027             | 0.054                            |
|             |                |             |                         |               |                   | $\sum f(X - \bar{X})^3 = -0.054$ |

٢ - ٢٣ أوجد معامل التفرطح لبيانات (أ) جدول (٢ - ٩) (ب) جدول (٢ - ١٢)

(أ) يمكن إيجاد معامل التفرطح لبيانات جدول (٢ - ٩) بالاستعانة بجدول ٢ - ٢٤ :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\sum f(X-\mu)^4}{N\sigma^4} = \frac{50.1}{2.19^4} \approx 2.18 \quad (\text{عدد مطلق})$$

أي أن التوزيع مفرطح ( انظر شكل ٢ - ٥ ج ) .

جدول ( ٢ - ٢٤ ) حسابات التفرطح لبيانات جدول ( ٢ - ٩ )

| الدرجة   | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$         | الوسط الحسابي $\mu$ | $X - \mu$ | $(X - \mu)^4$ | $f(X - \mu)^4$                |
|----------|----------------|---------------------|---------------------|-----------|---------------|-------------------------------|
| 1.5-2.4  | 2              | 3                   | 6                   | -4        | 256           | 768                           |
| 2.5-3.4  | 3              | 3                   | 6                   | -3        | 81            | 243                           |
| 3.5-4.4  | 4              | 5                   | 6                   | -2        | 16            | 80                            |
| 4.5-5.4  | 5              | 5                   | 6                   | -1        | 1             | 5                             |
| 5.5-6.4  | 6              | 6                   | 6                   | 0         | 0             | 0                             |
| 6.5-7.4  | 7              | 8                   | 6                   | 1         | 1             | 8                             |
| 7.5-8.4  | 8              | 4                   | 6                   | 2         | 16            | 64                            |
| 8.5-9.4  | 9              | 4                   | 6                   | 3         | 81            | 324                           |
| 9.5-10.4 | 10             | 2                   | 6                   | 4         | 256           | 512                           |
|          |                | $\Sigma f = N = 40$ |                     |           |               | $\Sigma f(X - \mu)^4 = 2,004$ |

(ب) بالاستعانة بجدول ( ٢ - ٢٥ ) :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\Sigma f(X - \bar{X})^4}{n s^4} \approx \frac{0.00268}{0.001} \approx 2.68$$

أى أن توزيع الأجر أيضاً مفطح ( انظر شكل ٢ - ٦ ج )

جدول ( ٢ - ٢٥ ) حسابات معامل التفرطح لبيانات جدول ( ٢ - ١٢ )

| أجر الساعة  | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$ | الوسط الحسابي $\bar{X}$ | $X - \bar{X}$ | $(X - \bar{X})^3$ | $f(X - \bar{X})^3$                 |
|-------------|----------------|-------------|-------------------------|---------------|-------------------|------------------------------------|
| \$3.50-3.59 | \$3.55         | 1           | \$3.95                  | -\$0.40       | -0.064            | -0.064                             |
| 3.60-3.69   | 3.65           | 2           | 3.95                    | -0.30         | -0.027            | -0.054                             |
| 3.70-3.79   | 3.75           | 2           | 3.95                    | -0.20         | -0.008            | -0.016                             |
| 3.80-3.89   | 3.85           | 4           | 3.95                    | -0.10         | -0.001            | -0.004                             |
| 3.90-3.99   | 3.95           | 5           | 3.95                    | 0             | 0                 | 0                                  |
| 4.00-4.09   | 4.05           | 6           | 3.95                    | 0.10          | 0.001             | 0.006                              |
| 4.10-4.19   | 4.15           | 3           | 3.95                    | 0.20          | 0.008             | 0.024                              |
| 4.20-4.29   | 4.25           | 2           | 3.95                    | 0.30          | 0.027             | 0.054                              |
|             |                |             |                         |               |                   | $\Sigma f(X - \bar{X})^3 = -0.054$ |

### مسائل إضافية

#### التوزيعات التكرارية :

٢ - ٢٤ يوضح جدول ( ٢ - ٢٦ ) التوزيع التكرارى لأسعار البنزين في 48 محطة بإحدى المدن . اعرض البيانات في شكل مدرج تكرارى ، مدرج تكرارى نسبى ، مضلع تكرارى ، ومنحنى متجميع .

جدول ( ٢ - ٢٦ ) التوزيع التكرارى لأسعار البنزين

| السعر       | التكرار |
|-------------|---------|
| \$1.00-1.04 | 4       |
| 1.05-1.09   | 6       |
| 1.10-1.14   | 10      |
| 1.15-1.19   | 15      |
| 1.20-1.24   | 8       |
| 1.25-1.29   | 5       |

٢ - ٢٥ جدول ( ٢ - ٢٧ ) يوضح التوزيع التكرارى لدخول عينة مكونة من 100 أسرة مأخوذة من إحدى المدن . اعرض البيانات باستخدام مدرج تكرارى ، مدرج تكرارى نسبى ، مضلع تكرارى ، ومنحنى متجمع جدول ( ٢ - ٢٧ ) التوزيع التكرارى لدخل العائلة

| التكرار         | دخل العائلة |
|-----------------|-------------|
| \$10,000-11,999 | 12          |
| 12,000-13,999   | 14          |
| 14,000-15,999   | 24          |
| 16,000-17,999   | 15          |
| 18,000-19,999   | 13          |
| 20,000-21,999   | 7           |
| 22,000-23,999   | 6           |
| 24,000-25,999   | 4           |
| 26,000-27,999   | 3           |
| 28,000-29,999   | 2           |
|                 | 100         |

مقاييس النزعة المركزية :

٢ - ٢٦ أوجد ( أ ) الوسط الحسابى (ب) الوسيط (ج) المنوال للبيانات المبوبة فى جدول ( ٢ - ٢٦ ) .  
الإجابة : ( أ ) الوسط الحسابى = \$ 1.15 (ب) الوسيط = \$ 1.16 (ج) المنوال = \$ 1.17

٢ - ٢٧ أوجد ( أ ) الوسط الحسابى (ب) الوسيط (ج) المنوال للتوزيع التكرارى للدخل فى جدول ( ٢ - ٢٧ ) .  
الإجابة : ( أ ) الوسط الحسابى = \$ 17,000 (ب) الوسيط = \$ 16,000 (ج) المنوال = \$ 15,053

٢ - ٢٨ أوجد الوسط الحسابى للبيانات المبوبة فى ( أ ) جدول ( ٢ - ٢٦ ) و (ب) جدول ( ٢ - ٢٧ ) باستخدام الترميز  
الإجابة : ( أ )  $\mu = \$1.15$  (ب)  $\bar{X} = \$17,000$

٢ - ٢٩ تدفع شركة أجر 5/12 من قوة العمل بها بمعدل \$5 للساعة ، أجر 1/3 قوة العمل بمعدل \$6 للساعة ، وأجر 1/4 قوة العمل بمعدل \$7 فى الساعة . ماهو المتوسط المرجح للأجور المدفوعة بالشركة ؟  
الإجابة :  $\mu_w = \$5.83$

٢ - ٣٠ حصل مستثمر على عائد من رأسماله المستثمر قدره 1% للسنة الأولى ، 4% للسنة الثانية ، 16% للسنة الثالثة .  
( أ ) أوجد  $\mu_G$  (ب) أوجد  $\mu$  (ج) أى منهما يعتبر مقياساً مناسباً ؟  
الإجابة : ( أ )  $\mu_G = 4\%$  (ب)  $\mu = 7\%$  (ج)  $\mu_G$

٢ - ٣١ قطعت طائرة مسافة 200 ميل بمعدل 600 ميل / ساعة ومسافة 100 ميل بمعدل 500 ميل / ساعة . ماهو متوسط السرعة ؟  
الإجابة : 562.5 ميل / ساعة .

٢ - ٣٢ يشتري سائق سيارة مقيمته \$10 من البنزين بسعر \$0.90 للجالون ، وما قيمته \$10 بسعر \$1.10 . ماهو متوسط سعر الجالون .  
الإجابة : \$0.99 للجالون .

٢ - ٣٣ البيانات المبوبة في جدول ( ٢ - ٢٦ ) أوجد ( أ ) الربيع الأول (ب) الربيع الثاني (ج) الربيع الثالث ( د ) المشير الرابع ( هـ ) المتين السبعين .

$$\begin{aligned} \text{الإجابة : ( أ ) } Q_1 &= \$1.11 \quad \text{(ب) } Q_2 \approx \$1.16 \quad \text{(ج) } Q_3 \approx \$1.21 \quad \text{(د) } D_4 = \$1.146 \\ \text{( هـ ) } P_{70} &\approx \$1.195 \end{aligned}$$

٢ - ٣٤ البيانات المبوبة في جدول ( ٢ - ٢٧ ) أوجد ( أ ) الربيع الأول (ب) الربيع الثالث (ج) المشير الثالث ( د ) المتين الستين

$$\begin{aligned} \text{الإجابة : ( أ ) } Q_1 &\approx \$13,857 \quad \text{(ب) } Q_3 \approx \$19,538 \\ \text{(ج) } D_3 &\approx \$14,333 \quad \text{(د) } P_{60} \approx \$17,333 \end{aligned}$$

مقاييس التشتت :

٢ - ٣٥ ماهو المدى لتوزيع ( أ ) أسعار البنزين في جدول ( ٢ - ٢٦ ) (ب) دخل الأسرة في جدول ( ٢ - ٢٧ ) ؟  
الإجابة : ( أ ) \$ 0.29 (ب) من \$ 10,000 إلى \$ 29,999 أو \$ 20,000

٢ - ٣٦ أوجد المدى الربيعي والانحراف الربيعي لبيانات ( أ ) جدول ( ٢ - ٢٦ ) (ب) جدول ( ٢ - ٢٧ )  
الإجابة : ( أ )  $QD \approx \$0.05$  و  $IR \approx \$0.10$  (ب)  $QD \approx \$238$  و  $IR \approx \$476$

٢ - ٣٧ أوجد متوسط الانحراف لبيانات ( أ ) جدول ( ٢ - ٢٦ ) (ب) جدول ( ٢ - ٢٧ )  
الإجابة : ( أ ) \$ 0.0575 (ب) \$ 3,520

٢ - ٣٨ أوجد ( أ ) التباين (ب) الانحراف المعياري للتوزيع التكراري لأسعار البنزين في جدول ( ٢ - ٢٦ )  
الإجابة : ( أ ) دولارات مربعة  $\sigma^2 \approx 0.0048$  (ب)  $\sigma \approx \$0.0693$

٢ - ٣٩ أوجد ( أ ) التباين (ب) الانحراف المعياري للتوزيع التكراري لدخل العائلة في جدول ( ٢ - ٢٧ )  
الإجابة : ( أ ) دورات مربعة  $s^2 = 19,760,000$  (ب)  $s \approx \$4,445.22$

٢ - ٤٠ باستخدام الصيغ الحسابية الأسهل أوجد ( أ ) التباين (ب) الانحراف المعياري لتوزيع أسعار البنزين في جدول ( ٢ - ٢٦ ) .  
الإجابة : ( أ )  $s^2 = \$19,760,000$  (ب)  $\sigma \approx \$0.0693$

٢ - ٤١ باستخدام الصيغ الحسابية الأسهل أوجد ( أ ) التباين (ب) الانحراف المعياري لدخل الأسرة في جدول ( ٢ - ٢٧ )  
الإجابة : ( أ )  $s^2 = \$19,760,000$  (ب)  $s \approx \$4,445.22$

٢ - ٤٢ طبقاً لنظرية تشبثيف ، ماهى أقل نسبة من المشاهدات التي لاتبعد عن الوسط الحسابى بأكثر من : ( أ ) 1.5 انحراف معياري (ب) 2.5 انحراف معياري ؟

$$\text{الإجابة : ( أ ) } 56\% \quad \text{(ب) } 84\%$$

٢ - ٤٣ للبيانات غير المبوبة في جدول ( ٢ - ٧ ) ( أ ) أوجد نسبة المشاهدات التي لاتبعد عن الوسط الحسابى بأكثر من 1.5 انحراف معياري (ب) هل يتفق هذا ونظرية تشبثيف ؟ (ج) أوجد نسبة المشاهدات التي لاتبعد عن الوسط الحسابى بأكثر من 2.5 % انحراف معياري (د) هل يتفق هذا ونظرية تشبثيف ؟

$$\text{الإجابة : ( أ ) } 87.5\% \quad \text{(ب) نعم} \quad \text{(ج) } 100\% \quad \text{(د) نعم}$$



٢ - ٤٤ أوجد معامل الاختلاف (أ) لبيانات جدول (٢ - ٢٦) (ب) لبيانات جدول (٢ - ٢٧) (ج) أى البيانات أكثر تشتتاً ؟  
الإجابة : (أ) 0.060 أو 6% (ب) 0.261 أو 26.1% (ج) بيانات جدول (٢ - ٢٧)

أشكال التوزيعات التكرارية :

٢ - ٤٥ أوجد معامل بيرسون للالتواء لبيانات (أ) جدول (٢ - ٢٦) (ب) جدول (٢ - ٢٧)  
الإجابة : (أ) 0.43 — (ب) 0.67

٢ - ٤٦ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزم الثالث لبيانات (أ) جدول (٢ - ٢٦) (ب) جدول (٢ - ٢٧)  
الإجابة : (أ) 1.88 — (ب) 755

٢ - ٤٧ أوجد معامل التفرطح لبيانات (أ) جدول (٢ - ٢٦) (ب) جدول (٢ - ٢٧)  
الإجابة : (أ) 177 (ب) 300

## الفصل الثالث

### الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

#### ١-٣ احتمال حدث منفرد

إذا كان الحدث  $A$  يمكن أن يحدث بطرق عددها  $n_A$  من بين نواتج متساوية الفرصة في الوقوع عددها  $N$  ، فإن احتمال وقوع الحدث  $A$  يعرف كما يلي :

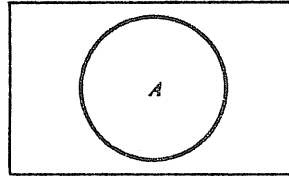
$$P(A) = \frac{n_A}{N} \quad (١-٣)$$

حيث  $P(A)$  = احتمال وقوع الحدث  $A$

$=$  عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها  $A$

$N$  = العدد الكلي للنواتج المتساوية الفرصة في الوقوع .

ويمكن تصور الاحتمال باستخدام شكل فن . في شكل ( ١ - ٣ ) تمثل الدائرة الحدث  $A$  ، بينما تمثل المساحة الكلية للمستطيل كل النواتج الممكنة



شكل ١ - ٣

وتتراوح  $P(A)$  بين 0 و 1 .

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (٢-٣)$$

فإذا كانت  $P(A) = 0$  ، فإن الحدث  $A$  لا يمكن أن يقع . وإذا كانت  $P(A) = 1$  ، فإن الحدث  $A$  مؤكد الوقوع .

وإذا استخدمنا  $P(A')$  لتمثل احتمال عدم وقوع الحدث  $A$  فإن ،

$$P(A) + P(A') = 1 \quad (٣-٣)$$

مثال ( ١ ) : عند إلقاء قطعة نقود متوازنة فإن الصورة والكتابة يمثلان ناتجين لها نفس فرصة الوقوع ، أي أن

$$P(H) = \frac{n_H}{N} = \frac{1}{2}$$

$$P(T) = \frac{n_T}{N} = \frac{1}{2}$$

$$P(H) + P(T) = 1 \quad \text{و}$$

مثال ( ٢ ) : عند إلقاء حجر نرد غير متحيز فإن هناك ستة نواتج متساوية الفرصة في الحدوث 1, 2, 3, 4, 5, 6 ومن ثم فإن ،

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

ويكون احتمال عدم ظهور 1 هو

$$P(1') = 1 - P(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(1) + P(1') = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

و

مثال ( ٣ ) : سميت ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب ذات 52 ورقة ممزوجة مزجاً جيداً . وحيث أن مجموعة أوراق اللعب تحتوي على 4 أولاد فإن احتمال أن تكون الورقة المسحوبة ولداً ، J ،

$$J = \frac{n_J}{N} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

وحيث أن المجموعة تحتوي على 13 ورقة دينارية ، D ، فإن ،

$$P(D') = 1 - P(D) = 1 - \frac{13}{52} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(D) + P(D') = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

و

مثال ( ٤ ) : افترض أننا حصلنا في مائة رمية لعملة متوازنة على 53 صورة ، 47 كتابة . فإن التكرار النسبي للصورة يكون 53 / 100 أو 0.53 . إن هذا هو التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي وينبغي تمييزه عن الاحتمال الكلاسيكي أو المسبق  $P(H) = 0.5$  . ومع ترايد عدد الرميات ليقترّب من مالانهاية فإن التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي يقترب من الاحتمال المسبق أو الكلاسيكي . وعلى سبيل المثال فإن التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي قد يكون 0.517 في حالة 1,000 رمية ، 0.508 في حالة 10,000 رمية ، وهكذا .

### ٢-٣ احتمال الأحداث المتعددة

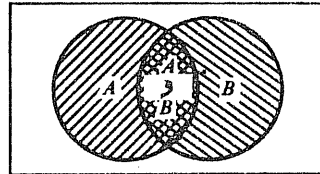
١ - قاعدة الجمع للأحداث المتنافية : يعتبر الحدثان A و B متنافيين بالتبادل إذا كان وقوع A يحجب وقوع B والعكس بالعكس . عندئذ

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) \quad (٤ - ٣)$$

٢ - قاعدة الجمع للأحداث غير المتنافية : يعتبر الحدثان A و B غير متنافيين إذا كان وقوع A لا يحجب وقوع B والعكس بالعكس فيكون

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B) \quad (٥ - ٣)$$

وتطرح قيمة  $P(A \text{ و } B)$  حتى نتجنب حسابها مرتين . ويمكن إدراك ذلك من شكل فن الموضح بشكل ( ٣ - ٢ ) .



شكل ٣ - ٢

٣ - قاعدة الضرب للأحداث المستقلة : يعتبر الحدثان  $A$  و  $B$  مستقلين إذا كان وقوع  $A$  غير مرتبط بأي طريقة بوقوع  $B$  . عندئذ الاحتمال المشترك للحدثين  $A$  و  $B$  هو

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B) \quad (٦-٣)$$

٤ - قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة : يعتبر الحدثان غير مستقلين إذا كان وقوع أحدهما مرتبطاً بطريقة ما بوقوع الآخر . عندئذ

$$P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (٧-٣)$$

وتقرأ كالتالي : « احتمال وقوع كل من الحدثين  $A$  و  $B$  يساوي احتمال وقوع الحدث  $A$  مضروباً في احتمال وقوع الحدث  $B$  إذا علم أن الحدث  $A$  قد وقع فعلاً » .

$$P(B/A) = \text{الاحتمال الشرطي للحدث } B \text{ علماً بأن الحدث } A \text{ قد وقع فعلاً} \quad (٨-٣)$$

$$P(A \text{ و } B) = P(B \text{ و } A) \quad (٩-٣)$$

انظر مسألة (٣-١٥) (ج) و (د) .

مثال (٥) : في رمية واحدة لحجر نرد ، يمكن الحصول على واحد من ستة نواتج ممكنة : 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6 . هذه الأحداث متنافية بالتبادل . فإذا كانت الرمية غير متحيزة فإن  $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$  ويكون احتمال الحصول على 2 أو 3 في رمية واحدة للرمة :

$$P(2 \text{ أو } 3) = P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(2 \text{ أو } 3 \text{ أو } 4) = P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{وبالمثل :}$$

مثال (٦) : عند سحب ورقة واحدة عشوائياً من مجموعة أوراق لعب مخلوطة خلطاً جيداً فإن الحدث « يستوفى  $s$  » والحدث « شايب  $k$  » غير متنافية بالتبادل « لأنه يمكننا سحب شايب يستوفى ، فيكون

$$P(S \text{ أو } K) = P(S) + P(K) - P(S \text{ و } K) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

وباستخدام نظرية المجموعات ، فإن العبارة السابقة يمكن إعادة كتابتها في الصورة

$$P(S \cup K) = P(S) + P(K) - P(S \cap K) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

حيث الرمز  $\cup$  (ويقترأ « اتحاد ») يحل محل « أو » ، الرمز  $\cap$  (ويقترأ « تقاطع ») يحل محل « و » .

مثال (٧) : نعتبر نواتج رميتين متتاليتين لقطعة نقود متوازنة أحداثاً مستقلة . فناتج الرمية الأولى لا يؤثر على أي نحو على ناتج الرمية الثانية . فيكون

$$P(H \text{ و } H) = P(H \cap H) = P(H) \cdot P(H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ أو } 0.25$$

$$\text{وبالمثل } 0.125 \text{ و } P(H \text{ و } H \text{ و } H) = P(H \cap H \cap H) = P(H) \cdot P(H) \cdot P(H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

مثال (٨) : احتمال الحصول على « شايب ديناري » عند سحب الورقة الأولى من مجموعة أوراق اللعب هو

$$P(K_D) = \frac{1}{52}$$

فإذا كانت الورقة الأولى المسحوبة هي فعلاً شايب دينارى ، ولم تعد الورقة المسحوبة إلى المجموعة فإن احتمال الحصول على شايب آخر عند سحب الورقة الثانية تتوقف على نتيجة سحب الورقة الأولى ، حيث أصبح بالمجموعة 3 شايب فقط من مجموع 51 ورقة المتبقية في المجموعة . ويكون الاحتمال الشرطى لسحب شايب آخر ، بمعلومية أن الورقة الأولى كانت شايب دينارى ولم تعد للمجموعة ، هو

$$P(K/K_D) = 3/51$$

وإذن فاحتمال سحب شايب دينارى في السحبة الأولى ، بدون إحلال ، وسحب شايب آخر في السحبة الثانية هو

$$P(K_D \text{ و } K) = P(K_D) \cdot P(K/K_D) = \frac{1}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{3}{2,652}$$

أى حوالى واحد في الألف . وترتبط بالاحتمال الشرطى نظرية بييز ( انظر مسألة ٣ - ١٧ ) . كما تراجع المسألة ٣ - ١٨ التباديل والتوافيق ، أو « أساليب العد » .

### ٣-٣ التوزيعات الاحتمالية المنفصلة : توزيع ذى الحدين

المتغير العشوائى : هو متغير ترتبط قيمه باحتمال تحقق تلك القيم . المتغير العشوائى المنفصل ( مقارنة بالمتصل ) هو المتغير الذى يمكن أن يأخذ فقط قيماً محدودة ومتميزة . وتسمى مجموعة كل القيم الممكنة للمتغير العشوائى واحتمالاتها المناظرة للتوزيع الاحتمالى . ويكون مجموع الاحتمالات 1 ( انظر مثال ٩ ) .

إن التوزيع ذا الحدين هو أحد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة . ويستخدم لإيجاد احتمال وقوع حدث معين ( نجاح ) عدداً من المرات مقداره  $X$  من بين  $n$  من المحاولات لنفس التجربة ( ونرمز لهذا الاحتمال بالرمز  $P(X)$  ) عندما تتحقق الشروط التالية :

( ١ ) هناك فقط ناتجان ممكنان ومتنافيان لكل محاولة ( ٢ ) المحاولات وعددها  $n$  مستقلة عن بعضها البعض ( ٣ ) احتمال وقوع الحدث المعين في كل محاولة ( النجاح )  $P$  ، ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى . فيكون

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X} \quad (١٠-٣)$$

حيث  $n!$  ( وتقرأ « مضروب  $n$  » )  $= 3.2.1 \dots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$  . و  $0! = 1$  بالترتيب ( انظر مسألة ( ٣ - ١٨ ) ) .

ويكون متوسط توزيع ذى الحدين

$$\mu = np \quad (١١-٣)$$

وانحرافه المعياري

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (١٢-٣)$$

فإذا كانت  $p = 1 - p = 0.5$  ، فإن توزيع ذى الحدين يكون متماثلاً ؛ وإذا كانت  $p < 0.5$  ، يكون التوزيع ملتوياً إلى اليمين ؛ وإذا كانت  $p > 0.5$  يكون التوزيع ملتوياً إلى اليسار .

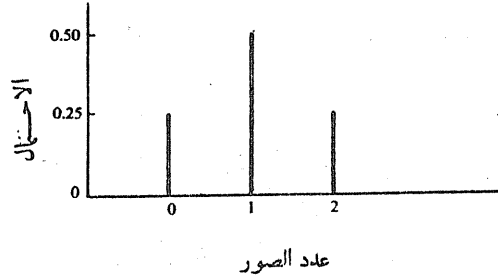
مثال ( ٩ ) عند رمى عملة متوازنة مرتين فإن النواتج الممكنة هي TT, TH, HT, HH وإذن

$$P(0H) = \frac{1}{4} \quad P(1H) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(2H) = \frac{1}{4}$$

وهكذا فإن عدد الصور متغير عشوائى منفصل ، وتمثل مجموعة كل النواتج الممكنة مع احتمالاتها المناظرة توزيعاً احتمالياً منفصلاً . ( انظر جدول ٣ - ١ ، وشكل ٣ - ٣ ) .

جدول ٣ - ١ التوزيع لعدد الصور في رميتين لعملة متوازنة

| عدد الصور | الناتج الممكنة | احتمال عدد الصور |
|-----------|----------------|------------------|
| 0         | TT             | 0.25             |
| 1         | TH, HT         | 0.50             |
| 2         | HH             | 0.25             |
|           |                | 1.00             |



شكل ٣ - ٣ التوزيع الاحتمالي لعدد الصور في رميتين لعملة متوازنة

مثال (١٥) : باستخدام توزيع ذي الحدين يمكننا إيجاد احتمال الحصول على 4 صور في 6 رميات لعملة متوازنة كالآتي :

$$P(4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} (1/2)^4 (1/2)^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} (1/16)(1/4) = 15(1/64) = \frac{15}{64} \approx 0.23$$

ويمكن تجنب الحسابات الطويلة لإيجاد الاحتمالات ، عندما تكون  $n$  و  $X$  أعداداً كبيرة باستخدام الملحق ١ . إن عدد الصور المتوقع في ست رميات هو  $\mu = np = (6)(1/2) = 3$  . ويكون الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لست رميات هو

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{(6)(1/2)(1/2)} = \sqrt{6/4} = \sqrt{1.5} \approx 1.22$$

وهذا التوزيع مماثل لأن  $p = 0.5$  . وإذا لم تكن التجربة رمياً لعملة ولم تكن المحاولات المتتالية مستقلة ( كما في حالة المعاينة بدون إحلال ) ، كان علينا أن نستخدم التوزيع فوق الهندسي ( انظر مسألة ٣ - ٢٧ ) .

### ٣-٤ توزيع بواسون

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل آخر . ويستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن ، وذلك عندما تكون الأحداث أو « النجاحات » مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتاً لوحدة الزمن . عندئذ

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} \quad (٣-١٣)$$

حيث  $X$  = العدد المعين من النجاحات

$P(X)$  = احتمال عدد  $X$  من النجاحات

$\lambda$  = ( الحرف اليوناني لامدا ) = متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن

$e$  = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي ، أو 2.71828

وبمعلومية قيمة  $\lambda$  ( القيمة المتوقعة أو متوسط وتباين توزيع بواسون ) ، يمكن إيجاد  $P(X)$  من ملحق ٢ ، والتمويض

في معادلة ( ٣ - ١٣ ) ، وإيجاد  $P(X)$

مثال (١١) : يتلقى قسم بوليس في المتوسط 5 مكالمات في الساعة فيكون احتمال تلقي مكالمتين في ساعة مختارة عشوائياً هو

$$P(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = \frac{(25)(0.00674)}{2} = 0.08425$$

ويمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما تكون  $n$  كبيرة وتكون  $P$  أو  $1-p$  صغيرة  
 $[n \geq 30, np < 5 \text{ أو } n(1-p) < 5]$  انظر المسألة (٣ - ٣٠)

### ٣-٥ التوزيعات الاحتمالية المتصلة : التوزيع الطبيعي

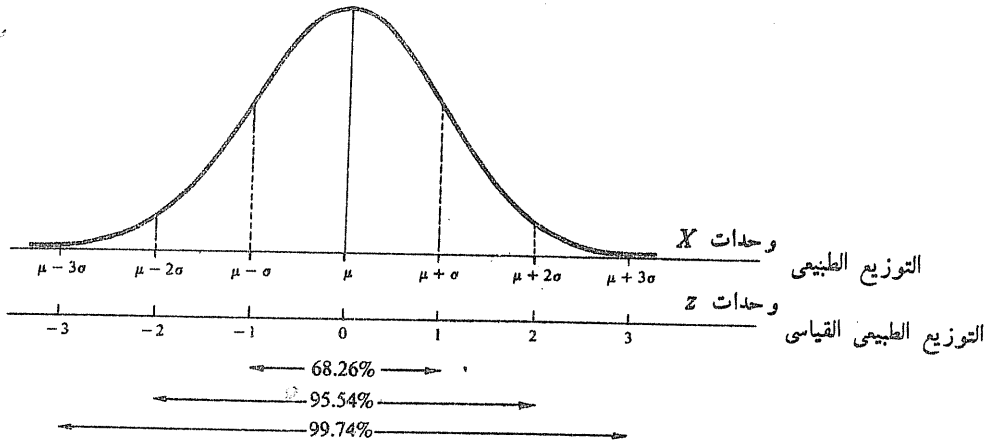
المتغير العشوائي المتصل  $X$  هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ عدداً لا نهائياً من القيم داخل أي فترة معلومة . احتمال أن تقع  $X$  داخل أي فترة يمثل مساحة التوزيع الاحتمالي ( ويسمى أيضاً دالة الكثافة ) داخل هذه الفترة . والمساحة الكلية تحت المنحنى ( الاحتمال ) تساوي 1 ( انظر المسألة ٣ - ٣١ ) .

التوزيع الطبيعي هو توزيع احتمال متصل وهو أكثر التوزيعات استخداماً في التحليل الإحصائي ( انظر المسألة ٣ - ٣٢ ) . والتوزيع الطبيعي جرسى الشكل ومماثل حول الوسط الحسابي . ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين ، ولكن معظم المساحة ( الاحتمال ) يتركز حول الوسط الحسابي ( انظر شكل ٣ - ٤ ) .

التوزيع الطبيعي القياسي هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي 0 وانحرافه المعياري 1 ( أي أن  $\mu = 0$  و  $\sigma = 1$  ) . ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي ( بوحدات  $X$  في شكل ٣ - ٤ ) إلى توزيع طبيعي قياسي ( بوحدات  $z$  ) . وتحت هذه الشروط ، فإن 68.26% من المساحة ( الاحتمال ) تحت المنحنى الطبيعي القياسي تقع بين إحداثيين رأسيين يبعدان بمقدار انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي ( أي داخل  $\pm 1\sigma$  ) ، 95.54% تقع بين  $\pm 2\sigma$  ، 99.74% تقع بين  $\pm 3\sigma$

ولإيجاد الاحتمالات ( المساحات ) في مسائل تحتوي على التوزيع الطبيعي ، فإننا نحول أولاً قيم  $X$  إلى قيم  $z$  المناظرة لها ، كالاتي :

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (٣ - ١٤)$$



شكل ٣ - ٤

ثم نكشف عن قيمة  $z$  في ملحق ٣ . ويعطى هذا قيمة الجزء من المساحة ( الاحتمال ) تحت المنحنى بين قيمة الوسط الحسابي وقيمة  $z$

مثال (١٢) : المساحة ( الاحتمال ) تحت المنحنى الطبيعي المعياري بين  $z = 0$  و  $z = 1.96$  نحصل عليها مقابلة للقيمة 1.96 في ملحق ٣ . في عمود  $z$  نبدأ بالقيمة 1.9 ونتحرك في الصف المناظر لها حتى نصل إلى العمود المعنون 0.06 ، وتكون القيمة التي نحصل عليها 0.4750 . ويعني هذا أن 47.50% من المساحة الكلية ( 1 أو 100 % ) تحت المنحنى تقع بين  $z = 0$  و  $z = 1.96$  ( المساحة المظلة في الشكل فوق الجدول ) . ولأن التوزيع متماثل ، فإن المساحة بين  $z = 0$  و  $z = -1.96$  ( ليست مدرجة في الجدول ) هي أيضاً 0.4750 أو 47.50 % .

مثال (١٣) : افترض أن  $X$  متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي حيث  $\mu = 10$  و  $\sigma^2 = 4$  ونريد إيجاد احتمال أن تأخذ  $X$  قيمة بين 8 و 12 نحسب أولاً قيمة  $z$  المناظرة لقيم  $X$  وهي 0 و 12 ثم نكشف عن القيم التي تناظر قيم  $z$  في ملحق ٣ :

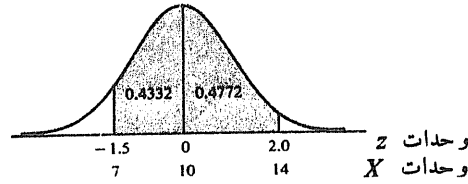
$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 10}{2} = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2} = +1$$

عندما  $z = 1$  نحصل على القيمة 0.3413 من ملحق ( ٣ ) . ومن ثم فإن المساحة بين  $z = \pm 1$  تساوي  $2(0.3413)$  أو 0.6826 . وهذا يعني أن احتمال أن تأخذ  $X$  قيمة بين 8 و 12 أو  $P(8 < X < 12)$  هو 68.26% ( انظر شكل ٣ - ٤ )

مثال (١٤) : افترض مرة أخرى أن  $X$  متغير عشوائي موزع طبقاً للتوزيع الطبيعي حيث  $\mu = 10$  ، و  $\sigma^2 = 4$  . فيمكن إيجاد احتمال أن تأخذ قيمة بين 7 و 14 كالآتي :

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{7 - 10}{2} = -1.5 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{14 - 10}{2} = 2$$

عندما  $z_1 = 1.50$  ، نكشف عن القيمة 1.50 في ملحق ( ٣ ) فنحصل على 0.4332 . وعندما  $z_2 = 2$  نحصل على القيمة 0.4772 ومن ثم فإن 91.04% أو  $0.4332 + 0.4772 = 0.9104 = P(7 < X < 14)$  ( انظر شكل ٣ - ٥ ) . ومن ثم ، فإن احتمال أن تأخذ قيمة أقل من 7 أو أكبر من 14 ( المناطق غير المظلة في أطراف التوزيع في شكل ٣ - ٥ ) هي  $1 - 0.9104 = 0.0896$  أي 8.96% . ويستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع ذي الحدين عندما  $n \geq 30$  و  $np > 5$  ،  $n(1-p) > 5$  ، كما يستخدم كتقريب لتوزيع بواسون عندما  $\lambda \geq 10$  ( انظر المسائل ٣-٣٧ و ٣-٣٨ ) . وهناك توزيع احتمالي متصل آخر هو التوزيع الأسّي ( انظر المسألة ٣ - ٣٩ ) . وتنص نظرية أو متباينة تشيبيشيف أنه يصرف النظر عن شكل التوزيع ، فإن نسبة المشاهدات أو المساحة التي تقع في حدود  $K$  انحراف معياري على جانبي الوسط الحسابي تكون على الأقل  $1 - 1/K^2$  ، حيث  $K \geq 1$  . ( انظر المسائل ٣ - ٤٠ و ٣ - ٧٢ ) .



شكل ٣ - ٥

### مسائل محلولة

احتمال حدث منفرد :

- ٣ - ١ (أ) فرق بين الاحتمال الكلاسيكي أو المسبق ، وبين التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي وبين الاحتمال الشخصي أو الذاتي  
(ب) ماهي عيوب كل منها (ج) لماذا ندرس نظرية الاحتمال ؟



(أ) طبقاً للاحتمال الكلاسيكي ، فإن احتمال حدث ما A هو :

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

حيث  $P(A)$  = احتمال وقوع الحدث A

$n_A$  = عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث A

$N$  = عدد النواتج الكلية و كلها متساوية الفرصة في الوقوع .

في المدخل الكلاسيكي ، يمكن عمل تقارير احتمالية عن عملات متوازنة ، وأحجار نرد غير متحيزة وأوراق لعب بدون رمى عملة ، أو إلقاء نردة ، أو سحب ورقة من مجموعة أوراق لعب . أما التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي فيمثل النسبة بين عدد المرات التي يقع فيها حدث ما فعلاً وبين العدد الكلي للنواتج الفعلية أو المشاهدات . وكلما زاد عدد المحاولات أو التجارب ( مثل عدد مرات رمي العملة ) . كلما اقترب التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي من الاحتمال الكلاسيكي أو المسبق . أما الاحتمال الشخصي أو الذائقي فيشير إلى درجة الاعتقاد لدى شخص ما بأن حدثاً معيناً سوف يحدث ، تأسيباً على أي أدلة متوافرة لديه .

(ب) الاحتمال الكلاسيكي أو المسبق يمكن تطبيقه فقط على ألغاز الصدفة ( مثل رمى عملة متوازنة ، إلقاء حجر نرد غير متحيز ، أو سحب ورقة من مجموعة أوراق لعب عادية ) حيث يمكننا أن نحدد مقدماً ، أي بدون تجريب ، احتمال حدوث حدث ما . وعادة في مشاكل الاقتصاد والأعمال الحقيقية لا يمكننا غالباً تعيين الاحتمالات مقدماً ومن ثم لا يمكننا استخدام المدخل الكلاسيكي . ويتغلب التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي على عيوب المدخل الكلاسيكي باستخدام التكرارات النسبية التي حدثت في الماضي كاحتمالات . ولكن الصعوبة في التكرار النسبي أو المدخل التجريبي أننا نحصل على احتمالات مختلفة ( تكرارات نسبية ) عندما يختلف عدد المحاولات أو التجارب . وتستقر هذه الاحتمالات ، أو تقترب من نهاية ، مع زيادة عدد التجارب أو المحاولات . وحيث أن هذا قد يكون مكلفاً ويستغرق وقتاً ، فقد يلجأ الناس إلى استخدامه بدون عدد « كاف » من التجارب أو المحاولات . أما عيب المدخل الشخصي أو الذائقي فهو أن الأفراد المختلفين قد يعطون احتمالات مختلفة تماماً عندما يجابهون بنفس الموقف .

(ج) معظم القرارات التي نجاهها في الاقتصاد ، والإدارة ، والعلوم ، وفي حياتنا اليومية تتضمن مخاطرة واحتمالات . هذه الاحتمالات يمكن فهمها وتوضيحها بشكل أسهل في مباريات الاختيار لأنه يمكن تعيين احتمالات موضوعية للأحداث المختلفة بسهولة في مثل هذه الحالات . ومع ذلك فإن السبب الرئيسي لدراسة نظرية الاحتمالات هو المساعدة على اتخاذ قرارات ذكية في الاقتصاد ، والأعمال ، والعلوم ، والحياة اليومية عندما تتضمن مخاطرة أو عدم تأكد .

٣ - ٢ ماهو احتمال (أ) صورة في رمية واحدة لعملة متوازنة ؟ كتابة ؟ صورة أو كتابة ؟ (ب) ظهور العدد 2 في رمية واحدة لنردة غير متحيزة ؟ عدد غير 2 ؟ عدد 2 أو عدد ليس 2 ؟

$$P(H) = \frac{n_H}{N} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$P(T) = \frac{n_T}{N} = \frac{1}{2}$$

$$P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(ب) حيث أن كلا من الوجوه الستة لنردة غير متحيزة لها نفس الإمكانية في الظهور وأن 2 هي إحدى هذه الامكانيات فإن ،

$$P(2) = \frac{n_2}{N} = \frac{1}{6}$$

احتمال عدم الحصول على 2 (أى  $P(2')$ ) هو

$$P(2') = 1 - P(2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(2) + P(2') = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad (\text{أو تأكد تام})$$

٣ - ٣ عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب مخلوطة جيداً ما احتمال أن تكون الورقة (أ) شايب (ب) بستونى (ج) الشايب البستونى (د) ليست الشايب البستونى أو (هـ) الشايب البستونى أو ليس الشايب البستونى ؟  
(أ) حيث أن هناك 4 شايب K ، في المجموعة العادية المكونة من 52 ورقة فإن

$$P(K) = \frac{n_K}{N} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ب) حيث أن هناك 13 ورقة بستونى S ، من إجمالي 52 ورقة ،  $P(S) = 13/52 = 1/4$

(ج) هناك شايب بستونى واحد في مجموعة أوراق اللعب فيكون  $P(K_S) = 1/52$

(د) احتمال عدم سحب الشايب البستونى  $P(K'_S) = 1 - 1/52 = 51/52$

(هـ)  $P(K_S) + P(K'_S) = 1/52 + 51/52 = 52/52 = 1$  أى تأكد تام

٣ - ٤ وعاء يحتوى على 10 كرات متماثلة تماماً باستثناء أن 5 منها حمراء ، 3 زرقاء و 2 خضراء . سحب كرتين من الوعاء . ماهو احتمال أن تكون (أ) حمراء ؟ (ب) زرقاء (ج) خضراء ؟ (د) ليست زرقاء (هـ) ليست خضراء (و) خضراء أوليست خضراء ؟ (ز) ماهو معامل الترجيح لصالح سحب كرة زرقاء ؟ (ح) ماهو معامل الترجيح لصالح سحب كرة غير زرقاء ؟

$$P(R) = \frac{n_R}{N} = \frac{5}{10} = 0.5 \quad (أ)$$

$$P(B) = \frac{n_B}{N} = \frac{3}{10} = 0.3 \quad (ب)$$

$$P(G) = \frac{n_G}{N} = \frac{2}{10} = 0.2 \quad (ج)$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad (د)$$

$$P(G') = 1 - P(G) = 1 - 0.2 = 0.8 \quad (هـ)$$

$$P(G) + P(G') = 0.2 + 0.8 = 1 \quad (و)$$

(ز) معامل الترجيح لصالح التقاط كرة زرقاء يعبر عن النسبة بين عدد طرق التقاط كرة زرقاء وعدد طرق التقاط كرة غير زرقاء ، وحيث أن هناك 3 كرة زرقاء و 7 كرة غير زرقاء ، فإن معامل الترجيح لصالح التقاط كرة زرقاء هو 3 إلى 7 أو 3:7 .

(ح) معامل الترجيح لصالح التقاط كرة غير زرقاء هو 7 إلى 3 أو 7:3

٣ - ٥ افترض أن الرقم 3 ظهر 106 مرة في 600 رمية لكرّة (أ) ماهو التكرار النسبي للرقم 3 ؟ كيف يختلف هذا عن الاحتمال الكلاسيكى أو المسبق ؟ (ب) إذا زاد عدد مرات رمي الكرة ماذا تتوقع أن يكون التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي ؟

(أ) التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي للرقم 3 هو النسبة بين عدد مرات ظهور الرقم 3 (106) والعدد الكلي لمرات رمي الزردة (600) . وعليه فإن التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي للرقم 3 هو  $106/600 \approx 0.177$  في 600 رمية للزردة . طبقاً للاحتمال الكلاسيكي أو المسبق ( بدون رمي زردة على الإطلاق ) ،  $P(3) = 1/6 \approx 0.167$  ، فإذا كانت الزردة غير متحيزة فإننا نتوقع أن الرقم 3 يظهر 100 مرة من بين 600 رمية للزردة بالمقارنة بالعدد الفعلي ، المشاهد ، أو التجريبي 106 مرة .

(ب) إذا زاد عدد مرات رمي نفس الزهرة عن 600 ، فإننا نتوقع أن يزداد التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي اقتراباً من الاحتمال الكلاسيكي أو المسبق .

٣ - ٦ عملية إنتاجية ينتج عنها 27 وحدة معينة في كل 1000 وحدة منتجة (أ) ماهو التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي للوحدة المعيبة ؟ (ب) من بين إنتاج يومي قدره 1600 وحدة ، كم عدد الوحدات المعيبة التي تتوقعها ؟

(أ) التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي لوحدة المعيبة هو  $27/1,000 = 0.027$

(ب) بضرب عدد الوحدات المنتجة يومياً في التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي للوحدة المعيبة (0.027) ، نحصل على عدد الوحدات المعيبة المتوقعة بين الإنتاج اليومي . ويكون هذا  $43 = (0.027)(1600)$  لأترب وحدة .

#### احتمال الأحداث المتعددة :

٣ - ٧ عرف واعط بعض الأمثلة على الأحداث التي تكون (أ) متنافية الحدوث (ب) ليست متنافية الحدوث (ج) مستقلة ، (د) غير مستقلة .

(أ) يعتبر حدثان أو أكثر متنافيين أو غير مشتركين ، إذا كان وقوع أحدهما يستلزم وقوع الآخر ( الأخرى ) . فإذا وقع واحد من الأحداث فإن الآخر ( الأخرى ) لا يقع . فمثلاً ، عند رمي عملة حرة واحدة نحصل إما على صورة وإما على كتابة ولكن ليس الإثنين معاً . ومن ثم فإن الصور والكتابة حدثان متنافيان . وفي رمية واحدة للزردة فإننا نحصل على واحد واحد فقط من ستة نواتج ممكنة : 6 أو 5, 4, 3, 2, 1 . فالنواتج هذه متنافية الحدوث . ورقة اللعب المسحوبة عشوائياً يمكن أن تكون من نوع واحد فقط : ديناري ، كوبة ، سباق ، أو بشتوني . الطفل المولود يكون إما ولداً وإما بنتاً . والوحدة المنتجة على خط الإنتاج هي إما جيدة وإما معيبة .

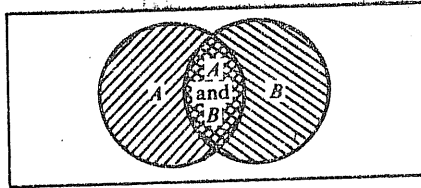
(ب) يعتبر حدثان ( أو أكثر ) غير متنافيين إذا كان وقوع أحدهما لا يستلزم حدوث الآخر ( الأخرى ) . فعلى سبيل المثال ورقة اللعب المسحوبة عشوائياً من الممكن أن تكون آس وسباق في نفس الوقت ، ومن ثم فإن الآس والسباق ليسا حدثين متنافيين بالتبادل إذا يمكننا سحب الآس السباق . وحيث أنه من الممكن أن يحدث تضخم وكساد في آن واحد ، فإن التضخم والكساد ليسا حدثين متنافيين .

(ج) يكون حدثان ( أو أكثر ) مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على أي نحو في وقوع الآخر ( الأخرى ) . فعلى سبيل المثال ، عند رمي عملة مرتين متتاليتين ، فإن ناتج الرمية الثانية لا يعتمد على ناتج الرمية الأولى . وهذا ينطبق أيضاً على رميتين متتاليتين للزردة أو سحب ورقتين من مجموعة أوراق لعب إذا كان هناك إعادة للورقة المسحوبة .

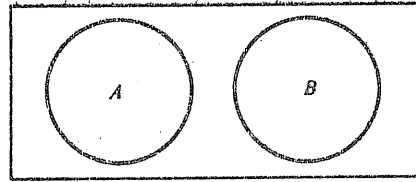
(د) يعتبر حدثان ( أو أكثر ) غير مستقلين إذا كان وقوع أحدهما على احتمال وقوع الآخر ( الأخرى ) . فعلى سبيل المثال ، إذا سحبنا ورقة من مجموعة أوراق لعب ولم نعدّها إليها ، فإن احتمال سحب نفس الورقة في السحب الثاني هو 0 . كما أن الاحتمالات الأخرى تتأثر كلها ، حيث أصبح في المجموعة الآن 51 ورقة فقط . وبالمثل ، إذا كانت نسبة المصيب في وريدي المساء أعلى منها في وريدي الصباح ، فإن احتمال أن وحدة مسحوبة من إنتاج المساء تكون معيبة أعلى منه بالنسبة لإنتاج الصباح .

٣ - ٨ ارسم شكل فن (أ) للأحداث المتنافية (ب) للأحداث غير المتنافية (ج) هل الأحداث المتنافية مستقلة أم غير مستقلة ؟ ماذا ؟

(أ) شكل (٣ - ٦) يوضح شكل فن للحدثين  $A$  و  $B$  المتنافيين  
(ب) شكل (٣ - ٧) يوضح شكل فن للحدثين  $A$  و  $B$  غير المتنافيين



(شكل ٣ - ٧)



(شكل ٣ - ٦)

(ج) الأحداث المتنافية أحداث غير مستقلة عندما يقع واحد من الأحداث . فاحتمال وقوع الآخر يكون 0 فوق وقوع الأول يؤثر على ( يجب ) وقوع الثاني .

٣ - ٩ ما هو احتمال الحصول على : (أ) أقل من 3 في رمية واحدة لردة غير متحيزة ؟

(ب) كوبة أو سباق عند سحب ورقة واحدة من مجموعة عادية مخلوطة خلطاً جيداً ؟

(ج) كرة حمراء أو زرقاء من وعاء يحتوي على 5 كرات حمراء ، 3 زرقاء ، 2 خضراء ؟

(د) أكثر من 3 في رمية واحدة لردة غير متحيزة ؟

(أ) الحصول على أقل من 3 في رمية واحدة (لردة غير متحيزة يعني الحصول على 1 أو 2) ، وهذه أحداث متنافية . بتطبيق قاعدة الجمع للأحداث المتنافية نحصل على

$$P(1 \text{ أو } 2) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

باستخدام نظرية المجموعات ، يمكن كتابة  $P(1 \text{ أو } 2)$  في صورة مكافئة كالاتي  $P(1 \cup 2)$  وتقرأ  $U$  « اتحاد » كبديل عن « أو » .

(ب) الحصول على كوبة أو سباق عند سحب ورقة واحدة من مجموعة عادية مخلوطة تكون أحداثاً متنافية الحدوث أيضاً . بتطبيق قاعدة الجمع نحصل على

$$P(H \text{ أو } C) = P(H \cup C) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$P(R \text{ أو } B) = P(R \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad (\text{ج})$$

$$P(4 \text{ أو } 5 \text{ أو } 6) = P(4 \cup 5 \cup 6) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{د})$$

٣ - ١٠ (أ) ما هو احتمال الحصول على آس أو سباق عند سحب ورقة واحدة من مجموعة مخلوطة جيداً ؟ ( في كل المسائل الباقية ، سوف يكون من المفترض ضمنياً أن العملات متوازنة ، والنردات غير متحيزة وأن أوراق اللعب تسحب من مجموعة عادية مخلوطة جيداً وبدون إحلال ) . (ب) ماهي وظيفة الحد السالب في قاعدة الجمع ، للأحداث غير المتنافية ؟

(أ) الحصول على آس أو على سباق لا يكونان حدثين متنافيين لأنه يمكننا الحصول على الآس السباق . بتطبيق قاعدة الجمع للأحداث غير المتنافية نحصل على

$$P(A \text{ أو } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ و } C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ويمكن كتابة عبارة الاحتمالات السابقة في صورة مكافئة باستخدام نظرية المجموعات كالاتي :

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

حيث  $\cap$  تقرأ « تقاطع » وتستخدم بدلا من « و » .

(ب) وظيفة الحد السالب في قاعدة الجمع للأحداث غير المتنافية هي تجنب العد المزدوج . فعلى سبيل المثال ، عند حساب  $P(A \cup C)$  في الجزء (أ) فإن الآس السابق يتم عده مرتين ، مرة كأس ومرة كسباق . ومن ثم فإننا نطرح احتمال الحصول على الآس السابق لتجنب هذا الحساب المزدوج أما إذا كان الحدثان متنافيين فإن احتمال حدوثهما معا في آن واحد يكون 0 ، ولا يوجد أي حساب مزدوج . ولهذا فإن قاعدة الجمع للأحداث المتنافية لا تتضمن حدا سلباً .

٣ - ١١ ماهو احتمال (أ) تضخم I أو كساد R ، إذا كان احتمال التضخم 0.3 واحتمال الكساد 0.2 واحتمال التضخم والكساد 0.06 ؟ (ب) سحب آس ، سباق ، أو ديناري عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب ؟

(أ) حيث أن احتمال تضخم و كساد معا ليس 0 ، فالتضخم والكساد ليسا حدثين متنافيين بتطبيق قاعدة الجمع ، نحصل على

$$P(I \text{ أو } R) = P(I) + P(R) - P(I \cap R)$$

$$P(I \cup R) = P(I) + P(R) - P(I \cap R)$$

$$P(I \text{ أو } R) = P(I \cup R) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = 0.44$$

(ب) الحصول على آس ، سباق ، أو ديناري لايشكل أحداثاً متنافية لأنه يمكننا الحصول على الآس السابق أو الآس الديناري بتطبيق قاعدة الجمع للأحداث غير المتنافية نحصل على

$$P(A \text{ أو } C \text{ أو } D) = P(A) + P(C) + P(D) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap C \cap D)$$

$$P(A \text{ أو } C \text{ أو } D) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

٣ - ١٢ ماهو احتمال الحصول : (أ) 6 و 6 في رميتين للحجر نرد ؟ (ب) 6 على كل نردة عند رمي نردتين ؟ (ج) كرتين زرقاوين في سحبتين متتاليتين مع الإحلال من الوعاء في مسألة (٣ - ٤) ؟ (د) ثلاث بنات في عائلة لديها 3 أطفال ؟

(أ) الحصول على 6 في كل من الرميتين للنردة يمثل حدثين مستقلين . بتطبيق قاعدة الضرب للأحداث المستقلة ، نحصل على

$$P(6 \text{ و } 6) = P(6 \cap 6) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(ب) الحصول على 6 في كل نردة في رمية واحدة لها يمثل حدثين أيضاً حدثين مستقلين . فيكون

$$P(6 \text{ و } 6) = P(6 \cap 6) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(ج) حيث أننا نعيد الكرة الأولى بعد سحبها ، فإن احتمال الحصول على كرة زرقاء في السحب الثاني يكون هو نفسه كما في السحب الأول . الأحداث مستقلة ، وعليه ،

$$P(B \text{ و } B) = P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0.09$$

(د) إن حدث بنت ، G ، عند كل ميلاد ، يشكل حدث مستقل ، وحيث أن احتمال البنت في كل ميلاد هو 0.5 ، فإن

$$P(G \text{ و } G \text{ و } G) = P(G \cap G \cap G) = P(G) \cdot P(G) \cdot P(G) = (0.5) \cdot (0.5) \cdot (0.5) = 0.125$$

أي فرصة واحدة لكل 8 حالات

٣ - ١٣ (أ) اسرد كل النواتج الممكنة لإلقاء نردتين في آن واحد (ب) ماهو احتمال الحصول على مجموع 5 عند إلقاء نردتين في آن واحد ؟ (ج) ماهو احتمال الحصول على مجموع 4 أو أقل عند رمي نردتين في آن واحد ؟ أكثر من 4 ؟

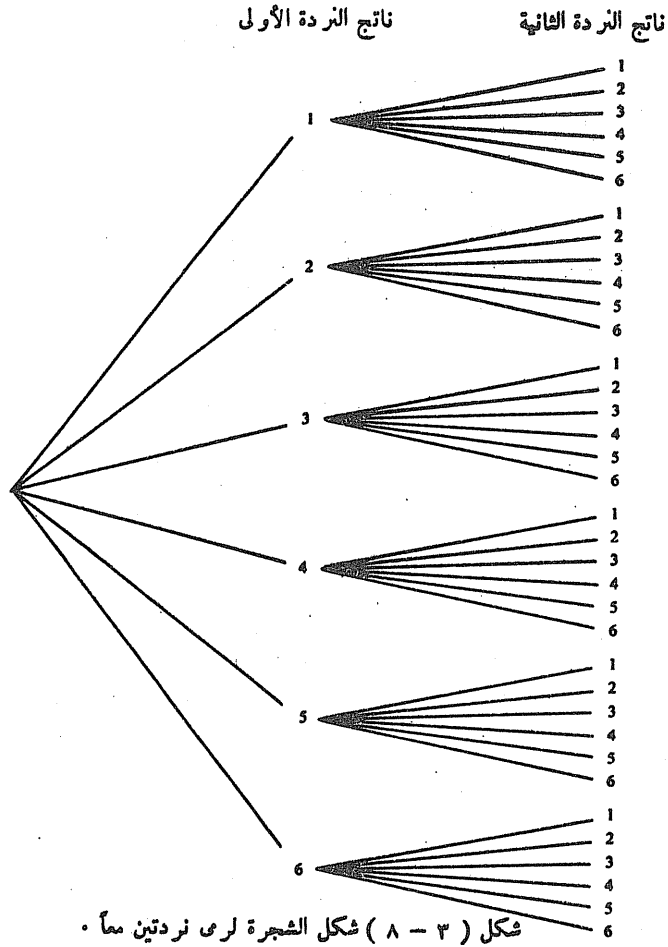
(أ) كل نردة لها 6 نواتج متساوية الاحتمال ، ونواتج كل نردة مستقل . وحيث أن كلا من النواتج الستة للنردة الأولى ، يمكن أن يظهر مع أى من النواتج الستة للنردة الثانية ، فإن هناك 36 ناتجاً ممكناً للثنتين معاً . أى أن ، بفضاء العينة ،  $N = 36$  عنصراً . ( في جدول ( ٣-٢ ) ) ، العدد الأول يشير إلى ناتج النردة الأولى ، والعدد الثاني يشير إلى ناتج النردة الثانية ويمكن تمييز النردتين باستخدام لونين مختلفين ) ويمكن توضيح العدد الكلي المكون من 36 ناتجاً ممكناً باستخدام شكل الشجرة أو الشكل التتابعي كما في شكل ( ٣-٨ ) .

جدول ( ٣-٢ ) نواتج رمي نردتين معاً

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 1, 1 | 2, 1 | 3, 1 | 4, 1 | 5, 1 | 6, 1 |
| 1, 2 | 2, 2 | 3, 2 | 4, 2 | 5, 2 | 6, 2 |
| 1, 3 | 2, 3 | 3, 3 | 4, 3 | 5, 3 | 6, 3 |
| 1, 4 | 2, 4 | 3, 4 | 4, 4 | 5, 4 | 6, 4 |
| 1, 5 | 2, 5 | 3, 5 | 4, 5 | 5, 5 | 6, 5 |
| 1, 6 | 2, 6 | 3, 6 | 4, 6 | 5, 6 | 6, 6 |

(ب) من بين 36 ناتجاً ممكناً ومتساوي الفرصة في الحدوث ، هناك 4 نواتج تغطي مجموعاً قدره 5 . وهذه هي ، 3,2 ، 1,4 ، 2,3 ، وعلية فإن احتمال مجموع 5 ( حدث A ) عند رمي نردتين معاً يكون

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$



(ج) الحصول على مجموع 4 أو أقل يتضمن الحصول على مجموع 2 ، 3 ، أو 4 . هناك 6 نواتج مجموعها 4 أو أقل وهذه هي 1 ، 1 ، 2 ، 1 ، 3 ، 2 ، 2 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 1 . ومن ثم إذا عرفنا الحدث  $A$  بأنه الحصول على مجموع 4 أو أقل ،  $P(A) = 6/36 = 1/6$  واحتمال الحصول على مجموع أكثر من 4 يساوي 1 ناقصاً احتمال الحصول على مجموع 4 أو أقل . ويكون هذا  $1 - 1/6 = 5/6$  .

٣ - ١٤ ماهو احتمال (أ) التقاط كرة حمراء ثانية من الوعاء في المسألة (٣ - ٤) علماً بأنه قد تم التقاط كرة حمراء في المرة الأولى ولم تعد إلى الوعاء ؟ (ب) كرة حمراء في المرة الثانية علماً بأن الأولى لم تكن حمراء ولم تعد إلى الوعاء ؟ (ج) كرة حمراء في المرة الثالثة عندما نكون قد حصلنا على كرة حمراء وكرة غير حمراء في المراتين الأولى والثانية ولم تعادا ؟

(أ) سحب كرة حمراء ثانية عندما تكون الأولى حمراء ولم تعد هو حدث غير مستقل ، حيث أصبح هناك عدد 4 كرة حمراء و 5 كرة غير حمراء باقية في الوعاء . الاحتمال الشرطي أن الكرة الثانية حمراء بعد ماتم سحب كرة حمراء في المرة الأولى ولم تعد هو  $P(R/R) = 4/9$

(ب) الاحتمال الشرطي للحصول على كرة حمراء في المرة الثانية بعد ماتم سحب كرة غير حمراء  $R'$  في المرة الأولى ولم تعد إلى الوعاء هو  $P(R/R') = 5/9$

(ج) حيث أن كرتين إحداهما ليست حمراء تم سحبهما ولم تعادا ، فإنه يبق 8 كرات في الوعاء منها 4 حمراء . الاحتمال الشرطي لالتقاط كرة حمراء أخرى هو  $P(R/R \text{ و } R') = P(R/R' \text{ و } R) = 4/8 = 1/2$

٣ - ١٥ ماهو احتمال الحصول على (أ) كرتين حمراوين من الوعاء في المسألة (٣ - ٤) عند السحب مرتين بدون إعادة ؟ (ب) 2 آس عند سحب ورقة مجموعة لعب بدون إحلال ؟ (ج) آس سباق ويستون على الترتيب عند سحب ورقتي مجموعة لعب بدون إحلال ؟ (د) يستون وآس سباق على الترتيب عند سحب ورقتي مجموعة لعب بدون إحلال ؟ (هـ) ثلاث كرات حمراء من الوعاء في مسألة (٣ - ٤) عند السحب 3 مرات بدون إحلال ؟ (و) ثلاث كرات حمراء عند السحب ثلاث مرات مع الإحلال ؟

(أ) بتطبيق قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة ، نحصل على

$$P(R \text{ و } R) = P(R \cap R) = P(R) \cdot P(R/R) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

$$P(A \text{ و } A) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A/A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2,652} = \frac{1}{221} \quad (\text{ب})$$

$$P(A_C \text{ و } S) = P(A_C \cap S) = P(A_C) \cdot P(S/A_C) = \frac{1}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{2,652} \quad (\text{ج})$$

$$P(S \text{ و } A_C) = P(S \cap A_C) = P(S) \cdot P(A_C/S) = \frac{13}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{13}{2,652} = P(A_C \text{ و } S) \quad (\text{د})$$

$$P(R \text{ و } R \text{ و } R) = P(R \cap R \cap R) = P(R) \cdot P(R/R) \cdot P(R/R \text{ و } R) \\ = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12} \quad (\text{هـ})$$

(و) مع الإحلال ، فإن سحب ثلاث كرات حمراء من وعاء يشكل أحداثاً مستقلة . وعليه فإن ،

$$P(R \text{ و } R \text{ و } R) = P(R) \cdot P(R) \cdot P(R) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1,000} = \frac{1}{8} = 0.125$$

٣ - ١٦ أظهرت التجارب الماضية انه من بين كل 100,000 وحدة منتجة في الوردية الصباحية هناك 200 وحدة معيبة ، وأنه من بين كل 100,000 وحدة منتجة في الوردية المسائية ، هناك 600 وحدة معيبة . خلال كل 24 ساعة ، هناك 1,000

وحدة منتجة في الوردية الصباحية و 600 وحدة منتجة في الوردية المسائية . ماهو احتمال أن تكون وحدة مسحوبة من الإنتاج اليومي الكلي وقدره 600 وحدة (أ) من إنتاج الوردية الصباحية وأنها معيبة ؟ (ب) من إنتاج الوردية المسائية وأنها معيبة ؟ (ج) من إنتاج الوردية المسائية وأنها ليست معيبة ؟ (د) أنها معيبة ، سواء أنتجت في الوردية الصباحية أو المسائية ؟ (١) احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من إنتاج الوردية الصباحية M ، ومن إنتاج الوردية المسائية E هو

$$P(M) = \frac{1,000}{1,600} = 0.625 \quad \text{و} \quad P(E) = \frac{600}{1,600} = 0.375$$

احتمال سحب وحدة معيبة D من إنتاج الوردية الصباحية ومن إنتاج الوردية المسائية هما على الترتيب

$$P(D/M) = \frac{200}{100,000} = 0.002 \quad \text{و} \quad P(D/E) = \frac{500}{100,000} = 0.005$$

احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة عشوائياً من إجمالي الإنتاج اليومي هي من إنتاج الوردية الصباحية وأنها معيبة هو

$$P(M \text{ و } D) = P(M) \cdot P(D/M) = (0.625)(0.002) = 0.00125$$

$$P(E \text{ و } D) = P(E) \cdot P(D/E) = (0.375)(0.005) = 0.001875 \quad (\text{ب})$$

$$P(E \text{ و } D') = P(E) \cdot P(D'/E) = (0.375) \frac{99,500}{100,000} = 0.373125 \quad (\text{ج})$$

(د) عدد الوحدات المعيبة المتوقع في وردية الصباح يساوي احتمال الوحدة المعيبة في إنتاج الصباح مضروباً في عدد الوحدات المنتجة في وردية الصباح . ويكون هذا  $2 = (0.002)(1,000)$  ومن وردية المساء نتوقع عدد  $3 = (0.005)(600)$  وحدة معيبة . أي أننا نتوقع 5 وحدة معيبة من إجمالي 1600 وحدة منتجة خلال فترة 24 ساعة . فإذا كان هناك 5 وحدة معيبة ، فإن احتمال سحب أي منها عشوائياً من إجمالي عدد الوحدات وقدرها 1600 وحدة يكون  $5/1,600$  أو  $1/320$  أو  $0.003125$  .

٣ - ١٧ (أ) من قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة B و A ، اشتق صيغة  $P(A/B)$  بدلالة  $P(B/A)$  و  $P(B)$  . تعرف هذه الصيغة باسم نظرية بيز وتستخدم لتعديل الاحتمالات عندما نتاح بيانات إضافية (ب) باستخدام نظرية بيز ، أوجد احتمال أن وحدة معيبة تم سحبها من الإنتاج اليومي وقدره 1600 وحدة في مسألة (٣ - ١٦) ، كانت من إنتاج الوردية الصباحية ، واحتمال أنها كانت من إنتاج الوردية المسائية .

$$P(B \text{ و } A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (\text{أ})$$

بقسمة الطرفين على  $P(B)$  وإعادة الترتيب ، نحصل على

$$P(A/B) = \frac{P(B \text{ و } A)}{P(B)}$$

ولكن ،  $P(B \text{ و } A) = P(A \text{ و } B)$  انظر مسألة (٣ - ١٥) (ج) و (د) . فيكون

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)} \quad \text{و} \quad P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)} \quad (\text{٣ - ١٥}) \text{ نظرية بيز}$$

(ب) بتطبيق نظرية بيز على مسألة (٣ - ١٦) ، وباستخدام M للدلالة على الوردية الصباحية بدلا من A و D للدلالة على الوحدات معيبة بدلا من B وباستخدام نتائج المسألة (٣ - ١٦) ، نحصل على

$$P(M/D) = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)} = \frac{(0.625)(0.002)}{0.003125} = \frac{0.00125}{0.003125} = 0.4$$



أى أنه إذا سمحت وحدة معينة عشوائياً من إجمالي الإنتاج اليوم وقدره 1600 وحدة ، فاحتمال أنها من وردية الصباح هو 40% وبالمثل ،

$$P(E/D) = P(E) \cdot P(D/E) = \frac{(0.375)(0.005)}{0.003125} = \frac{0.001875}{0.003125} = 0.6, \text{ أو } 60\%$$

ويمكن تعميم نظرية بييز ، فمثلا يمكن إيجاد احتمال وحدة معينة ، B ، قد التقطت عشوائياً هي من إنتاج أى من  $n$  مصنع  $(A_i, i = 1, 2, \dots, n)$  كالآتي :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)} \quad (١٦-٣)$$

حيث تشير  $\Sigma$  إلى المجموع لعدد  $n$  مصنع (التي تنتج المنتج) . تطبق نظرية بييز في اتخاذ القرارات في قطاع الأعمال ، ولكنها ليست مستخدمة كثيراً في مجال الاقتصاد (وإن كان الاقتصاد القياسي المؤسس على نظرية بييز تزايد أهميته) .

٣ - ١٨ ناد به 8 أعضاء . (أ) كم عدد اللجان المختلفة المكونة من 3 أعضاء يمكن تكوينها في النادي ؟ (تختلف لجنة عن أخرى حتى لو اختلف عضو واحد فقط) (ب) كم عدد اللجان المختلفة المكونة من 3 أعضاء يمكن تشكيلها في النادي إذا كان لكل لجنة مختارة رئيس وأمين صندوق وسكرتير ؟ .

(أ) يهنا هنا إيجاد عدد التوافيق المختلفة التي يمكن عملها من 8 أفراد إذا أخذوا ثلاثة في كل مرة بصرف النظر عن الترتيب .

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56$$

وعموماً فإن عدد تكوينات  $n$  من الأشياء مأخوذة  $X$  من الأشياء في كل مرة بصرف النظر عن الترتيب هو توافيق ويحسب كالآتي :

$${}_nC_X = \binom{n}{X} = \frac{n!}{X!(n-X)!} \quad (١٧-٣)$$

حيث  $n!$  (وتقرأ مضروب  $n$ )  $= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$  و  $0! = 1$  بالتعريف

(ب) حيث أن كل لجنة من 3 أفراد تنقسم وظائف رئيس ، وأمين صندوق وسكرتير ، فإن ما يهنا الآن إيجاد عدد التباديل لعدد 8 أفراد مأخوذاً 3 أفراد في كل مرة ، والترتيب هنا مهم :

$${}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

وبصفة عامة ، فإن عدد التكوينات ، في ترتيب محدد ، لعدد  $n$  من الأشياء مأخوذة  $X$  من الأشياء في كل مرة هو تباديل ويحسب كالآتي :

$${}_nP_X = \frac{n!}{(n-X)!} \quad (١٨-٣)$$

والتباديل والتوافيق (ويشار إليها عادة كآساليب العد) تساعد في حساب عدد المرات المتساوية الإمكان لحدوث الحدث  $A$  بالنسبة إلى عدد النواتج المتساوية الإمكان الكلية . ولم تستخدم التباديل والتوافيق في المسائل السابقة لأن تلك المسائل كانت بسيطة .

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة : التوزيع ذو الحدين :

٣ - ١٩ عرف المقصود بكل مما يأتي واعط مثالا (أ) متغير عشوائى (ب) متغير عشوائى منفصل ، (ج) توزيع احتمال منفصل ، (د) ماهو الفرق بين توزيع احتمال وتوزيع التكرار النسبي ؟

(أ) المتغير العشوائى هو المتغير الذى ترتبط كل قيمة من قيمه باحتمال تحقق تلك القيمة . فعل سبيل المثال عند رمى نرد ، هناك 6 نواتج متنافية ( 6 أو 5, 4, 3, 2, 1 ) ، لكل منها احتمال وقوع قدره 1/6 ومن ثم فإن ناتج رمى نرد هو متغير عشوائى .

(ب) المتغير العشوائى المنفصل هو المتغير الذى يمكن أن يأخذ فقط عدداً محدوداً أو متميزاً من القيم . فعل سبيل المثال ، فإن ناتج رمى نرد يمثل متغيراً عشوائياً منفصلاً لأن قيمه محدودة بالأعداد 6 أو 5, 4, 3, 2, 1 وهذا على عكس المتغيرات المتصلة والى يمكن أن تأخذ عدداً غير نهائى من القيم داخل أى فترة معلومة . ( انظر المسألة ٣ - ٣١ ) . ((أ))

(ج) التوزيع الاحتمالى المنفصل يشير إلى مجموعة كل قيم متغير عشوائى ( منفصل ) والاحتمالات المناظرة لها . فالمجموعة المكونة من 6 نواتج لرمى نرد واحتمالاتها المناظرة هى مثال لتوزيع احتمالى منفصل . ويكون مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل القيم التى يمكن أن يأخذها متغير عشوائى منفصل مساوياً 1 .

(د) التوزيع الاحتمالى يشير إلى الاحتمالات الكلاسيكية أو المسبقة المناظرة لكل القيم التى يمكن أن يأخذها متغير عشوائى . ولأنه يتم تعيين هذه الاحتمالات مقدماً وبدون أى تجارب ، فإن التوزيع الاحتمالى عادة ما يشار إليه كتوزيع تكرارى نظرى ( نسبى ) . ويختلف هذا عن التوزيع التكرارى التجريبى ( النسبى ) ، والذى يشير إلى النسبة بين عدد المرات التى يحدث فيها ناتج معين فعلاً إلى إجمالى عدد المحاولات الفعلية أو المشاهدات . فعل سبيل المثال ، عندما نرى نرد عدداً من المرات فعلاً ، فليس من المتوقع أن نحصل على كل ناتج سدس عدد مرات الرمى بالضبط . ولكن ، مع تزايد عدد المحاولات فإن التوزيع التكرارى التجريبى ( النسبى ) يستقر عند الاحتمال ( المنتظم ) أو توزيع التكرار - النسبى النظرى وقدره 1/6 .

٣ - ٢٠ اشتق صيغة (أ) الوسط الحسابى  $\mu$  أو القيمة المتوقعة  $E(X)$  ، (ب) التباين لتوزيع احتمالى منفصل .

(أ) معادلة الوسط الحسابى لبيانات المجتمع المبوبة (معادلة (٢ - ٢) ) هى

$$\mu = \frac{\sum fX}{N}$$

حيث  $\sum fX$  هى مجموع تكرار كل فئة  $f$  مضروباً فى مركز الفئة  $X$  وحيث  $N = \sum f$  ، أى عدد المشاهدات أو إجمالى التكرارات . وفى التوزيعات الاحتمالية ، عادة ما يشار إلى الوسط الحسابى  $\mu$  بـ « القيمة المتوقعة » ،  $E(X)$  . ويمكن اشتقاق معادلة  $\mu$  أو  $E(X)$  للتوزيع الاحتمالى المنفصل بدءاً بمعادلة (٢ - ٢) ووضع  $f = P(X)$  ، وهى احتمال كل من النواتج الممكنة  $X$  . فيكون ،  $\sum fX = \sum XP(X)$  ، والى تمثل مجموع قيمة كل ناتج مضروبة فى احتمال حدوثها ، حيث  $N = \sum f = \sum P(X)$  ، التى تمثل مجموع الاحتمالات لكل النواتج وتساوى 1 وعليه

$$E(X) = \mu = \sum XP(X) \quad (٣ - ١٩)$$

(ب) معادلة التباين لبيانات المجتمع المبوبة (معادلة (٢ - ٩) ) هى

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(X - \mu)^2}{N} \quad (٣ - ٢٠)$$

مرة أخرى ، دع  $f = P(X)$  احتمال كل النواتج ،  $N = \sum f = \sum P(X) = 1$  ، فيمكن الحصول على معادلة التباين لتوزيع احتمالى منفصل :

$$\text{Var } X = \sigma_X^2 = \sum [X - E(X)]^2 P(X) = \sum X^2 P(X) - [\sum XP(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad (٣ - ٢١)$$

٣ - ٢١ يملأ جدول ( ٣ - ٣ ) عدد طلبات الوظائف والتي عالجتها وكالة توظيف صغيرة خلال فترة 100 يوم الماضية . احسب العدد المتوقع للطلبات المعالجة وكذلك التباين والانحراف المعياري .

جدول ( ٣ - ٣ ) عدد طلبات الوظائف المدة خلال 100 يوم الماضية

| عدد الأيام المتحققة في المعالجة | عدد طالبي الوظائف |
|---------------------------------|-------------------|
| 10                              | 7                 |
| 10                              | 8                 |
| 20                              | 10                |
| 30                              | 11                |
| 20                              | 12                |
| 10                              | 14                |
| 100                             |                   |

يقدر ما نعتبر أن خبرة المائة يوم الماضية نموذجية ، يمكننا إيجاد توزيع التكرار النسبي ، ومنه التوزيع الاحتمالي وتظهر هذه مع باقي الحسابات لإيجاد  $E(X)$  و  $X$  في جدول ؟ ( ٣ - ٤ ) :

$$\text{Var } X = \sigma_X^2 = \sum X^2 P(X) - [XP(X)]^2 = 116 - (10.6)^2 = 116 - 112.36 = 3.64 \quad \text{طلبات مربعة}$$

$$SD X = \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{3.64} = 1.91 \quad \text{طلب}$$

جدول ( ٣ - ٤ ) الحسابات اللازمة لإيجاد القيمة المتوقعة والتباين

| العدد $X$                                         | الأيام $f$ | $P(X)$            | $XP(X)$             | $X^2$ | $X^2 P(X)$              |
|---------------------------------------------------|------------|-------------------|---------------------|-------|-------------------------|
| 7                                                 | 10         | 0.1               | 0.7                 | 49    | 4.9                     |
| 8                                                 | 10         | 0.1               | 0.8                 | 64    | 6.4                     |
| 10                                                | 20         | 0.2               | 2.0                 | 100   | 20.0                    |
| 11                                                | 30         | 0.3               | 3.3                 | 121   | 36.3                    |
| 12                                                | 20         | 0.2               | 2.4                 | 144   | 28.8                    |
| 14                                                | 10         | 0.1               | 1.4                 | 196   | 19.6                    |
| $N = \sum f = 100$                                |            | $\sum P(X) = 1.0$ | $\sum XP(X) = 10.6$ |       | $\sum X^2 P(X) = 116.0$ |
| $E(X) = \mu = \sum XP(X) = 10.6 \quad \text{طلب}$ |            |                   |                     |       |                         |

٣ - ٢٢ ( أ ) اذكر الشروط المطلوبة لتطبيق توزيع ذي الحدين ( ب ) ما احتمال 3 صور في 5 رميات لعملة متوازنة ؟ ( ج ) ما احتمال أقل من 3 صور في 5 رميات لعملة متوازنة ؟

( أ ) يستخدم توزيع ذي الحدين لإيجاد احتمال  $P(X)$  عدد  $X$  من النجاحات لحدث ما ، من بين عدد  $n$  من المحاولات لنفس التجربة عندما يكون ( ١ ) هناك فقط ناتجان متنافيان لكل محاولة ( ٢ ) المحاولات وعددها  $n$  مستقلة إحداها عن الأخرى ، ( ٣ ) احتمال النجاح  $p$  يبقى ثابتاً من محاولة إلى أخرى .

$$P(X) = nC_X p^X (1-p)^{n-X} = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X} \quad (\text{ب})$$

انظر المعادلات ( ٣ - ١٠ ) و ( ٣ - ١٧ ) . في بعض الكتب تستخدم  $q$  بدلا من  $1-p$  ( احتمال الفشل ) . هنا  $n=5$  ،  $X=3$  ،  $p=1/2$  و  $1-p=1/2$  . بإحلال هذه القيم في المعادلة السابقة ، نحصل على

$$P(3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} (1/2)^3 (1/2)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} (1/2)^3 (1/2)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} (1/2)^5 = 10(1/32) = 0.3125$$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) \quad (ج)$$

$$P(0) = \frac{5!}{0!5!} (1/2)^0 (1/2)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125$$

$$P(1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} (1/2)^1 (1/2)^4 = \frac{5}{32} = 0.15625$$

$$P(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} (1/2)^2 (1/2)^3 = \frac{10}{32} = 0.3125$$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.03125 + 0.15625 + 0.3125 = 0.5 \quad \text{أى ،}$$

٣ - ٢٣ (أ) افترض أن احتمال حصول أبوين على طفل أشقر الشعر هو  $1/4$  فإذا كان في الأسرة 6 أطفال ، ما احتمال أن نصفهم ذوو شعر أشقر ؟ (ب) إذا كان احتمال إصابة هدف بقذيفة واحدة هو 0.3 ، ماهو احتمال إصابة الهدف 3 مرات على الأقل خلال 4 قذائف ؟

(أ) هنا  $n = 6$  ،  $X = 3$  ،  $p = 1/4$  و  $1 - p = 3/4$  . بإحلال هذه القيم في صيغة ذى الحدين نحصل على:

$$P(3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} (1/4)^3 (3/4)^3 = \frac{6!}{3!3!} (1/64)(27/64) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (27/4,096)$$

$$= 20 \frac{27}{4,096} = \frac{540}{4,096} \approx 0.13$$

(ب) هنا  $n = 4$  ،  $X \geq 3$  ،  $p = 0.3$  و  $1 - p = 0.7$  :

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4)$$

$$P(3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} (0.3)^3 (0.7)^1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} (0.027)(0.7) = (4)(0.0189) = 0.0756$$

$$P(4) = \frac{4!}{4!(4-4)!} (0.3)^4 (0.7)^0 = (0.3)^4 = 0.0081$$

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.0756 + 0.0081 = 0.0837$$

وإذن

٣ - ٢٤ (أ) يأخذ مراقب جودة إنتاج عينة من 10 صمامات عشوائياً من شحنة كبيرة من الصمامات معروف أنها تحتوى على 20 % صماماً معيباً . ماهو احتمال أن يكون عدد الصمامات المعيبة في العينة أقل من أو يساوى 2 ؟

(ب) يأخذ مهندس فحص عينة من 15 وحدة عشوائياً من عملية إنتاج صناعى معروف أنها تنتج 85% وحدات مقبولة . ما احتمال أن تكون 10 من الوحدات المسحوبة مقبولة ؟

(أ) هنا  $n = 10$  ،  $X \leq 2$  ،  $p = 0.2$  و  $1 - p = 0.8$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$P(0) = \frac{10!}{0!(10-0)!} (0.2)^0 (0.8)^{10} = 0.1074 \quad (\text{بالبحت عن } X = 0 \text{ و } p = 0.2 \text{ في ملحق ١})$$

$$P(1) = 0.2684 \quad (\text{بالبحت عن } X = 1 \text{ و } p = 0.2 \text{ في ملحق ١})$$

$$P(2) = 0.3020 \quad (\text{بالبحت عن } X = 2 \text{ و } p = 0.2 \text{ في ملحق ١})$$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.1074 + 0.2684 + 0.3020 = 0.6778 \quad \text{فيكون ،}$$

(ب) هنا  $n = 15$  ،  $X = 10$  ،  $p = 0.85$  و  $1 - p = 0.15$  . وحيث أن ملحق ١ يعطى احتمالات ذى الحدين حتى 0.5 فيجب تحويل هذه المسألة . فاحتمال  $X = 10$  وحدات مقبولة مع  $p = 0.85$  يعادل احتمال  $X = 5$

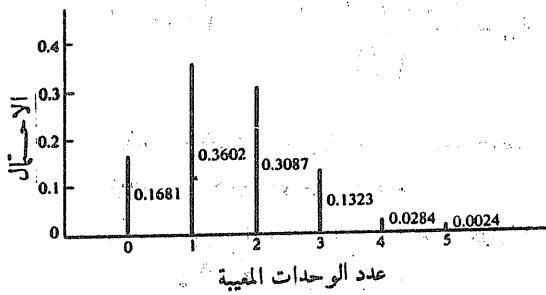
وحدات معينة عندما  $p = 0.15$  . باستخدام  $n = 15$  ،  $X = 5$  وحدات معينة ،  $p = 0.15$  نحصل على 0.0449 ( من ملحق ١ ) .

٢٥ - (أ) إذا أُلقيت 4 عملات متوازنة في آن واحد ( أو أُلقيت عملة واحدة 4 مرات ) ، احسب التوزيع الاحتمالي بأكمله وارسمه (ب) احسب وارسم التوزيع الاحتمالي لعينة من 5 وحدات مسحوبة عشوائياً من عملية إنتاجية معروف أنها تنتج 30% وحدة معينة .

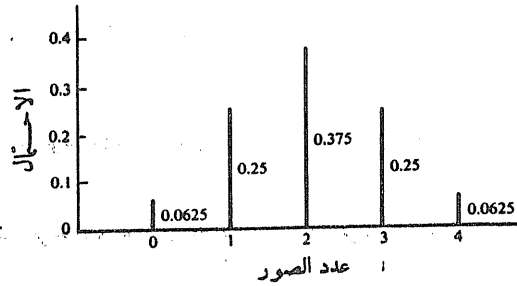
(أ) باستخدام  $n = 4$  ،  $X = 0H, 1H, 2H, 3H$  أو  $4H$  ،  $p = 1/2$  ، وباستخدام ملحق ١ نحصل على

$$\begin{aligned} P(0H) &= 0.0625, \quad P(1H) = 0.2500, \quad P(2H) = 0.3750, \quad P(3H) = 0.2500, \quad P(4H) = 0.0625 \\ P(0H) + P(1H) + P(2H) + P(3H) + P(4H) &= 0.0625 + 0.2500 + 0.3750 + 0.2500 + 0.0625 = 1 \end{aligned}$$

انظر شكل ( ٣ - ٩ ) . لاحظ أن  $p = 0.5$  وأن التوزيع الاحتمالي في شكل ( ٣ - ٩ ) متماثل .



شكل ( ٣ - ١٠ ) التوزيع الاحتمالي للوحدات المعيبة



شكل ( ٣ - ٩ ) التوزيع الاحتمالي لعدد الصور عند رمي 4 عملات

(ب) باستخدام  $n = 5$  ،  $X = 0, 1, 2, 3, 4$  أو  $5$  وحدات معينة ،  $p = 0.3$  ، نحصل على :

$$\begin{aligned} P(0) &= 0.1681, \quad P(1) = 0.3602, \quad P(2) = 0.3087, \quad P(3) = 0.1323, \quad P(4) = 0.0284, \quad P(5) = 0.0024 \\ P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) &= 0.1681 + 0.3602 + 0.3087 + 0.1323 + 0.0284 + 0.0024 = 1 \end{aligned}$$

انظر شكل ( ٣ - ١٠ ) . لاحظ أن  $p < 0.5$  وأن التوزيع الاحتمالي في شكل ( ٣ - ١٠ ) ملتو إلى اليمين .

٢٦ - ٣ احسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري وحدد التماثل أو عدم التماثل للتوزيع الاحتمالي في (أ) المسألة ٣ - ٢٣ (أ) (ب) المسألة ٣ - ٢٣ (ب) (ج) المسألة ٣ - ٢٤ (أ) و (د) المسألة ٣ - ٢٤ (ب)

$$E(X) = \mu = np = (6)(1/4) = 2/3 \approx 0.67 \text{ طفل أشقر} \quad (أ)$$

$$SD X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6(1/4)(3/4)} = \sqrt{18/16} = \sqrt{1.125} \approx 1.06 \text{ طفل أشقر}$$

ولأن  $p < 0.5$  فإن التوزيع الاحتمالي لعدد الأطفال الشقر ملتو إلى اليمين .

$$E(X) = \mu = np = (4)(0.3) = 1.2 \text{ إصابة} \quad (ب)$$

$$SD X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{(4)(0.3)(0.7)} = \sqrt{0.84} \approx 0.92 \text{ إصابة}$$

لأن  $p < 0.5$  ، التوزيع الاحتمالي ملتو إلى اليمين .

$$E(X) = \mu = np = (10)(0.2) = 2 \quad \text{(ج) صمات معية}$$

$$SD X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{(10)(0.2)(0.8)} = \sqrt{1.6} \approx 1.26 \quad \text{صمات معية}$$

لأن  $p < 0.5$  ، التوزيع ملنو اليمين .

$$E(X) = \mu = np = (15)(0.85) = 12.75 \quad \text{(د) وحدة مقبولة}$$

$$SD X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15(0.85)(0.15)} = \sqrt{1.9125} \approx 1.38 \quad \text{وحدة مقبولة}$$

لأن  $p > 0.5$  ، التوزيع الاحتمال ملنو اليسار .

٣ - ٢٧ عندما تم الماينة من مجتمع محدود بدون إحلال ، لا يمكن استخدام توزيع ذي الحدين لأن الأحداث تكون غير مستقلة . في هذه الحالة تستخدم التوزيع فوق الهندسي . وقانونه كالتالي :

$$P_H = \frac{\binom{N-X}{n-X} \binom{X}{X}}{\binom{N}{n}} \quad \text{(٣-٢٢) التوزيع فوق الهندسي}$$

ويقيس احتمال عدد نجاحات  $X$  ، في عينة حجمها  $n$  مأخوذة عشوائياً بدون إحلال من مجتمع حجمه  $N$  ، حيث  $X_i$  وحدة تتحقق فيها الخاصية التي سميت « نجاحاً »

(أ) باستخدام المعادلة ، احسب احتمال اختيار 2 من الرجال في عينة من 6 أفراد اختيرت عشوائياً بدون إحلال من مجموعة من 10 أفراد منها 5 رجال .

(ب) كيف تكون النتيجة لو استخدمنا ( خطأ ) توزيع ذي الحدين ؟

(أ) هذا :  $X = 2$  ،  $n = 6$  ،  $N = 10$  ،  $X_i = 5$  :

$$P_H = \frac{\binom{10-5}{6-2} \binom{5}{2}}{\binom{10}{6}} = \frac{\binom{5}{4} \binom{5}{2}}{\binom{10}{6}} = \frac{\frac{5!}{4!1!} \frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{6!4!}} = \frac{(5)(10)}{210} \approx 0.24$$

$$P(2) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X} = \frac{6!}{2!4!} (1/2)^2 (1/2)^4 = \frac{15}{64} = 0.23 \quad \text{(ب)}$$

ويجب ملاحظة أنه عندما يكون حجم العينة صغيراً جداً بالنسبة لحجم المجتمع ( مثلاً ، أقل من 5% من المجتمع ) ، فإن الماينة بدون إحلال يكون تأثيرها صغيراً على احتمال النجاح في كل محاولة ويكون توزيع ذي الحدين ( الأسهل في الاستخدام ) تقريباً جيداً للتوزيع فوق الهندسي . وهذا هو سبب استخدام توزيع ذي الحدين في المسألة ٣-٢٤ (أ) .

توزيع بواسون :

٣ - ٢٨ (أ) ما الفرق بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون ؟ (ب) متى يمكن تطبيق توزيع بواسون ؟ اعط بعض الأمثلة على ذلك .

(ج) اذكر صيغة توزيع بواسون و اشرح معنى الرموز المختلفة .

(د) تحت أي شروط يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين ؟ لماذا يمكن أن يكون هذا مفيداً ؟

(أ) بينما يمكن استخدام توزيع ذي الحدين لإيجاد احتمال عدد معين من النجاحات من بين عدد  $n$  من المحاولات ، فإن توزيع بواسون يستخدم لإيجاد احتمال عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن . والشروط الأخرى لتطبيق توزيع ذي الحدين

مطلوبة أيضاً لتطبيق بواسون . وهذه هي ( ١ ) أن يكون هناك فقط ناتجان متنافيان . ( ٢ ) الأحداث يجب أن تكون مستقلة ( ٣ ) يبقى متوسط عدد مرات النجاح لوحدة الزمن ثابتاً .

(ب) يستخدم توزيع بواسون عادة في بحوث العمليات لحل مشاكل الإدارة . وبمض الأمثلة هي عدد المكالمات التليفونية لمركز بوليس في الساعة ، عدد العملاء الذين يصلون إلى طلمبة البنزين في الساعة ، وعدد حوادث المرور عند تقاطع مافى الأسبوع .

(ج) احتمال عدد معين من النجاحات لوحدة الزمن  $P(X)$  ، يمكن إيجاد باستخدام

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}$$

حيث  $X$  = عدد معين من النجاحات

$\lambda$  = ( الحرف اليوناني لامدا ) متوسط عدد النجاحات في فترة زمنية معينة

$e$  = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعية أو 0.271828

وبمعرفة قيمة  $\lambda$  يمكن إيجاد  $e^{-\lambda}$  من ملحق ( ٢ ) ، وإحلالها في المعادلة ، لإيجاد  $P(X)$  . لاحظ أن  $\lambda$  هي الوسط الحسابي والتباين لتوزيع بواسون .

(د) يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين عندما عدد المحاولات  $n$  كبيراً ،  $p$  أو  $1-p$  صغيرة ( أحداث نادرة ) . وكقاعدة عملية جيدة يستخدم توزيع بواسون عندما  $n \geq 30$  و  $np$  أو  $n(1-p)$  أقل من 5 ، إذ عندما تكون  $n$  كبيرة فإن استخدام توزيع ذي الحدين يستغرق وقتاً طويلاً كما أن جداول احتمالات ذي الحدين قد لا تكون متاحة للقيم الصغيرة للاحتمال  $p$  .

٣ - ٢٩ تشير الخبرة السابقة إلى أنه في المتوسط يتوقف 6 عملاء للتزود بالبنزين عند طلمبة بنزين كل ساعة . ماهو احتمال

( أ ) توقف 3 عملاء في ساعة ما ؟ (ب) 3 عملاء أو أقل في ساعة ما ؟

(ج) ماهي القيمة المتوقعة ، أو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = \frac{(216)(0.00248)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{0.53568}{6} = 0.08928 \quad (أ)$$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) \quad (ب)$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = \frac{(1)(0.00248)}{1} = 0.00248$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = \frac{(6)(0.00248)}{1} = 0.01488$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = \frac{(36)(0.00248)}{2 \cdot 1} = 0.04464$$

$$P(3) = 0.08928 \text{ (from part a)}$$

$$P(X < 3) = 0.00248 + 0.01488 + 0.04464 + 0.08928 = 0.15128$$

إذن ،

(ج) القيمة المتوقعة ، أو الوسط الحسابي ، لتوزيع بواسون هذا هو  $\lambda = 6$  عملاء ، وانحراف معياري

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{6} \approx 2.45 \text{ عميل}$$

٣ - ٣٠ توضح الخبرة الماضية أن 1% من مصابيح الكهرباء المنتجة في مصنع ما هي مصابيح معيبة . في عينة من 30 مصباح ، أوجد احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام (أ) توزيع ذي الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب للذي الحدين .

(أ) عندما  $n = 30$  ،  $p = 0.01$  ، ومطلوب إيجاد  $P(X > 1)$  . باستخدام ملحق ١ نحصل على

$$P(2) + P(3) + P(4) + \dots = 0.0328 + 0.0031 + 0.0002 = 0.0361, \text{ or } 3.61\%$$

(ب) حيث  $n = 30$  و  $np = (30)(0.01) = 0.3$  ، فيمكننا استخدام تقريب بواسون للذي الحدين . بوضع  $\lambda = np = 0.3$  ، فيمكننا إيجاد  $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$  ، حيث  $X$  عدد المصابيح المعيبة . باستخدام معادلة (٣ - ١٣) ، نحصل على

$$P(1) = \frac{0.3^1 e^{-0.3}}{1!} = (0.3)(0.74082) = 0.222246$$

$$P(0) = \frac{0.3^0 e^{-0.3}}{0!} = e^{-0.3} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(1) + P(0) = 0.222246 + 0.74082 = 0.963066$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.963066 = 0.036934, \text{ or } 3.69\% \quad \text{إذن ،}$$

ومع زيادة  $n$  فإن التقريب يقترب أكثر من الاحتمال باستخدام ذي الحدين .

#### التوزيعات الاحتمالية المتصلة : التوزيع الطبيعي :

٣١ - ٣ (أ) عرف ماذا يقصد بالمتغير المتصل واعط بعض الأمثلة . (ب) عرف ماذا يقصد بالتوزيع الاحتمال المتصل . (ج) اشتق صيغة القيمة المتوقعة والتباين لتوزيع احتمالي متصل .

(أ) المتغير المتصل هو الذي يمكن أن يأخذ أى قيمة داخل فترة معينة فيمكن ببساطة قياس المتغير المتصل بأى درجة من الدقة باستخدام وحدات قياس أصغر فأصغر . فمثلا ، يمكن إذا قلت أن عملية إنتاجية تأخذ 10 ساعات ، فهذا يعنى أى فترة بين 9.5 و 10.4 ساعات ( 10 ساعات مقربة إلى أقرب ساعة ) فإذا استخدمنا الدقيقة كموحدة قياس ، فيمكن القول أن العملية الإنتاجية تأخذ 10 ساعات و 20 دقيقة . وهذا يعنى أى فترة زمنية بين 10 ساعات ، 19.5 دقيقة و 10 ساعات ، 20.4 دقيقة وهكذا . ومن ثم يكون الزمن متغيراً متصلاً ، ومثل ذلك ، الوزن ، المسافة ، والحرارة .

(ب) التوزيع الاحتمالي المتصل : يشير إلى مدى كل القيم الممكنة التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي متصل ، مع احتمالاتها المناظرة . وكثيراً ما يسمى التوزيع الاحتمال لمتغير عشوائي متصل بدالة كثافة الاحتمال ، أو ببساطة دالة الاحتمال . ويتم تمثيلها بمنحنى سلس بحيث أن مجموع المساحة ( الاحتمال ) تحت المنحنى يساوى 1 وحيث أن المتغير العشوائي المتصل يمكن أن يأخذ داخل فترة معينة عدداً لا نهائياً من القيم ، فإن احتمال أن يأخذ المتغير المتصل قيمة معينة يكون 0 . ولكن ، يمكننا قياس احتمال أن يقع متغير عشوائي متصل  $X$  داخل فترة محددة ( مثلاً بين  $X_1$  و  $X_2$  ) باستخدام المساحة تحت المنحنى داخل هذه الفترة . أى ،

$$P(X_1 < X < X_2) = \int_{X_1}^{X_2} f(X) dX \quad (٣ - ٢٣)$$

حيث  $f(X)$  هي معادلة دالة كثافة الاحتمال ، وعلامة التكامل  $\int$  تقابل علامة الجمع  $\Sigma$  للمتغيرات المنفصلة . ويوجد بالملاحق جداول احتمالات لبعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة الأكثر استخداماً ، وعليه تنفى الحاجة إلى إجراء التكامل بأنفسنا .

(ج) يمكن اشتقاق القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي ، والتباين للتوزيعات الاحتمالية المتصلة بإحلال  $\int$  محل  $\Sigma$  ،  $f(X)$  محل  $P(X)$  في معادلات القيمة المتوقعة والتباين للتوزيعات الاحتمالية المنفصلة ( معادلات ٣ - ١٩ و ٣ - ٢٠ ) أى ،



$$E(X) = \mu = \int Xf(X) dX \quad (٢٤ - ٣)$$

$$\text{Var } X = \sigma^2 = \int [X - E(X)]^2 f(X) dX \quad (٢٥ - ٣)$$

٣ - ٣٢ (أ) ماهو التوزيع الطبيعي ؟ (ب) ما استخداماته ؟ (-) ماهو التوزيع الطبيعي القياسى ؟ ما استخداماته ؟

(أ) التوزيع الطبيعي هو دالة احتمال متصلة وهو جرسى الشكل ، متماثل حول الوسط الحسابى ، وممتدل ( أنظر التعريف فى قسم ٢ - ٤ ) . وكلما تحركنا بعيداً عن الوسط الحسابى فى كلا الاتجاهين ، اقترب منحنى التوزيع الطبيعي من المحور الأفقى ( ولكنه لايلمسه أبداً ) . ومعادلة دالة الاحتمال الطبيعي هى

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (٢٦ - ٣)$$

حيث  $f(X)$  = ارتفاع المنحنى الطبيعي

$\exp$  = الثابت 2.7183

$\pi$  = الثابت 3.1416

$\mu$  = الوسط الحسابى للتوزيع

$\sigma$  = الانحراف المعياري للتوزيع

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dX = 1 \quad \text{(المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي من ناقص ما لانهاية إلى زائد ما لانهاية)}$$

(ب) إن التوزيع الطبيعي هو أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداماً فى التحليل الإحصائى . فكثير من التوزيعات الموجودة فعلاً فى الطبيعة وفى الصناعة طبيعية . وأمثلة ذلك ، مقاييس الذكاء ، الأوزان ، والأطوال لعدد كبير من الناس ، والتفاوتات فى أبعاد عدد كبير من الأجزاء التى تنتجها ماكينة ما . كما يستخدم التوزيع الطبيعي كثيراً كتقريب لتوزيعات أخرى مثل توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون ( أنظر المسائل ٣ - ٣٧ و ٣ - ٣٨ ) . وعادة ما يكون توزيع متوسط العينات ، والنسب طبيعياً ، بصرف النظر عن شكل توزيع المجتمعات الأصلية ( أنظر قسم ٤ - ٢ ) .

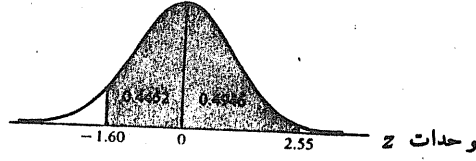
(ج) التوزيع الطبيعي القياسى هو توزيع طبيعى فيه  $\mu = 0$  و  $\sigma^2 = 1$  . ويمكن تحويل أى توزيع طبيعى ( معرقاً بقيم معينة  $\mu$  و  $\sigma^2$  ) إلى توزيع طبيعى معيارى بوضع  $\mu = 0$  ونقيس الانحرافات عن  $\mu$  بوحدات من الانحراف المعياري . وعادة يمكن إيجاد المساحات ( الاحتمالات ) بتحويل قيم  $X$  إلى قيم  $z$  المناظرة ( أى أن ،  $z = (X - \mu)/\sigma$  ) والبحث عن قيم  $z$  هذه فى ملحق ( ٣ ) .

٣ - ٣٣ أوجد المساحة تحت التوزيع الطبيعي القياسى (أ) بين  $z \pm 1$  ،  $z \pm 2$  و  $z \pm 3$  ، (ب) من  $z = 0$  إلى  $z = 0.88$  ، (ج) من  $z = 1.60$  إلى  $z = 2.55$  ، (د) إلى اليسار من  $z = 1.60$  ، (هـ) إلى اليمين من  $z = 2.55$  ، (و) إلى اليسار من  $z = -1.60$  وإلى اليمين من  $z = 2.55$  .

(أ) المساحة ( الاحتمال ) الداخلة تحت المنحنى الطبيعي القياسى بين  $z = 0$  و  $z = 1$  يتم الحصول عليها بالبحث عن القيمة 1.0 فى ملحق ( ٣ ) . ويتم هذا بالتحرك إلى أسفل فى عمود  $z$  فى الجدول حتى نصل إلى صف الرقم 1.0 فتتحرك فيه حتى نصل إلى العمود الذى عنوانه 00 . القيمة التى نحصل عليها هى 0.3413 . وهذا يعنى أن 34.13% من المساحة الكلية ( من 1 ، أو 100% ) تحت المنحنى تقع بين  $z = 0$  و  $z = 1.00$  . وكنتيجة للتماثل ، فإن المساحة بين  $z = 0$  و  $z = -1$  هى أيضاً 0.3413 ، أو 34.13% . ومن ثم فإن المساحة بين  $z = -1$  و  $z = 1$  هى 68.26% ( أنظر شكل ٣ - ٤ ) . وبالمثل ، فإن المساحة بين  $z = 0$  و  $z = 2$  هى 0.4772 أو 47.72% ( بالبحث عن

قيمة  $z = 2.00$  في الجدول ، فتكون المساحة بين  $z = \pm 2$  هي  $95.54\%$  (أنظر شكل ٢ - ٤) . والمساحة بين  $z = \pm 3$   $99.74\%$  (أنظر شكل ٣ - ٤) . لاحظ أن الجدول يعطي قيماً تفصيلية عن  $z$  فقط حتى  $2.99$  لأن المساحة تحت المنحنى خارج  $z = \pm 3$  صغيرة جداً ويمكن إهمالها .

(ب) المساحة بين  $z = 0$  و  $z = 0.88$  يمكن الحصول عليها بالبحث بالجدول مقابل  $0.88$  . وهذا يعطي القيمة  $0.3106$  .  
(ج) المساحة بين  $z = 0$  و  $z = -1.60$  يمكن إيجادها بالبحث بالجدول مقابل  $z = 1.60$  . الرقم المقابل  $0.4452$  .  
المساحة بين  $z = 0$  و  $z = 2.55$  يمكن إيجادها بالجدول مقابل  $z = 2.55$  . الرقم المقابل  $0.4946$  . ومن ثم فإن المساحة بين  $z = -1.60$  و  $z = 2.55$  تساوي  $0.4452$  زائداً  $0.4946$  أي  $0.9398$  أو  $93.98\%$  (أنظر شكل ٣ - ١١) . وفي كل المسائل من هذا النوع يكون من المفيد الاستعانة برسم التوزيع .



شكل (٣ - ١١)

(د) نحن نعلم أن اجمالي المساحة تحت المنحنى الطبيعي القياسي تساوي 1 . وكنتيجة للتأكل فإن 0.5 من المساحة تقع على كل من جانبي  $\mu = 0$  وحيث أن  $0.4452$  تمتد بين  $z = 0$  و  $z = -1.60$  ، فإن  $0.5 - 0.4452 = 0.0548$  أو  $5.48\%$  ، تكون هي المساحة في الطرف الأيسر ، إلى اليسار من  $-1.60$  (أنظر شكل ٣ - ١١) .  
(هـ)  $0.5 - 0.4946 = 0.0054$  أو  $0.54\%$  هي المساحة في الطرف الأيمن ، إلى اليمين من  $z = 2.55$  (أنظر شكل ٣ - ١١)

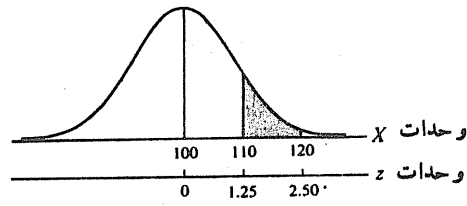
(و) المساحة إلى اليسار من  $z = -1.60$  وإلى اليمين من  $z = 2.455$  تساوي  $1 - 0.9398$  (من إجابة ج) .  
أي  $0.0602$  أو  $6.02\%$  من الإجمالي .

٣ - ٣٤ إذا كان من المعروف أن توزيع عمر المصابيح الكهربائية يتبع التوزيع الطبيعي حيث  $\mu = 100$  h و  $\sigma = 8$  h . ما احتمال أن مصباحاً اختير عشوائياً له عمر بين 110 و 120 ساعات احتراق ؟

المطلوب هنا إيجاد  $P(110 < X < 120)$  ، حيث تشير  $X$  إلى زمن الإضاءة مقيساً بالساعات . بمعلومية  $\mu = 100$  h و  $\sigma = 8$  h ، وبوضع  $X_1 = 110$  h و  $X_2 = 120$  h ، نحصل على

$$z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{120 - 100}{8} = 2.50 \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{110 - 100}{8} = 1.25$$

أي أننا نرغب في إيجاد المساحة ( الاحتمال ) بين  $z_1 = 1.25$  و  $z_2 = 2.50$  ( المساحة المظلة في شكل ٣ - ١٢ ) . بالبحث مقابل  $z_2 = 2.50$  في ملحق ( ٣ ) ، فنحصل على  $0.4938$  . وهذه هي المساحة بين  $z = 0$  و  $z_2 = 2.50$  . وبالبحث مقابل  $z_1 = 1.25$  ، نحصل على  $0.3944$  . وهذه هي المساحة بين  $z = 0$  و  $z_1 = 1.25$  . بطرح  $0.3944$  من  $0.4938$  ، نحصل على  $0.0994$  أو  $9.94\%$  ، للمساحة المظلة التي تمثل  $P(110 < X < 120)$  .



شكل ٣ - ١٢

٣ - ٣٥ افترض أن دخول الأسر تتبع التوزيع الطبيعي مع  $\mu = \$16,000$  و  $\sigma = \$2,000$  . ما احتمال أن يكون دخل أسرة اختيرت عشوائياً (أ) بين  $\$15,000$  و  $\$18,000$  ؟ (ب) أقل من  $\$15,000$  ؟ (ج) أعلى من  $\$18,000$  ؟ (د) أعلى من  $\$20,000$  ؟

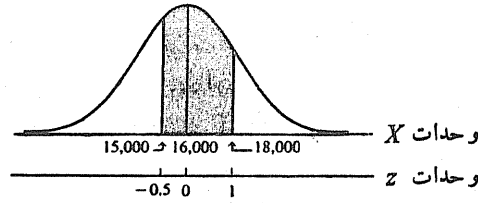
(أ) نحن نرغب في إيجاد  $P(\$15,000 < X < \$18,000)$  حيث  $X$  دخل الأسرة :

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\$15,000 - \$16,000}{\$2,000} = -0.5 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\$18,000 - \$16,000}{\$2,000} = 1$$

أى أننا نرغب في إيجاد المساحة (الاحتمال) بين  $z_1 = -0.5$  و  $z_2 = 1$  (المساحة المظلة في شكل ٣ - ١٣) . بالبحث مقابل  $z = 0.5$  في ملحق ٣ ، نحصل على 0.1915 للمساحة بين  $z = -0.5$  و  $z = 0$  . بالبحث مقابل  $z = 1$  ، نحصل على 0.3413 للمساحة بين  $z = 0$  و  $z = 1$  . ومن ثم فإن  $P(\$15,000 \leq X \leq \$18,000) = 0.1915 + 0.3413 = 0.5328$  أو 53.28% .

(ب)  $P(X < \$15,000) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$  أو 30.85% (المساحة غير المظلة في الطرف الأيسر في شكل ٣ - ١٣) .

(ج)  $P(X < \$15,000) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$  أو 30.85% (المساحة غير المظلة في الطرف الأيمن في شكل ٣ - ١٣) .



شكل ٣ - ١٣

(د)  $X = \$20,000$  تناظر  $z = (\$20,000 - \$16,000) / \$2,000 = 2$  ومن ثم  $P(X > \$20,000) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$  أو 2.28% .

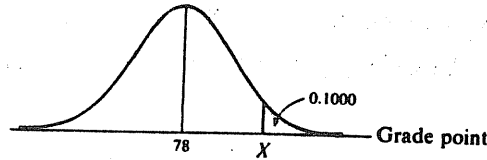
٣ - ٣٦ درجات امتحان نصف العام في مادة الإحصاء لفصل كبير موزعة طبيعياً بوسط حسابي 78 وانحراف معياري 8 ، ويريد الأستاذ أن يعطى تقدير A لنسبة 10% من الطلاب . ماهو الحد الأدنى للدرجات الذي يعطى تقدير A في امتحان نصف العام ؟

في هذه المسألة المطلوب تحديد الدرجة التي يزيد عنها 10% من الطلاب . وهذا يتضمن تحديد النقطة  $X$  بحيث أن 10% من المساحة تحت المنحنى الطبيعي تقع إلى اليمين من  $X$  (المساحة المظلة في شكل ٣ - ١٤) . وحيث أن إجمال المساحة تحت

المنحنى إلى اليمين من 78 هي 0.5 فإن المساحة غير المظلة في شكل ٣ - ٤ ( إلى اليمين من 78 تكون 0.4 نحتاج إذن أن نبحث داخل الجدول داخل الجدول في ملحق (٣) عن أقرب قيمة إلى 0.4 . وهذه هي 0.3997 والتي تقابل  $z$  تساوى 1.28 . وقيمة الدرجة المناظرة لقيمة  $z$  مساوية 1.28 يمكن إيجادها بإحلال القيم المعروفة في  $z = (X - \mu)/\sigma$  والحل لإيجاد  $X$  :

$$1.28 = \frac{X - 78}{8}$$

وهذا يعطى  $10.24 = X - 78$  ومن ثم فإن  $X = 78 + 10.24 = 88.24$  أو 88 لأقرب درجة صحيحة .



شكل ٣ - ٤

٣ - ٣٧ تشير الخبرة الماضية أن 30% من الناس الذين يدخلون محلا ما يقومون بالشراء فعلا . باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لذى الحدين ، أوجد احتمال أنه من بين 30 شخصاً يدخلون المحل ، فإن 10 أشخاص أو أكثر سوف يقومون بالشراء فعلا .

(أ) هنا  $n = 30$  ،  $p = 0.3$  ،  $1 - p = 0.7$  والمطلوب إيجاد  $P(X \geq 10)$  . باستخدام ملحق (١) (جدول احتمالات ذى الحدين) ،

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(10) + P(11) + P(12) + \dots + P(30) = 0.1416 + 0.1103 + 0.0749 + 0.0444 + 0.0231 \\ &\quad + 0.0106 + 0.0042 + 0.0015 + 0.0005 + 0.0001 \\ &= 0.4112 \end{aligned}$$

(ب) أشخاص  $\mu = np = (30)(0.3) = 9$  persons, and  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{(30)(0.3)(0.7)} = \sqrt{6.3} \approx 2.51$

وحيث أن  $n = 30$  وكلا من  $np$  و  $n(1-p)$  أكبر من 5 فيمكن تقريب احتمالات ذى الحدين باستخدام احتمالات التوزيع الطبيعي . ولكن ، عدد الأشخاص متغير منفصل . فلنستطيع استخدام التوزيع الطبيعي ، فيمكن التعامل مع عدد الأشخاص كما لو كان متغيراً متصلاً وإيجاد  $P(X \geq 9.5)$  . فيكون ،

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{9.5 - 9}{2.51} = \frac{0.5}{2.51} \approx 0.20$$

وبالبحث مقابل  $z = 0.20$  ، نحصل على 0.0793 (من ملحق (٣) ) . وهذا يعنى أن 0.0793 من المساحة تحت المنحنى الطبيعي تقع بين  $z = 0$  و  $z = 0.20$  . فيكون  $P(X \geq 9.5) = 0.5 - 0.0793 = 0.4207$  . (لأننا نعامل عدد الأشخاص (التقريب باستخدام التوزيع الطبيعي) . ومع كبر حجم  $n$  يتحسن التقريب المستخدم .) (لأننا نعامل عدد الأشخاص كتغير متصل لوجدنا أن  $P(X \geq 10) = 0.34$  ، ولا يكون التقريب الناتج على نفس الدرجة من الدقة) .

٣ - ٣٨ تنتج عملية إنتاجية 10 وحدات معينة في الساعة . أوجد احتمال أن 4 وحدات أو أقل تكون معينة من بين إنتاج ساعة مختارة عشوائياً باستخدام (أ) توزيع بواسون (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لبواسون .

(أ) هنا  $\lambda = 10$  والمطلوب إيجاد  $P(X \leq 4)$  ، حيث  $X$  هي عدد الوحدات المعينة من إنتاج ساعة مختارة عشوائياً . قيمة  $e^{-10}$  من ملحق (٢) هي 0.00005 . فيكون ،

$$P(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-10} = 0.00005$$

$$P(1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{10(0.00005)}{1} = 0.0005$$

$$P(2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{10^2(0.00005)}{2} = 0.0025$$

$$P(3) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{10^3(0.00005)}{6} = 0.0083335$$

$$P(4) = \frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!} = \frac{10^4(0.00005)}{24} = 0.0208335$$

$$P(X \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0.00005 + 0.0005 + 0.0025 + 0.0083335 + 0.0208335 = 0.032217, \text{ أو } 3.23\% \text{ حوالى}$$

(ب) معاملة الوحدات كتغير متصل ( أنظر المسألة ٣ - ٣٧ (ب) ) ، المطلوب هو إيجاد  $P(X \leq 4.5)$  ، حيث  $X$  عدد الوحدات المعيبة ،  $\mu = \lambda = 10$  و  $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} \approx 3.16$  . فيكون ،

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{4.5 - 10}{3.16} = \frac{-5.5}{3.16} = -1.74$$

بالنسبة لمقابل  $z = 1.74$  في ملحق ( ٣ ) . نحصل على 0.4591 وهذا يعنى أن  $0.5 - 0.5491 = 0.0409$  المساحة ( الاحتمال ) تحت المنحنى الطبيعي القياسى تقع إلى اليسار من  $z = 1.74$  وعليه فإن  $P(X \leq 4.5) = 0.0409$  أو 4.09% . ومع تزايد قيمة  $\lambda$  ، يتحسن التقريب المستخدم . ( لو لم نعامل عدد الوحدات المعيبة كتغير متصل ، لوجدنا أن  $P(X \leq 4) = 0.0287$  .

٣ - ٣٩ إذا كانت الأحداث أو النجاحات تتبع توزيع بواسون ، فيمكننا إيجاد احتمال أن يقع الحدث الأول خلال فترة زمنية معينة ،  $P(T \leq t)$  ، باستخدام التوزيع الاحتمالى الأسى . ولأننا نتعامل مع الزمن ، فإن التوزيع الأسى هو توزيع احتمال متصل . ويعبر عنه بالآتى :

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda} \quad (٣ - ٢٧)$$

حيث  $\lambda$  هو متوسط عدد مرات الحدوث للفترة المعينة ، ويمكن الحصول على  $e^{-\lambda}$  من ملحق ( ٢ ) . وتكون القيمة المتوقعة والتباين :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad (٣ - ٢٨)$$

$$\text{Var } T = \frac{1}{\lambda^2} \quad (٣ - ٢٩)$$

(أ) في تقرير المسألة ( ٣ - ٢٩ ) ، أوجد احتمال أنه بدءاً من نقطة زمنية عشوائية فإن العميل الأول سوف يتوقف عند طلمبة البنزين خلال نصف ساعة .

(ب) احتمال أنه لن يتوقف عميل عند طلمبة البنزين خلال نصف ساعة ؟

(ج) ما القيمة المتوقعة ، والتباين للتوزيع الأسى ، حيث المتغير المستمر هو الزمن  $T$

(أ) حيث أنه في المتوسط يتوقف 6 عملاء عند طلمبة البنزين كل ساعة ، فإن  $\lambda = 3$  متوسط عدد العملاء كل نصف ساعة . احتمال أن العميل الأول سوف يتوقف خلال نصف الساعة الأولى هو :

$$1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-3} = 1 - 0.04979 \text{ (from App. 2)} = 0.9502, \text{ or } 95.02\% \quad (٣) \text{ من ملحق ( ٣ )}$$

(ب) احتمال ألا يتوقف عميل خلال نصف ساعة

$$e^{-\lambda} = e^{-3} = 0.04979$$

(ج)  $E(T) = 1/\lambda = 1/6 \cong 0.17 \text{ h}$  للسيارة  $T = 1/\lambda^2 = 1/36 \cong 0.03 \text{ h}$  للسيارة المربعة . ويمكن استخدام التوزيع الأسي أيضاً لحساب الوقت الذي يمر بين كل حدثين متتاليين .

٣ - ٤٠ الوسط الحسابي لسنوات التعليم لمجتمع ماهو 8 سنوات والانحراف المعياري سنة واحدة . ما احتمال أن شخصاً ما تم اختياره عشوائياً من المجتمع تقع سنوات تعليمه بين 6 و 10 سنوات ؟ أقل من 6 سنوات أو أكثر من 10 سنوات ؟

حيث أننا لم نمط بيانات عن شكل التوزيع ، فيمكننا استخدام نظرية تشتت شيف والتي تنطبق على أى توزيع . باستخدام  $\mu = 8$  و  $\sigma = 1$  ، فإن 6 سنوات تقل عن الوسط الحسابي بعدد 2 انحراف معياري . و 10 سنوات تزيد عن المتوسط بعدد 2 انحراف معياري . باستخدام نظرية أو متباينة تشتت شيف :

$$P(|\bar{X} - \mu| < K\sigma) \geq 1 - \frac{1}{K^2} \quad (3-30)$$

احتمال أن شخصاً ما تم اختياره عشوائياً من المجتمع تقع سنوات تعليمه بين 2 انحراف معياري من المتوسط في كل اتجاه هو :

$$1 - \frac{1}{K^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} , \text{ or } 75\%$$

وبالتالى ، فإن احتمال أن هذا الشخص تكون سنوات تعليمه أقل من 6 سنوات أو أكثر من 10 سنوات هو 25% .

#### مسائل إضافية

احتمال حدث منفرد :

٣ - ٤١ أى مدخل للاحتتمالات تتضمنه العبارات الآتية ؟

(أ) احتمال صورة في رمية لعملة متوازنة هو 1/2

(ب) التكرار النسبي للصورة في 100 رمية لعملة هو 0.53

(ج) احتمال أن تمطر غداً هو 20% .

الإجابة (أ) المدخل الكلاسيكى أو المسبق (ب) مدخل التكرار النسبي أو المدخل التجريبي (ج) المدخل الشخصى أو الذاقى .

٣ - ٤٢ عند رمى عملة متوازنة ما احتمال (أ) كتابة (ب) صورة (ج) ليس كتابة أو (د) كتابة أو ليس كتابة .

الإجابة : (أ)  $P(T) = 1/2$  (ب)  $P(H) = 1/2$  (ج)  $P(T') = 1/2$  أو (د)  $P(T) + P(T') = 1$  .

٣ - ٤٣ ما احتمال في رمية واحدة لردة أن نحصل على (أ) 1 (ب) 6 (ج) ليس 1 أو (د) 1 أو ليس 1 ؟

الإجابة : (أ)  $P(1) = 1/6$  (ب)  $P(6) = 1/6$  (ج)  $P(1') = 5/6$  أو (د)  $P(1) + P(1') = 1$  .

٣ - ٤٤ عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب ما احتمال أن نسحب (أ) كوبة (ب) آس (ج) آس كوبة (د) ليس كوبة أو (هـ) كوبة أو ليس كوبة .

الإجابة : (أ)  $P(C) = 13/52 = 1/4$  (ب)  $P(A) = 4/52 = 1/13$  (ج)  $P(A_C) = 1/52$  أو (د)  $P(C') = 3/4$  .  
(هـ)  $P(C) + P(C') = 1$  .

٣ - ٤٥ : يحتوي وعاء على 12 كرة متماثلة تماماً باستثناء أن 4 منها زرقاء (B) ، 3 منها حمراء (R) ، 3 منها خضراء (G) ، و 2 منها بيضاء (W). عند سحب كرة واحدة ما احتمال أن تكون الكرة (أ) زرقاء ؟ (ب) حمراء ؟ (ج) خضراء ؟ (د) بيضاء ؟ (هـ) ليست حمراء ؟ (و) ليست بيضاء ؟ (ز) بيضاء أو ليست بيضاء ؟ (ح) ماهي معاملات الترجيح لصالح سحب كرة خضراء ؟ (ط) ماهي معاملات الترجيح لسحب كرة ليست خضراء ؟

الإجابة (أ)  $P(B) = 1/3$  أو 0.33 (ب)  $P(R) = 1/4$  أو 0.25 (ج)  $P(G) = 1/4$  أو 0.25 (د)  $P(W) = 1/6$  أو 0.167 (هـ)  $P(R') = 0.75$  (و)  $P(W') = 0.833$  (ز)  $P(W) + P(W') = 1$  (ح) 3 : 9 (ط) 9 : 3

٣ - ٤٦ : افترض أننا سحبنا ورقة من مجموعة لعب عادية ، ثم أعيدت الورقة إلى المجموعة وأعيد خلطها جيداً وسحبنا ورقة ثانية . عندما أعيدت هذه العملية 520 مرة حصلنا على 136 بستوني . (أ) ماهو التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي للحصول على بستوني ؟ (ب) ماهو الاحتمال الكلاسيكي أو المسبق للحصول على بستوني ؟ (ج) ماذا نتوقع أن يكون عليه التكرار النسبي ، أو الاحتمال التجريبي للحصول على بستوني فيما لو أعيدت العملية لمرات أخرى كثيرة ؟

الإجابة (أ)  $136/520 \approx 0.26$  (ب)  $P(S) = 1/4$  (ج) أن يقترب من  $1/4$  أو 0.25 .

٣ - ٤٧ : وجدت شركة تأمين أنه من بين عينة من 10,000 رجل بين سن 30 و سن 40 ، أصيب 87 رجلاً بمرض خطير خلال سنة واحدة (أ) ماهو التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي لأن يصاب شخص بين سن 30 و سن 40 بمرض خطير خلال عام واحد ؟ (ب) لماذا تهتم شركات التأمين بهذه النتائج ؟ (ج) افترض أن الشركة قد باعت تأميناً صحياً لعدد 1,387,684 رجلاً بين سن 30 و سن 40 ، كم مطالبة تتوقعها الشركة خلال فترة العام ؟

الإجابة (أ) التكرار النسبي و الاحتمال التجريبي  $87/10,000 = 0.0087$  (ب) تهتم شركة التأمين بالتكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي لتحديد قسط التأمين . (ج) 12,073 لأقرب شخص .

احتمال الأحداث المتعددة :

٣ - ٤٨ : ماهي نواع الأحداث الآتية ؟ (أ) سحب ديناري أو كوبة عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب (ب) سحب ديناري أو بنت عند سحب ورقة واحدة من المجموعة (ج) رميتان متتاليتان لعملة متوازنة (د) رميتان متتاليتان لردة (هـ) سحب ورقتين من مجموعة أوراق لعب مع الإحلال (و) سحب ورقتين من المجموعة بدون إحلال (ز) سحب كرتين من وعاء بدون إحلال . الإجابة (أ) متنافية (ب) غير متنافية (ج) مستقلة (د) مستقلة (هـ) مستقلة (و) غير مستقلة (ز) غير مستقلة .

٣ - ٤٩ : ما احتمال الحصول على :

(أ) أربعة أو أكثر عند رمي نرد مرة واحدة ؟ (ب) آس أو شايب عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب (ج) كرة خضراء أو بيضاء من الوعاء في المسألة (٣ - ٤٥) ؟

الإجابة (أ)  $1/2$  (ب)  $8/52$  و  $2/13$  (ج)  $5/12$

٣ - ٥٠ : ماهو احتمال الحصول على :

(أ) ديناري و بنت عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق اللعب . (ب) ديناري أو بنت أو شايب ؟ (ج) إنسان أسود أو امرأة كرئيس للولايات المتحدة إذا كان احتمال رئيس أسود 0.25 ، واحتمال امرأة 0.15 ، واحتمال امرأة سوداء 0.07 ؟

الإجابة (أ)  $16/52$  أو  $4/13$  (ب)  $19/52$  (ج) 0.33

٣ - ٥١ ما احتمال الحصول على :

- (أ) واحد وواحد في رميتين لردة ؟  
 (ب) ثلاث كتابات في 3 رميات للعملة ؟  
 (ج) مجموع 6 عند رمي نردتين معاً ؟  
 (د) مجموع أقل من 5 عند رمي نردتين معاً ؟  
 (هـ) مجموع 10 أو أكثر عند رمي نردتين معاً ؟  
 الإجابة (أ)  $1/36$  (ب)  $1/8$  (ج)  $5/36$  (د)  $1/6$  (هـ)  $1/6$

٣ - ٥٢ ما احتمال الحصول من مجموعة أوراق لعب على :

- (أ) دينارى عند سحب الورقة الثانية علماً بأن الورقة الأولى التي سحبت ولم تعد كانت دينارى ؟  
 (ب) دينارى عند سحب الورقة الثانية علماً بأن الورقة الأولى التي سحبت ولم تعد لم تكن دينارى ؟  
 (ج) شايب عند سحب الورقة الثالثة علماً بأن الورقتين الأولى والثانية لم تعادا بعد السحب وكانتا بنتاً وولداً ؟ .  
 الإجابة (أ)  $12/51$  (ب)  $13/51$  (ج)  $4/50$

٣ - ٥٣ ما احتمال التقاط :

- (أ) شايب كوبة ودينارى على الترتيب عند سحب ورقتين من مجموعة بدون إحلال ؟  
 (ب) كرة بيضاء وكرة خضراء على الترتيب عند سحب كرتين بدون إحلال من الوعاء في المسألة (٣ - ٤٥) ؟  
 (ج) كرة خضراء وكرة بيضاء على الترتيب عند سحب كرتين بدون إحلال من الوعاء في المسألة (٣ - ٤٥) ؟  
 (د) كرة خضراء وكرة بيضاء بأي ترتيب عند سحب كرتين بدون إحلال من نفس الوعاء ؟  
 (هـ) ثلاث كرات خضراء عند سحب ثلاث كرات بدون إحلال من الوعاء ؟  
 الإجابة (أ)  $13/2,652$  أو  $1/204$  (ب)  $6/132$  أو  $1/22$  (ج)  $1/22$  (د)  $1/11$  (هـ)  $6/1320$  أو  $1/220$

٣ - ٥٤ افترض أن احتمال أن تمطر السماء في يوم معين هو 0.1 ، واحتمال أن يحدث لي حادث سيارة في أى يوم هو 0.005 و 0.012 في اليوم المطير .

- (أ) ماهي القاعدة التي يجب أن أستخدمها لحساب احتمال أنه في يوم معين سوف تمطر وأنه سوف يحدث لي حادث سيارة ؟  
 (ب) اكتب القاعدة المطلوبة في (أ) باستخدام A للدلالة على حادثة ، R للدلالة على مطر .  
 (ج) احسب الاحتمال المطلوب في (أ) .

الإجابة (أ) قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة (ب)  $P(A/R) \cdot P(R) = P(A \text{ و } R)$  (ج) 0.0012

٣ - ٥٥ (أ) ماهي القاعدة أو النظرية التي يجب استخدامها لحساب احتمال أنها كانت تمطر عندما حدثت لي حادثة سيارة في المسألة (٣ - ٥٤) ؟

- (ب) اذكر القاعدة أو النظرية التي تنطبق على (أ) . (ج) أجب على السؤال في (ج) .

الإجابة (أ) نظرية بييز (ب)  $P(A/R)/P(A) \cdot P(R) = P(R/A)$  (ج) 0.24

٣ - ٥٦ كم عدد الطرق التي يمكن بها تخصيص 6 أشخاص مؤهلين في (أ) ثلاث وظائف تدريبية متاحة إذا كانت الوظائف متماثلة تماماً ؟  
 (ب) ثلاث وظائف تدريبية مختلفة ؟ (ج) ست وظائف تدريبية مختلفة .

الإجابة (أ) 20 (ب) 120 (ج) 720



التوزيعات الاحتمالية المنفصلة : توزيع ذى الحدين :

٣ - ٥٧ يظهر التوزيع الاحتمالي لمرتاى أحد المطاعم للغذاء فى جدول ( ٣ - ٥ ) . احسب ( أ ) العدد المتوقع للمتددين على المطعم وقت الغذاء (ب) التباين (ج) الانحراف المعياري .

جدول ( ٣ - ٥ ) التوزيع الاحتمالي للمتددين على أحد المطاعم وقت الغذاء

| الاحتمال $P(X)$ | عدد المتددين ، $X$ |
|-----------------|--------------------|
| 0.2             | 100                |
| 0.3             | 110                |
| 0.2             | 118                |
| 0.2             | 120                |
| 0.1             | 125                |
| 1.0             |                    |

الإجابة ( أ ) 113.1 متردد (ب) 65.69 متردد مربع (ج) 8.10 متردد

٣ - ٥٨ ما احتمال :

( أ ) الحصول على 4 صورة ، 2 كتابة فى 6 رميات لعملة ؟ (ب) الحصول على 3 رقم ستة فى 4 رميات لردة  
الإجابة ( أ ) 0.23 (ب) 0.0154321 .

٣ - ٥٩ إذا كان 20% من الطلاب الذين ياتحقون بالجامعة يتركونها قبل إتمام الدراسة بها ؛ أوجد احتمال أنه من بين 20 طالباً تم اختيارهم عشوائياً من بين العدد الكبير جداً من الملتحقين بالجامعة ، أن 3 منهم سوف يتركون الجامعة قبل إتمام الدراسة .  
(ب) إذا كان 90% من المصاييح الكهربائية المنتجة فى أحد المصانع مقبولة ، ما احتمال أن يكون من بين 10 مصاييح مختارة عشوائياً من إنتاج كبير جداً للمصنع ، 8 منها مقبولة .

الإجابة ( أ ) 0.206 (ب) 0.1937

٣ - ٦٠ احسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري وحدد تماثل أو عدم تماثل التوزيع الاحتمال

( أ ) للسألة ( ٣ - ٥٨ ) ( أ ) ، (ب) للسألة ( ٣ - ٥٩ ) ( أ ) ، (ج) للسألة ( ٣ - ٥٩ ) (ب) ( أ )

الإجابة ( أ )  $E(X) = 3$  صورة ،  $SDX = 1.27$  صورة ، والتوزيع تماثل (ب)  $E(X) = 4$  طالباً ،  
 $SD X = 1.79$  طالباً ، والتوزيع ملتو لليمين (ج)  $E(X) = 9$  مصاييح  $SD X = 0.95$  مصاييح ، والتوزيع ملتو لليساار .

٣ - ٦١ ما احتمال اختيار ( أ ) سيدتين فى عينة من 5 أفراد مسحوبة عشوائياً بدون إحلال من مجموعة من 9 أفراد منهم 4 سيدات (ب) ثمانى رجال فى عينة من 10 أفراد مسحوبة عشوائياً بدون إحلال من مجتمع مكون من 1,000 فرد نصفهم رجال ؟  
الإجابة ( أ ) حوالى 0.71 ( باستخدام التوزيع فوق الهندسى ) (ب) حوالى 0.0439 ( باستخدام تقريـب ذى الحدين لاحتـمالات التوزيع فوق الهندسى ) .

توزيع بواسون :

٣ - ٦٢ تشير الخبرة الماضية إلى أن هناك 2 حادثة مرور عند تقاطع ما أسبوعياً . ما احتمال ( أ ) 4 حوادث خلال أسبوع مختار عشوائياً ؟  
(ب) عدم وقوع حوادث ؟ (ج) ما القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للتوزيع ؟  
الإجابة ( أ ) حوالى 0.36 (ب) حوالى 0.14 (ج) حادثة  $E(X) = \lambda = 2$  ، حادثة  $SDX = \sqrt{\lambda} = 1.41$  .

٣ - ٦٣ تظهر الخبرة الماضية أن 0.003 من القوة العاملة القومية يصابون بمرض خطير خلال عام . فإذا اختير 1,000 شخص عشوائياً من بين القوة العاملة القومية :

(أ) ماهى القيمة المتوقعة لعدد العاملين الذين سوف يمرضون خلال العام ؟

(ب) ما احتمال أن 5 عاملين سوف يمرضون خلال العام ؟

الإجابة (أ) 3 عاملين (ب) حوالى 0.1 ( باستخدام بواسون كتقريب لذى الحدين )

التوزيعات الاحتمالية المتصلة : التوزيع الطبيعي :

٣ - ٦٤ اعط الصيغ التالية :

(أ) احتمال أن يقع المتغير المتصل  $X$  بين  $X_1$  و  $X_2$  .

(ب) التوزيع الطبيعى (ج) القيمة المتوقعة والتباين للتوزيع الطبيعى . (د) التوزيع الطبيعى القياسى .

(هـ) ماهو متوسط وتباين التوزيع الطبيعى القياسى ؟

$$\begin{aligned} \text{الإجابة (أ)} \quad P(X_1 < X < X_2) &= \int_{X_1}^{X_2} f(x) dx \\ f(X) &= (1/\sqrt{2\pi}\sigma^2) \exp\{-(1/2)[(X-\mu)/\sigma]^2\} \quad (\text{ب}) \\ f(X) &= (1/\sqrt{2\pi}) \exp[-(1/2)z^2] \quad (\text{د}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X) dX \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^2 f(X) dX \quad (\text{ج}) \\ E(X) &= \mu = 0 \quad \text{and} \quad \sigma^2 = 1 \quad (\text{هـ}) \end{aligned}$$

٣ - ٦٥ أوجد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى القياسى (أ) بين  $z = \pm 1.64$  (ب) بين  $z = \pm 1.96$  (ج) بين

$z = \pm 2.58$  (د) بين  $z = 0.90$  و  $z = 2.10$  (هـ) إلى اليسار من  $z = 0.90$  (و) إلى اليمين من

$z = 2.10$  (ز) إلى اليسار من  $z = 0.90$  وإلى اليمين من  $z = 2.10$

الإجابة (أ) 0.899 أو 89.90% (ب) 0.95 (ج) 0.9902 (د) 0.1662 (هـ) 0.8159 (و) 0.0179 (ز) 0.8338

٣ - ٦٦ متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى مع  $\mu = 67$  و  $\sigma = 3$  . ما احتمال أن هذا المتغير العشوائى سىأخذ القيمة

(أ) بين 67 و 70 ؟ (ب) بين 60 و 70 ؟ (ج) بين 60 و 65 ؟ (د) أقل من 60 ؟ (هـ) أكبر من 65 ؟

الإجابة (أ) 0.3413 أو 34.13% (ب) 0.8334 (ج) 0.2415 (د) 0.0099 (هـ) 0.7486

٣ - ٦٧ الوسط الحسابى لأوزان مجموعة كبيرة من الناس هو 180 رطلاً والانحراف المعيارى 15 رطلاً . إذا كانت الأوزان تتبع

التوزيع الطبيعى ، أوجد احتمال أن شخصاً تم اختياره عشوائياً من المجموعة سوف يزن (أ) بين 160 و 180 رطلاً (ب) أعلى

من 200 رطلاً (ج) أقل من 150 رطلاً .

الإجابة (أ) 0.4082 أو 40.82% (ب) 0.0918 (ج) 0.0228

٣ - ٦٨ تتبع درجات اختبارات الذكاء لمتطوعى الجيش فى سنة ما التوزيع الطبيعى مع  $\mu = 110$  و  $\sigma = 10$  . ويريد الجيش أن يعطى

تدريباً متقدماً لأعلى 25% فى درجات اختبارات الذكاء . ماهى أقل درجة فى اختبارات الذكاء التى تقبل لحضور

التدريب المتقدم ؟

الإجابة 117 لأقرب رقم صحيح

٣ - ٦٩ تشير الخبرة الماضية إلى أن 60% من الطلاب الملتحقين بالكليات يحصلون على مؤهلاتهم . باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين ،

(ب) التوزيع الطبيعى كتقريب لذى الحدين ، أوجد احتمال أنه من بين 30 طالباً مختارين عشوائياً من الملتحقين حديثاً

سوف يحصل أكثر من 20 طالباً على المؤهل .

الإجابة (أ) 0.1762 (ب) 0.1762

٣ - ٧٠ في المتوسط ، تمر 10 سيارات في الدقيقة من أمام كشك تحصيل رسوم المرور خلال ساعة الذروة . باستخدام (أ) توزيع بواسون ، (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لبواسون ، أوجد احتمال أن أقل من 6 سيارات سوف تمر أمام الكشك خلال دقيقة مختارة عشوائياً .

الإجابة (أ) 0.0671 أو 6.71 % (ب) 0.0778 أو 7.74%

٣ - ٧١ تنتج عملية صناعية في المتوسط 2 وحدة معيبة في الساعة . ما احتمال أنه بعد الحصول على وحدة معيبة : (أ) أن تمر ساعة قبل الحصول على الوحدة المعيبة التالية ؟ (ب) أن تمر نصف ساعة ؟ (ج) أن تمر خمسة عشرة دقيقة ؟ (د) ما القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الإجابة (أ) 0.13534 أو 13.53% (ب) 0.36788 (ج) 0.60653 (د)  $E(T) = \sigma = 1/\lambda = 1/2 h$  لكل وحدة معيبة

٣ - ٧٢ متوسط تقديرات طالبة أعلى من المتوسط الحسابي في مدرستها بـ 3 انحراف معياري . ماعدد طلاب المدرسة الذين  $\leq 6$  . (أ) متوسط درجات أعلى ؟ (ب) متوسط درجات أقل ؟

الإجابة (أ) 0.11 أو 11% (ب) 0.89 أو 89%

## الفصل الرابع

### الاستدلال الإحصائي : التقدير

#### ١-٤ المعاينة

الاستدلال الإحصائي واحد من أكثر جوانب عملية اتخاذ القرارات أهمية وحيوية في الاقتصاد والأعمال والعلوم . ويتعلق الاستدلال الإحصائي بالتقدير واختبار الفروض ( الفصل الخامس ) . والتقدير هو عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري) من الإحصاء المناظر والخاص بعينة مسحوبة من المجتمع .

ولكي يكون التقدير ( واختبار الفروض ) سليماً ، ينبغي أن يبنى على عينة مثله للمجتمع . ويمكن تحقيق ذلك بالمعاينة العشوائية حيث يكون لكل مفردة في المجتمع فرصة متكافئة للدخول في العينة .

مثال ١ - يمكن الحصول على عينة عشوائية من 5 من بين 80 عاملاً في مصنع بتسجيل إسم كل منهم على قصاصة من الورق ، وخطط القصاصات جيداً ، والتقاط خمس منها عشوائياً . وكطريقة أقل تعقيداً يمكن استخدام جدول الأرقام العشوائية (ملحق ٤) . ولاستخدام هذه الطريقة ، نعين أولاً رقماً من 1 إلى 80 لكل عامل . ثم نبدأ عند نقطة عشوائية (وليكن ، من العمود الثالث والصف الحادى عشر) في ملحق ٤ ، ونقرأ 5 أرقام (كل رقمين معاً) أما أفقياً وإما رأسياً (مع حذف كل الأعداد التي تزيد عن 80) . على سبيل المثال ، بالقراءة رأسياً نحصل على 13 ، 54 ، 19 ، 59 ، 71 .

#### ٢-٤ توزيع المعاينة للمتوسط

إذا أخذنا عينات متكررة من مجتمع ما وقتنا بقياس متوسط لكل عينة ، فإننا نجد أن معظم هذه المتوسطات  $\bar{X}$  ، تختلف عن بعضها البعض ، ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات هذه «توزيع المعاينة للوسط» . ولكن توزيع المعاينة للوسط له أيضاً وسط ، يميز عنه بالرمز  $\mu_{\bar{X}}$  ، وانحراف معياري أو خطأ معياري  $\sigma_{\bar{X}}$  .

وهناك نظريتان هامتان تربطان بين توزيع المعاينة للوسط والمجتمع الأصلي .

نظرية ١ - إذا أخذنا عينات متكررة حجمها  $n$  من مجتمع ما :

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad (١ - ٤)$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{or} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (٢ - ٤ ، ب)$$

حيث تستخدم معادلة (٢ - ٤) للمجتمعات المحدودة ذات الحجم  $N$  عندما تكون  $N \geq 0.05 n$  (أنظر المسألة ٤ - هـ (ب) .

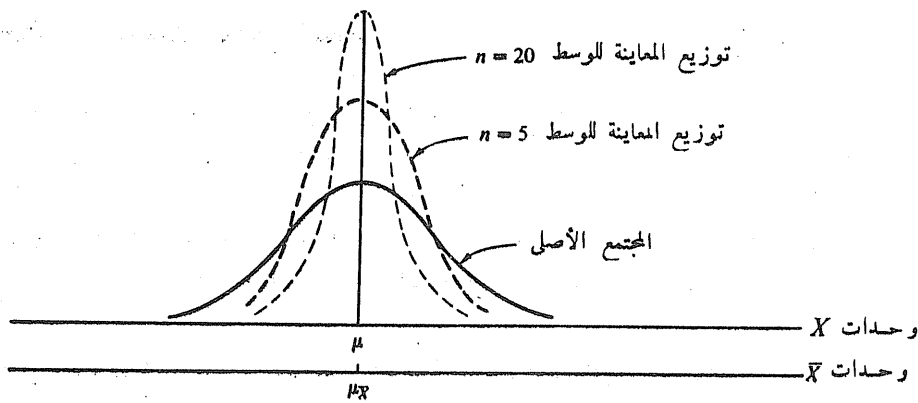
نظرية ٢ - مع تزايد حجم العينات (أى عندما  $n \rightarrow \infty$ ) فإن توزيع المعاينة للمتوسط يقترب من التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن شكل المجتمع الأصلي . ويعتبر التقريب جيداً عندما تكون  $n \geq 30$  . هذه هي نظرية النهاية المركزية .

ويمكن إيجاد احتمال أن يكون الوسط  $\bar{X}$  لعينة عشوائية داخل فترة معينة ، بحساب قيم  $z$  للفترة ، حيث

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \quad (٣ - ٤)$$

ثم الكشف عن هذه القيم في ملحق ٣ ، كما سبق شرحه في قسم ٣ - ٥ .

مثال ٢ - في شكل ٤ - ١ ، متوسط توزيع المعاينة للمتوسط  $\mu_{\bar{X}}$  ، يساوي متوسط المجتمع  $\mu$  بصرف النظر عن حجم العينة  $n$  ، ولكن ، كلما كبرت  $n$  ، كلما صغر الخطأ المعياري للمتوسط  $\sigma_{\bar{X}}$  فإذا كان توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي ، فإن توزيع المعاينة للوسط هو أيضاً التوزيع الطبيعي ، حتى للعينات الصغيرة . وطبقاً لنظرية النهاية المركزية ، حتى إذا كان المجتمع غير طبيعي التوزيع ، فإن توزيع المعاينة للمتوسط يكون طبيعياً تقريباً عندما تكون  $n \geq 30$  .



شكل ٤ - ١

مثال ٣ - افترض أن المجتمع يتكون من 900 عنصر بوسط حسابي 20 وحدة وانحراف معياري 12 وحدة . الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لوسط عينة حجمها 36 هما

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 20 \text{ وحدة}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

لو كانت  $n$  تساوي 64 بدلا من 36 (بحيث  $n > 0.05 N$ ) ، فإن

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{12}{\sqrt{64}} \sqrt{\frac{900-64}{900-1}} = \frac{12}{8} \sqrt{\frac{836}{899}} = (1.5)(0.96) = 1.44$$

بدلا من  $\sigma_{\bar{X}} = 1.5$  بدون معامل التصحيح للمجموعات المحدودة .

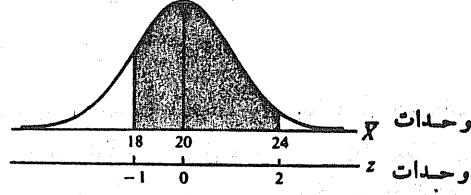
مثال ٤ - يمكن حساب احتمال أن يقع وسط عينة عشوائية  $\bar{X}$  حجمها 36 مأخوذة من مجتمع مثال ٣ بين 18 و 24 كما يلي :

$$z_1 = \frac{\bar{X}_1 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{18 - 20}{2} = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{\bar{X}_2 - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{24 - 20}{2} = 2$$

بالبحث مقابل  $z_1$  و  $z_2$  في ملحق ٣ ، نحصل على :

$$P(18 < \bar{X} < 24) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185, \text{ or } 81.85\%$$

أنظر شكل ٤ - ٢



شكل ٤ - ٢

#### ٣-٤ التقدير باستخدام التوزيع الطبيعي

يمكننا الحصول على تقدير لأحد معالم المجتمع إما بنقطة وإما بفترة . فالتقدير بنقطة عبارة عن عدد واحد . ويكون هذا التقدير بنقطة غير متحيز إذا كانت القيمة المتوقعة أو القيمة الوسطى للاحصاء المناظر ، عند تكرار المعاينة العشوائية ، مساوية لمعلمة المجتمع . فمثلاً  $\bar{X}$  هي تقدير ( بنقطة ) غير متحيز للمعلمة  $\mu$  لأن  $\mu_X = \mu$  حيث  $\mu_X$  هي القيمة المتوقعة للمتوسط  $\bar{X}$  . أما الانحراف المعياري  $\sigma$  للمينة ( كما هو معرف في المعادلتين ( ٢ - ١٠ ) ، ( ٢ - ١١ ) ) فهو تقدير غير متحيز للمعلمة  $\sigma$  ( أنظر المسألة ٤ - ١٣ ) ، والنسبة في المينة  $p$  هي تقدير غير متحيز للمعلمة  $p$  ( وهي نسبة المفردات التي لها خاصية معينة في المجتمع كله ) .

أما التقدير بفترة فيشير إلى مدى من القيم مقرونا باحتمال أن يضم هذا المدى ( الفترة ) معلمة المجتمع غير المعروفة ، ويسمى هذا الاحتمال مستوى الثقة . وبمعلومية الانحراف المعياري للمجتمع أو تقديره ، وإذا علم أن توزيع المجتمع طبيعي أو علم أن العينة العشوائية تساوى أو تزيد عن 30 يمكننا إيجاد فترة الثقة 95% لوسط المجتمع غير المعروف كالآتي :

$$P(\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95 \quad (٤ - ٤)$$

وتنص هذه المعادلة على أنه في المعاينة العشوائية المتكررة ، نتوقع أن 95 فترة من 100 فترة كالتى في معادلة ٤ - ٤ تحتوى على معلمة المجتمع غير المعلوم وأن فترة الثقة التي لدينا ( المينة على عينة واحدة ) هي واحدة من هؤلاء .

ويمكن تكوين فترة ثقة لنسبة المجتمع بأسلوب مماثل ( أنظر مثال ٧ ) حيث

$$\mu_p = \frac{\mu}{n} = p \quad (\text{نسبة النجاح في المجتمع}) \quad (٥ - ٤)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (\text{الخطأ المعياري للنسبة}) \quad (٦ - ٤)$$

مثال ٥ - أخذت عينة عشوائية حجمها 144 بوسط مقداره 100 وانحراف معياري مقداره 60 من مجتمع حجمه 1000 . فترة 95% ثقة لوسط المجتمع غير المعلوم هي

$$\mu = \bar{X} \pm 1.96 \sigma_{\bar{X}} \quad \text{حيث } n > 30$$

$$= \bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{حيث } n > 0.05 N$$

$$= 100 \pm 1.96 \frac{60}{\sqrt{144}} \sqrt{\frac{1,000-100}{1,000-1}} \quad \sigma \text{ كـتقدير للمعلمة}$$

$$= 100 \pm 1.96(5)(0.95)$$

$$= 100 \pm 9.31$$

أى أن  $\mu$  تقع بين 90.89 و 109.11 بدرجة ثقة 95% . وكثيراً ماتست خدم أيضاً درجات الثقة 90 و 99% وهى مناظرة لقيمة  $z = 1.64$  و  $z = 2.58$  على الترتيب (أنظر ملحق ٣) .

مثال ٦ - يرغب مدير فى تقدير متوسط عدد الدقائق التى يأخذها العمال لإنجاز عملية صناعية معينة فى حدود  $\pm 3$  دقيقة وبدرجة ثقة 90% . ويعلم المدير من خبرته الماضية أن الانحراف المعياري  $\sigma$  هو 15 دقيقة . الحد الأدنى لحجم العينة المطلوب ( $n > 30$ ) يمكن إيجاد كالاتى :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$$

$$z \sigma_{\bar{X}} = \bar{X} - \mu$$

$$1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} - \mu \quad \text{بافتراض } n < 0.05 N$$

$$1.64 \frac{15}{\sqrt{n}} = 3 \quad \bar{X} - \mu, \text{ is } 3 \text{ min حيث أن خطأ التقدير}$$

$$1.64 \frac{15}{3} = \sqrt{n}$$

$$n = 67.24, \text{ أو } 68 \text{ مقرب للرقم الصحيح الأعلى}$$

مثال ٧ - وجدت إدارة التعليم لإحدى الولايات ، أن فى عينة من 100 شخص مختارين عشوائياً من بين الملتحقين بالجامعات 40% منهم قد حصلوا على درجات جامعية . لإيجاد فتر الـ 99% ثقة لنسبة الحاصلين على درجات جامعية من بين جميع الملتحقين بالجامعة ، نحصى كما يلى . نلاحظ أولاً أن المشكلة تتعلق بالتوزيع ذى الحدين (أنظر قسم ٣-٣) . وحيث أن  $n > 30$  ، وكلا من  $np > 5$  و  $n(1-p) > 5$  فإن التوزيع ذا الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي الأبسط فى الاستخدام (أنظر قسم ٣-٣) . فيكون

$$p = \bar{p} \pm z \sigma_p$$

$$p = \bar{p} \pm z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{بافتراض } n < 0.05 N$$

$$= 0.4 \pm 2.58 \sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{100}} \quad \text{بـاستخدام } p \text{ كـتقدير للنسبة } p$$

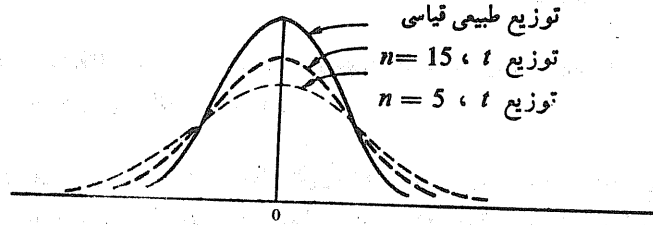
$$\approx 0.4 \pm 2.58(0.05)$$

$$\approx 0.4 \pm 0.13$$

إذن  $p$  تقع بين 0.27 و 0.53 بمستوى ثقة 99% .

#### ٤-٤ فترات الثقة للمتوسط باستخدام توزيع $t$ .

عندما يكون التوزيع طبيعياً ولكن  $\sigma$  غير معلومة و  $n < 30$  ، فإننا لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي لتحديد فترات الثقة لمتوسط المجتمع غير المعلوم ، ولكن يمكننا استخدام توزيع  $t$  . هذا التوزيع متماثل حول متوسط الصفر ولكنه منبسط عن التوزيع الطبيعي القياسي ، ولهذا فإن جزءاً أكبر من مساحته تقع عند الأطراف . وبينما يوجد توزيع طبيعي قياسي واحد ، فإن هناك توزيعاً  $t$  مختلفاً لكل حجم للمينة  $n$  . ولكن مع تزايد  $n$  ، فإن توزيع  $t$  يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي ( أنظر شكل ٤ - ٣ ) إلى أن تكون  $n \geq 30$  ، وعندئذ يتساويان تقريباً .



شكل ٤ - ٣

ويعطى ملحق ه قيم  $t$  التي على يمينها تمثل المساحة تحت المنحنى 10% ، 5% ، 2.5% ، 1% و 0.5% من المساحة الكلية تحت المنحنى لدرجات الحرية المختلفة . وتعرف درجات الحرية  $df$  في هذه الحالة بأنها  $n-1$  (أو حجم المينة ناقص 1 ، وإذا كنا نرغب في تقدير معلمة واحدة  $\mu$  ) . وفتره الثقة 95% لوسط المجتمع غير المعلوم عند استخدام توزيع  $t$  هي :

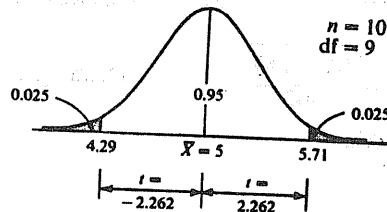
$$P\left(\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \quad (٤ - ٧)$$

حيث تشير  $t$  إلى قيمة  $t$  التي تقع عندها 2.5% من المساحة الكلية للمنحنى عند كل طرف ( عند درجات الحرية المستخدمة ) ، وتستخدم  $s/\sqrt{n}$  بدلا من  $\sigma/\sqrt{n}$  .

مثال ٨ - سحبت عينة عشوائية من  $n=10$  بطارية فلاش بمتوسط  $\bar{X}=5$  ساعة ، وانحراف معياري للمينة  $s=1$  ساعة من خط إنتاج من المعروف أنه ينتج بطاريات عمرها موزع طبقاً للتوزيع الطبيعي . لإيجاد فترة الـ 95% ثقة للمتوسط غير المعلوم لعمر البطاريات في المجتمع كله ، فإننا نوجد أولاً قيمة  $\pm t_{0.025}$  والتي تكون معها 2.5% من المساحة عند الأطراف لدرجات حرية  $n-1=9$  ونحصل على هذه القيمة من ملحق ه بالتحرك تحت عمود 0.025 حتى درجات حرية 9 والقيمة التي نحصل عليها هي 2.262 إذن

$$\mu = \bar{X} \pm 2.262 \frac{s}{\sqrt{n}} = 5 \pm 2.262 \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 5 \pm 2.262(0.316) \approx 5 \pm 0.71$$

وتقع  $\mu$  بين 4.29 و 5.71 ساعة بدرجة ثقة 95% ( أنظر شكل ٤-٤ ) . وعندما تكون  $n < 30$  والتوزيع غير طبيعي ، فيجب استخدام نظرية تشبثيف ( أنظر المسألة ٤ - ٢٧ ) .



شكل ٤ - ٤



## مسائل محلولة

- ٤ - ١ (أ) ما المقصود بالاستدلال الإحصائي ؟ وما وظيفته وما أهميته ؟ (ب) ما العلاقة بين المعلمة والإحصائية وماذا يقصد بهما ؟  
(ج) ما المقصود بالتقدير ؟ باختبار الفروض ؟

(أ) الاستدلال الإحصائي هو عملية استنتاج عن المجتمع من المعلومات التي تقدمها العينات . ويشمل المجتمع مجموعة العناصر (أشخاص، أجزاء تنتجها ماكينة ، سيارات تمر أمام نقاط مراقبة ، الخ) التي نقوم بوصفها . العينة هي الجزء المختار من المجتمع . وتحليل المجتمع كله قد يكون مستحيلاً (إذا كان المجتمع غير محدود) وقد يدمر كل الإنتاج (كما في حالة اختبار المصابيح الكهربائية المنتجة) ، وقد يكون بالغ التكلفة . ويمكن التغلب على هذه المشاكل بأخذ عينة (مثلة) من المجتمع ، وعمل استدلالات عن المجتمع من العينة .

(ب) المعلمة هي خاصية وصفية (مثل الوسط والانحراف المعياري) لمجتمع ما . أما الإحصائية فهي خاصية وصفية لعينة . وفي الاستدلال الإحصائي فإننا نقوم بعمل استدلالات عن المصام من الإحصائيات المناظرة لها .

(ج) الاستدلال الإحصائي نوعان : التقدير واختبار الفروض . والتقدير هو عملية استنتاج أو تقدير المعلمة من الإحصائية المناظرة . فمثلاً ، يمكننا تقدير الوسط والانحراف المعياري لمجتمع ما من الوسط والانحراف المعياري لعينة مسحوبة من المجتمع . اختبار الفروض هو تحديد ما إذا كنا نقبل أو نرفض فرضاً ما عن معلمة على ضوء معلومات العينة . وتتناول التقدير في هذا الفصل ، واختبارات الفروض في الفصل الخامس .

- ٤ - ٢ ما المقصود بالمعينة العشوائية ؟ ما أهميتها ؟

المعينة العشوائية هي أسلوب معينة يجعل لكل مفردة في المجتمع فرصة متكافئة في الدخول في العينة . وتضمن المعينة العشوائية أن تكون العينة ممثلة . وهناك عدة أنواع للمعينة العشوائية . في المعينة العشوائية البسيطة ، لا يكون فقط لكل مفردة ولكن أيضاً لكل عينة نفس الفرصة أن تختار . في المعينة المنتظمة تسحب المفردات من المجتمع على فترات متساوية ، زمنياً ، أو ترتيبياً أو مكانياً . (مثل اختيار اسم بعد كل مائة اسم في دليل التليفون) . ويمكن أن تحيز المعينة المنتظمة بسهولة ، إذا قيست كمية فضلات المنازل كل يوم اثنين (حيث تشمل فضلات نهاية الأسبوع) . وفي المعينة الطبقية والعنقودية ، يقسم المجتمع إلى طبقات (مثل طبقاً للسن) وإلى مجموعات (مثل البلوكات السكنية في المدينة) ثم تسحب نسب متساوية من كل طبقة أو مجموعة . وتستخدم المعينة الطبقية عندما يكون الاختلاف داخل كل طبقة صغيراً بالنسبة للاختلاف بين المجموعات . وتستخدم المعينة العنقودية في الحالة العكسية . وسوف نفترض ، فيما يلي ، استخدام المعينة العشوائية البسيطة . ويمكن أن تكون المعينة من مجتمع محدود (أو سحب ورقة من مجموعة أوراق لعب بدون إحلال) أو من مجتمع غير محدود (كالتقاط أجزاء منتجة من خلال عملية مستمرة أو سحب أوراق من مجموعة أوراق لعب مع الإحلال) .

- ٤ - ٣ (أ) كيف يمكن الحصول على عينة عشوائية ؟ (ب) باستخدام جدول أعداد عشوائية ، اشتق عينة عشوائية من عشرة أفراد تغيبوا عن العمل بسبب المرض في أحد الأيام من بين 95 موظفاً في مصنع . (ج) اشتق عينة عشوائية من 12 مفردة من بين 240 جزءاً أنتجتها ماكينة خلال الساعة الأولى من تشغيلها .

(أ) يمكن الحصول على عينة عشوائية (١) باستخدام كبيوتر مبرمج لتجميع الأرقام ، (٢) من جدول أعداد عشوائية ، (٣) بتعيين رقم لكل عنصر في المجتمع ، وتسجيل كل رقم على قصاصة منفصلة ، وخلق القصاصات جيداً ، ثم سحب عدد من القصاصات يعادل عدد العناصر المطلوبة من العينة . والطريقة الأخيرة للحصول على عينة عشوائية معقدة جداً في حالة المجتمعات الكبيرة وقد لا تغطي عينة مثله بسبب صعوبة خلط القصاصات جيداً .

(ب) للحصول على عينة عشوائية من 10 مفردات من بين 95 موظفاً ، فإننا نعين لكل موظف رقماً من 1 إلى 95 ثم نرجع ملحق ٤ ( جدول الأعداد العشوائية ) . ويحتوى ملحق ٤ على 1600 رقماً في مجموعات من 5 أرقام ثم توليدها بعملية عشوائية تماماً بحيث أن كل رقم وكذلك تتابع الأرقام يكون لها احتمالات متساوية في الحدوث . بالبدء عند نقطة اختيارية في ملحق ٤ ( مثلاً العمود الرابع عشر والصف الخامس ) ، وقراءة 10 أرقام من حدين ( وليكن ، رأسياً مع حذف كل الأرقام أكبر من 95 ) نحصل على العينة العشوائية الآتية :

60 ، 39 ، 4 ، 34 ، 76 ، 43 ، 52 ، 15 ، 8 ، و 95

(ج) لنبدأ مثلاً ، من العمود الثالث والسطر الثامن في ملحق ٤ ، ونتحرك أفقياً ونقرأ 8 أعداد ( كل منها مكون من ثلاثة حدود مع حذف الأعداد التي تزيد عن 240 ، فنحصل على العينة العشوائية التالية :

215 ، 182 ، 51 ، 9 ، 127 ، 177 ، 53 ، و 186

( وقد حصلنا على الأعداد الأربعة الأخيرة من السطر التاسع بعدما وصلنا إلى نهاية السطر الثامن ) .

### توزيع المعاينة للوسط :

٤ - (أ) ماذا يقصد بتوزيع المعاينة للوسط ، وكيف يتم الحصول عليه ؟ (ب) ماذا يقصد بالمتوسط والخطأ المعياري لتوزيع المعاينة للوسط ؟

(أ) إذا أخذنا عينات عشوائية متكررة ( أو كل العينات الممكنة ) ، كل منها من حجم  $n$  ، من مجتمع من القيم للمتغير  $X$  وأوجدنا متوسط كل عينة  $\bar{X}$  ، فإننا نجد أن معظم متوسطات العينات تختلف عن بعضها البعض . ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات هذه توزيع المعاينة النظري للوسط . وبالمثل ، يمكن الحصول على توزيع المعاينة النظري للنسبة ، والفرق بين متوسطين ، والفرق بين نسبتين ، فثلاً كان من الممكن إيجاد نسبة الوحدات المعيبة في كل عينة ، والحصول على توزيع المعاينة النظري لنسبة الوحدات المعيبة . والتبسيط . فسوف نتناول في هذا القسم توزيع المعاينة للوسط فقط .

(ب) كما في التوزيعات الاحتمالية الأخرى (أنظر أقسام ٣ - ٣ إلى ٣ - ٥) ، يمكن توصيف توزيع المعاينة النظري باستخدام الوسط والانحراف المعياري . ويعطى متوسط توزيع المعاينة بالرمز  $\mu_{\bar{X}}$  (وتقرأ «ميو برمز الدليل  $\bar{X}$ »). وهذه هي متوسط رقم  $\bar{X}$  والتي يجب تمييزها عن  $\mu$  (متوسط المجتمع) . ويعطى الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط بالرمز  $\sigma_{\bar{X}}$  (وتقرأ سيجما برمز الدليل  $\bar{X}$ ). وهذا هو الانحراف المعياري لقيم  $\bar{X}$  ويجب تمييزه عن  $\sigma$  (الانحراف المعياري للمجتمع) . وكلما صغر  $\sigma_{\bar{X}}$  ، كلما كان متوسط العينة  $\bar{X}$  أكثر دقة كتقدير لمتوسط المجتمع غير المعلوم  $\mu$  . ولهذا ، عادة ما يشار إلى  $\sigma_{\bar{X}}$  بالخطأ المعياري للوسط .

٤ - ٥ كيف يمكن إيجاد (أ) متوسط توزيع المعاينة للوسط  $\mu_{\bar{X}}$  ؟ (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط أو الخطأ المعياري  $\sigma_{\bar{X}}$  ؟

(أ) متوسط توزيع المعاينة النظري للوسط  $\mu_{\bar{X}}$  يساوى متوسط المجتمع الأصلي  $\mu$  أى  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  . لاحظ أنه لكي يكون هذا صحيحاً ، فإننا يجب إما أن نأخذ جميع العينات الممكنة من حجم  $n$  من المجتمع المحدود ، وإما ، إذا كنا نتعامل مع مجتمعات غير محدودة (أو مجتمعات محدودة مع الإحلال) فإنه يجب أن نستمر في أخذ عينات متكررة من حجم  $n$  إلى ما لا نهاية . بالإضافة ، فإن  $\mu_{\bar{X}}$  تساوى أيضاً  $E(\bar{X})$  (أنظر المسألتين ٣ - ٢٠ ، ٣ - ٣١) .

(ب) الخطأ المعياري للوسط  $\sigma_{\bar{X}}$  هو الانحراف المعياري للمجتمع ،  $\sigma$  ، مقسوماً على الجذر التربيعي لحجم العينة ،  $\sqrt{n}$  أي  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$  . وبالنسبة للمجتمعات المحدودة من حجم  $N$  ، يجب استخدام معامل تصحيح وتكون  $\sigma_{\bar{X}} = (\sigma/\sqrt{n})\sqrt{(N-n)/(N-1)}$  . ولكن ، إذا كان حجم العينة صغيراً جداً بالنسبة لحجم المجتمع فإن  $(N-n)/(N-1)$  تكون قريبة من 1 ويمكن إسقاطها من المعادلة . وقد جرت العادة على إهمال هذا الحد عندما تكون  $n < 0.05 N$  . وبصرف النظر عن معامل التصحيح ، فإن  $\sigma_{\bar{X}}$  ترتبط طردياً مع  $\sigma$  وعكسياً مع  $\sqrt{n}$  (أنظر المعادلتين (٤-٢ ، أ ، ب) ) . أي أن مضاعفة حجم العينة 4 مرات يرفع دقة  $\bar{X}$  كتقدير للوسط  $\mu$  بخفض  $\sigma_{\bar{X}}$  إلى النصف . لاحظ أيضاً أن  $\sigma_{\bar{X}}$  دائماً أصغر من  $\sigma$  . والسبب ، أن أوساط العينات ، كتوسطات لمشاهدات العينة تظهر اختلافاً أو انتشاراً أقل من قيم المجتمع . بالإضافة كلما كبر حجم العينة ، كلما صغر حجم  $\sigma_{\bar{X}}$  بالنسبة لحجم  $\sigma$  (أنظر شكل ٤-١) .

٤ - ٦ من مجتمع مكون من الأعداد الخمسة الآتية : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 . أوجد (أ)  $\mu$  و  $\sigma$  (ب) توزيع المعاينة النظري للوسط لحجم العينة 2 ، (ج)  $\mu_{\bar{X}}$  و  $\sigma_{\bar{X}}$

$$\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{5}} \quad (١)$$

$$= \sqrt{\frac{16+4+0+4+16}{5}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.83$$

(ب) توزيع المعاينة النظري للوسط لحجم عينة 2 من مجتمع محدود ، عبارة عن متوسط كل العينات الممكنة التي يمكن الحصول عليها من المجتمع . عدد توافيق 5 أشياء مأخوذاً منها 2 في كل مرة بدون نظر إلى الترتيب هي  $5!/2!3! = 10$  (أنظر المسألة ٣-١٨) . وهذه العينات العشر هي : 1,3 ، 1,5 ، 1,7 ، 1,9 ، 3,5 ، 3,7 ، 5,7 ، 5,9 ، 7,9 والمتوسطات  $\bar{X}$  للعينات العشر السابقة هي 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، ويعطى جدول ٤-١ التوزيع النظري للمعاينة . لاحظ أن التنبير أو انتشار متوسطات العينات (من 2 إلى 8) أقل من التنبير أو انتشار القيم في المجتمع الأصلي (من 1 إلى 9) ، تأكيداً للتقرير الوارد في نهاية المسألة ٤-٥ (ب) .

جدول ٤-١ توزيع المعاينة النظري للوسط

| قيم المتوسط | النواتج الممكنة | احتمال الحدوث |
|-------------|-----------------|---------------|
| 2           | 2               | 0.1           |
| 3           | 3               | 0.1           |
| 4           | 4, 4            | 0.2           |
| 5           | 5, 5            | 0.2           |
| 6           | 6, 6            | 0.2           |
| 7           | 7               | 0.1           |
| 8           | 8               | 0.1           |
|             | Total           | 1.0           |

(ج) بتطبيق نظرية ١ (قسم ٤-٢) ،  $\mu_{\bar{X}} = \mu = 5$  ، وحيث أن حجم العينة 2 أكبر من 5% من حجم المجتمع (أي  $n > 0.05N$ ) ،

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{5-2}{5-1}} = \sqrt{4} \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

٤ - ٧ بالنسبة لتوزيع المعاينة النظرى لموسط العينة المحسوب فى المسألة ٤-٦ (ب) ، (أ) أوجد الوسط والخطأ المياري للوسط باستخدام المعادلات الخاصة بوسط المجتمع ولا تخراله المياري كما فى أقسام ٢-٢ و ٢-٣ (ب) ماذا توضح الإجابات فى (أ)

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum X}{N} = \frac{2+3+4+5+4+5+6+6+7+8}{10} = \frac{50}{10} = 5 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{X}} &= \sqrt{\frac{\sum (X - \mu_{\bar{X}})^2}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (6-5)^2 + (7-8)^2 + (8-5)^2}{10}} \\ &= \sqrt{\frac{9+4+1+0+1+0+1+1+4+9}{10}} = \sqrt{\frac{30}{10}} = \sqrt{3} \approx 1.73 \end{aligned}$$

(ب) تؤكد إجابات (أ) النتائج السابق الحصول عليها فى تمرين ٤-٦ (ج) بتطبيق نظرية ١ (قسم ٤-٢) ، أى  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  و  $\sigma_{\bar{X}} = (\sigma/\sqrt{n})\sqrt{(N-n)/(N-1)}$  للمجتمع المحدود حيث  $n > 0.05N$  . لاحظ أننا أخذنا جميع العينات الممكنة من حجم 2 التى يمكن أخذها من مجتمع محدود به 5 مفردات . أما المعاينة من مجتمع غير محدود (أو من مجتمع محدود مع الاحلال) فإنه يتطلب أخذ عدد غير محدود من العينات العشوائية من حجم  $n$  من المجتمع الأصل (واضح أنها مهمة غير ممكنة) . فإذا أخذنا فقط عدداً محدوداً من العينات العشوائية فإن نظرية ١ تنطبق فقط كتقريب (أى أن  $\mu_{\bar{X}} \approx \mu$  و  $\sigma_{\bar{X}} \approx \sigma/\sqrt{n}$ ) ، مع تحسن التقريب مع زيادة عدد العينات العشوائية المأخوذة . وفى هذه الحالة يشار إلى توزيع المعاينة لوسط العينات المتولد بتوزيع المعاينة التجريبي للوسط .

٤ - ٨ مجتمع مكون من 12,000 عنصر بوسط 100 وانحراف معياري 60 . أوجد الوسط والخطأ المياري لتوزيع المعاينة للمتوسط عندما يكون حجم العينة (أ) 100 ، (ب) 900 .

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 100 \quad (1)$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = 6$$

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 100 \quad (ب)$$

وحيث أن حجم العينة 900 أكبر من 5% حجم المجتمع ، فإن معامل التصحيح يجب أن يستخدم فى معادلة الخطأ المياري :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{60}{\sqrt{900}} \sqrt{\frac{12,000-900}{12,000-1}} = \frac{60}{30} \sqrt{\frac{11,100}{11,999}} \approx 2\sqrt{0.925} \approx 2(0.962) \approx 1.92$$

وبدون معامل التصحيح ، فإن  $\sigma_{\bar{X}}$  تكون مساوية 2 بدلا من 1.92 .

- ٤ - ٩ (أ) ما شكل توزيع المعاينة النظرى للوسط إذا كان المجتمع الأصل طبيعياً ؟ إذا كان المجتمع الأصل غير طبيعى ؟  
(ب) ما أهمية الإجابة على (أ) ؟

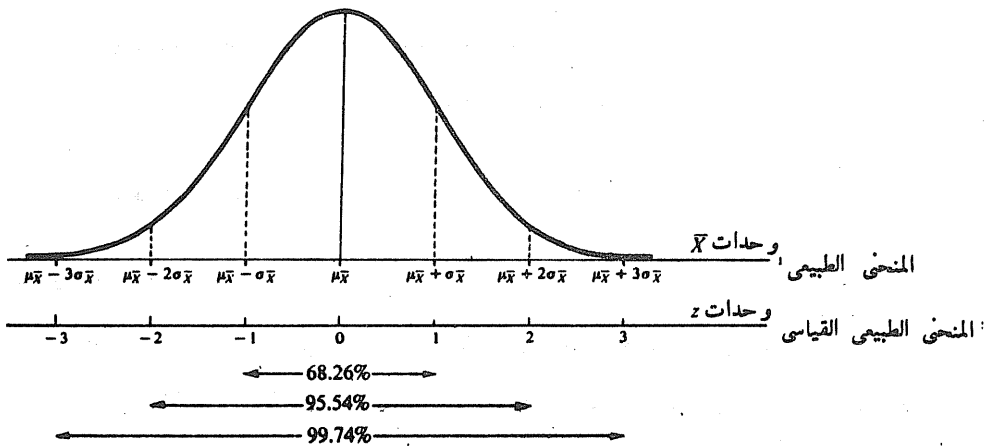
(أ) إذا كان توزيع المجتمع الأصل طبيعياً ، فإن توزيعات المعاينة النظرية للوسط تكون أيضاً طبيعية ، بصرف النظر عن حجم العينة . وطبقاً لنظرية النهاية المركزية ، حتى إذا لم يكن المجتمع الأصل طبيعياً ، فإن توزيعات المعاينة النظرية لمتوسط العينة يقترب من التوزيع الطبيعي مع تزايد حجم العينة (أى ، عندما  $n \rightarrow \infty$ ) . ويكون التقريب جيداً للمينات عند حجم 30 على الأقل .

(ب) ربما تكون نظرية النهاية المركزية أهم نظرية في الاستدلال الإحصائي . فهي تسمح لنا باستخدام إحصائيات العينة لعمل استنتاجات عن مميزات المجتمع بدون معرفة أى شئ عن شكل المجتمع الأصل . ونحن نقوم بذلك في هذا الفصل وفى الفصل الخامس .

- ٤ - ١٠ كيف يمكننا حساب احتمال وقوع وسط عينة عشوائية داخل فترة معينة إذا كان توزيع المعاينة النظرى للوسط طبيعياً أو قريباً من الطبيعي ؟ كيف يختلف ذلك عن عملية إيجاد احتمال أن يأخذ متغير عشوائى توزيعه طبيعى قيمة داخل فترة معينة ؟  
(ب) ارسم المنحنى الطبيعي باستخدام وحدات  $X$  ووحدات  $z$  وبين نسبة المساحة تحت المنحنى على بعد 1 ، 2 ، 3 انحراف معيارى من الوسط .

(أ) إذا كان توزيع المعاينة النظرى للوسط طبيعياً أو قريباً من الطبيعي ، فإنه يمكننا حساب احتمال أن يقع متوسط عينة عشوائية  $\bar{X}$  داخل فترة معينة بحساب قيمة  $z$  المناظرة في ملحق ٣ . وهذا يماثل ماسبق عمله في قسم ٣-٥ عندما قدمنا المنحنى الطبيعي والمنحنى الطبيعي القياسى . الفرق الوحيد هو أننا نتعامل الآن مع توزيع المتوسطات  $\bar{X}$  بدلا من توزيع المشاهدات  $X$  . وبالإضافة فإنه قبلا كانت  $z = (X - \mu) / \sigma$  ، فأصبحت الآن  $z = (\bar{X} - \mu_{\bar{X}}) / \sigma_{\bar{X}}$  حيث  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  .

(ب) لدينا في شكل ٤ - ٥ . منحنى طبيعى بوحدات  $\bar{X}$  ومنحنى طبيعى قياسى بوحدات  $z$  . والمساحة تحت المنحنى على بعد 1 ، 2 و 3 انحراف معيارى هى 68.26 ، 95.54 و 99.74% على الترتيب . لاحظ التشابه الكبير وكذلك الاختلاف العام بين شكل ٤ - ٥ وشكل ٣ - ٤ .



شكل ٤ - ٥

٤ - ١١ أوجد احتمال أن يكون وسط عينة عشوائية من 25 عنصراً مأخوذة من مجتمع طبيعي بمتوسط 90 وانحراف ممياري 60 أكبر من 100 .

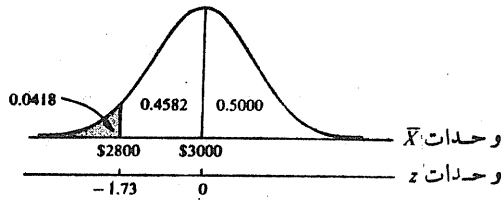
حيث أن المجتمع الأصل موزع طبيعياً ، فإن توزيع المعاينة النظري للوسط تكون أيضاً طبيعياً ويكون  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$  .  
لأن  $n < 0.05N$  ، عندما  $\bar{X} = 100$  ،

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{100 - 90}{60/\sqrt{25}} = \frac{10}{12} \approx 0.83$$

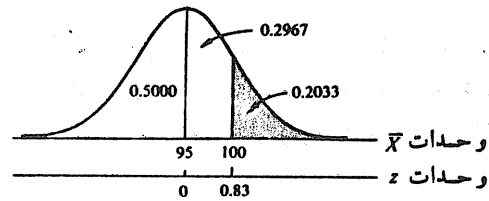
بالكشف عن هذه القيمة في ملحق ٣ ، نحصل على

$$P(\bar{X} > 100) = 1 - (0.5000 + 0.2967) = 1 - 0.7967 = 0.2033, \text{ or } 20.33\%$$

أنظر شكل ٤ - ٦



شكل ٤ - ٧



شكل ٤ - ٦

٤ - ١٢ لدى بنك محل صغير 1,450 حساب ادخار شخصي برصيد متوسط قدره \$ 3,000 وانحراف ممياري \$ 1,200 . إذا أخذ البنك عينة عشوائية من 100 حساب ، ما احتمال أن متوسط المدخرات لهذه الحسابات سيكُون أقل من \$ 2,800 ؟  
حيث  $n = 100$  ، فإن توزيع المعاينة النظري للوسط يكون قريباً من الطبيعية ، ولكن حيث أن  $n > 0.05N$  ، يجب استخدام معامل التصحيح لإيجاد  $\sigma_{\bar{X}}$  . عندما  $X = \$ 2,800$  ،

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{2,800 - 3,000}{\frac{1,200}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{1,450 - 100}{1,450 - 1}}} = \frac{-200}{120 \sqrt{\frac{1350}{1449}}} \approx \frac{-200}{120(0.965)} \approx -1.73$$

بالكشف مقابل  $z = 1.73$  في ملحق ٣ ، نحصل على :

$$P(\bar{X} < \$2,800) = 1 - (0.5000 + 0.4582) = 1 - 0.9582 = 0.0418, \text{ or } 4.18\%$$

أنظر شكل ٤ - ٧ .

التقدير باستخدام التوزيع الطبيعي :

٤ - ١٣ ماذا يعنى (أ) التقدير بنقطة ؟ (ب) مقدر غير متحيز ؟ (ج) التقدير بفترة ؟

(أ) كثيراً ما يتم تقدير معامل المجتمع باستخدام إحصائيات العينة بسبب عوامل التكلفة والوقت والإمكانية . وتسمى إحصائية العينة المستخدمة في تقدير معلمة المجتمع المقدّر ، وتسمى القيمة المعينة المشاهدة تقدير . وعندما نعبر عن تقدير معلمة المجتمع بعدد واحد فإنه يسمى تقدير بنقطة ثنائياً ، متوسط العينة  $\bar{X}$  ، هو مقدر لوسط المجتمع  $\mu$  ،

وقد قيمة مفردة للمتوسط  $\bar{X}$  هو تقدير بنقطة لوسط المجتمع  $\mu$  . وبالمثل فإنه يمكن استخدام الانحراف المعياري للمينة  $s$  كقدر للانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  ، والقيمة المفردة للانحراف المعياري  $s$  كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  . كذلك يمكن استخدام النسبة في المينة  $\bar{p}$  ، كقدر للنسبة  $p$  ، في المجتمع ، والقيمة المفردة للنسبة  $\bar{p}$  يمكن استخدامها كتقدير للنسبة  $p$  ( أى الجزء من المجتمع الذى له خواص معينة ) .

(ب) يعتبر المقدر غير متحيز إذا أعطى توزيع المعاينة النظرى ، الناتج عن المعاينة العشوائية المتكررة من المجتمع ، إحصائية مساوية لمعلمة المجتمع . أو بمباراة أخرى ، فإن المقدر يكون غير متحيز إذا كانت قيمته المتوقعة ( أنظر المسألتين ٣ - ٢٠ و ٣ - ٣١ ) مساوية لمعلمة المجتمع موضع التقدير . فمثلا  $\bar{X}$  ،  $s$  ( كما هى معرفة فى معادلات ( ٢ - ١٠ ) و ( ٢ - ١١ ) ، و  $\bar{p}$  مقدرات غير متحيزة للمعالم  $\mu$  ،  $\sigma$  و  $p$  على الترتيب . وهناك معايير هامة أخرى لما يعتبر مقدرأ جيداً نناقشها فى قسم ٦ - ٤ .

(ج) التقدير بفترة يشير إلى مدى القيم المستخدم لتقدير معلمة المجتمع غير المعلومة ، مع الاحتمال المناظر ، أو مستوى الثقة ، بأن تقع معلمة المجتمع غير المعلومة داخل هذه الفترة . وتعرف الفترة باسم فترة ثقة وهى تتمركز فى العادة حول تقدير بنقطة غير متحيز . فمثلا ، فترة ال ٩٥ % ثقة للوسط  $\mu$  .

$$P(\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$$

ويسمى المددان المحددان لفترة الثقة باسم حدود الثقة . ولأن التقدير بفترة يعبر أيضاً عن درجة الدقة أو الثقة التى لدينا فى التقدير ، فإنه يمتاز عن التقدير بنقطة .

٤ - ١٤ عينة عشوائية من 64 مفردة وسطها 50 وانحرافها المعياري 20 أخذت من مجتمع عدد مفرداته 800 (أ) أوجد تقدير بفترة لوسط المجتمع نكون منه واثقين 95% أن الفترة تتضمن وسط المجتمع . (ب) بماذا نخبرنا النتيجة فى (أ) ؟

(أ) حيث أن  $n < 30$  ، فإننا نستخدم قيمة  $z = 1.96$  من التوزيع القياسى الطبيعى لتكوين فترة الثقة 95% للمجتمع غير المعلوم ويمكننا استخدام  $s$  كتقدير للانحراف المعياري  $\sigma$  غير المعلوم ، أى

$$\hat{\sigma} = s \quad \text{حيث تشير } (\wedge) \text{ إلى تقدير} \quad (٤ - ٨)$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{عندما } n > 0.05N \quad (٤ - ٩ ، ب)$$

فى هذه المسألة

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{20}{\sqrt{64}} \sqrt{\frac{800-64}{800-1}} \approx \frac{20}{8} 0.96 \approx 2.4 \quad \text{وتصبح ( ٢٢ )}$$

أى أن  $\mu$  تقع بين حد الثقة الأدنى 45.3 وحد الثقة الأعلى 54.7 بدرجة ثقة 95% .

(ب) تخبرنا نتيجة (أ) أننا إذا أخذنا عينات عشوائية متكررة من المجتمع كلها من حجم  $n = 64$  ، وأنشأنا فترات الثقة 95% لمتوسطات العينات ، فإن 95% من فترات الثقة هذه سوف تضم الوسط الحقيقى غير المعلوم للمجتمع . بافتراض أن فترة الثقة لدينا ( المبنية على عينة عشوائية واحدة التى تم أخذها ) هى واحدة من فترات الثقة 95% هذه التى تضم  $\mu$  ، فإننا نأخذ المخاطرة المحسوبة بأننا على خطأ فى 5% من الحالات .

٤ - ١٥ عينة عشوائية من 25 مفرد لموسط 80 أخذت من مجتمع عدد مفرداته 1,000 توزيعه طبيعي بانحراف معياري 30. أوجد فترات الثقة الآتية لوسط المجتمع غير المعلوم (أ) 90% (ب) 95% و (ج) 99%. (د) علام تدل الفروق في نتائج (أ) ، (ب) و (ج) ؟

$$(أ) \text{ حيث أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي } \mu = \bar{X} \pm 1.64 \sigma_{\bar{X}}$$

$$(ب) \text{ حيث } n < 0.05 N \text{ و } \sigma \text{ معلومة . } \mu = \bar{X} \pm 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 80 \pm 1.64 \frac{30}{\sqrt{25}}$$

$$= 80 \pm 1.64(6)$$

$$= 80 \pm 9.84$$

أي أن  $\mu$  تقع بين 70.16 و 89.84 بمستوى ثقة 90% .

$$(ب) \mu = 80 \pm 1.96(6) = 80 \pm 11.76$$

أي أن  $\mu$  تقع بين 68.24 و 91.76 بمستوى ثقة 95% .

$$(ج) \mu = 80 \pm 2.58(6) = 80 \pm 15.48$$

أي أن  $\mu$  تقع بين 64.52 و 95.48 بمستوى ثقة 99% .

(د) النتائج في (أ) ، (ب) و (ج) تشير إلى أنه مع زيادة درجة الثقة المطلوبة ، فإن حجم فترة الثقة يزيد أيضاً ويصبح التقدير بفترة أكثر غموضاً (أي أقل دقة) . ولكن درجة الثقة المرتبطة بفترة ثقة ضيقة جداً قد تكون منخفضة بدرجة تفقد معها معناها . وكتقليد ، فإن فترات الثقة الأكثر استخداماً هي 95% ثم 90% و 99% .

٤ - ١٦ أخذت عينة عشوائية من 36 طالباً من بين 500 طالب بـمدرسة ثانوية ، متقدمين لامتحان القبول بالجامعة . ووجد أن متوسط درجات العينة هو 380 ، والانحراف المعياري للمجتمع كله المكون من 500 طالب هو 40 . أوجد فترة الثقة 95% للوسط غير المعلوم للدرجات في المجتمع كله .

حيث أن  $n > 30$  ، فإن توزيع المعاينة النظري للمتوسط يكون طبيعياً تقريباً . وحيث أن  $n > 0.05 N$  فإن

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{40}{\sqrt{36}} \sqrt{\frac{500-36}{500-1}} = \frac{40}{6} (0.96) = 6.4$$

$$\mu = \bar{X} \pm z \sigma_{\bar{X}} = 380 \pm 1.96(6.4) = 380 \pm 12.54$$

ويكون

أي أن  $\mu$  تقع بين 367.46 و 392.54 بمستوى ثقة قدره 95% .



٤ - ١٧ يرغب باحث في تقدير متوسط الأجر الأسبوعي لمدة آلاف من العاملين بأحد المصانع في حدود زائد وناقص \$ 20 وبدرجة ثقة 99% . ويعرف الباحث من خبرته الماضية أن توزيع الأجر الأسبوعي للعاملين يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره \$ 40 . ما هو الحد الأدنى للعينة المطلوب ؟

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$$

$$z\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} - \mu$$

$$z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{X} - \mu \quad (1) \text{ (بفرض } n < 0.05 N \text{)}$$

$$2.58 \frac{40}{\sqrt{n}} = 20$$

$$2.58 \frac{40}{20} = \sqrt{n}$$

$$(ب) \text{ (مقرباً للرقم الصحيح الأعلى) } . 27 \text{ أو } n = 5.16^2 = 26.63$$

٤ - ١٨ (أ) حل المسألة ٤-١٧ بإيجاد معادلة  $n$  أولاً ثم التمييز فيها للحصول على قيمة  $n$  . (ب) لماذا يعتبر موضوع حجم العينة مهماً ؟ (ج) ما هو حجم فترة الثقة الإجمالي في المسألة ٤-١٧ ؟ (د) ماذا يكون عليه حجم العينة في المسألة ٤-١٧ لو لم نعرف أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي ؟ (هـ) ماذا كان يحدث لو لم يكن الانحراف المعياري للمجتمع معلوماً ؟

(أ) بدءاً بالمقدار  $\bar{X} - \mu = z\sigma/\sqrt{n}$  (أنظر المسألة ٤-١٧) ، نحصل على  $\sqrt{n} = z\sigma/(\bar{X} - \mu)$  . فيكون ،

$$n = \left( \frac{z\sigma}{\bar{X} - \mu} \right)^2 \quad (٤-١٠)$$

بالتمييز بالقيم من المسألة ٤-١٧ نحصل على

$$27 \text{ أو } n = \left[ \frac{(2.58)(40)}{20} \right]^2 = 26.63 \text{ ( نفس النتيجة كما في المسألة ٤-١٧ )} .$$

(ب) يعتبر موضوع حجم العينة مهماً لأنه إذا كانت العينة صغيرة أكثر من اللازم ، فإننا نفشل في الوصول إلى أهداف التحليل ، وإذا كانت العينة أكبر مما ينبغي ، فإننا نبذل الموارد لأن التكلفة تكون أعلى عند جمع وتحليل عينة أكبر .

(ج) حجم فترة الثقة الإجمالي في المسألة ٤-١٧ هو \$40 ، أي ضعف  $\bar{X} - \mu$  . وحيث أننا نستخدم  $\bar{X}$  كتقدير  $\mu$  ، فإنه يشار أحياناً إلى  $\bar{X} - \mu$  بخطأ التقدير . ولأننا في المسألة ٤-١٧ نرغب أن يكون خطأ التقدير « في حدود زائد أو ناقص \$ 20 » ، فإن  $\bar{X} - \mu = \pm \$20$  ، أي بمدى \$40 لفترة الثقة الإجمالية .

(د) لو لم نعرف أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي لكان علينا أن نرفع حجم العينة إلى 30 على الأقل في المسألة ٤-١٧ حتى يمكن تبرير استخدام التوزيع الطبيعي .

(هـ) لو لم يكن الانحراف المعياري  $\sigma$  معلوماً ، لما تمكنا من حل المسألة . (حيث أننا كنا بصدد تحديد حجم العينة الواجب أخذه في المسألة ٤-١٧ ، فإنه لا يمكننا استخدام  $s$  كتقدير للانحراف المعياري  $\sigma$  ) . والطريقة الوحيدة لتقدير  $\sigma$  (وبالتالي تقدير قيمة تقريبية لحجم العينة  $n$  ) تكون إذا عرفنا المدى بين أعلى أجر وأدنى أجر : وحيث أن  $\pm 3\sigma$  يتضمن 99.7% من المساحة تحت المنحنى الطبيعي ، كان في إمكاننا أن نسو بين  $6\sigma$  وبين مدى الأجور ومن ثم نقدر  $\sigma$  (وبالتالي نحل المسألة) .

٤ - ١٩ بالإشارة إلى توزيع ذي الحدين ، أذكر العلاقة بين ( أ )  $\mu$  و  $\mu_p$  ( ب )  $p$  و  $\bar{p}$  ، و ( ج )  $\sigma_p$  و  $\sigma_p$  و  $\theta_p$  .

( أ )  $\mu = np$  = متوسط عدد النجاحات في  $n$  محاولة ، حيث  $p$  احتمال النجاح في المحاولة الواحدة ( أنظر قسم ٣-٣ ) .  
 $\mu_p = \mu/n = p$  وتساوى نسبة النجاحات في توزيع المعاينة للنسبة .

( ب )  $p$  = نسبة النجاحات في المجتمع و  $\bar{p}$  = نسبة النجاحات في العينة ( وهي مقدار غير متحيز للنسبة  $p$  ) .

( ج )  $\sigma = np(1-p)$  = الانحراف المعياري لعدد النجاحات في المجتمع ، و

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \text{الخطأ المعياري للنسبة } p \quad (٤ - ١٦ أ)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{عندما } n > 0.05N \quad (٤ - ١٦ ب)$$

$$\theta_p = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad \text{أو} \quad \theta_p = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{عندما } n > 0.05N \quad (٤ - ١١ أ ، ب)$$

٤ - ٢٠ في عينة عشوائية حجمها 100 عامل من مصنع به 1,200 عامل ، وجد أن 70 يفضلون الاشتراك في نظام للمعاشات كأفراد بدلا من الاشتراك في مشروع معاشات خاص بالشركة . أوجد فترة الثقة 95% لنسبة العاملين الذين يفضلون مشروعات معاشات فردية .

$$\bar{p} = \frac{70}{100} = 0.7$$

$$p = \bar{p} \pm z\sigma_p \quad \text{حيث } n > 30 \text{ و } np > 5 \text{ و } n(1-p) > 5$$

$$= \bar{p} \pm z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \text{حيث } n > 0.05N$$

$$= 0.7 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(0.7)(0.3)}{100}} \sqrt{\frac{1,200-100}{1,200-1}} \quad \text{باستخدام } p \text{ كتقدير للنسبة } p$$

$$\approx 0.7 \pm 1.96(0.05)(0.96)$$

$$\approx 0.7 \pm 0.09$$

وعليه فإن  $p$  ( نسبة كل العاملين في المصنع الذين يفضلون مشروعات معاشات فردية ) تقع بين 0.61 و 0.79 بدرجة ثقة 95% .

٤ - ٢١ ترغب هيئة لاستطلاع الرأي العام أن تقدر بمستوى ثقة 90% نسبة الناخبين المتوقع أن يعطوا أصواتهم لمرشح معين في حدود  $\pm 0.06$  من النسبة الحقيقية ( للمجتمع ) بين الناخبين . ما الحد الأدنى لحجم العينة إذا كانت استطلاعات أخرى تشير إلى أن نسبة المصوتين لهذا المرشح هي 0.30 ؟

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_p}$$

$$z\sigma_p = \bar{p} - p$$

$$z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \bar{p} - p \quad \text{بفرض } n < 0.05N$$

$$1.64\sqrt{\frac{(0.3)(0.7)}{n}} = 0.06$$

$$\frac{2.6896(0.3)(0.7)}{n} = 0.0036 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$n = \frac{(2.6896)(0.3)(0.7)}{0.0036} \approx 156.89, \text{ أو } 157$$

٤ - ٢٢ (أ) حل المسألة ٤-٢١ بإيجاد معادلة  $n$  أولاً ثم بالتعويض فيها للحصول على قيمة  $n$  (ب) كيف كان يمكننا حل المسألة ٤-٢١ لو لم نعرف أن نسبة المصوتين للمرشح كانت 0.30؟

(أ) بدءاً بالمقدار  $n = \frac{z^2 p(1-p)}{(\bar{p} - p)^2}$  (أنظر المسألة ٤-٢١) نحصل على

$$\frac{z^2 p(1-p)}{n} = (\bar{p} - p)^2 \quad \text{و} \quad n = \frac{z^2 p(1-p)}{(\bar{p} - p)^2} \quad (٤ - ١٢)$$

وبالتعويض بالقيم من المسألة ٤-٢١ ، نحصل على

$$n = \frac{(1.64)^2(0.3)(0.7)}{0.06^2} = \frac{(2.6896)(0.21)}{0.0036} \approx 156.89, \text{ أو } 157$$

(نفس الإجابة كما في المسألة ٤-٢١) .

(ب) إذا لم نكن نعرف أن نسبة المصوتين للمرشح كانت 0.30 فيمكن تقدير أكبر قيمة لحجم العينة  $n$  للحفاظ على درجة الدقة المطلوبة مهما كانت القيمة الفعلية للنسبة  $p$  . ويكون هذا بوضع  $p = 0.5$  (فتكون  $1 - p = 0.5$  أيضاً) . وحيث أن  $p(1-p)$  تظهر في بسط معادلة  $n$  (أنظر أ) فإن المحصلة تكون أكبر ما يكون عندما  $p$  و  $1 - p$  كلاهما تساوي 0.5 ، وتكون  $n$  أكبر ما يمكن ، وعليه

$$n = \frac{z^2 p(1-p)}{(\bar{p} - p)^2} = \frac{1.64^2(0.5)(0.5)}{0.06^2} = \frac{(2.6896)(0.25)}{0.0036} \approx 186.8, \text{ أو } 187$$

(بدلاً من  $n = 157$  عندما علمنا أن  $p = 0.30$ ). وفي هذه الحالة والحالات المشابهة ، فإن محاولة الحصول على تقدير فعلي للنسبة  $p$  لا يخفف حجم العينة المطلوب كثيراً . وعندما نفترض  $p$  تساوي 0.5 ، فإن معادلة  $n$  يمكن تبسيطها إلى

$$n = \left[ \frac{z}{2(\bar{p} - p)} \right]^2 \quad (٤ - ١٣)$$

وباستخدام هذه الأخيرة نحصل على

$$n = \left[ \frac{1.64}{2(0.06)} \right]^2 = \left( \frac{1.64}{0.12} \right)^2 \approx 186.8, \text{ أو } 187$$

( نفس القيمة بعاليه )

فترات الثقة للوسط باستخدام توزيع  $t$

٤ - ٢٣ (أ) في أي ظروف لا يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي ولكن يمكننا استخدام توزيع  $t$  لإيجاد فترات الثقة لوسط المجتمع غير المعروف ؟ (ب) ما هي العلاقة بين توزيع  $t$  والتوزيع الطبيعي القياسي ؟ (ج) ما هي العلاقة بين إحصاءات  $z$  و  $t$  لتوزيع المعاينة النظري المتوسط ؟ (د) ماذا يقصد بدرجات الحرية ؟

(أ) عندما يتبع المجتمع التوزيع الطبيعي ولكن  $\sigma$  غير معلومة وحجم العينة  $n$  ، أصغر من 30 ، فإنه لا يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي لتحديد فترات الثقة لوسط المجتمع غير المعلوم ، ولكن يمكننا استخدام توزيع  $t$  .

(ب) مثل التوزيع الطبيعي القياسي ، فإن توزيع  $t$  هو أيضاً جرسى الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي صفر ولكنه مفرطح (أنظر قسم ٢ - ٤) أو أكثر انبساطاً من التوزيع الطبيعي القياسي ، وبالتالي فجذره أكبر من مساحته يقع عند الأطراف . وبينما هناك توزيع طبيعي قياسي واحد ، فإن هناك توزيع  $t$  مختلفاً لكل حجم عينة  $n$  . ولكن ، مع تزايد  $n$  فإن توزيع  $t$  يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي حتى يتساوى تقريباً عند  $n \geq 30$  .

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (ج)$$

ونكتشف عنها في ملحق ٣ .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad (٤ - ١٤)$$

ونكتشف عنها في ملحق ٥ لدرجات الحرية المناظرة .

(د) درجات الحرية (df) تشير إلى عدد القيم التي لنا حرية اختيارها . فمثلاً ، إذا كنا نتعامل مع عينة من مفردتين ونعلم أن متوسط العينة لهاتين المفردتين هو 10 ، فإن لنا حرية تحديد قيمة مفردة واحدة منهما.. فإذا كان الرقم الأول 8 فإن الرقم الثاني يجب أن يكون 12 (لكي يكون المتوسط 10). عندئذ نقول أن لدينا  $df = 2 - 1 = 1$  . وبالمثل ، إذا كانت  $n = 10$  ، فإن ذلك يعني أن لدينا حرية اختيار 9 قيم منها إذا أردنا تقدير متوسط المجتمع ، وعليه يكون لدينا  $df = 10 - 1 = 9$  .

٤ - ٢٤ (أ) كيف يمكن إيجاد قيمة  $t$  التي تناظر 10% من المساحة عند الأطراف ودرجات حرية 9 ؟ (ب) كيف تفسر قيم  $t$  مختلفاً عن تفسير قيم  $z$  ؟ (ج) أوجد قيم  $t$  المناظرة لنسب 5 ، 2.5 و 0.5% من المساحة عند الأطراف لعدد 9 من درجات الحرية . (د) أوجد قيم المناظرة لنسب 5 ، 2.5 و 0.5% عند الأطراف لحجم عينة  $n$  ، كبير جداً أو لا نهائياً . كيف تقارن بين  $t$  هذه بقيم  $z$  المناظرة ؟

(أ) يمكن الحصول على قيمة  $t$  المناظرة لنسبة 10% من المساحة عند الأطراف بالتحرك عبر العمود الذي رأسه 0.10 في ملحق ٥ حتى نصل إلى درجات حرية 9 . وهذا يعطي قيمة  $t$  تساوي 1.383 . وبالمثل ، فإن 10% من المساحة لتوزيع  $t$  بدرجات حرية 9 تقع عند الطرف الأيسر ، إلى اليسار من  $t = -1.383$  .

(ب) تشير قيم  $t$  في ملحق ه إلى المساحات (الاحتمالات) عند أطراف توزيع  $t$  المقابلة لدرجات الحرية المعينة . أما قيم  $z$  في ملحق ٣ فإنها تشير إلى المساحات (الاحتمالات) تحت المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع بين المتوسط وبين قيم  $z$  المحددة (قارن مثال ٤ بمثال ٨) .

(ج) بالتحرك عبر الأعمدة التي رؤوسها 0.05 ، 0.025 ، و 0.005 في ملحق ه حتى نصل إلى df = 9 ، نحصل على قيم  $t$  1.833 ، 2.262 و 3.250 على الترتيب .. وكنتيجه للتأمل فإن 5 و 2.5 و 0.5% من المساحة تقع في الطرف الأيسر لتوزيع  $t$  لدرجات حرية 9 إلى اليسار من 1.833 ،  $t = -2.262$  ،  $t = -3.350$  ، على الترتيب .

(د) عندما تكون أحجام العينات ( ودرجات الحرية ) كبيرة جداً أو لا نهائية فإن قيمة  $t_{0.05} = 1.645$  ،  $t_{0.025} = 1.960$  و  $t_{0.005} = 2.576$  ( من الصف الأخير في ملحق ه ) . وهذه تتطابق مع قيم  $z$  المناظرة في ملحق ٣ . بالتحديد  $t_{0.025} = 1.960$  تعني أن 2.5% من المساحة تحت توزيع  $t$  بدرجات حرية  $\infty$  تقع عند الطرف الأيمن ، إلى اليمين من  $t = 1.96$  . وبالمثل ، فإن  $z = 1.96$  تعطي ( من ملحق ٣ ) 0.4750 من المساحة تحت التوزيع الطبيعي القياسي من  $\mu = 0$  إلى  $z = 1.96$  . وعليه ، لدرجات حرية هي  $\infty$  فإن  $df = n - 1$  فإن توزيع  $t$  يتطابق مع التوزيع القياسي الطبيعي .

٤ - ٢٥ أخذت عينة عشوائية مكونة من 25 مفردة بمتوسط 80 وانحراف معياري 30 من مجتمع مكون من 1,000 مفردة ويتبع التوزيع الطبيعي . أوجد فترات الثقة الآتية لوسط المجتمع غير المعلوم (أ) 90% (ب) 95% (ج) 99% (د) كيف تقارن هذه النتائج بنتائج المسألة ٤ - ١٥ ؟

$$t_{0.05} = 1.711 \text{ عند } 24 \text{ df} \quad (أ)$$

$$\mu = \bar{X} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = 80 \pm 1.711 \frac{30}{\sqrt{25}} = 80 \pm 1.711 \sigma = 80 \pm 10.266$$

أي أن  $\mu$  تقع بين 69.734 و 90.266 بمستوى ثقة 90%

$$t_{0.025} = 2.064 \text{ عند } 24 \text{ df} \quad (ب)$$

$$\mu = \bar{X} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = 80 \pm 2.064 \frac{30}{\sqrt{25}} = 80 \pm 12.384$$

أي أن  $\mu$  تقع بين 67.615 و 92.284 بمستوى ثقة 95%

$$t_{0.005} = 2.797 \text{ عند } 24 \text{ df} \quad (ج)$$

$$\mu = \bar{X} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = 80 \pm 2.797 \frac{30}{\sqrt{25}} = 80 \pm 16.782$$

أي أن  $\mu$  تقع بين 63.218 و 96.782 بمستوى ثقة 99% .

(د) فترات الثقة 90 ، 95 ، و 99% كما هو متوقع ، أكبر في هذه المسألة ، حيث استخدم توزيع  $t$  ، عنها في المسألة ٤ - ١٥ ، عندما استخدمنا التوزيع الطبيعي القياسي . ولكن الفرق ليس كبيراً لأنه عند  $n = 25$  فإن توزيع  $t$

والتوزيع الطبيعي القياسي يتقاربان إلى حد كبير . لاحظ أننا في هذه المسألة استخدمنا توزيع  $t$  لأن المتاح هو  $s$  وليس  $\sigma$  ، كما في المسألة ٤ - ١٥ .

٤ - ٢٦ بحيث عينة عشوائية مكونة من  $n = 9$  مصابيح كهربائية بمتوسط عمر 300 ساعة وانحراف معياري  $s$  قيمته 45 ساعة من شحنة كبيرة من المصابيح الكهربائية معروف أن عمر تشغيلها يتبع التوزيع الطبيعي . (أ) أوجد فترة الثقة 90% لوسط عمر التشغيل غير المعلوم للشحنة كلها . (ب) وضع بالرسم النتائج في (أ) .

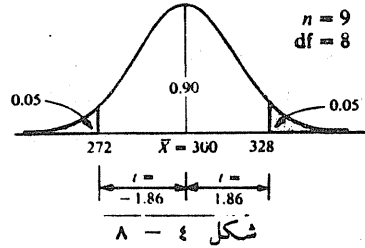
$$t_{0.05} = 1.860 \text{ عند } df = 8$$

(أ)

$$\mu = \bar{X} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = 300 \pm 1.860 \frac{45}{\sqrt{9}} = 300 \pm 27.9$$

أي أن  $\mu$  تقع تقريباً بين 272 و 328 ساعة بمستوى ثقة 90% .

(ب) أنظر شكل ٤ - ٨



٤ - ٢٧ أخذت عينة عشوائية عدد مفرداتها  $n = 25$  بمتوسط  $X = 80$  من مجتمع 1,000 انحرافه المعياري  $\sigma = 30$  . افترض أننا نعرف أن المجتمع الذي أخذت منه العينة لا يتبع التوزيع الطبيعي . (أ) أوجد فترة الثقة 95% لوسط المجتمع غير المعلوم (ب) كيف تقارن هذه النتيجة بالنتائج في المسألتين ٤ - ١٥ (ب) ، ٤ - ٢٥ (ب) ؟

(أ) حيث أننا نعرف أن المجتمع الذي أخذت منه العينة لا يتبع التوزيع الطبيعي وأن  $n < 30$  ، فإننا لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع  $t$  . ولكن يمكننا استخدام نظرية تشبثيف ، والتي تنص على أنه بصرف النظر عن شكل التوزيع ، فإن نسبة المشاهدات (أو المساحة) التي لا تبعد عن الوسط بأكثر من  $K$  انحراف معياري (هي على الأقل  $1 - (1/K^2)$ ) حيث  $K \geq 1$  (أنظر المسألة ٣ - ٤٠) . بوضع  $1 - (1/K^2) = 0.95$  والحل لإيجاد  $K$  ، نحصل على

$$\frac{1}{K^2} = 1 - 0.95$$

$$1 = 0.05 K^2$$

$$K^2 = 20$$

$$K \approx 4.47$$

وعليه

$$\mu = \bar{X} + K \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80 \pm 4.47 \frac{30}{\sqrt{25}} \approx 80 \pm 26.82$$

أي أن  $\mu$  تقع تقريباً بين 53 و 107 بمستوى ثقة 95% .

(ب) إن فترة الثقة 95 باستخدام نظرية تشبثيف أوسع كثيراً من تلك السابق إيجادها باستخدام التوزيع الطبيعي (المسألة ١٥-٤ (ب)) ، أو باستخدام توزيع  $t$  (المسألة ٤-٢٥ (ب)). ولهذا السبب ، فإنه من النادر استخدام نظرية تشبثيف لإيجاد فترات الثقة للوسط غير المعلوم للمجتمع . ولكنها تمثل الاختيار الوحيد إذا لم يمكن زيادة حجم العينة إلى 30 على الأقل (حتى يمكن استخدام التوزيع الطبيعي) .

٢٨ - في أي ظروف يمكن تكوين فترات الثقة للوسط غير المعلوم للمجتمع من عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع باستخدام (أ) التوزيع الطبيعي ؟ (ب) توزيع  $t$  ؟ (ج) نظرية تشبثيف ؟

(أ) يمكن استخدام التوزيع الطبيعي (١) إذا كان المجتمع الأصل طبيعياً  $n \geq 30$  و  $\sigma$  أو  $s$  معلومة (٢) إذا كانت  $n \geq 30$  (بالالتجاء إلى نظرية النهاية المركزية) وباستخدام  $s$  كتقدير للانحراف المعياري  $\sigma$  ، (٣) إذا كانت  $n < 30$  ولكن  $\sigma$  معلومة والمجتمع الذي أخذت منه العينة العشوائية من المعروف أنه يتبع التوزيع الطبيعي .

(ب) يمكن استخدام توزيع  $t$  (لدرجات الحرية المعنية) عندما  $n < 30$  ولكن  $\sigma$  غير معلومة والمجتمع الذي أخذت منه العينة من المعروف أنه يتبع التوزيع الطبيعي .

(ج) عندما  $n < 30$  و  $\sigma$  غير معلومة والمجتمع الذي أخذت منه العينة لا يتبع التوزيع الطبيعي ، فن الناحية النظرية لا نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع  $t$  . في مثل هذه الحالة ، أما أن نستخدم نظرية تشبثيف وأما أن نرفع من حجم العينة العشوائية إلى  $n \geq 30$  (لكي نستطيع استخدام التوزيع الطبيعي) . ومع ذلك فالواقع أن توزيع  $t$  يستخدم حتى في هذه الحالات .

### مسائل إضافية

المعينة :

٢٩ - (أ) ماذا يعنى الاستدلال الإحصائي ؟ (ب) ما هي أسماء الخواص الوصفية للمجتمعات والعينات ؟ (ج) كيف يمكن الحصول على عينات ممثلة ؟

الإجابة : (أ) التقدير واختبار الفروض (ب) المعالم والإحصائيات (ج) بالمعينة العشوائية .

٣٠ - بدءاً بالمواد الثالث والصف العاشر في ملحق ٤ وبالقراءة أفقياً ، كون عينة من 5 من بين 99 عنصراً . (ب) بدءاً بالمواد السابع والصف الأول في ملحق ٤ وبالقراءة رأسياً ، كون عينة من 10 مفردات من بين 400 مفردة .

الإجابة : (أ) 31 ، 13 ، 33 ، 67 ، 68 ، (ب) 24 ، 54 ، 290 ، 218 ، 385 ، 130 ، 24 ، 72 ، 313 ، 387

توزيع المعاينة للوسط :

٣١ - كيف يمكننا الحصول على توزيع المعاينة النظري للوسط من مجتمع (أ) محدود ؟ (ب) غير محدود ؟

الإجابة : (أ) بأخذ كل العينات الممكنة ذات الحجم  $n$  من المجتمع ثم إيجاد متوسط كل عينة (ب) بأخذ (فرضاً) عدد لا نهائى من العينات من حجم  $n$  من المجتمع اللانهائى ثم إيجاد متوسط كل عينة .

٣٢ - ما هو (أ) الوسط (ب) الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة النظري للوسط ؟

الإجابة : (أ)  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  حيث  $\mu$  وسط المجتمع الأصل (ب)  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$  حيث  $\sigma$  هي الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي و  $n$  حجم العينة ، أما للمجتمعات المحدودة من حجم  $N$  حيث  $n > 0.05 N$  فإن

$$n > 0.05 N, \sigma_{\bar{X}} = (\sigma/\sqrt{n})\sqrt{(N-n)/(N-1)}$$

٤ - ٣٣ بالنسبة لمجتمع مكون من 1,000 مفردة ، بوسط  $\mu = 50$  وانحراف معياري  $\sigma = 10$  ما هو الوسط والخطأ المعياري لتوزيع المعاينة النظري للوسط لعينة من حجم (أ) 25 و (ب) 81 ؟

الإجابة : (أ)  $\mu_{\bar{X}} = 50$  و  $\sigma_{\bar{X}} = 2$  (ب)  $\mu_{\bar{X}} = 50$  و  $\sigma_{\bar{X}} = 1.07$

٤ - ٣٤ ما هو شكل توزيع المعاينة النظري للوسط لعينة من حجم (أ) 10 إذا كان المجتمع الأصلي طبيعياً ؟ (ب) 50 إذا كان المجتمع الأصلي غير طبيعي ؟ (ج) علام بنيت إجابتك في (ب) ؟

الإجابة : (أ) طبيعي (ب) طبيعي تقريباً (ج) نظرية النهاية المركزية .

٤ - ٣٥ ما هي الإحصائية (أ) لمتغير عشوائي  $X$  ؟ (ب) لتوزيع المعاينة النظري للمتوسط  $\bar{X}$  ؟

الإجابة : (أ)  $z = (X - \mu) / \sigma$  (ب)  $z = (\bar{X} - \mu) / \sigma_{\bar{X}}$

٤ - ٣٦ ما احتمال أن تقع  $\bar{X}$  بين 49 و 50 لعينة عشوائية من 36 مفردة من مجتمع بمتوسط  $\mu = 48$  و  $\sigma = 12$  ؟

الإجابة : 0.1498 أو 14.98%

٤ - ٣٧ ما احتمال أن يقع متوسط عينة من 144 حسابات مدينين مسحوبة من مجتمع به 2,000 من الحسابات بمتوسط \$ 10,000 وانحراف معياري \$ 4,000 بين \$ 9,500 و \$ 10,500 ؟

الإجابة : 0.8812 أو 88.12%

التقدير باستخدام التوزيع الطبيعي :

٤ - ٣٨ ما هي المقدرات بنقطة غير المتحيزة لكل من  $\mu$  ،  $\sigma$  و  $p$  على الترتيب ؟

الإجابة :  $\bar{X}$  ،  $s$  ،  $\bar{p}$  (كترينها في المعادلات (٢-١٠) و (٢-١١) ب) و  $\bar{p}$  .

٤ - ٣٩ باستخدام التوزيع الطبيعي القياسي أذكر فترات الثقة للوسط  $\mu$  (أ) 90% (ب) 95% ، (ج) 99%

الإجابة : (أ)  $P(\bar{X} - 1.64\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 1.64\sigma_{\bar{X}}) = 0.90$

(ب)  $P(\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$

(ج)  $P(\bar{X} - 2.58\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 2.58\sigma_{\bar{X}}) = 0.99$

٤ - ٤٠ أخذت عينة عشوائية حجمها 144 بمتوسط 300 وانحراف معياري 100 من مجتمع به 5,000 مفردة . أوجد التقدير بفترة للوسط  $\mu$  بحيث تكون ثقتنا 90% أن تلك الفترة تتضمن  $\mu$

الإجابة : من 286.34 إلى 313.66

٤ - ٤١ بالنسبة للسؤال ٤ - ٤٠ أوجد فترات الثقة (أ) 95% (ب) 99% (ج) ماذا تقترح إجابات (أ) ، (ب) ؟  
الإجابة : (أ) من 283.67 إلى 316.33 (ب) من 278.51 إلى 321.49 (ج) كلما زادت درجة الثقة ، كلما اتسعت فترة الثقة .

٤ - ٤٢ أخذت عينة من 400 من بين 100,000 مجند بالجيش في إحدى السنوات ، ووجد أن متوسط وزن المجند في العينة هو 170 رطلاً والانحراف المعياري للمجتمع المجندين هو 40 رطلاً . أوجد فترة الثقة 90% لمتوسط الوزن في مجتمع المجندين .

الإجابة : من 166.7 إلى 173.3 رطلاً .



٤٣ - ٤ ترغب شركة في تقدير متوسط عدد ساعات التشغيل لنوع معين من المصابيح الكهربائية في حدود 10 ساعات تشغيل ( زائد أو ناقص ) وبدرجة ثقة 95% وتعرف الشركة من المعلومات السابقة عن هذا النوع من المصابيح الكهربائية أن  $\sigma = 30h$  . ما حجم العينة التي يجب أخذها ؟ الإجابة : 35 .

٤٤ - ٤ ( أ ) أكتب صيغة  $n$  لحل المسألة ٤٣ - ٤ . ( ب ) ما هو حجم فترة الثقة الإجمالي في المسألة ٤٣ - ٤ ؟ ( ج ) ماذا كان يحدث لو كانت  $n < 30$  في المسألة ٤٣ - ٤ ؟  
الإجابة : ( أ )  $n = [z\sigma/(\bar{X} - \mu)]^2$  ( ب ) 20 ساعة تشغيل ( ج ) كان يجب زيادة حجم العينة إلى 30 لتبرير استخدام التوزيع الطبيعي .

٤٥ - ٤ بالنسبة للتوزيع ذي الحدين ، أكتب معادلات ( أ )  $\mu$  و  $\sigma$  ( ب )  $\hat{\sigma}_p$  و  $\hat{\sigma}_{\bar{p}}$  عندما  $n < 0.05N$  ( ج )  $\hat{\sigma}_{\bar{p}}$  عندما  $n > 0.05N$   
الإجابة : ( أ )  $\mu = np$  and  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  ( ب )  $\mu = np$  and  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  ( ج )  $\hat{\sigma}_p = \sqrt{p(1-p)/n}$  and  $\hat{\sigma}_{\bar{p}} = \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n}$  ( د )  $\hat{\sigma}_p = \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})/n} \times \sqrt{(N-n)/(N-1)}$  .

٤٦ - ٤ في عينة مكونة من 36 طالب دراسات عليا في الاقتصاد من بين 880 طالباً في نفس البرنامج وجد أن 8 طلاب يحملون درجة جامعية في الرياضيات . أوجد النسبة بين كل طلاب الدراسات العليا بالجامعة للطلاب الذين يحملون درجة جامعية في الرياضيات بدرجة ثقة 90% .  
الإجابة : من 0.11 إلى 0.33 .

٤٧ - ٤ يرغب صاحب مصنع مصابيح كهربائية تقدير نسبة المصابيح المعيبة في حدود  $\pm 0.1$  بدرجة ثقة 95% . ما هو الحد الأدنى لحجم العينة المطلوب ، إذا كانت الخبرة السابقة تشير إلى أن نسبة العيب في المصابيح الكهربائية المنتجة هي 0.2 ؟  
الإجابة : 62 .

٤٨ - ٤ ( أ ) اكتب معادلة  $n$  لحل المسألة ٤٧ - ٤ . ( ب ) كيف كان يمكننا حل المسألة ٤٧ - ٤ إذا كان المنتج لا يعرف أن  $p = 0.2$  ؟  
الإجابة : ( أ )  $n = z^2 p(1-p)/(\bar{p} - p)^2$  ( ب ) بوضع  $p = 0.5$  فتكون  $n = 97$  .

فترات الثقة للوسط باستخدام توزيع  $t$  :

٤٩ - ٤ أوجد قيمة  $t$  لعدد 29 درجة حرية للمساحات التالية الواقعة في الطرف الأيمن من توزيع  $t$  : ( أ ) 10% ( ب ) 5% ( ج ) 2.5% ( د ) 0.05% .

الإجابة : ( أ )  $t_{0.10} = 1.311$  ( ب )  $t_{0.05} = 1.699$  ( ج )  $t_{0.025} = 2.045$  ( د )  $t_{0.005} = 2.756$  .

٥٠ - ٤ أوجد قيمة  $z$  المناظرة للمساحات التالية تحت التوزيع الطبيعي القياسي والواقعة بين الوسط وبين  $z$  ( أ ) 40% ( ب ) 45% ( ج ) 47.5% ( د ) 49.5% ( هـ ) كيف تقارن قيم  $z$  هذه بقيم  $t$  المناظرة السابق إيجادها في المسألة ٤٩ - ٤ ؟

الإجابة ( أ )  $z = 1.28$  ( ب )  $z = 1.65$  ( ج )  $z = 1.96$  ( د )  $z = 2.58$  ( هـ ) القيم المناظرة لكل من  $z$  و  $t$  متقاربة جداً ( قارن  $z = 1.28$  مع  $t = 1.311$  ،  $z = 1.65$  مع  $t = 1.699$  ،  $z = 1.96$  مع  $t = 2.045$  ، و  $z = 2.58$  مع  $t = 2.756$  ) .

٤ - ٥١ أخذت عينة عشوائية حيث  $n = 16$  بمتوسط  $\bar{X} = 50$  وانحراف معياري  $\sigma = 10$  من مجتمع كبير جداً يتبع التوزيع الطبيعي . (أ) أوجد فترة الثقة 95% للوسط غير المعروف للمجتمع (ب) كيف تكون الإجابة مختلفة لو أن  $\sigma = 10$  ؟  
الإجابة : (أ) من 44.67 إلى 55.53 ( باستخدام توزيع  $t$  بدرجات حرية 15 ) (ب) من 45.1 إلى 54.9 ( باستخدام التوزيع الطبيعي القياسي ) .

٤ - ٥٢ في امتحان إحصاء الفصل كبير ، أخذت عينة عشوائية حيث  $n = 4$  طالب فكان متوسط الدرجات  $\bar{X} = 75$  والانحراف المعياري للدرجات  $s = 8$  ومن المعروف أن الدرجات في الفصل كله تتبع التوزيع الطبيعي . (أ) أوجد فترة الثقة 95% و (ب) فترة الثقة 99% لوسط الدرجات غير المعروف في المجتمع .  
الإجابة : (أ) من 62 إلى 88 تقريباً (ب) من 52 إلى 98 تقريباً .

٤ - ٥٣ أخذت عينة عشوائية حيث  $n = 16$  بمتوسط  $\bar{X} = 50$  وانحراف معياري  $s = 10$  من مجتمع كبير جداً لا يتبع التوزيع الطبيعي (أ) أوجد فترة الثقة 95% للوسط غير المعروف للمجتمع (ب) كيف تختلف الإجابة في (أ) عن تلك في المسألة ٤ - ٥١ ؟  
الإجابة : (أ) من 39 إلى 61 « باستخدام نظرية تشبثيف واستخدام  $s$  كتقدير تقريبي بدلا من  $\sigma$  (ب) فترة الثقة 95% أوسع كثير هنا من تلك في المسألة ٤ - ٥١ .

٤ - ٥٤ أذكر أي توزيع ينبغي استخدامه لإيجاد فترات الثقة للوسط غير المعروف للمجتمع من عينة عشوائية مأخوذة من المجتمع في الحالات التالية (أ)  $n = 36$  و  $s = 10$  ، (ب)  $n = 20$  و  $s = 10$  والمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي (ج)  $n = 20$  و  $s = 10$  والمجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي .

الإجابة : (أ) التوزيع الطبيعي ( باستخدام نظرية النهاية المركزية واستخدام  $s$  كتقدير بدلا من  $\sigma$  ) (ب) توزيع  $t$  بدرجات حرية 19 (ج) نظرية تشبثيف .

# الفصل الخامس

## الاستدلال الاحصائي : اختبار الفروض

### ١-٥ اختبار الفروض

اختبار الفروض عن خصائص المجتمع (مثل  $\mu$  و  $\sigma$ ) هو جانب أساسي آخر من جوانب الاستدلال والتحليل الإحصائي . وفي اختبار الفروض نبدأ بعمل فرض ما عن خاصية المجتمع غير المعلومة . ثم نأخذ عينة عشوائية من المجتمع ، وعلى أساس الخاصية المناظرة في العينة ، أما أن نقبل وإما أن نرفض الفرض بدرجة ثقة محددة .

وفي اختبار الفروض يمكن أن نرتكب نوعين من الخطأ . الأول ، أنه يمكن أن نرفض على أساس من معلومات العينة فرضاً بينما هو صحيح في الواقع . ويسمى هذا خطأ من النوع الأول . والثاني ، أنه يمكن أن نقبل فرضاً خاطئاً ويسمى هذا خطأ من النوع الثاني .

ويمكننا ضبط أو تحديد احتمال ارتكاب خطأ من النوع الأول ،  $\alpha$  . ولكن إذا خفضنا  $\alpha$  ، فسوف نضطر إلى قبول احتمال أكبر لارتكاب خطأ من النوع الثاني  $\beta$  ، اللهم إلا إذا رفعا حجم العينة . وتسمى  $\alpha$  مستوى المعنوية ، و  $1 - \alpha$  مستوى الثقة للاختبار .

مثال ( ١ ) : افترض أن شركة تنتج مصابيح كهربائية ترغب في معرفة ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن مصابيحها الكهربائية تستمر لمدة 1000 ساعة احتراق ،  $\mu$  . لمعرفة ذلك ، يمكن للشركة أن تأخذ عينة عشوائية من 100 مصباح مثلاً وإيجاد متوسط عمرها  $\bar{X}$  . وكلما صغر الفرق بين  $\bar{X}$  و  $\mu$  ، كلما زادت فرصة قبول الفرض بأن  $\mu = 1000$  ساعة احتراق عند مستوى المعنوية المحدد ،  $\alpha$  . بوضع  $\alpha$  تساوى 5% فإن الشركة تقبل المخاطرة المحسوبة برفض فرض صحيح في 5% من الحالات . بوضع  $\alpha$  عند 1% ، فإن الشركة تواجه باحتمال أكبر لقبول فرض خاطئ ،  $\beta$  .

### ٢-٥ اختبار فروض عن الوسط والنسبة في المجتمع

الخطوات الرسمية لاختبار فروض عن وسط المجتمع (أو النسبة) هي كالاتي :

١ - افترض أن  $\mu$  تساوى قيمة افتراضية  $\mu_0$  . يمكن تمثيل ذلك بالعلاقة  $H_0 : \mu = \mu_0$  ويسمى الفرض العدمي . وتكون الفروض البديلة هي إذن  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  ( وتقرأ «  $\mu$  لا تساوى  $\mu_0$  » ) ،  $H_1 : \mu > \mu_0$  ، أو  $H_1 : \mu < \mu_0$  ، وفقاً للمسألة .

٢ - حدد مستوى معنوية للاختبار ( عادة 5% ، ولكن أحياناً 1% ) وعرف منطقة القبول ومنطقة الرفض . للاختبار باستخدام التوزيع الملائم .

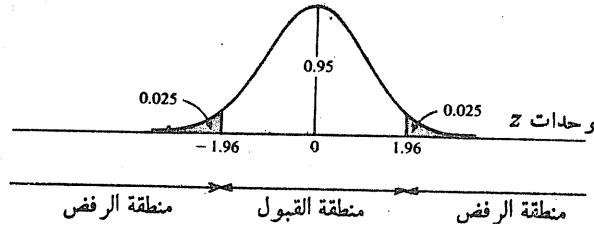
٣ - خذ عينة عشوائية من المجتمع واحسب  $\bar{X}$  . فإذا وقعت  $\bar{X}$  ( مقاسة بوحدات الانحراف المعياري ) داخل منطقة القبول ، اقبل  $H_0$  ، وإلا فرفض  $H_0$  لصالح  $H_1$  .

مثال ( ٢ ) : افترض أن الشركة في مثال ( ١ ) ترغب في اختبار ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن متوسط عمر المصباح من إنتاجها هو 1000 ساعة احتراق . وأنها قامت بأخذ عينة عشوائية حجمها  $n = 100$  من إنتاجها فوجدت أن متوسط العينة  $\bar{X} = 980$  ساعة والانحراف المعياري للعينة  $s = 80$  ساعة . فإذا أرادت الشركة القيام بالاختبار عند مستوى معنوية 5% ، فعليها أن تفضي كالاتي . حيث أن  $\mu$  يمكن أن تساوى ، تزيد عن ، أو تقل عن 1,000 ، فإن الشركة يجب أن تضع الفرض العدمي والفرض البديل كالاتي :

$$H_0: \mu = 1,000 \quad H_1: \mu \neq 1,000$$

وحيث أن  $n > 30$  ، فإن توزيع المعاينة للوسط يكون تقريباً طبيعياً (ويمكننا استخدام  $s$  كتقدير بدلا من  $\sigma$ ) . وتكون منطقة القبول للاختبار عند مستوى المعنوية 5% بين  $\pm 1.96$  تحت التوزيع الطبيعي القياسي وتكون منطقة الرفض خارجها ( أنظر شكل ( ١ - ٥ ) ) . وحيث أن منطقة الرفض تقع عند ذيل التوزيع ، فإن الاختبار يسمى اختبار ذو ذيلين . وتكون الخطوة الثالثة إيجاد قيمة الملاحظة لقيمة  $\bar{X}$  :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{980 - 1,000}{80/\sqrt{100}} = \frac{-20}{8} = -2.5$$



شكل ( ١ - ٥ )

وحيث أن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض ، فإن على الشركة أن ترفض  $H_0$  أي  $\mu = 1,000$  وتقبل  $H_1$  أي  $\mu \neq 1,000$  عند مستوى معنوية 5% .

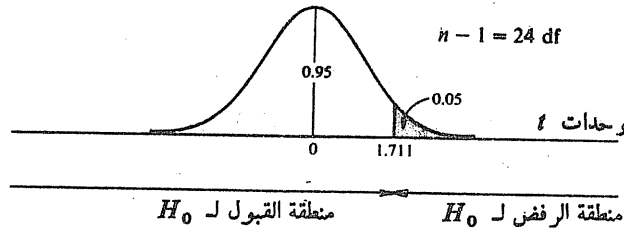
مثال ( ٣ ) : ترغب شركة أن تعرف بدرجة ثقة 95% ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن صناديق الصابون المسحوق الذي تبنيه تحتوي على أكثر من 500 جرام ( حوالي 1.1 رطل ) من الصابون . وتعرف الشركة من الخبرة الماضية أن أوزان الصابون بالصناديق تتبع التوزيع الطبيعي . وقد أخذت الشركة عينة عشوائية حجمها  $n = 25$  ووجدت أن  $\bar{X} = 520$  جرام و  $s = 75$  جرام . وحيث أن الشركة ترغب في اختبار ما إذا كانت  $\mu > 500$  ، فإن

$$H_0: \mu = 500 \quad H_1: \mu > 500$$

وحيث أن التوزيع طبيعي ،  $n < 30$  ، وكذلك  $\sigma$  غير معلومة ، فعلينا أن نستخدم توزيع  $t$  ( ب درجات حرية  $n - 1 = 24$  ) لتحديد المنطقة الحرجة ، أي منطقة الرفض ، للاختبار بمستوى معنوية 5% . ونجد ذلك في ملحق ٥ ( أنظر قسم ٤ - ٤ ) ويعرضها شكل ( ٢ - ٥ ) . ويسمى هذا اختبار الدليل الأيمن . وأخيراً ، حيث أن

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{520 - 500}{75/\sqrt{25}} = \frac{20}{15} = 1.33$$

وهي تقع داخل منطقة القبول ، ونقبل  $H_0$  أي  $\mu = 500$  ، عند مستوى معنوية 5% ( أو بدرجة ثقة 95% ) .



شكل ( ٢ - ٥ )

مثال ( ٤ ) : تظهر السجلات أن 60 % من الطلاب الذين التحقوا في الماضي بدراسة جامعية متخصصة قد حصلوا على الدرجة العلمية خلال 4 سنوات . وبالنسبة للمتقنين بالدراسة في عام ١٩٨٠ وعدد 36 ، وجد أن 15 طالباً فقط قد حصلوا على الدرجة العلمية حتى ١٩٨٤ . لاختبار ما إذا كانت نتائج الدفعة المتحققة في عام ١٩٨٠ أسوأ من نتائج الدفعات السابقة عليها ، فإننا نلاحظ أولاً أن المسألة تتعلق بتوزيع ذي الحدين ولكن ، حيث أن  $n > 30$  و  $np$  و  $n(1-p) > 5$  ، فإنه يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي . ( أنظر قسم ٣-٥ ) باستخدام  $p = 0.60$  (نسبة النجاح) . بالنسبة لدفعة ١٩٨٠ فإن نسبة النجاح  $\bar{p} = 15/36 = 0.42$  والخطأ المعياري  $\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{(0.6)(0.4)/36} = 0.08$  . وحيث أننا نرغب في اختبار ما إذا كان أداء دفعة ١٩٨٠ أسوأ من سبقتها فإن لدينا

$$H_0: p = 0.60 \quad H_1: p < 0.60$$

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{0.42 - 0.60}{0.08} = -2.25$$

وحيث أن هذا هو اختبار الذيل الأيسر وأن 5 % من مساحة التوزيع الطبيعي القياسي تقع إلى اليسار من 1.64 — ( أنظر ملحق ٣ ) ، فإننا نرفض  $H_0$  وننتهي إلى أنه عند مستوى معنوية 5% ، فإن دفعة ١٩٨٠ كانت نتيجتها أسوأ من الدفعات السابقة عليها . ولكن إذا كانت  $\alpha = 1\%$  ، فإن المنطقة الحرجة تكون إلى اليسار من  $z = -2.33$  وعندئذ نقبل  $H_0$  . وتبين المسألة ٥-٥ كيفية تحديد منطقتي القبول والرفض بالوحدات الأصلية للمسألة بدلا من وحدات الانحراف المعياري . والمسألتان ( ١٠-٥ و ١١-٥ ) تبينان كيفية إيجاد منحنى توصيف العمليات ( منحنى OC ) ، والذي يعطى قيمة  $\beta$  لقيم  $\mu$  المختلفة حيث  $\mu > \mu_0$  . وتبين المسألة ( ١٢-٥ ) كيفية إيجاد منحنى القوة ، الذي يعطى قيمة  $\alpha$  التي تناظر  $\mu > \mu_0$  .

### ٣-٥ اختبار الفروض عن الفرق بين وسطين أو الفرق بين نسبيتين

في مواقف اتخاذ قرارات كثيرة ، يكون من المهم تحديد ما إذا كان وسطان أو نسبتان لمجتمعين يتساويان أو يختلفان . ولعمل ذلك فإننا نأخذ عينة عشوائية من كل مجتمع ، فإذا أمكننا أن نعزو الفرق بين وسطى أو نسبتي العينة إلى الصدفة فإننا ، وفقط في هذه الحالة ، نقبل فرض أن المجتمعين لهما وسطان ( أو نسبتان ) متساويان .

إذا كان المجتمعان يتبعان التوزيع الطبيعي ( أو إذا كان كل من  $n_1, n_2 \geq 30$  ) فإن توزيع المعسامة للفرق بين الوسطين ( أو النسبتين ) في العينة يتبع أيضاً التوزيع الطبيعي ، أو يتبع التوزيع الطبيعي تقريباً ، بخطأ معياري معطى بالمعادلات التالية

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad \mu_1 = \mu_2 \text{ كانت} \quad (١-٥)$$

$$\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_2}} \quad p_1 = p_2 \text{ كانت} \quad (٢-٥)$$

$$\bar{p} = \frac{n_1 \bar{p}_1 + n_2 \bar{p}_2}{n_1 + n_2} \quad \text{متوسط مرجح للنسبتين } \bar{p}_1 \text{ و } \bar{p}_2 \quad \text{حيث ( ٣-٥ )}$$

مثال ( ٥ ) : ترغب مديرية أن تحدد عند مستوى معنوية 5% ما إذا كان الأجر بالساعة للعمال نصف المهرة متساوياً في مدينتين . لعمل ذلك ، فإنها تأخذ عينة عشوائية من الأجر بالساعة من كل من المدينتين وتجد أن  $X_1 = \$ 6.00$  ،  $\bar{X}_2 = \$ 5.40$  ،  $s_1 = \$ 2.00$  و  $s_2 = \$ 1.80$  وذلك لعينتين من حجم  $n_1 = 40$  و  $n_2 = 54$  . الفروض التي يجري اختبارها هي

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{or} \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{or} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

وهذا اختبار ذو ذيلين وتقع منطقة القبول للفرض  $H_0$  في حدود  $\pm 1.96$  تحت المنحنى الطبيعي القياسي ( شكل ٥ - ١ )

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2.00^2}{40} + \frac{1.80^2}{54}} = \sqrt{0.1 + 0.06} = \sqrt{0.16} = 0.4$$

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{0.6}{0.4} = 1.5$$

وحيث أن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة القبول ، فإننا نقبل  $H_0$  ، أي  $\mu_1 = \mu_2$  ، عند مستوى معنوية 5% . ولكن إذا كان من المعروف أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وكانت كل من  $n_1$  و  $n_2$  أصغر من 30 وافترضنا أن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ( وكلاهما غير معلوم ) ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين وسطين يتبع توزيع  $t$  بدرجات حرية 1  $n_1 + n_2 - 1$  ( أنظر مسألة ٥ - ١٥ ) .

مثال ( ٦ ) : ترغب شركة أن تحدد عند مستوى معنوية 1% ما إذا كانت نسبة المقبول من المكونات الإلكترونية لمورد أجنبي ،  $p_1$  تزيد عنها لمورد محلي ،  $p_2$  . وقد أخذت الشركة عينة عشوائية من شحنة كل مورد ووجدت أن  $\bar{p}_1 = 0.9$  و  $\bar{p}_2 = 0.7$  من عينات من حجم  $n_1 = 100$  و  $n_2 = 80$  . وقد وضعت الشركة الفروض التالية :

$$H_0: p_1 = p_2 \quad H_1: p_1 > p_2$$

هذا اختبار أيمن الذيل وتقع منطقة الرفض للفرض  $H_0$  إلى اليمين من 2.33 تحت المنحنى الطبيعي القياسي .

$$\bar{p} = \frac{n_1 \bar{p}_1 + n_2 \bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{(100)(0.9) + (80)(0.7)}{180} = \frac{146}{180} = 0.8$$

$$\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{100} + \frac{(0.8)(0.2)}{80}} = \sqrt{0.0016 + 0.002} = \sqrt{0.0036} = 0.06$$

حيث

$$z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \frac{0.2}{0.06} = 3.33$$

نرفض  $H_0$  ونقبل الفرض أن  $p_1 > p_2$  عند مستوى معنوية 1% .

### ٥-٤ اختبار كاي - تربيع لجودة التوفيق والاستقلال

يستخدم توزيع كاي - تربيع  $\chi^2$  لاختبار ( ١ ) إذا كانت التكرارات المشاهدة تختلف « معنويًا » عن التكرارات المتوقعة عندما يكون عدد النواتج الممكنة أكثر من اثنين ؛ ( ٢ ) إذا كان التوزيع الذي أخذت منه العينة ذا الحدين ، أو الطبيعي ، أو أي توزيع آخر ؛ ( ٣ ) إذا كان متغيران مستقلين أم لا .

وإحصائية  $\chi^2$  المحسوبة من بيانات العينة معطاة بالصيغة

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \quad ( ٥ - ٤ )$$

حيث  $f_o$  = التكرارات المشاهدة

$f_e$  = التكرارات المتوقعة

درجات الحرية لاختبار جودة التوفيق ( ١ و ٢ ) معطاة بالصيغة

حيث  $c = \text{عدد الفئات}$

درجات الحرية لاختبارات الاستقلال أو اختبارات جداول الاقتران ( ٣ ) ، معطاة بالصيغة

حيث  $r =$  عدد الصفوف في جدول الاقتران

ويكون التكرار المتوقع في كل خلية من جدول الاقتران

حيث  $n =$  حجم العينة الإجمالي .

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(20 - 30)^2}{30} + \frac{(40 - 40)^2}{40} + \frac{(40 - 30)^2}{30} = \frac{-10^2}{30} + \frac{0^2}{40} + \frac{10^2}{30} = \frac{100}{30} + \frac{100}{30} \cong 6.67$$

$$df = c - m - 1 = 3 - 0 - 1 = 2$$

وحيث أنه لم يتم حساب أى من معالم المجتمع من البيانات فإن  $m = 0$  ،  $df = 2$  ،  $t_{df}$  تنبأ إذا علمنا فئتين من الثلاث والمجموع ، فإن الفئة الثالثة لا تكون « حرة » التعبير . وحيث أن القيمة المحسوبة  $\chi^2 = 5.83$  أصغر من القيمة الجدولية  $\chi^2 = 5.99$  بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  ودرجات حرية 2 (أنظر ملحق ٦) ، فإننا لانستطيع أن نرفض  $H_0$  ، بأن نمط المبيعات فى الماضى ما زال سائداً . وعندما يكون التكرار المتوقع فى أى فئة أقل من 5 فإنه يجب ضمها لفئة مجاورة ( أنظر المسألة ٥ - ١٨ ) . لاختبار إذا كان التوزيع موضع المعينة هو ذا الحدين أو الطبيعي ، أنظر المسألتين ( ٥ - ١٩ ) ، ( ٥ - ٢٠ ) .

جدول ( ٥ - ١ ) المشتريات المشاهدة والمتوقعة لأجهزة التليفزيون حسب حجم الشاشة

|                       | حجم الشاشة |       |      | الإجمالي |
|-----------------------|------------|-------|------|----------|
|                       | كبير       | متوسط | صغير |          |
| النقط المشاهد $f_0$   | 20         | 40    | 40   | 100      |
| النقط في الماضي $f_e$ | 30         | 40    | 30   | 100      |

مثال ( ٨ ) : جمع تاجر سيارات البيانات الموضحة في جدول ( ٥ - ٢ ) عن عدد السيارات الأجنبية والمحلية التي يشتريها عملاء أعمارهم تحت سن 30 سنة ، والتي يشتريها عملاء أعمارهم سن 30 سنة فأكثر . لاختبار ما إذا كان نوع السيارة المشتراة ( أجنبية أو محلية ) مستقبلاً عن سن المشتري عند معنوية 1 % ، فنشئ جدول التكرارات المتوقعة ( جدول ٥ - ٣ ) . القيمة في الخلية الأولى صف 1 وعمود 1 ،

$$f_e = \frac{\sum r \sum c}{n} = \frac{(70)(50)}{170} \approx 21$$

ويمكن الحصول على التكرارات المتوقعة الثلاثة الباقية بالطرح من مجموع الصفوف ومجموع الأعمدة . أي

$$df = (r-1)(c-1) = (2-1)(2-1) = 1$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(30 - 21)^2}{21} + \frac{(40 - 49)^2}{49} + \frac{(20 - 29)^2}{29} + \frac{(80 - 71)^2}{71} = 9.44$$

وحيث أن قيمة  $\chi^2$  المحسوبة تتجاوز قيمة  $\chi^2$  عند  $\alpha = 0.01$  و  $df = 1$  ( أنظر ملحق ٦ ) ، نرفض  $H_0$  القائل بأن السن ليس عاملاً في تحديد نوع السيارة المشتراة ( وننتهي إلى أن الأصغر سناً يميلون فيما يبدو إلى شراء السيارات الأجنبية . عندما  $df = 1$  ولكن  $n < 50$  يستخدم معامل تصحيح للاتصال باستخدام  $(|f_o - f_e| - 0.5)^2$  في بسط معادلة ( ٥ - ٤ ) أنظر المسألة ٥ - ٢٢ ) .

جدول ( ٥ - ٢ ) جدول الاقتران لمشتري السيارات

| السن     | نوع السيارة |        | الإجمالي |
|----------|-------------|--------|----------|
|          | محلية       | أجنبية |          |
| تحت 30 ، | 30          | 40     | 70       |
| 30 فأكثر | 20          | 80     | 100      |
| إجمالي   | 50          | 120    | 170      |

جدول ( ٥ - ٣ ) جدول التكرارات المتوقعة المناظرة للتكرارات

المشاهدة في جدول ( ٥ - ٢ )

| السن     | نوع السيارة |        | الإجمالي |
|----------|-------------|--------|----------|
|          | محلية       | أجنبية |          |
| تحت 30 ، | 21          | 49     | 70       |
| 30 فأكثر | 29          | 71     | 100      |
| إجمالي   | 50          | 120    | 170      |

## ٥-٥ تحليل التباين

يستخدم تحليل التباين لاختبار فرض أن متوسطات أكثر من مجتمعين متساوية أو مختلفة عندما تكون المجتمعات موزعة توزيعاً طبيعياً مع تساوى التباين . الخطوات كالآتي :

خطوة ( ١ ) : قدر تباين المجتمع من التباين بين متوسطات العينات ( MSA في جدول ٥ - ٤ )

خطوة ( ٢ ) : قدر تباين المجتمع من التباين داخل العينات ( MSE في جدول ٥ - ٤ )



خطوة ( ٣ ) : احسب النسبة  $F$  (MSA/MSE) في جدول ( ٥ - ٤ ) :

$$F = \frac{\text{التباين بين متوسطات العينات}}{\text{التباين داخل العينات}}$$

خطوة ( ٤ ) : إذا كانت  $F$  المحسوبة أكبر من قيمة  $F$  الجدولية عند مستوى المعنوية ودرجات الحرية المعينة ( من ملحق ٧ ) ، فإن الفرض العدمي  $H_0$  عن تساوي متوسطات المجتمعات ، يرفض لصالح الفرض البديل ،  $H_1$  . الخطوات السابقة موضحة بجدول ( ٥ - ٤ )

جدول ( ٥ - ٤ ) جدول تحليل التباين

| النسبة $F$        | متوسط المربعات             | درجات الحرية | مجموع المربعات                                     | مصدر التفسير                            |
|-------------------|----------------------------|--------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\frac{MSA}{MSE}$ | $MSA = \frac{SSA}{c-1}$    | $c-1$        | $SSA = r \sum (\bar{X}_j - \bar{X})^2$             | بين الأوساط<br>( يفسره العامل $A$ )     |
| —                 | $MSE = \frac{SSE}{(r-1)c}$ | $(r-1)c$     | $SSE = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$           | داخل العينات<br>( الخطأ أو غير المفسر ) |
| —                 | —                          | $rc-1$       | $SST = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X})^2 = SSA + SSE$ | الإجمالي                                |

$$(٨-٥) \quad \bar{X}_j = \text{متوسط العينة } j \text{ المكونة من } r \text{ مشاهدة} = (\sum_i X_{ij})/r$$

$$(٩-٥) \quad \bar{X} = \text{المتوسط الكبير لكل العينات} = (\sum_i \sum_j X_{ij})/rc$$

$$(١٠-٥) \quad SSA = \text{مجموع المربعات التي يفسرها العامل} = r \sum (\bar{X}_j - \bar{X})^2$$

$$(١١-٥) \quad SSE = \text{مجموع مربعات الخطأ والتي لا يفسرها للعامل} = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

$$(١٢-٥) \quad SST = \text{مجموع المربعات الاجمالي} = SSA + SSE = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X})^2$$

ويعطى ملحق ٧ قيم  $F$  عندما  $\alpha = 0.05$  ( الرقم الأعلى ) وعندما  $\alpha = 0.01$  ( الرقم الأسفل ) لكل زوج من درجات الحرية :

$$(١٣-٥) \quad \text{درجات حرية البسط} = c - 1$$

$$\text{حيث } c = \text{عدد العينات}$$

$$(١٤-٥) \quad \text{درجات حرية المقام} = (r-1)c$$

$$\text{حيث } r = \text{عدد المشاهدات في كل عينة .}$$

مثال ( ٩ ) : تباع شركة نفس الصابون في ثلاثة أغلفة مختلفة وبنفس السعر . يبين جدول ( ٥ - ٥ ) مبيعات 5 شهور . المبيعات موزعة توزيعاً طبيعياً ولها تباين متساو .

جدول ( ٥ - ٥ ) مبيعات خمسة شهور من الصابون في الأغلفة ١ ، ٢ ، ٣

| غلاف ( ١ ) | غلاف ( ٢ ) | غلاف ( ٣ ) |
|------------|------------|------------|
| 87         | 78         | 90         |
| 83         | 81         | 91         |
| 79         | 79         | 84         |
| 81         | 82         | 82         |
| 80         | 80         | 88         |
| 410        | 400        | 435        |

لاختبار ما إذا كان متوسط المبيعات لكل غلاف متساوياً أم لا عند مستوى معنوية 5% (أى  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  مقابل  $H_0$  : ليست متساوية ) ، تمضى الشركة كالتالى :

$$\bar{X}_1 = \frac{410}{5} = 82 \quad \bar{X}_2 = \frac{400}{5} = 80 \quad \bar{X}_3 = \frac{435}{5} = 87$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{410 + 400 + 435}{(5)(3)} = 83$$

$$SSA = 5[(82 - 83)^2 + (80 - 83)^2 + (87 - 83)^2] = 130$$

$$SSE = (87 - 82)^2 + (83 - 82)^2 + (79 - 82)^2 + (81 - 82)^2 + (80 - 82)^2 + (78 - 80)^2 + (81 - 80)^2 + (79 - 80)^2 + (82 - 80)^2 + (80 - 80)^2 + (90 - 87)^2 + (91 - 87)^2 + (84 - 87)^2 + (82 - 87)^2 + (88 - 87)^2 = 110$$

$$SST = (87 - 83)^2 + (83 - 83)^2 + \dots + (88 - 83)^2 = SSA + SSE = 240$$

وتستخدم البيانات السابقة لتكوين جدول ( ٦ - ٥ ) لتحليل التباين ANOVA

جدول ( ٦ - ٥ ) جدول ANOVA لأغلفة الصابون

| التغير                   | مجموع المربعات      | درجات الحرية    | متوسط المربعات | نسبة                                 |
|--------------------------|---------------------|-----------------|----------------|--------------------------------------|
| MSA/MSE = 65/9.17 = 7.09 | MSA = 130/2 = 65    | $c - 1 = 2$     | SSA = 130      | تفسره الأغلفة ( بين الأعمدة )        |
|                          | MSE = 110/12 = 9.17 | $(r - 1)c = 12$ | SSE = 110      | الخطأ أو غير المفسر ( داخل الأعمدة ) |
|                          | —                   | $rc - 1 = 14$   | SST = 240      | الإجمالي                             |

وحيث أن القيمة المحسوبة  $F = 7.09$  ( من جدول ٦ - ٥ ) تتجاوز القيمة الجدولية  $F = 3.88$  عند  $\alpha = 0.05$  ودرجات حرية 2 و 12 ( أنظر ملحق ٧ ) فإننا نرفض  $H_0$  ، أى الفرض القائل بأن متوسط المبيعات للأغلفة المختلفة يتساوى ، ونقبل  $H_1$  ، بأنها تختلف . ويشار إلى الإجراء السابق بأنه تحليل التباين فى اتجاه واحد أو لعامل واحد . بالنسبة لتحليل التباين فى اتجاهين أنظر المسائلين ( ٢٦ - ٥ ) و ( ٢٧ - ٥ ) .

#### مسائل محلولة

اختبار الفروض :

٥ - ١ ( أ ) ماذا يقصد باختبار الفروض ؟ ماهو الإجراء العام ؟ ( ب ) ماذا يقصد بالخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثانى ؟ ( ج ) ماذا يقصد بمستوى المعنوية ؟ بمستوى الثقة ؟

( أ ) يشير اختبار الفروض إلى قبول أو رفض ما عن خاصية غير معلومة للمجتمع مثل أحد المعالم أو شكل توزيع المجتمع والخطوة الأولى فى اختبار الفروض هى وضع فرض ما عن خاصية المجتمع غير المعلومة . ثم تؤخذ عينة عشوائية من المجتمع ، وعلى أساس من خاصية العينة المناظرة ، نقبل أو نرفض الفرض بدرجة معينة من الثقة .

(ب) يشير الخطأ من النوع الأول إلى رفض فرض صحيح . ويشير الخطأ من النوع الثاني إلى قبول فرض خاطئ . وفي التحليل الإحصائي ، يمكننا ضبط أو تحديد احتمال الخطأ من النوع الأول أو النوع الثاني . وعادة نعبّر عن احتمال الخطأ من النوع الأول أو النوع الثاني . وعادة نعبّر عن احتمال الخطأ من النوع الأول بالحرف اليوناني الفا ( $\alpha$ ) ، بينما نعبّر عن احتمال الخطأ من النوع الثاني بالحرف بيتا ( $\beta$ ) . وتصغير الخطأ من النوع الأول يترتب عليه زيادة الخطأ من النوع الثاني . والطريقة الوحيدة لتخفيض كل من  $\alpha$  و  $\beta$  هو زيادة حجم العينة .

(ج) يشير مستوى المعنوية : إلى احتمال رفض فرض صحيح أى ارتكاب خطأ من النوع الأول ( $\alpha$ ) . ويشير مستوى الثقة ( $1 - \alpha$ ) إلى احتمال قبول فرض صحيح . وفي العمل الإحصائي ، فإن مستوى المعنوية  $\alpha$  ، يحدد عادة عند 5% فيكون مستوى الثقة ،  $1 - \alpha$  عند 95% . أحياناً تكون  $\alpha = 1\%$  ( فتكون  $1 - \alpha = 99\%$  ) .

٥ - ٢ (أ) كيف يمكن اختبار الفرض أن عملة ما متوازنة ؟ (ب) مامعنى كل من الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني في هذه الحالة ؟

(أ) لاختبار فرض أن عملة ما متوازنة ، يمكننا رمي العملة عدة مرات وتسجيل عدد مرات الصورة والكتابة . فمثلاً ، يمكننا رمي العملة 20 مرة والحصول على 9 صورة بدلاً من 10 كالمعتوق ولكن لايعنى هذا بالضرورة أن العملة غير متوازنة . بالتأكيد ، حيث أن 9 « قريبة جداً » من 10 ، « فالمرجح » أننا نتعامل مع عملة متوازنة . ولكن إذا حصلنا فقط على 4 صورة في 20 رمية ، فنحن على الأرجح نتعامل مع عملة غير متوازنة لأن احتمال الحصول على 4 صورة ، ( 16 كتابة ) في 20 رمية لعملة متوازنة بالتأكيد صغير جداً ( أنظر قسم ٣ - ٣ ) .

(ب) بالرغم من أن 9 صورة في 20 رمية يشير على الأرجح إلى عملة متوازنة ، إلا أن هناك دائماً احتمالاً صغيراً أن العملة غير متوازنة . وبقبول فرض أن العملة متوازنة ، يمكن أن نكون مرتكبين خطأ من النوع الأول . لكن ، في حالة 4 صورة في 20 رمية فإن الأرجح أن العملة غير متوازنة . ولكن بقبول فرض أن العملة غير متوازنة ، فإننا نواجه الاحتمال الصغير بأن العملة متوازنة ، بما يعنى ارتكاب خطأ من النوع الثاني . عند اختبار فرض ما ، يمكن للباحث اختبار احتمال رفض فرض صحيح ،  $\alpha$  صغير للدرجة التي يرغبها . ولكن بزيادة « منطقة القبول » للفرض ، على الباحث أن يتقبل بالضرورة احتمال قبول فرض خاطئ أو ارتكاب خطأ من النوع الثاني  $\beta$  .

٥ - ٣ كيف يمكن لمنتج كابلات من الصلب أن يختبر ما إذا كان متوسط مقاومة الكسر للكابلات المنتجة (أ) 5,000 lb (ب) أكبر من 5,000 lb ؟ (ج) أقل من 5,000 lb ؟

(أ) يمكن للمنتج أن يختبر ما إذا كان متوسط قوة المقاومة للكسر للكابلات المنتجة 5,000 lb بأخذ عينة عشوائية من الكابلات وإيجاد متوسط قوة المقاومة للكسر لها ،  $\bar{X}$  ، وكلما قربت  $\bar{X}$  من القيمة المفترضة  $\mu = 5,000$  lb ، كلما كان في الإمكان أن يقبل المنتج الفرض عند مستوى المعنوية المعين ،  $\alpha$  .

(ب) قد يهتم المنتج باختبار ما إذا كان متوسط مقاومة قوة الكسر أكبر من 5,000 lb (أى  $\mu > 5,000$  lb) . لعمل ذلك ، مرة أخرى ، يأخذ المنتج عينة عشوائية من الكابلات المنتجة ويختبر متوسط قوة المقاومة للكسر  $\bar{X}$  . وكلما زادت  $\bar{X}$  عن القيمة المفترضة ( $\mu = 5,000$ ) كلما كان من الأرجح أن يقبل المنتج الفرض عند مستوى المعنوية المعين ،  $\alpha$  .

(ج) لاختبار أن متوسط قوة المقاومة للكسر لايتجاوز 5,000 lb ، يوجد المنتج متوسط قوة المقاومة للكسر من عينة عشوائية من كابلات الصلب . وكلما صغرت  $\bar{X}$  عن 5,000 lb كلما كان من الأرجح أن يقبل المنتج فرض أن متوسط قوة المقاومة للكسر أقل من 5,000 lb (أى  $\mu < 5,000$ ) ، بدرجة الثقة المحددة ،  $1 - \alpha$  .

اختبار فروض عن الوسط والنسبة في المجتمع :

٤ - ٤ يرغب منتج كابلات من الصلب اختبار ما إذا كانت الكابلات التي ينتجها لديها قوة مقاومة للكسر قدرها 5,000 lb . ففوة مقاومة للكسر أقل من 5,000 lb لن تكون ملائمة ، وقوة مقاومة للكسر أكبر من 5,000 lb ترفع التكاليف بدون

مبرر . يأخذ المنتج عينة عشوائية من 64 قطعة ويحدد أن متوسط قوة المقاومة للكسر هو 5,100 lb والانحراف المعياري هو 480 lb . هل يجب أن يقبل المنتج الفرض أن الكابلات الصلب لها قوة مقاومة للكسر 5,000 lb عند مستوى معنوية 5% ؟

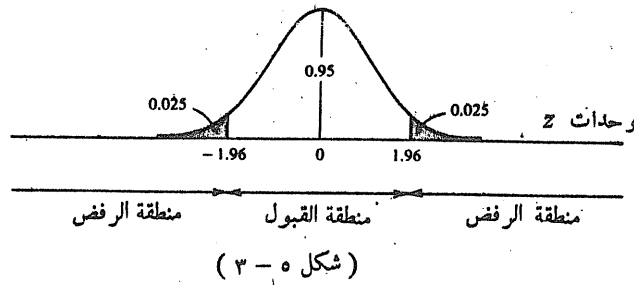
حيث أن  $\mu$  من الممكن أن تساوى ، تزيد عن ، أو تقل عن 5,000 lb فإننا نضع الفرض المدعى والفرض البديل كالآتي :

$$H_0: \mu = 5,000 \text{ lb} \quad H_1: \mu \neq 5,000 \text{ lb}$$

وحيث أن  $n > 30$  ، فإن توزيع المعاينة للوسط الطبيعي تقريباً ( ويمكن استخدام  $s$  كتقدير بدلاً من  $\sigma$  ) . وتكون منطقة القبول للاختبار عند مستوى معنوية 5% بين  $\pm 1.96$  تحت المنحنى الطبيعي القياسي ومنطقة الرفض أو المنطقة الحرجة تكون خارج هذه الحدود (أنظر شكل ٥ - ٣) . وحيث أن منطقة الرفض تقع عند الذيلين فإننا بصدد اختبار له ذيلان . وتكون الخطوة الثالثة إيجاد قيمة  $z$  المناظرة لقيمة  $\bar{X}$  :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} = \frac{5,100 - 5,000}{480 / \sqrt{64}} = \frac{100}{60} = 1.67$$

وحيث أن القيمة المحسوبة  $z$  تقع داخل منطقة القبول، فيجب أن يقبل المنتج الفرض المدعى  $H_0$  ، ويرفض  $H_1$  عند مستوى معنوية 5% ( بمستوى ثقة 95% ) . لاحظ أن هذا لا يبرهن أن  $\mu$  هي بالتأكيد تساوى 5,000 lb ولكنه « يبرهن » فقط على أنه لا يوجد شاهد إحصائي على أن  $\mu$  لا تساوى 5,000 lb عند مستوى المعنوية 5% .

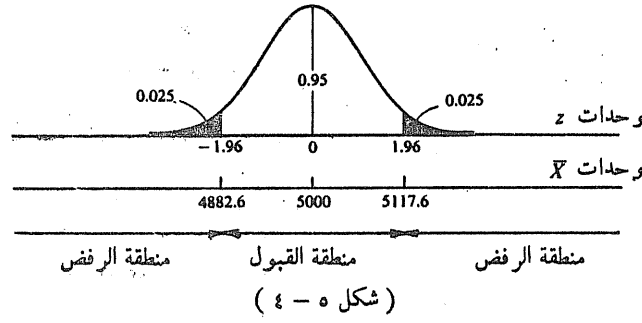


٥ - ٥ . حدد منطقتي القبول والرفض للمسألة ( ٤ - ٥ ) بوحدة الرطل .

لإيجاد منطقة القبول ( عند مستوى معنوية 5% ) بالرطل ، فإننا نمضي على نمط قسم ( ٤ - ٤ ) بإيجاد فترة الثقة 95% حول  $\mu_0$  :

$$\mu_0 \pm z\sigma_{\bar{X}} = \mu_0 \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_0 \pm z \frac{s}{\sqrt{n}} = 5,000 \pm 1.96 \frac{480}{\sqrt{64}} = 5,000 \pm 117.6$$

أي أنه لقبول  $H_0$  عند مستوى معنوية 5% ، فإن  $\bar{X}$  يجب أن تكون أكبر من 4,882.4 lb وأقل من 5,117.6 lb والملاحظة بين هذا والنتيجة السابق الحصول عليها في المسألة ( ٥ - ٤ ) موضحة في ( شكل ٥ - ٤ )



٥ - ٦ يعرف مركز تجنيد بالجيش من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بوسط  $\mu$  يساوي 80 كيلوجراماً ( حوالى 176 رطلاً جراماً ) وانحراف معياري  $\sigma$  يساوي 10 كيلوجراماً . ويرغب مركز التجنيد أن يختبر ، عند مستوى معنوية 1% ، ما إذا كان متوسط وزن مجندين هذا العام أكبر من 80 كيلوجراماً . ولعمل هذا ، فقد أخذ عينة عشوائية من 25 مجندين حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85 كيلوجراماً . كيف يمكن إجراء هذا الاختبار ؟

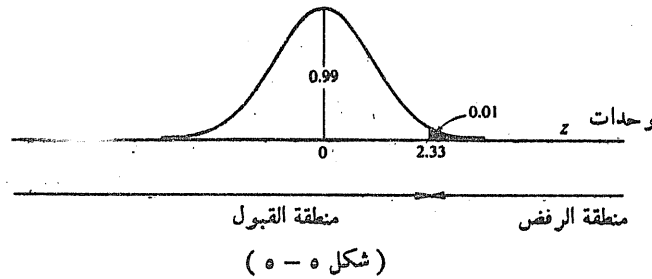
حيث أن المركز يرغب في اختبار ما إذا كان  $\mu > 80$  ، فإنه يضع الفرضين التاليين :

$$H_0: \mu = 80 \text{ kg} \quad H_1: \mu > 80 \text{ kg}$$

( تضع بعض الكتب الفرض العدمي كالاتي  $H_0: \mu \leq 80$  ، ولكن النتيجة واحدة ) . وحيث أن المجتمع الأصل يتبع التوزيع الطبيعي وكذلك  $\sigma$  معلومة ، فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي القياسي لتحديد المنطقة الحرجة ، أو منطقة الرفض ، للاختبار . وحيث أن  $H_1: \mu > 80$  فإننا بصدد اختبار الذيل الأيمن حيث تقع المنطقة الحرجة إلى اليمين من  $z = 2.33$  عند مستوى معنوية 1% ( أنظر ملحق ٣ وشكل ٥ - ٥ ) . وعليه فإن

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{85 - 80}{10 / \sqrt{25}} = 2.5$$

وحيث أن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض ، فإننا نرفض  $H_0$  ونقبل  $H_1$  ( أى  $\mu > 80 \text{ kg}$  ) . ويعنى هذا أنه إذا كانت  $\mu = 80 \text{ kg}$  فإن احتمال أن عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع تعطى متوسطاً  $\bar{X} = 85$  أقل من 1% . ومثل هذه العينة تكون بالتأكيد غير عادية . وعليه فإننا نرفض  $H_0$  عند مستوى معنوية 1% ( أى أننا واثقون 99% من اتخاذ القرار السليم ) .



٥ - ٧ تتلقى وكالة حكومية شكاوى كثيرة من المستهلكين فحواها أن صناديق مسحوق الصابون التي تباعها إحدى الشركات تحتوي على كمية أقل من 20 oz من المسحوق المعلن عنه . للتحقق من شكاوى المستهلكين ، اشترت الوكالة 9 صناديق من

المسحوق ووجدت أن  $\bar{X} = 18 \text{ oz}$  و  $s = 3 \text{ oz}$  . كيف يمكن للوكالة إجراء الاختبار عند مستوى معنوية 5% إذا علم أن كمية المسحوق في الصناديق موزعة توزيعاً طبيعياً ؟

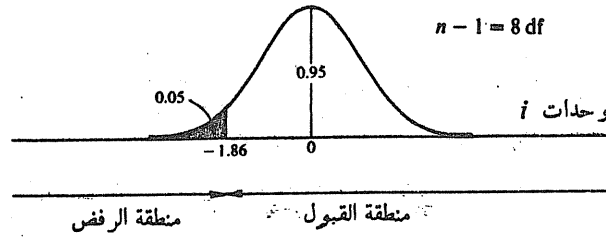
تستطيع الوكالة أن تضع  $H_0$  و  $H_1$  كالتالي :

$$H_0: \mu = 20 \text{ oz} \quad H_1: \mu < 20 \text{ oz}$$

(تضع بعض الكتب الفرض العدمي كالاتي  $H_0: \mu \geq 20$  ، ولكن النتيجة واحدة) . وحيث أن المجتمع الأصلي يتبع التوزيع الطبيعي ، ولكن  $\sigma$  غير معلومة و  $n < 30$  ، فإنه يجب استخدام توزيع  $t$  ( بدرجات حرية 8 و  $s = \sigma$  ) لتحديد منطقة الرفض لاختبار الذيل الأيسر هذا عند مستوى معنوية 5% ( أنظر شكل ٥ - ٦ ) . فيكون

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{18 - 20}{3/\sqrt{9}} = -2.0$$

وحيث أن قيمة  $t$  المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض ، فإن على الوكالة أن ترفض  $H_0$  وتقبل شكاوى المستهلكين ،  $H_1$  . لاحظ أنه لو كانت  $\alpha$  قيمتها 1% لوقعت منطقة الرفض إلى اليسار من  $t = -2.896$  ، مؤدياً ذلك إلى قبول  $H_0$  . ومن ثم فإنه من المهم تحديد مستوى المعنوية لقبل الاختبار .



( شكل ٥ - ٦ )

٥ - ٨ يريد مستشفى أن يختبر أن 90% من جرعات عقار يشتره يحتوي على 100 mg (1/1000 g) من العقار . لعمل هذا ، يأخذ المستشفى عينة من  $n = 100$  جرعة ، ويجد أن 95 منها فقط تحتوي على الكمية المناسبة . كيف يمكن للمستشفى أن يختبر هذا عند : (أ)  $\alpha = 1\%$  ؟ (ب)  $\alpha = 5\%$  ؟ (ج)  $\alpha = 10\%$  ؟

(أ) تتعلق هذه المشكلة بتوزيع ذي الخدين . ولكن ، طالما أن  $n > 30$  و  $np$  و  $n(1-p)$  أكبر من 5 ، فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي مع  $p = 0.90$  . بالنسبة للعينة

$$\bar{p} = \frac{85}{100} = 0.85 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}} = \sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{100}} = 0.03$$

وحيث أننا نرغب في إيجاد ما إذا كانت  $p \geq 0.09$  ، فإن  $H_0: p = 0.90$  و  $H_1: p \neq 0.90$  وتقع منطقة القبول للفرض  $H_0$  عند مستوى معنوية 1% في حدود  $\pm 2.58$  انحراف معياري ( أنظر ملحق ٣ ) . وحيث أن

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{0.85 - 0.90}{0.03} = -1.67$$

فإن على المستشفى أن يقبل  $H_0$  ، أي  $p = 0.90$  عند مستوى المعنوية 1% .

(ب) عند مستوى المعنوية 5% ، تقع منطقة القبول للمرض  $H_0$  في حدود  $\pm 1.96$  انحراف معياري ، وعليه فإن المشتكى يجب أيضاً أن يقبل  $H_0$  ويرفض  $H_1$  بدرجة ثقة 95% .

(ج) عند مستوى المعنوية 10% ، تقع منطقة القبول للفرض  $H_0$  في حدود  $\pm 1.64$  انحراف معياري (أنظر ملحق ٣) وعليه فإن المشتكى أن يرفض  $H_0$  ويقبل  $H_1$  ، أي  $p \neq 0.90$  . لاحظ أن القيم الأعلى للإحصائية  $\alpha$  توسع منطقة الرفض  $H_0$  (أي تزيد من احتمال قبول  $H_1$ ) . علامة على أنه مع تزايد  $\alpha$  (أي تزايد احتمال رفض المرض  $H_0$  بينما هو صحيح) ، تتناقص  $\beta$  (احتمال قبول فرض خاطئ) .

٥ - ٩ يدعى متحدث حكومي لمكافحة التلوث أن أكثر من 80% من المصانع في المنطقة تستوفى معايير مكافحة التلوث . ولكن واحدة من أنصار مكافحة التلوث لاتصدق ادعاء الحكومة . فهي تأخذ عينة عشوائية من البيانات المنشورة عن مكافحة التلوث في 64 مصنعاً في المنطقة وتجد أن منها 56 مصنعاً تستوفى معايير المكافحة . (أ) هل تؤيد بيانات العينة إدعاء الحكومة عند مستوى معنوية 5% ؟ (ب) هل يتغير القرار إذا كان حجم العينة 124 مع بقاء نسبة المصانع التي تستوفى المعايير كما كانت من قبل ؟

(أ) هنا  $H_0: p = 0.80$  و  $H_1: p > 0.80$  . وتقع منطقة رفض  $H_0$  إلى اليمين من 1.64 انحرافاً معيارياً عند  $\alpha = 5\%$  بالذمية للعينة .

$$\bar{p} = \frac{56}{64} = 0.88 \quad \text{and} \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{64}} = 0.05$$

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_p} = \frac{0.88 - 0.80}{0.05} = 1.6 \quad \text{وحيث أن :}$$

فإنها تقع داخل منطقة القبول للفرض  $H_0$  . وهذا يعني أنه ليس هناك سند إحصائي لادعاء الحكومة أن  $p > 0.8$  عند مستوى المعنوية 5% .

(ب) لو كان حجم العينة 124 بدلا من 64 ، ولكن بقيت  $\bar{p} = 0.88$  ، فإن

$$\sigma_p = \frac{(0.8)(0.2)}{124} = 0.04 \quad \text{and} \quad z = \frac{0.88 - 0.80}{0.04} = 2$$

وتقع هذه القيمة  $z$  داخل منطقة رفض  $H_0$  (ولا يكون هناك دليل ضد ادعاء الحكومة أن  $p > 0.8$ ) . لاحظ أن زيادة  $n$  (مع ثبات الأشياء الأخرى على حالها) قد رفع من احتمال قبول ادعاء الحكومة .

٥ - ١٠ أوجد احتمال قبول  $H_0$  للمسألة (٥ - ٩) إذا كانت

$$\mu = \mu_0 = 80 \quad (\text{أ}) \quad \mu = 82 \quad (\text{ب}) \quad \mu = 84 \quad (\text{ج}) \quad \mu = 85 \quad (\text{د})$$

$$\mu = 86 \quad (\text{هـ}) \quad \mu = 87 \quad (\text{و})$$

$$(\text{أ}) \text{ إذا كانت } \mu = \mu_0 = 80 , \bar{X} = 85 , \sigma = 10 \text{ و } n = 25$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{85 - 80}{10/\sqrt{25}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

احتمال قبول  $H_0$  عند  $\mu = \mu_0 = 80$  هو 0.9938 (بالكشف بمقابل قيمة  $z = 0.5$  في ملحق (٣) وإضافة 0.5

إلى العدد) . وعليه فإن احتمال رفض  $H_0$  بينما في الواقع  $H_0$  صحيح يساوي 0.9938 - 1 أو 0.0062

(ب) عند  $\mu = 82$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{85 - 82}{10/\sqrt{25}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

وعليه فاحتمال قبول  $H_0$  بينما  $H_0$  خاطيء يساوى 0.9332 ( بالكشف عن مقابل قيمة  $z = 1.5$  في ملحق ( ٣ ) وإضافة 0.5 إلى العدد ) .

$$z = (85 - 84)/2 = 1/2 \text{ and } \beta = 0.6915 \quad , \quad \mu = 84 \text{ عند (ج) } \mu$$

$$z = 0 \text{ and } \beta = 0.5 \quad , \quad \mu = 85 \text{ عند (د) } \mu$$

$$z = (85 - 86)/2 = -1/2 \text{ and } \beta = 0.5 - 0.1915 = 0.3085 \quad , \quad \mu = 86 \text{ عند (هـ) } \mu$$

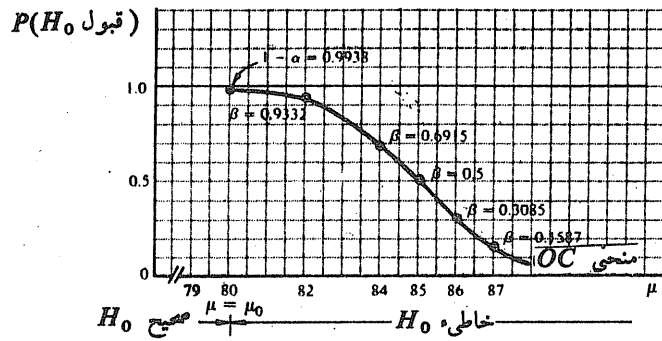
$$z = -1 \text{ and } \beta = 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \quad , \quad \mu = 87 \text{ عند (و) } \mu$$

١١ - (أ) ارسم شكلاً لإجابات المسألة ( ١٠ - ٥ ) مبيئاً على المحور الرأسى احتمال قبول  $H_0$  عندما  $\mu = 80, 84, 85, 86, 87$  (ب) ماذا يوضح هذا الشكل ؟ (ج) ما أهمية معرفة قيمة  $\beta$  ؟

(أ) أنظر شكل ( ٧ - ٥ )

(ب) منحنى توصيف العمليات : OC في شكل ( ٧ - ٥ ) يوضح قيم  $\beta$  عند القيم المختلفة عندما  $\mu > \mu_0$  . لاحظ أنه كلما زادت قيمة  $\mu$  الحقيقية عن  $\mu_0$  ، كلما صغرت  $\beta$  ( احتمال قبول  $H_0$  عندما يكون خاطئاً ) .

(ج) معرفة قيمة  $\beta$  مهم عندما يؤدي قبول فرض خاطيء ( خطأ من النوع الثانى ) إلى نتائج مدمرة ، كما ، على سبيل المثال ، عند قبول عقار على أنه فعال في حين أنه ليس كذلك . وفي مثل هذه الحالات فإننا نرغب في أن نبقى  $\beta$  صغيرة ، حتى لو كان علينا قبول قيمة مرتفعة للخطأ  $\alpha$  ( خطأ من النوع الأول ) . والطريقة الوحيدة لتخفيف كل من  $\alpha$  و  $\beta$  معاً هو زيادة حجم العينة ،  $n$  .

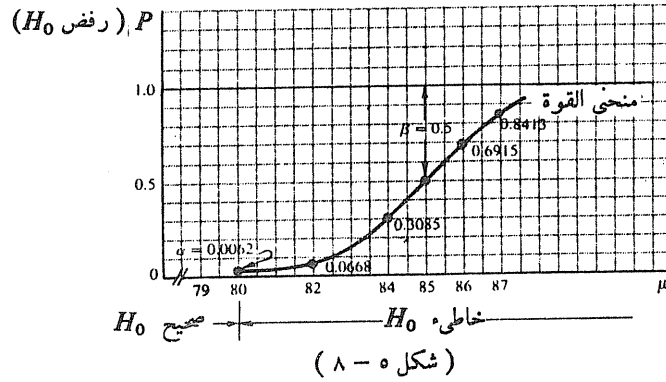


شكل ( ٧ - ٥ )

١٢ - (أ) ارسم شكلاً لإجابات المسألة ( ١٠ - ٥ ) موضعاً على المحور الرأسى احتمال رفض  $H_0$  للقيم المختلفة عندما  $\mu > \mu_0$  . ماذا يوضح هذا الشكل ؟ (ب) كيف كان يبدو منحنى OC في مسألة ( ١١ - ٥ ) (أ) لو كان الفرض البديل  $H_1 : \mu < \mu_0$  ؟

(أ) لكل قيمة  $\mu > \mu_0$  ، احتمال رفض  $H_0$  عند  $H_0$  خاطيء يساوى  $1 - \beta$  ، حيث سبق إيجاد  $\beta$  في المسألة ( ١٠ - ٥ ) من (ب) إلى (و) . بوصول نقاط  $1 - \beta$  هذه (بدءاً بقيمة  $\alpha$  ) ، نحصل على منحنى القوة ( أنظر شكل ٨ - ٥ ) . ويوضح منحنى القوة احتمال رفض  $H_0$  عند القيم المختلفة  $\mu > \mu_0$  .





لاحظ أنه كلما زادت  $\mu$  عن  $\mu_0$  ، كلما زادت قوة الاختبار ( أى ، كلما زاد احتمال رفض فرض خاطئ ) .  
 (ب) عندما  $\mu < \mu_0$  ، فإن منحنى OC ( عند قيمة فعلية  $\bar{X}$  وعند القيم البديلة المختلفة  $\mu < \mu_0$  ) يكون مشابهاً لمنحنى القوة فى شكل ( ٨ - ٥ ) . ولكن منحنى القوة سيكون مشابهاً لمنحنى OC فى شكل ( ٧ - ٥ ) .

اختبار الفروض عن الفرق بين وسطين أو الفرق بين نسبتيين :

٥ - ١٣ يرغب مشتر كبير للمصابيح الكهربائية أن يقرر ، عند مستوى معنوية 5% ، أى صنف يشتري من بين صنفين لهما نفس السعر . لعمل هذا ، فإنه يأخذ عينة عشوائية من 100 مصباح من كل صنف فيجد أن الصنف الأول يعيش فى المتوسط  $\bar{X}_1 = 980$  ساعة ، مع انحراف معيارى  $s_1$  قدره 80 ساعة وبالنسبة للصنف الثانى ،  $\bar{X}_2 = 1,010$  ساعة و  $s_2 = 120$  ساعة . أى الصنفين يجب شراؤه إذا كان المشتري يرغب فى أن يصل إلى قرار عند مستوى معنوية 5% ؟ (أ) 1% ؟ (ب)

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 &= \mu_2 & \text{or} & & H_0: \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ H_1: \mu_1 &\neq \mu_2 & \text{or} & & H_1: \mu_1 - \mu_2 &\neq 0 \\ \bar{X}_1 &= 980 \text{ h} & s_1 &= 80 \text{ h} & n_1 &= 100 \\ \bar{X}_2 &= 1,010 \text{ h} & s_2 &= 120 \text{ h} & n_2 &= 100 \end{aligned}$$

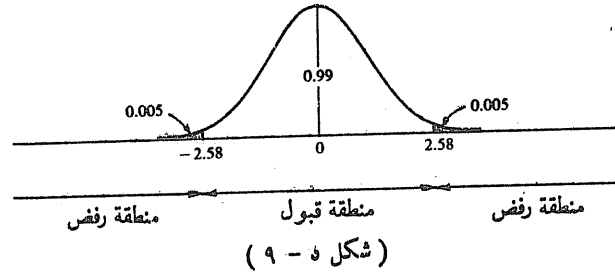
(١)

هذا اختبار ذو ذيلين وتقع منطقة القبول فى حدود  $\pm 1.96$  تحت المنحنى الطبيعي القياسى ( انظر شكل ( ٥ - ١ ) ومن ثم ،

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{80^2}{100} + \frac{120^2}{100}} = \sqrt{64 + 144} \approx 14.42 \\ z &= \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{980 - 1,010}{14.42} = \frac{-30}{14.42} = -2.08 \end{aligned}$$

وحيث أن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض للفرض  $H_0$  ، فعل المشتري أن يقبل  $H_1$  ، أى  $\mu_1 \neq \mu_2$  ، عند مستوى معنوية 5% ( ويفترض أنه سوف يقرر شراء الصنف الثانى ) .

(ب) عند مستوى معنوية 1% فإن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة القبول للفرض  $H_0$  ( انظر شكل ( ٥ - ٩ ) . ويشير هذا إلى أنه لا يوجد اختلاف جوهري بين  $\mu_1$  و  $\mu_2$  عند مستوى المعنوية 1% ، وعليه فيمكن للمشتري أن يشتري أى من الصنفين . لاحظ أنه بالرغم أن الصنف الثانى ، يعيش أكثر من الصنف الأول إلا أن الصنف الثانى له أيضاً انحراف معيارى أكبر من الصنف الأول .



٥ - ١٩ متوسط الدرجات في امتحان القبول للدراسات العليا GRE لعام ١٩٨١ لعدد 64 طالباً متقدمين للماجستير هو 640 درجة بانحراف معياري 20 درجة . وفي عام ١٩٨٢ تقدم 81 طالباً للالتحاق بالماجستير فكان متوسط درجاتهم في امتحان القبول 650 درجة بانحراف معياري 40 . (أ) هل مستوى المتقدمين عام ١٩٨١ أقل من مستوى المتقدمين ١٩٨٢ عند مستوى معنوية 1% ؟ (ب) ماهي منطقة القبول بدلالة درجات امتحان GRE ؟

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{and} \quad H_1: \mu_1 < \mu_2 \quad .(١)$$

$$\bar{X}_1 = 640 \quad s_1 = 20 \quad n_1 = 64$$

$$\bar{X}_2 = 650 \quad s_2 = 40 \quad n_2 = 81$$

وهذا اختبار الذيل الأيسر حيث تقع منطقة القبول للفرض  $H_0$  إلى اليمين من 2.33 — تحت المنحنى الطبيعي القياسي ، وعليه .

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{20^2}{64} + \frac{40^2}{81}} = \sqrt{6.25 + 19.75} = \sqrt{26} = 5.10$$

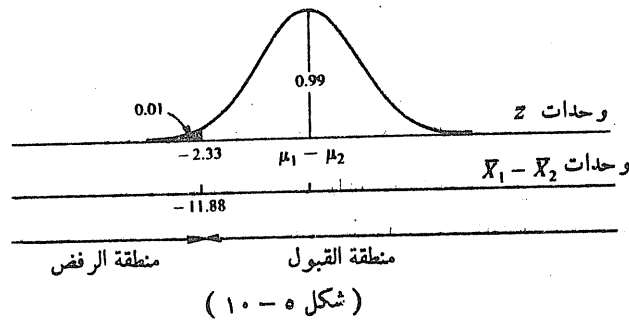
$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{640 - 650}{5.10} = \frac{-10}{5.10} = -1.96$$

وحيث أن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة القبول ، تقبل  $H_0$  . وهذا يعني أنه لا يوجد دليل إحصائي عند مستوى معنوية 1% يشير إلى أن مستوى المتقدمين يختلف بين العامين .

(ب) حيث أن الفرق المفترض بين متوسطي المجمعين في الفرض  $H_0$  هو 0 ، فيمكننا إيجاد منطقة القبول للاختبار معبراً عنها بدرجات GRE كالآتي :

$$(\mu_1 - \mu_2)_0 - z\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0 - (2.33)(5.10) = -11.88$$

وحيث أن  $X_1 = X_2 = 10$  ، فإنها تقع داخل منطقة القبول للفرض  $H_0$  ( أنظر شكل ١٠ - ٥ ) .



٥ - ١٥ يرغب الاتحاد الأمريكي لطب الأسنان في اختبار أى معجون من بين معجون أسنان أفضل في محاربة التسوس . أخذت عينة عشوائية من 21 شخصاً من مستعمل كل من المعجونين موضع الاختبار . ووجد أن متوسط عدد الفجوات للمجموعة الأولى على مدى 10 سنوات هو 25 بانحراف معياري 5 وبالنسبة للمجموعة الثانية ، متوسط عدد الفجوات 23 بانحراف معياري 5 بافتراض أن توزيع الفجوات طبيعي لمستعمل المعجون الأول والمعجون الثانى، وأن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ، حدد إذا كانت  $\mu_1 = \mu_2$  عند مستوى معنوية 5%

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{and} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\bar{X}_1 = 25 \quad s_1 = 5 \quad n_1 = 21$$

$$\bar{X}_2 = 23 \quad s_2 = 4 \quad n_2 = 21$$

وحيث أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي ولكن كلا من  $n_1$  و  $n_2$  أقل من 30 ومن المفترض أن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  (ولكنهما غير معلومين) ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسط يتبع توزيع  $t$  بدرجات حرية  $n_1 + n_2 - 2$  . وحيث أنه من المفترض أن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ( فيمكننا استخدام  $s_1^2$  كتقدير  $\sigma_1^2$  و  $s_2^2$  كتقدير  $\sigma_2^2$  ) ، فإن

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \approx \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad (١١ - ٥)$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{حيث (١٣ - ٥)}$$

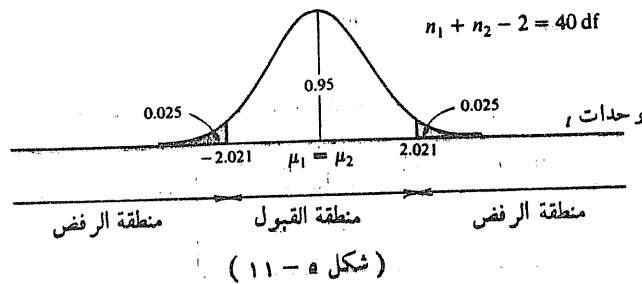
$s_1^2$  و  $s_2^2$  متوسط مرجح القيم  $s_1^2$  و  $s_2^2$  . الأوزان هي  $n_1 - 1$  و  $n_2 - 1$  ، كما في معادلة (٢ - ٨ ب) المقابلة لكل من  $s_1^2$  و  $s_2^2$  ، للحصول على تقرير « غير متحيز » لكل من  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  ( أنظر مسألة ٢ - ١٩ ) . وهذا اختبار ذو ذيلين وتقع منطقة القبول للفرض  $H_0$  داخل  $\pm 2.021$  تحت توزيع  $t$  مع  $\alpha = 5\%$  و  $n_1 + n_2 - 2 = 12 + 12 - 2 = 40 \text{ df}$

$$s^2 = \frac{20(5)^2 + 20(4)^2}{40} = \frac{500 + 320}{40} = 20.5$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \approx \sqrt{\frac{20.5}{21} + \frac{20.5}{21}} = \sqrt{\frac{42}{21}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{25 - 23}{1.41} \approx 1.42$$

وحيث أن قيمة  $t$  المحسوبة تقع داخل منطقة القبول ، فإننا لانستطيع أن نرفض  $H_0$  ، القائل بأن  $\mu_1 = \mu_2$  ( أنظر شكل ٥ - ١١ ) .



٥ - افترض أن 50% من 60 مصنعاً في إقليم ١ تخضع لمعايير مكافحة التلوث بينما 40% فقط من 40 مصنعاً في إقليم ٢ تخضع لنفس المعايير . هل نسبة المصانع التي تخضع لمعايير مكافحة التلوث أكبر معنوياً في إقليم ١ عنها في إقليم ٢ عند :  
(أ) مستوى المعنوية 5% ؟ (ب) مستوى المعنوية 10% ؟

$$\begin{aligned} H_0: p_1 &= p_2 \quad \text{and} \quad H_1: p_1 > p_2 & (١) \\ \bar{p}_1 &= 0.50 \quad \text{and} \quad n_1 = 60 \\ \bar{p}_2 &= 0.40 \quad \text{and} \quad n_2 = 40 \end{aligned}$$

هذا اختبار الذيل الأيمن وتقع منطقة القبول للمرض  $H_0$  عند  $\alpha = 0.05$  إلى اليسار من 1.64 تحت المنحنى الطبيعي القياسي :

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{n_1 \bar{p}_1 + n_2 \bar{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{60(0.5) + 40(0.4)}{60 + 40} = \frac{30 + 16}{100} = 0.46 \\ \sigma_{p_1 - p_2} &= \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.46)(0.54)}{60} + \frac{(0.46)(0.54)}{40}} \\ &= 0.00414(0.00621) = 0.01035 = 0.10 \end{aligned}$$

وحيث أن  $z = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) / \sigma_{p_1 - p_2} = (0.5 - 0.4) / 0.1 = 0.10 / 0.10 = 1$  ، فإننا نقبل  $H_0$  ، أي  $p_1 = p_2$  عند  $\alpha = 0.05$  .

(ب) عند  $\alpha = 0.10$  ، تقع منطقة القبول للفرض  $H_0$  إلى اليسار من 1.28 تحت المنحنى الطبيعي القياسي . وحيث أن قيمة  $z$  المحسوبة تقع داخل منطقة القبول ، نقبل  $H_0$  عند  $\alpha = 0.10$  أيضاً .

اختبار كاي - تربيع لجودة التوفيق والاستقلال :

٥ - ١٧ أخذ مدير مصنع عينة عشوائية من 100 يوم من الأجازات المرجية ، ووجد أن 30% من القوة العاملة في المصنع في فئة العمر 29 — 20 قد أخذوا أجازة مرضية 26 يوماً من الإجمالي 100 يوم ، وأن 40% من القوة العاملة في فئة العمر 39 — 30 قد أخذوا 37 يوماً ، وأن 20% في فئة العمر 49 — 40 قد أخذوا 24 يوماً ، وأن 10% في فئة العمر 50 فأكثر قد أخذوا 13 يوماً أجازة مرضية . كيف يمكن للمدير عند مستوى معنوية 5% أن يختبر الفرض أن العمر ليس عاملاً في أخذ أجازة مرضية ؟

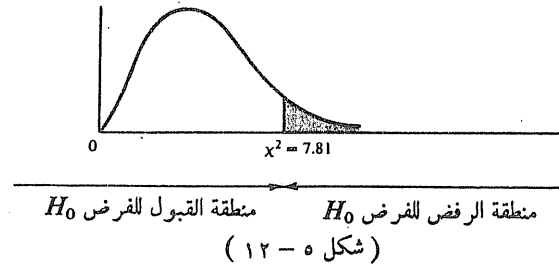
إذا كان العمر ليس عاملاً ، في أخذ أجازة مرضية ، فإن العدد المتوقع للأيام المرضية التي يأخذها العاملون في كل فئة عمر يجب أن يكون بنفس نسبة عدد العاملين في كل فئة عمر إلى العدد الإجمالي للعاملين بالمصنع ( أنظر جدول ٥ - ٧ ) :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(26 - 30)^2}{30} + \frac{(37 - 40)^2}{40} + \frac{(24 - 20)^2}{20} + \frac{(13 - 10)^2}{10} \\ &= \frac{16}{30} + \frac{9}{40} + \frac{16}{20} + \frac{9}{10} \approx 2.46 \end{aligned}$$

جدول ( ٥ - ٧ ) الأجازات المرضية المشاهدة والمتوقعة

| الإجمالي | 50 فأكثر | 40-49 | 30-39 | 20-29 | فئة العمر |
|----------|----------|-------|-------|-------|-----------|
| 100      | 13       | 24    | 37    | 26    | $f_o$     |
| 100      | 10       | 20    | 40    | 30    | $f_e$     |

درجات الحرية  $df = c - m - 1 = 4 - 0 - 1 = 3$  . وحيث أنه لم يتم تقدير أى معلمة من المجتمع ،  $df = 3$  .  $m = 0$  بمعنى أننا إذا عرفنا ثلاث قيم من الفئات الأربع ، فإن القيمة الرابعة ليست « حرة » أن تتغير . وحيث أن القيمة المحسوبة  $\chi^2 = 2.46$  أصغر من القيمة الجدولية  $\chi^2 = 7.81$  عند  $\alpha = 0.05$  ودرجات حرية  $df = 3$  ( أنظر ملحق ٦ وشكل ٥ - ١٢ ) ، فإننا لانستطيع أن نرفض  $H_0$  ، بأن العمر ليس عاملاً في أخذ أجازة مرضية . لاحظ أنه كما في حالة توزيع  $t$  فإن هناك توزيع  $\chi^2$  مختلفاً لكل من درجات الحرية المختلفة . ولكن ، اختبار  $\chi^2$  يستخدم هنا كاختبار الذيل الأيمن فقط .



٥ - ١٨ جدول ( ٥ - ٨ ) يوضح التكرارات المشاهدة والمتوقعة لأربعة أمراض نادرة ( A ، B ، C ، D ) في مدينة ما . هل الفرق جوهري بين التكرارات المتوقعة والملاحظة للأمراض عند مستوى معنوية 10% ؟

جدول ( ٥ - ٨ ) التكرارات المشاهدة والمتوقعة للأمراض النادرة A ، B ، C ، D و

|       | نوع المرض |   |   |   | إجمالي |
|-------|-----------|---|---|---|--------|
|       | A         | B | C | D |        |
| $f_o$ | 3         | 5 | 6 | 3 | 17     |
| $f_e$ | 6         | 6 | 3 | 2 | 17     |

حيث أنه بالنسبة للأمراض C و D ،  $f_e < 5$  . فإننا نضم هاتين الفئتين معاً ( أنظر جدول ٥ - ٩ ) :

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(9-5)^2}{5} = \frac{9}{6} + \frac{1}{6} + \frac{16}{5} = 4.87$$

وحيث أن قيمة  $\chi^2$  المحسوبة تزيد عن القيمة الجدولية  $\chi^2 = 4.61$  عند  $\alpha = 0.10$  و  $df = 2$  فإننا نرفض  $H_0$  ونقبل الفرض البديل  $H_1$  ، من أن هناك فرقاً معنوياً بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة لحدوث هذه الأمراض في هذه المدينة. لاحظ أنه عندما  $f_o = f_e$  فإن  $\chi^2 = 0$  . وكلما زاد الفرق بين  $f_o$  و  $f_e$  ، كلما كبرت قيمة  $\chi^2$  وزاد احتمال رفض  $H_0$  . لاحظ أيضاً أنه كنتيجة لعملية التربيع فإن  $\chi^2$  لا يمكن أن تكون سالبة .

جدول ( ٥ - ٩ ) التكرارات المشاهدة والمتوقعة للأمراض النادرة A ، B ، C ، D و

|       | نوع المرض |   |       | إجمالي |
|-------|-----------|---|-------|--------|
|       | A         | B | C و D |        |
| $f_o$ | 3         | 5 | 9     | 17     |
| $f_e$ | 6         | 6 | 5     | 17     |

٥ - ١٩ جدول (٥ - ١٠) يعطى توزيع القبول لعدد 100 طالب في 3 كليات . بمستوى معنوية 5% اختبر معنوية أن توزيع القبول هو تقريباً ذو الحدين إذا كان احتمال قبول طالب في كلية ما 0.40

جدول (٥ - ١٠) توزيع القبول لمائة طالب في ثلاث كليات

| عدد الطلاب | مرات القبول |
|------------|-------------|
| 25         | 0           |
| 34         | 1           |
| 31         | 2           |
| 10         | 3           |
| 100        |             |

احتمالات ذى الحدين الموضحة في جدول (٥ - ١١) المناظرة لمرات قبول 0، 1، 2، أو 3 لى طالب عند  $p = 0.4$  تم الحصول عليها من ملحق ١ . وعليه

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(25 - 22)^2}{22} + \frac{(34 - 43)^2}{43} + \frac{(31 - 29)^2}{29} + \frac{(10 - 6)^2}{6} = \frac{9}{22} + \frac{81}{43} + \frac{2}{29} + \frac{16}{6} = 5.03$$

وحيث أن القيمة المحسوبة  $\chi^2 = 5.03$  أصغر من القيمة الجدولية  $\chi^2 = 7.81$  عند  $\alpha = 0.05$  ودرجات حرية 3 ، فإننا لانستطيع أن نرفض  $H_0$  ، بأن توزيع القبول يتبع توزيع ذى الحدين ، عند  $p = 0.40$  . لاحظ أن توزيع  $\chi^2$  هو توزيع متصل ( كالتوزيع الطبيعي وتوزيع  $t$  ) .

جدول (٥ - ١١) ، التكرارات المشاهدة ، احتمالات ذى الحدين ، والتكرارات المتوقعة للقبول

| التكرار المتوقع للقبول | عدد المتقدمين | احتمالات ذى الحدين | التكرارات المشاهدة | عدد مرات القبول |
|------------------------|---------------|--------------------|--------------------|-----------------|
| 22                     | 100 × 0.216   | 0.216              | 25                 | 0               |
| 43                     | 100 × 0.432   | 0.432              | 34                 | 1               |
| 29                     | 100 × 0.288   | 0.288              | 31                 | 2               |
| 6                      | 100 × 0.064   | 0.064              | 10                 | 3               |
| 100                    |               | 1.000              |                    |                 |

٥ - ٢٠ يعطى جدول (٥ - ١٢) توزيع درجات اختبار القدرات الدراسية SAT لعينة عشوائية من 100 طالب جامعي . باستخدام مستوى معنوية 5% اختبر ما إذا كانت درجات SAT تتبع التوزيع الطبيعي .

جدول (٥ - ١٢) التوزيع التكرارى لدرجات SAT

| عدد الطلاب | درجات SAT |
|------------|-----------|
| 3          | 251-350   |
| 25         | 351-450   |
| 50         | 451-550   |
| 20         | 551-650   |
| 2          | 651-750   |
| 100        |           |

لإجراء هذا الاختبار ، يجب أولاً حساب  $\bar{X}$  و  $s$  لهذا التوزيع ، كما هو موضح بجدول ( ٥ - ١٣ ) :

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{49,300}{100} = 493$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2 - n\bar{X}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{24,950,000 - (100)(493)^2}{99}} \approx 80.72$$

جدول ( ٥ - ١٣ ) حساب  $\bar{X}$  و  $s$  لدرجات SAT

| الفئة   | التكرار $f_0$ | مركز الفئة $X$ | $fX$   | $X^2$   | $fX^2$     |
|---------|---------------|----------------|--------|---------|------------|
| 251-350 | 3             | 300            | 900    | 90,000  | 270,000    |
| 351-450 | 25            | 400            | 10,000 | 160,000 | 4,000,000  |
| 451-550 | 50            | 500            | 25,000 | 250,000 | 12,500,000 |
| 551-650 | 20            | 600            | 12,000 | 360,000 | 7,200,000  |
| 651-750 | 2             | 700            | 1,400  | 490,000 | 980,000    |
|         | 100           |                | 49,300 |         | 24,950,000 |

فإذا كانت درجات SAT تتبع التوزيع الطبيعي ، تقدر  $f_e$  كما هو موضح في جدول ( ٥ - ١٤ ) :

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} = \frac{(28 - 29.81)^2}{29.81} + \frac{(50 - 46.31)^2}{46.31} + \frac{(22 - 23.88)^2}{23.88} \approx 0.54$$

لاحظ أنه قد تم إدماج تكرارات أول فئتين وآخر فئتين كل في فئة واحدة لأن  $f_e < 5$  . درجات الحرية  $df = c - m - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$  . ولأنه تم تقدير معلمتين للمجتمع (  $\mu$  و  $\sigma$  ) تم تقديرهما باستخدام  $\bar{X}$  و  $s$  على الترتيب ، فإن  $m = 2$  . قيمة  $\chi^2$  الجدولية عند  $\alpha = 0.05$  و  $df = 2$  هي 5.99 .

جدول ( ٥ - ١٤ ) التكرارات المتوقعة لدرجات SAT باستخدام  $\bar{X} = 493$  و  $s = 80.72$

| درجات SAT الحد الأعلى للفئة $x$ | $z = \frac{X - 493}{80.72}$ | المساحة يسار $X$ | التكرار المتوقع $f_e$ مساحة المقطع |
|---------------------------------|-----------------------------|------------------|------------------------------------|
| $\leq 350$                      | -1.77                       | 0.0384           | $0.0384 \times 100 = 3.84$         |
| 450                             | -0.53                       | 0.2981           | $0.2597 \times 100 = 25.97$        |
| 550                             | 0.71                        | 0.7612           | $0.4631 \times 100 = 46.31$        |
| 650                             | 1.94                        | 0.9738           | $0.2126 \times 100 = 21.26$        |
| $> 750$                         | 3.18                        | 1.0000           | $0.0262 \times 100 = 2.62$         |
|                                 |                             |                  | 1.0000 100.00                      |

وحيث أن قيمة  $\chi^2$  المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية : فإنه لا يمكننا رفض  $H_0$  . أي ، لا يمكننا رفض الفرض القائل بأن العينة العشوائية لدرجات SAT تأتي من توزيع طبيعي بمتوسط  $\mu = 493$  و  $\sigma = 80.72$  .

٥ - ٢١ يوضح جدول ( ٥ - ١٥ ) للاقتراح عدد النوبات القلبية التي تعرض لها الذكور والإناث في فئات العمر المختلفة في مدينة ما . باستخدام مستوى معنوية 1% اختبار الفرض أن العمر والجنس مستقلان فيما يتعلق بحدوث النوبات القلبية .

جدول ( ٥ - ١٥ ) عدد النوبات القلبية للذكور والإناث في فئات العمر المختلفة في إحدى المدن

| فئة العمر    | ذكور | إناث | إجمالي |
|--------------|------|------|--------|
| أقل من 30    | 10   | 10   | 20     |
| من 30 إلى 60 | 50   | 30   | 80     |
| أكثر من 60   | 30   | 20   | 50     |
|              | 90   | 60   | 150    |

لاختبار هذا الفرض ، يجب تقدير التكرارات المتوقعة  $f_e$  ( أنظر جدول ٥ - ١٦ ) :

$$f_e = \frac{\sum r \sum c}{n} = \frac{(20)(90)}{150} = 12 \quad \text{للخلية في الصف الأول ، } r \text{ والعمود الأول } c$$

$$f_e = \frac{\sum r \sum c}{n} = \frac{(80)(90)}{150} = 48 \quad \text{للخلية في الصف الثاني والعمود الأول}$$

ويمكن الحصول على باقي التكرارات المتوقعة بالطرح من مجموع الصف أو العمود المناظر ، وعليه

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{(10 - 12)^2}{12} + \frac{(10 - 8)^2}{8} + \frac{(50 - 48)^2}{48} + \frac{(30 - 32)^2}{32} + \frac{(30 - 30)^2}{30} + \frac{(20 - 20)^2}{20} = 1.04$$

درجات الحرية  $df = (r - 1)(c - 1) = (3 - 1)(2 - 1) = 2$  ( المناظرة للتكرارات المتوقعة التي قننا بحسابها باستخدام المعادلة ) . من ملحق ٦ ،  $\chi^2 = 9.21$  عند  $\alpha = 0.01$  ودرجات حرية 2 . وحيث أن  $\chi^2$  المحسوبة أصغر من  $\chi^2$  الجدولية ، نقبل الفرض العدمي ،  $H_0$  ، أن العمر مستقل عن الجنس في حدوث النوبات القلبية . ولكن هذا الاتجاه لا يختلف معنوياً مع العمر عند مستوى معنوية 1% .

جدول ( ٥ - ١٦ ) التكرارات المتوقعة للنوبات القلبية

| فئة العمر    | ذكور | إناث | إجمالي |
|--------------|------|------|--------|
| أقل من 30    | 12   | 8    | 20     |
| من 30 إلى 60 | 48   | 32   | 80     |
| أكثر من 60   | 30   | 20   | 50     |
|              | 90   | 60   | 150    |

٥ - ٢٢ أعطت عينة عشوائية من 37 عاملاً فوق سن 65 في مدينة ما النتائج الواردة في جدول الاقتران ( ٥ - ١٧ ) . باستخدام مستوى المعنوية 10% اختبر الفرض بأن عدد الإناث والذكور من العاملين ، في مجموعات السن 70 و 66 و 71 وأكثر ، في المدينة مستقل عن الجنس .



جدول ( ٥ - ١٧ ) العاملون من الذكور والإناث فوق سن 65 في مدينة

| إجمالي | ذكور | إناث | فئة العمر |
|--------|------|------|-----------|
| 26     | 9    | 17   | 66 — 70   |
| 11     | 8    | 3    | 71 فأكثر  |
| 37     | 17   | 20   |           |

جدول ( ٥ - ١٨ ) يعطى التكرارات المتوقعة . بالنسبة للتحليل الأول ،

$$f_e = \frac{\sum r \sum c}{n} = \frac{(26)(20)}{37} = 14$$

بالنسبة لباقي الخلايا ، يمكن إيجاد  $f_e$  بالطرح من مجموع الصف والعمود  $df = (r - 1)(c - 1) = (2 - 1) = 1$  ، حيث أن  $df = 1$  و  $n < 50$  ، فيجب استخدام معامل تصحيح لحساب  $\chi^2$  ، كما في معادلة ( ٥ - ٤ ) :

$$\chi^2 = \sum \frac{(|f_o - f_e| - 0.5)^2}{f_e} \quad (٥ - ٤)$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(|17 - 14| - 0.5)^2}{14} + \frac{(|9 - 12| - 0.5)^2}{12} + \frac{(|3 - 6| - 0.5)^2}{6} + \frac{(|8 - 5| - 0.5)^2}{5} \quad \text{بالتسالي} \\ &= \frac{2.5^2}{14} + \frac{2.5^2}{12} + \frac{2.5^2}{6} + \frac{2.5^2}{5} = 3.25 \end{aligned}$$

وحيث أن قيمة  $\chi^2$  المحسوبة أكبر من قيمة الجدولية عند  $\alpha = 0.10$  ودرجات حرية  $df = 1$  ، فإننا نرفض الفرض  $H_0$  ، بأن الذكور والإناث فوق سن 65 يستمرون في العمل بصورة مستقلة عما إذا كانوا فوق أو تحت سن 70 في هذه المدينة . أن نسبة العاملين أعلى بدرجة جوهرية للذكور في فئة السن 66 — 70 وللإناث في فئة السن 71 فأكثر . لاحظ أن نفس التعديل المشار إليه في معادلة ( ٥ - ٤ ) يجب إجراؤه أيضاً عند اختبار جودة التوفيق في حالة  $df = 1$  و  $n < 50$  .

جدول ( ٥ - ١٨ ) العدد المتوقع للعاملين من الذكور والإناث فوق سن 65

| إجمالي | ذكور | إناث | فئة العمر |
|--------|------|------|-----------|
| 26     | 12   | 14   | 66-70     |
| 11     | 5    | 6    | 71 فأكثر  |
| 37     | 17   | 20   |           |

تحليل التباين :

٥ - ٢٣ يعطى جدول ( ٥ - ١٩ ) إنتاج 8 سنوات لمزرعة تجريبية باستخدام 4 أسمدة . بافتراض أن الإنتاج باستخدام كل سماد يتبع التوزيع الطبيعي مع تساوى التباين .

جدول ( ٥ - ١٩ ) 8 سنوات باستخدام 4 أعمدة مختلفة

| سماد ١ | سماد ٢ | سماد ٣ | سماد ٤ |
|--------|--------|--------|--------|
| 51     | 47     | 57     | 50     |
| 47     | 50     | 48     | 61     |
| 56     | 58     | 52     | 57     |
| 52     | 61     | 60     | 65     |
| 57     | 51     | 61     | 58     |
| 59     | 48     | 57     | 53     |
| 58     | 59     | 51     | 61     |
| 60     | 50     | 46     | 59     |
| 440    | 424    | 432    | 464    |

(أ) أوجد متوسط الإنتاج لكل سماد والمتوسط الكبير لكل السنوات للأعمدة الأربعة .

(ب) قدر تباين المجتمع باستخدام التباين بين المتوسطات أو الأعمدة

(ج) قدر تباين المجتمع من التباين داخل العينات أو الأعمدة

(د) اختبر الفرض بأن متوسطات المجتمع متساوية عند مستوى معنوية 5%

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_i X_{i1}}{r} = \frac{440}{8} = 55 \quad \bar{X}_2 = \frac{\sum_i X_{i2}}{r} = \frac{424}{8} = 53 \quad (أ)$$

$$\bar{X}_3 = \frac{\sum_i X_{i3}}{r} = \frac{432}{8} = 54 \quad \bar{X}_4 = \frac{\sum_i X_{i4}}{r} = \frac{464}{8} = 58$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_j \sum_i X_{ij}}{rc} = \frac{440 + 424 + 432 + 464}{(8)(4)} = 55$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_k^2}{n} \cong \frac{\sum (X - \bar{X})^2 / (n-1)}{n} \quad (ب) \quad (من معادلات (٤ - ١) ، (٤ - ٩) ، (٢ - ١) ، (٢ - ٧) )$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_k^2}{n} \cong \frac{r \sum (\bar{X}_j - \bar{X})^2}{c-1} \quad \text{وهنا}$$

حيث  $\bar{X}_j$  هو متوسط عينة أو متوسط العمود ،  $\bar{X}$  هو المتوسط الكبير  $r$  عدد المشاهدات في كل عينة و  $c$  عدد العينات .

$$\sum (\bar{X}_j - \bar{X})^2 = (55 - 55)^2 + (53 - 55)^2 + (54 - 55)^2 + (58 - 55)^2 = 14$$

$$\sigma^2 = \frac{r \sum (\bar{X}_j - \bar{X})^2}{c-1} = \frac{8(14)}{3} = \frac{112}{3} = 37.33$$

وهي تقدير لتباين المجتمع من التباين بين المتوسطات أو الأعمدة .

(ج) تقدير تباين المجتمع من التباين داخل العينات أو الأعمدة بأخذ متوسط التباينات الأربعة :

$$S_1^2 = \frac{\sum (X_{i1} - \bar{X}_1)^2}{r-1} = \frac{(51-55)^2 + (47-55)^2 + \dots + (60-55)^2}{8-1} = \frac{144}{7} \approx 20.57$$

$$S_2^2 = \frac{\sum (X_{i2} - \bar{X}_2)^2}{r-1} = \frac{(47-53)^2 + (50-53)^2 + \dots + (50-53)^2}{8-1} = \frac{208}{7} \approx 29.71$$

$$S_3^2 = \frac{\sum (X_{i3} - \bar{X}_3)^2}{r-1} = \frac{(57-54)^2 + (48-54)^2 + \dots + (46-54)^2}{8-1} = \frac{216}{7} \approx 30.86$$

$$S_4^2 = \frac{\sum (X_{i4} - \bar{X}_4)^2}{r-1} = \frac{(50-58)^2 + (61-58)^2 + \dots + (59-58)^2}{8-1} = \frac{158}{7} \approx 22.57$$

$$\sigma^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}{4} = \frac{20.57 + 29.71 + 30.86 + 22.57}{4} \approx 25.93$$

ويمكن التعبير عما سبق بطريقة أكثر إيجازاً كالآتي :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum S_j^2}{c} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_c^2}{c} \\ &= \frac{\frac{\sum (X_{i1} - \bar{X}_1)^2}{r-1} + \frac{\sum (X_{i2} - \bar{X}_2)^2}{r-1} + \frac{\sum (X_{i3} - \bar{X}_3)^2}{r-1} + \frac{\sum (X_{i4} - \bar{X}_4)^2}{r-1}}{c} \\ &= \frac{\sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}{(r-1)c} = \frac{144 + 208 + 216 + 158}{(7)(4)} = \frac{726}{28} = 25.93 \end{aligned}$$

$$F = \frac{\text{التباين بين متوسطات العينات}}{\text{التباين داخل العينات}} = \frac{37.33}{25.93} = 1.44 \quad (د)$$

قيمة  $F$  من ملحق (ص) عند  $\alpha = 0.05$  ، درجات حرية  $3 = c - 1$  في البسط و  $df = (r-1)c = 28$  في المقام هي 2.95 . وحيث أن القيمة المحسوبة  $F$  أصغر من القيمة الجدولية ، فإننا نقبل  $H_0$  ، بأن متوسطات المجتمع متساوية .

٢٤ - (أ) من النتائج التي حصلنا عليها في المسألة (٥ - ٢٣) ، أوجد قيمة كل من SSA ، SSE و SST و درجات الحرية لكل من MSA ، MSE و SSA ، SSE و SST . ونسبة  $F$  . (ب) من نتائج (أ) كون جدول تحليل التباين ANOVA على نمط جدول (٥ - ٤) . (ج) قم بتحليل التباين وارسم شكلاً يوضح مناطق القبول والرفض للفرض  $H_0$  .

$$SSA = r \sum (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 = 112 \text{ [from Prob. 5.23(b)]} \quad (1)$$

$$SSE = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 = 726 \text{ [from Prob. 5.23(c)]}$$

$$\begin{aligned} SST &= \sum \sum (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 = (51-55)^2 + (47-55)^2 + \dots + (59-55)^2 = 838 \\ &= SSA + SSE = 112 + 726 = 838 \end{aligned}$$

درجات الحرية التي تقابل كل منها  $df(SSA) = c - 1 = 4 - 1 = 3$  ،  $df(SSE) = (r-1)c = (8-1)(4) = 28$  ،  $df(SST) = rc - 1 = 32 - 1 = 31$  ، وهي أيضاً مجموع درجات الحرية التي تقابل SSA زائداً درجات الحرية التي تقابل SSE

$$MSA = \frac{SSA}{c-1} = \frac{112}{3} = 37.33$$

$$MSE = \frac{SSE}{(r-1)c} = \frac{726}{28} = 25.93$$

$$F = \frac{MSA}{MSE} = \frac{37.33}{25.93} = 1.44$$

(ب) أنظر جدول ( ٢٠ - ٥ ) .

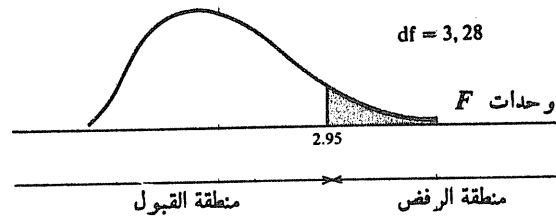
(ج) الفروض موضع الاختبار هي

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$  مقابل  $H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  ليست متساوية

وحيث أن القيمة المحسوبة  $F = 1.44$  أصغر من القيمة الجدولية  $F = 2.95$  عند  $\alpha = 0.05$  ودرجات حرية 3 و 28، فإننا نقبل  $H_0$  (أنظر شكل ١٣-٥) . أى أننا نقبل الفرض العدمي،  $H_0$  بأن  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$  وحيث أننا نعلم ( من المسألة ٥ - ٢٣ ) أن المجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي ولها تباينات متساوية ، فإننا ننظر إلى العينات الأربع على أنها صادرة عن نفس المجتمع . لاحظ أن MSE تقدير جيد للتباين  $\sigma^2$  سواء كانت  $H_0$  صحيحة أم لا . ولكن MSA تقريباً تساوى MSE فقط إذا كانت  $H_0$  صحيحة ( فتكون  $F = 1$  ) . لاحظ أن توزيع  $F$  متصل وأنه يستخدم هنا لاختبار الذيل الأيمن فقط .

جدول ( ٢٠ - ٥ ) ANOVA باتجاه واحد - لتجارب الأسمدة

| نسبة $F$       | متوسط المربعات | درجات الحرية    | مجموع المربعات | التفسير                              |
|----------------|----------------|-----------------|----------------|--------------------------------------|
| MSA/MSE = 1.44 | MSA = 37.33    | $c - 1 = 3$     | SSA = 112      | الذي تفسره الأسمدة ( بين الأعمدة )   |
|                | MSE = 25.93    | $(r - 1)c = 28$ | SSE = 726      | الخطأ أو غير المفسر ( داخل الأعمدة ) |
|                | —              | $rc - 1 = 31$   | SST = 838      | الإجمالي                             |



شكل ( ١٣ - ٥ )

٥ - ٢٥ يعطى جدول ( ٢١ - ٥ ) إنتاج مررعة تجريبية والتي استخدمت أربعة أسمدة وثلاثة مبيدات حشرية بحيث أن كل رقعة أرض كان لها فرصة متساوية في أن تطلق كل توليفة من نوع سماد مع نوع مبيدات حشرية (تصميم عشوائي تام) .

(أ) أوجد متوسط الإنتاج لكل سماد  $\bar{X}_r$  ، ولكل مبيد حشري  $\bar{X}_i$  وللمعينة ككل  $\bar{X}$  .

(ب) أوجد إجمال مجموع المربعات ، SST ، مجموع مربعات للأسمدة أو عامل A ، SSA ، للمبيدات الحشرية ، أو عامل B ، SSB ، وللخطأ أو البواقي غير المفسرة SSE .

- (ج) أوجد درجات الحرية لكل من  $SST$  ،  $SSE$  ،  $SSB$  ،  $SSA$  .  
 (د) أوجد  $MSB$  ،  $MSA$  ،  $MSE$  ،  $MSB/MSE$  ،  $MSA/MSE$  .

جدول ( ٥ - ٢١ ) الإنتاج باستخدام 4 أسمدة و 3 مبيدات حشرية<sup>1</sup>

|                 | سماد ١ | سماد ٢ | سماد ٣ | سماد ٤ |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| مبيد حشري ( ١ ) | 21     | 12     | 9      | 6      |
| مبيد حشري ( ٢ ) | 13     | 10     | 8      | 5      |
| مبيد حشري ( ٣ ) | 8      | 8      | 7      | 1      |

مبيد حشري ( ٣ )

(أ) متوسط العمود لكل سماد

$$\bar{X}_{.j} = \frac{\sum_i X_{ij}}{r} \quad (٥ - ١٨)$$

متوسط الصف لكل مبيد حشري

$$\bar{X}_{i.} = \frac{\sum_j X_{ij}}{c} \quad (٥ - ٨ ب)$$

المتوسط الكبير

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_i \bar{X}_{i.}}{r} = \frac{\sum_j \bar{X}_{.j}}{c} \quad (٥ - ٩ ب)$$

والتقاط في رمز الدليل تشير إلى أن هناك أكثر من عامل موضع الاعتبار . النتائج موضحة في جدول ( ٥ - ٢٢ ) .

جدول ( ٥ - ٢٢ ) الإنتاج باستخدام 4 أسمدة و 3 مبيدات حشرية ( مع متوسطات الصفوف والأعمدة والمتوسطات الكبيرة )

|                 | سماد ١              | سماد ٢              | سماد ٣             | سماد ٤             | ١ متوسط العينة      |
|-----------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| مبيد حشري ( ١ ) | 21                  | 12                  | 9                  | 6                  | $\bar{X}_{1.} = 12$ |
| مبيد حشري ( ٢ ) | 13                  | 10                  | 8                  | 5                  | $\bar{X}_{2.} = 9$  |
| مبيد حشري ( ٣ ) | 8                   | 8                   | 7                  | 1                  | $\bar{X}_{3.} = 6$  |
| متوسط العينة    | $\bar{X}_{.1} = 14$ | $\bar{X}_{.2} = 10$ | $\bar{X}_{.3} = 8$ | $\bar{X}_{.4} = 4$ | $\bar{\bar{X}} = 9$ |

$$SST = \sum \sum (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$$

(ب)

$$\begin{array}{llll} (21-9)^2 = 144 & (12-9)^2 = 9 & (9-9)^2 = 0 & (6-9)^2 = 9 \\ (13-9)^2 = 16 & (10-9)^2 = 1 & (8-9)^2 = 1 & (5-9)^2 = 16 \\ (8-9)^2 = \frac{1}{161} & (8-9)^2 = \frac{1}{11} & (7-9)^2 = \frac{4}{5} & (1-9)^2 = \frac{64}{89} \end{array}$$

$$SST = 161 + 11 + 5 + 89 = 265$$

$$SSA = r \sum (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 \quad (أ) \text{ (التغير بين الأعمدة)}$$

$$= 3[(14-9)^2 + (10-9)^2 + (8-9)^2 + (4-9)^2]$$

$$= 3(25 + 1 + 1 + 25) = 156$$

$$SSB = c \sum (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 \quad (ب) \text{ (التغير بين الصفوف)}$$

$$= 4[(12-9)^2 + (9-9)^2 + (6-9)^2]$$

$$= 4(9 + 0 + 9) = 72$$

$$SSE = SST - SSA - SSB = 265 - 156 - 72 = 37$$

$$df \text{ of } SSA = c - 1 = 3 \quad (ج)$$

$$df \text{ of } SSB = r - 1 = 2$$

$$df \text{ of } SSE = (r-1)(c-1) = 6$$

$$df \text{ of } SST = rc - 1 = 11$$

$$MSA = \frac{SSA}{c-1} = \frac{156}{3} = 52 \quad (د)$$

$$MSB = \frac{SSB}{r-1} = \frac{72}{2} = 36$$

$$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)} = \frac{37}{11} = 3.36$$

$$\frac{MSA}{MSE} = \frac{52}{3.36} = 15.48 \quad \text{نسبة } F \text{ للعامل A (مصاد)}$$

$$\frac{MSB}{MSE} = \frac{36}{3.36} = 10.71 \quad \text{نسبة } F \text{ للعامل B (مبيد)}$$

٥ - ٢٦ (أ) من نتائج مسألة (٥ - ٢٥) كون جدول ANOVA على نمط جدول (٥ - ٤).

(ب) عند مستوى معنوية 1% اختبر الفرض بأن متوسطات المجتمعات للعامل A (الأسمدة) متطابقة.

(ج) عند مستوى معنوية 1% اختبر الفرض بأن متوسطات المجتمعات للعامل B (المبيدات الحشرية) متطابقة.

(أ) أنظر جدول (٥ - ٢٣)

جدول ( ٥ - ٢٣ ) جدول ANOVA لعاملين لقياس تأثير الأسمدة والمبيدات على الإنتاج

| التفسير                               | مجموع المربعات | درجات الحرية         | متوسط المربعات | F                         |
|---------------------------------------|----------------|----------------------|----------------|---------------------------|
| الذي تفسره الأسمدة<br>( بين الأعمدة ) | SSA = 156      | $c - 1 = 3$          | MSA = 52       | $\frac{MSA}{MSE} = 15.48$ |
| الذي تفسره المبيدات<br>( بين الصفوف ) | SSB = 72       | $r - 1 = 2$          | MSB = 36       | $\frac{MSB}{MSE} = 10.71$ |
| الخطأ أو غير المفسر                   | SSE = 37       | $(r - 1)(c - 1) = 6$ | MSE = 3.36     |                           |
| الإجمالي                              | SST = 265      | $rc - 1 = 11$        | —              |                           |

(ب) الفروض موضع الاختبار هي :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \text{ مقابل } H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \text{ ليست متساوية}$$

حيث  $\mu$  تشير إلى المتوسطات المختلفة لمجتمعات العامل A ( السماد ) . بالنسبة للعامل A ،  $F = 9.78$  ( من ملحق ٧ )  
لدرجات حرية 3 ( في البسط ) و 6 ( في المقام ) و  $\alpha = 0.01$  . وحيث أن القيمة المحسوبة  $F = 15.48$  ( من  
جدول ٥ - ٢٣ ) تزيد عن القيمة الجدولية  $F$  ، فإننا نرفض  $H_0$  ونقبل  $H_1$  ، بأن متوسطات المجتمعات للعامل  
A ( السماد ) ليست متساوية .

(ج) المجموعة الثانية من الفروض موضع الاختبار هي

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  مقابل  $H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3$  ليست متساوية حيث تشير  $\mu$  هنا إلى المتوسطات المختلفة للعامل  
B ( المبيدات ) . بالنسبة للعامل B ،  $F = 10.92$  ( من ملحق ٧ ) لدرجات حرية 2 و 6 و  $\alpha = 1.01$  .  
وحيث أن القيمة المحسوبة  $F = 10.71$  أصغر من القيمة الجدولية  $F$  ، فإننا نقبل  $H_0$  ، بأن متوسطات المجتمعات  
للعامل B ( المبيد ) متساوية . لاحظ أنه في تحليل التباين في اتجاهين أو لعاملين ( مع جدول ANOVA كجدول  
٥ - ٢٣ ) فإنه يمكننا اختبار فرضين عديمين ، واحد للعامل A وواحد للعامل B .

٥ - ٢٧ يملأ جدول ٥ - ٢٤ دخل السنة الأولى ( بآلاف الدولارات ) للطلاب الحاصلين على درجة الماجستير من 5 مدارس حسب  
ترتيبهم عند التخرج في 3 مجموعات . اختبر عند مستوى معنوية 5% أن المتوسطات متطابقة ( أ ) لمجتمعات المدارس  
و ( ب ) لمجتمعات الترتيب عند التخرج .

جدول ( ٥ - ٢٤ ) دخل السنة الأولى لخريجي الماجستير من 5 مدارس و 3 مجموعات

حسب ترتيب التخرج ( بآلاف الدولارات )

| متوسط العينة     | مدرسة ٥             | مدرسة ٤             | مدرسة ٣             | مدرسة ٢             | مدرسة ١             | الترتيب في الدفعة           |
|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------------|
| $\bar{X}_1 = 16$ | 12                  | 14                  | 16                  | 18                  | 20                  | $\frac{1}{3}$ الدفعة الأعلى |
| $\bar{X}_2 = 14$ | 10                  | 12                  | 13                  | 16                  | 19                  | $\frac{1}{3}$ الدفعة الوسطى |
| $\bar{X}_3 = 12$ | 8                   | 10                  | 10                  | 14                  | 18                  | $\frac{1}{3}$ الدفعة الدنيا |
| $\bar{X} = 14$   | $\bar{X}_{.5} = 10$ | $\bar{X}_{.4} = 12$ | $\bar{X}_{.3} = 13$ | $\bar{X}_{.2} = 16$ | $\bar{X}_{.1} = 19$ | متوسط العينة                |

(أ) الفروض موضع الاختبار هي :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  مقابل  $H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$  ليست متساوية

حيث  $\mu$  تشير إلى المتوسطات المختلفة للمجتمعات للعامل A ( المدرسة ) .

$$SST = \sum \sum (X_{ij} - \bar{X})^2$$

$$\begin{array}{ccccc} (20 - 14)^2 = 36 & (18 - 14)^2 = 16 & (16 - 14)^2 = 4 & (14 - 14)^2 = 0 & (12 - 14)^2 = 4 \\ (19 - 14)^2 = 25 & (16 - 14)^2 = 4 & (13 - 14)^2 = 1 & (12 - 14)^2 = 4 & (10 - 14)^2 = 16 \\ (18 - 14)^2 = \frac{16}{77} & (14 - 14)^2 = \frac{0}{20} & (10 - 14)^2 = \frac{16}{21} & (10 - 14)^2 = \frac{16}{20} & (8 - 14)^2 = \frac{36}{56} \end{array}$$

$$SST = 77 + 20 + 21 + 20 + 56 = 194$$

$$SSA = r \sum (\bar{X}_j - \bar{X})^2 \quad (\text{التفسير بين الأعمدة})$$

$$= 3[(19 - 14)^2 + (16 - 14)^2 + (13 - 14)^2 + (12 - 14)^2 + (10 - 14)^2] = 3(25 + 4 + 1 + 4 + 16)$$

$$= 150$$

$$SSB = c \sum (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = 5[(16 - 14)^2 + (14 - 14)^2 + (12 - 14)^2] = 5(4 + 0 + 4) = 40$$

$$SSE = SST - SSA - SSB = 194 - 150 - 40 = 4$$

ويظهر تلخيص هذه النتائج في جدول ( ٥ - ٢٥ ) . من ملحق  $F = 3.84$  لدرجات حرية 4 و 8 و  $\alpha = 0.05$  .  
وحيث أن القيمة المحسوبة  $F = 70$  فإننا نرفض  $H_0$  ونقبل  $H_1$  ، بأن متوسطات المجتمع لدخل السنة الأولى للمدارس الخمس مختلفة .

جدول ( ٥ - ٢٥ ) جدول ANOVA باتجاهين لدخل السنة الأولى

| التفسير                                   | مجموع المربعات | درجات الحرية         | متوسط المربعات               | F                                         |
|-------------------------------------------|----------------|----------------------|------------------------------|-------------------------------------------|
| الذي تفسره المدارس<br>(A) ( بين الأعمدة ) | SSA = 150      | $c - 1 = 4$          | $MSA = \frac{150}{4} = 37.5$ | $\frac{MSA}{MSE} = \frac{37.5}{0.5} = 70$ |
| الذي يفسره الترتيب<br>(B) ( بين الصفوف )  | SSB = 40       | $r - 1 = 2$          | $MSB = \frac{40}{2} = 20$    | $\frac{MSB}{MSE} = \frac{20}{0.5} = 40$   |
| الخطأ<br>أو غير المفهر                    | SSE = 4        | $(r - 1)(c - 1) = 8$ | $MSE = \frac{4}{8} = 0.5$    |                                           |
| الإجمالي                                  | SST = 194      | $rc - 1 = 14$        | —                            |                                           |

(ب) الفروض موضع الاختبار هي :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  مقابل  $H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3$  ليست متساوية

حيث  $\mu$  تشير إلى متوسطات المجتمعات المختلفة للعامل B ( الترتيب في الدفعة ) . من جدول ( ٥ - ٢٥ ) نحصل على  
القيمة المحسوبة  $F = MSB / MSE = 40$  . وحيث أن هذه القيمة أكبر من القيمة الجدولية  $F = 4.46$



لدرجات حرية 2 و 8 و  $\alpha = 0.05$  ، فإننا نرفض  $H_0$  ونقبل  $H_1$  ، بأن متوسطات المجتمع لدخل السنة الأولى للمجموعات الثلاث للترتيب في الدفعة مختلفة . وعليه فإن كلا من نوع المدرسة والترتيب في الدفعة ذا دلالة إحصائية عند مستوى معنوية 5% في تفسير الاختلافات في دخل السنة الأولى . ويفترض التحليل السابق ضمناً أن تأثير العاملين قابل للإضافة ( أى أنه ليس هناك تفاعل بينهما ) .

### مسائل إضافية

#### اختبار الفروض

- ٢٨ - (أ) ماذا تسمى خطأ قبول فرض خاطئ ؟ رفض فرض صحيح ؟  
 (ب) ماهو الرمز المستخدم عادة لاحتمال خطأ من النوع الأول ؟ ماهو الإسم البديل له ؟  
 (ج) ماهو الرمز المستخدم عادة لاحتمال خطأ من النوع الثاني ؟  
 (د) ماهو مستوى الثقة ؟ (هـ) إذا خفضت  $\alpha$  من 5 إلى 1% ، ماذا يحدث للمعامل  $\beta$  ؟  
 الإجابة (أ) خطأ من النوع الثاني ، خطأ من النوع الأول (ب)  $\alpha$  ، مستوى المعنوية (ج)  $\beta$  (د)  $\alpha - \beta$  (هـ) تزيد  $\beta$   
 ٢٩ - عند مستوى معنوية 5% ، متى يكون من الأرجح أن تقبل كلية الدراسات العليا الفرض بأن متوسط درجات امتحان القبول GRE للمتقدمين : (أ) يساوى 600 ؟ (ب) أكبر من 600 ؟ (ج) أصغر من 600 ؟  
 الإجابة (أ) كلما قرب متوسط العينة ،  $\bar{X}$  ، من 600 (ب) كلما كانت  $\bar{X} > 600$  (ج) كلما كانت  $\bar{X} < 600$

#### اختبار فروض عن الوسط والنسبة في المجتمع :

- ٣٠ - يحتاج صاحب مصنع طائرات أن يشتري صفائح ألومنيوم بسمك 0.05 in . الصفائح الأقل سمكاً غير ملائمة والأكثر سمكاً أثقل من اللازم . يأخذ المنتج عينة عشوائية من 100 صفيفة من مورد الصفائح الألومنيوم ويجد أن متوسط سمكها 0.048 in وانحراف معياري 0.01 in . هل يجب على المنتج شراء صفائح الألومنيوم من هذا المورد إذا كان يرغب في أن يتخذ قراراً عند مستوى معنوية 5% ؟

الإجابة : لا

- ٣١ - حدد منطقة القبول لمسألة ( ٣٠ - ٥ ) بالبوصة .

الإجابة : من 0.04804 إلى 0.05196 بوصة .

- ٣٢ - يعرف مركز تجنيد بالبحرية من الجزيرة الماضية أن أطوال المجندين موزعة طبيعياً بمتوسط  $\mu$  ، 180 cm ( $1 \text{ cm} = 1/100 \text{ m}$ ) وانحراف معياري  $\mu$  ، 10 cm . ويرغب مركز التجنيد أن يختبر عند مستوى معنوية 1% الفرض أن متوسط طول المجندين هذا العام أكبر من 180 cm . لعمل هذا ، يأخذ ضابط التجنيد عينة عشوائية من 46 مجنداً ويجد أن متوسط الطول في العينة 182 cm . (أ) هل يقبل ضابط التجنيد الفرض ؟ (ب) ماهى منطقة الرفض للاختبار بالسنتيمتر ؟

الإجابة : (أ) لا (ب) أقل من 182.9125 cm .

- ٣٣ - ترغب مشترية لأجزاء الكترونية أن تختبر الفرض أنها ، أى الأجزاء ، تعيش أقل من 100 ساعة . . لعمل هذا فإنها تأخذ عينة عشوائية مكونة من 16 من هذه المكونات وتجد أنها في المتوسط تعيش 96 ساعة مع انحراف معياري 8 ساعة . فإذا كانت

المشترية تعلم أن عمر الأجزاء موزع طبقاً للتوزيع الطبيعي ، فهل يجب أن تقبل الفرض أنها تعيش لمدة أقل من 100 ساعة عند ( أ ) مستوى الثقة 95% ؟ (ب) مستوى الثقة 99% ؟

الإجابة : ( أ ) نعم (ب) لا

٥ - ٣٤ في الماضي ، حصل 20% من المتقدمين للقبول ببرنامج ماجستير على درجات في امتحان القبول GRE فوق 650 . من بين 88 طالباً قبلوا بالبرنامج عام ١٩٨١ ، حصل 22 طالباً على درجات GRE أعلى من 650 . هل حصل المتقدمون للبرنامج عام ١٩٨١ على درجات GRE أعلى من السنوات السابقة عند مستوى معنوية 5% ؟

الإجابة : لا

٥ - ٣٥ أوجد احتمال قبول  $H_0$  ( أن  $\mu = 650$  ) للمسألة ٥ - ٣٤ إذا كانت  $\sigma_p = 0.043$  و ( أ )  $p = 0.20$  (ب)  $p = 0.22$  (ج)  $p = 0.24$  (د)  $p = 0.25$  (هـ)  $p = 9.26$  (و)  $p = 0.28$  .  
الإجابة : ( أ ) 0.877 (ب) 0.758 (ج) 0.591 (د) 0.5 (هـ) 0.409 (و) 0.242

٥ - ٣٦ ما قيمة  $\alpha$  عند  $p = 0.20$  في المسألة ( ٥ - ٣٤ ) (ب) كيف يمكن اشتقاق منحني OC للمسألة ( ٥ - ٣٤ ) ؟  
الإجابة : ( أ ) 0.123 (ب) يضم قيمة  $\alpha - 1$  عندما  $p = 0.20$  إلى قيم  $\beta$  السابق إيجادها في مسألة ( ٥ - ٣٥ )  
(ب) إلى ( و ) المقابلة للقيم المختلفة للنسبة  $p > 0.20$

٥ - ٣٧ أوجد احتمال رفض  $H_0$  ( أن  $\mu = 650$  ) للمسألة ( ٥ - ٣٤ ) إذا كانت  $\sigma_p = 0.043$  و ( أ )  $p = 0.20$  ، (ب)  $p = 0.22$  ، (ج)  $p = 0.24$  ، (د)  $p = 0.25$  ، (هـ)  $p = 0.26$  ، (و)  $p = 0.28$  .  
الإجابة : ( أ ) 0.123 (ب) 0.242 (ج) 0.409 (د) 0.5 (هـ) 0.591 (و) 0.758

٥ - ٣٨ كيف يمكن الحصول على منحني القوة للمسألة ( ٥ - ٣٤ ) ؟  
الإجابة : يضم القيم السابق الحصول عليها في المسألة ( ٥ - ٣٧ ) من ( أ ) إلى ( و ) المناظرة للقيم المختلفة للنسبة  $p > 0.2$

اختبار الفروع عن الفرق بين وسطين أو الفرق بين نسبتيين :

٥ - ٣٩ ترغب شركة استثمارات أن تقرر بمستوى معنوية 5% إذا كانت أجور عمال البناء تختلف جوهرياً في نيويورك عنها في شيكاغو . وقد أعطت عينة عشوائية من 100 عامل بناء في نيويورك متوسط أجر أسبوعي قدره \$400 مع انحراف معياري قدره \$100 . وفي شيكاغو ، أعطت عينة عشوائية من 75 عامل متوسط أجر أسبوعي قدره \$375 مع انحراف معياري قدره \$80 . هل هناك فرق معنوي بين أجور عمال البناء في نيويورك وشيكاغو عند ( أ ) مستوى 5% ؟ (ب) مستوى 10% ؟

الإجابة : ( أ ) لا (ب) نعم

٥ - ٤٠ عينة عشوائية من 21 لاعباً من فريق AFC للرجم أعطت متوسطاً لوزن اللاعبين قدره 265 lb مع انحراف معياري قدره 30 lb . بينما عينة عشوائية من 11 لاعباً من فريق NFC أعطت متوسط وزن قدره 240 lb مع انحراف معياري قدره 20 lb . هل متوسط الوزن لكل لاعبي فريق AFC أعلى من المتوسط لفريق NFC عند مستوى معنوية 1% ؟

الإجابة : نعم

٥ - ٤١ عينة عشوائية من 100 جندي تشير إلى أن 20% تزوجوا في السنة ١ . بينما 30% تزوجوا في السنة ٢ . حدد هل يقبل الفرض أن نسبة الذين تزوجوا في السنة ١ أصغر من الذين تزوجوا في السنة ٢ ( أ ) عند مستوى معنوية 5% (ب) عند مستوى معنوية 1% .

الإجابة : ( أ ) اقبل الفرض (ب) ارفض الفرض .

اختبارات كاي - تربيع لجودة التوفيق والاستقلال :

هـ - ٢ : أُلقيت نردة 60 مرة فأعطت النتائج التالية : ظهر العدد 1 ، 12 مرة ، ظهر العدد 2 ، 8 مرات ، ظهر العدد 3 ، 13 مرة ، ظهر العدد 4 ، 12 مرة ، ظهر العدد 5 ، 7 مرات ، وظهر العدد 6 ، 8 مرات . هل النردة متوازنة عند مستوى معنوية 5% ؟

الإجابة : نعم

هـ - ٣ : ٤٣ يحتوي وعاء على كرات من أربعة ألوان : الأخضر ، الأبيض ، الأحمر ، والأزرق . التفتت كرة من الوعاء وسجل لونها . ثم أعيدت الكرة إلى الوعاء ، وخلطت الكرات جيداً والتفتت كرة أخرى . وأعيدت هذه العملية 18 مرة وكانت النتيجة أن ظهرت كرة خضراء 8 مرات ، وظهرت كرة بيضاء 7 مرات ، وظهرت كرة حمراء مرة واحدة ، وظهرت كرة زرقاء مرتين . هل يحتوي الوعاء على أعداد متساوية من الكرات الخضراء والبيضاء والحمراء أو الزرقاء ؟ اختبر الفرض عند مستوى معنوية 5% .

الإجابة : يجب قبول الفرض عند مستوى معنوية 5% أن الوعاء يحتوي على كرات منها 6 خضراء ، 6 بيضاء ، 6 حمراء أو زرقاء .

هـ - ٤ : تشير عينة عشوائية من 64 مدينة في الولايات المتحدة أن عدد الأيام الممطرة أثناء شهر يونيو كما في جدول ( هـ - ٢٦ ) هل تتبع الأيام الممطرة في مدن الولايات المتحدة التوزيع الطبيعي بوسط  $\mu = 3$  وانحراف معياري  $\sigma = 2$  عند مستوى المعنوية 10% ؟

الإجابة : لا .

جدول ( هـ - ٢٦ ) عدد الأيام الممطرة خلال شهر يونيو في 64 مدينة أمريكية

| عدد المدن | عدد الأيام الممطرة |
|-----------|--------------------|
| 10        | 0                  |
| 12        | 1                  |
| 22        | 2                  |
| 13        | 3                  |
| 6         | 4                  |
| 1         | 5                  |
| 64        |                    |

هـ - ٥ : يعطى جدول الاقتران هـ - ٢٧ عدد الأجزاء الألكترونية المقبولة وغير المقبولة المنتجة خلال ساعات الصباح المختلفة في عينة عشوائية من إنتاج المصنع . هل يجب قبول أو رفض الفرض عند مستوى معنوية 5% بأن إنتاج الوحدات المقبولة مستقل عن ساعة الصباح التي أنتج خلالها ؟

الإجابة : أقبل  $H_0$

جدول ( هـ - ٢٧ ) الوحدات المقبولة وغير المقبولة من الأجزاء المنتجة خلال ساعات الصباح

|            | الإجمالي | ١٢-١١ صباحاً | ١١-١٠ صباحاً | ١٠-٩ صباحاً | ٩-٨ صباحاً |
|------------|----------|--------------|--------------|-------------|------------|
| مقبولة     | 280      | 65           | 80           | 75          | 60         |
| غير مقبولة | 120      | 35           | 30           | 25          | 30         |
|            | 400      | 100          | 110          | 100         | 90         |

هـ - ٦ : يعطى جدول الاقتران ( هـ - ٢٨ ) عدد الناخبين الذين صوتوا لصالح الديمقراطيين أو الجمهوريين تحت سن 40 وسن 40 فأكثر في عينة عشوائية من 30 ناخباً في إحدى المدن . هل التصويت للديمقراطيين أو الجمهوريين مستقل عما إذا كان الناخب تحت سن 40 ، أو فوقها في هذه المدينة عند مستوى معنوية 5% ؟

الإجابة : لا

جدول ( ٥ - ٢٨ ) الديمقراطيين والجمهوريين عند سن أقل من 40 وسن 40 فأكثر

| إجمالي | الجمهوريين | الديمقراطيين | فئة السن  |
|--------|------------|--------------|-----------|
| 11     | 5          | 6            | تحت سن ٤٠ |
| 19     | 9          | 10           | ٤٠ فأكثر  |
| 30     | 14         | 16           |           |

تحليل التباين :

٥ - ٧ : يعطى جدول (٥-٢٩) عدد الأميال في الجالون لأربعة أنواع من الأوكتين في البنزين لمدة 5 أيام . افترض أن عدد الأميال للجالون لكل نوع أوكتين موزع طبيعياً مع تساوى التباين . هل يجب قبول أم رفض الفرض بأن متوسطات المجتمع متساوية عند مستوى معنوية 5 % ؟

الإجابة : رفض

جدول ( ٥ - ٢٩ ) عدد الأميال للجالون لأربعة أنواع من البنزين لمدة 5 أيام

| النوع ٤ | النوع ٣ | النوع ٢ | النوع ١ |
|---------|---------|---------|---------|
| 17      | 16      | 12      | 12      |
| 15      | 14      | 14      | 11      |
| 17      | 15      | 13      | 12      |
| 16      | 13      | 15      | 13      |
| 18      | 14      | 14      | 11      |

٥ - ٨ : يعطى جدول ( ٥ - ٣٠ ) عدد الأميال للجالون لأربعة أنواع من الأوكتين في البنزين وثلاثة أنواع من السيارات ( ثقيلة ومتوسطة وخفيفة ) في تصميم عشوائى تام . هل يجب عند مستوى معنوية 1% قبول أو رفض الفرض أن متوسطات المجتمع متساوية لكل : (أ) أنواع الأوكتين في البنزين ؟ (ب) أنواع السيارات ؟  
الإجابة : (أ) نعم (ب) لا .

جدول ( ٥ - ٣٠ ) عدد الأميال للجالون الواحد لأربعة أنواع أو كتين وثلاثة أنواع سيارات

| أو كتين ٤ | أو كتين ٣ | أو كتين ٢ | أو كتين ١ | نوع السيارة |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| 10        | 9         | 9         | 8         | ثقيلة       |
| 17        | 18        | 15        | 16        | متوسطة      |
| 30        | 28        | 26        | 24        | خفيفة       |

٥ - ٩ : يعطى جدول ( ٥ - ٣١ ) بيانات مبيعات الصابون لثلاثة أغلفة مختلفة وأربعة تركيبات مختلفة في تصميم عشوائى تام . هل يجب عند مستوى معنوية 5 % قبول أو رفض الفرض أن متوسطات المجتمع متساوية لكل : (أ) غلاف ؟ (ب) تركيبة ؟  
الإجابة : (أ) لا (ب) نعم .

جدول ( ٥ - ٣١ ) مبيعات الصابون لثلاثة أغلفة وأربعة تركيبات

|            | غلاف ١ | غلاف ٢ | غلاف ٣ |
|------------|--------|--------|--------|
| تركيبة (١) | 87     | 78     | 90     |
| تركيبة (٢) | 79     | 79     | 84     |
| تركيبة (٣) | 83     | 81     | 91     |
| تركيبة (٤) | 85     | 83     | 89     |

## امتحان احصاء

١ - يعطى جدول ١ التوزيع التكرارى لمعدلات البطالة فى عينة من 20 مدينة كبيرة فى الولايات المتحدة عام ١٩٨٠ .

(أ) أوجد الوسط الحسابى والوسيط والمنوال لمعدلات البطالة .

(ب) أوجد التباين والانحراف المياري ومعامل الاختلاف .

(ج) أوجد معامل بيرسون للالتواء وارسم المدرج التكرارى النسبى .

جدول ( ١ ) التوزيع التكرارى لمعدلات البطالة

| معدل البطالة | التكرار  |
|--------------|----------|
| 7.0-7.4      | 2        |
| 7.5-7.9      | 4        |
| 8.0-8.4      | 5        |
| 8.5-8.9      | 4        |
| 9.0-9.4      | 3        |
| 9.5-9.9      | 2        |
|              | $n = 20$ |

٢ - من المعروف أن عمر أحد الأجزاء الإلكترونية يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط 1,000 ساعة وانحراف معيارى 80 ساعة . ما احتمال أن يكون عمر جزء مسحوب عشوائياً من خط الإنتاج ( أ ) بين 1,120 و 1,180 ساعة ؟ (ب) بين 955 و 975 ساعة ؟ (ج) أقل من 955 ساعة ؟ (د) فوق 975 ساعة ؟ (هـ) ارسم التوزيع الطبيعى والتوزيع الطبيعى القياسى لهذه المسألة وظلل المساحة المناظرة للجزء ( د ) .

٣ - متوسط درجات اختبار IQ ( اختبار الذكاء ) لعينة عشوائية من 25 طالباً فى جامعة ماهر 110 . فإذا كان المعروف أن توزيع درجات IQ فى الجامعة يتبع التوزيع الطبيعى بانحراف معيارى 10 ( أ ) أوجد فترة الثقة 95% للوسط غير المعلوم لدرجات IQ لمجتمع الطلاب فى الجامعة (ب) أجب عن نفس السؤال إذا كان الانحراف المياري للمجتمع غير معلوم ، ولكن بحساب الانحراف المياري من العينة وجد أنه يساوى 8 ( ج ) حدد كل الحالات الممكنة التى يمكن عندها استخدام التوزيع الطبيعى ، توزيع  $t$  ، أو نظرية تشبثيف .

٤ - تباع شركة مسحوق صابون ممباً فى مصنعين . وتعلم الشركة من الخبرة الماضية أن كمية المسحوق فى الصناديق المعبأة فى المصنعين تتبع التوزيع الطبيعى . أخذت الشركة عينة عشوائية من 25 صندوقاً من إنتاج كل مصنع فوجدت أن المتوسط والانحراف المياري للوزن فى الصناديق من المصنع ١ هو 1,064 جرام (2.34 lb) و 100 جرام على الترتيب . وبالنسبة للعينة من مصنع ٢ كان المتوسط 1,024 جرام والانحراف المياري 60 جرام ( أ ) هل يمكن أن تدعى بدرجة ثقة 95% أن صناديق الصابون من مصنع ١ تحتوى على أكثر من 1,000 جرام ؟ (ب) اختبر عند مستوى ثقة 95% أن كمية الصابون فى الصناديق من المصنعين متساوية .

الإجابة :

١ - (أ) أنظر جدول ٢ .

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{168.0}{20} = 8.4\%$$

$$\text{Med} = L + \frac{n/2 - F}{f_m} c = 8.0 + \frac{20/2 - 6}{5} 0.4 = 8.32\%$$

$$\text{Mode} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} c = 8.0 + \frac{1}{1+1} 0.4 = 8.2\%$$

جدول (٢) حسابات إيجاد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

| معدل البطالة ،<br>نسبة مئوية | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | $fX$              |
|------------------------------|----------------|-------------------|-------------------|
| 7.0-7.4                      | 7.2            | 2                 | 14.4              |
| 7.5-7.9                      | 7.7            | 4                 | 30.8              |
| 8.0-8.4                      | 8.2            | 5                 | 41.0              |
| 8.5-8.9                      | 8.7            | 4                 | 34.8              |
| 9.0-9.4                      | 9.2            | 3                 | 27.6              |
| 9.5-9.9                      | 9.7            | 2                 | 19.4              |
|                              |                | $\sum f = n = 20$ | $\sum fX = 168.0$ |

(ب) أنظر جدول (٣) .

$$s^2 = \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{10.70}{19} \approx 0.56\% \text{ مربعة}$$

$$s = \sqrt{s^2} \approx 0.75\%$$

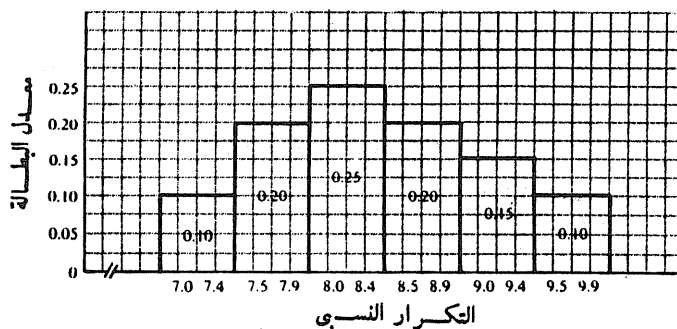
$$V = \frac{s}{\bar{X}} = \frac{0.75\%}{8.4\%} \approx 0.09$$

جدول (٣) حسابات إيجاد التباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف

| معدل البطالة | مركز الفئة $X$ | التكرار $f$       | متوسط $\bar{X}$ | $(X - \bar{X})$ | $(X - \bar{X})^2$ | $f(X - \bar{X})^2$              |
|--------------|----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-------------------|---------------------------------|
| 7.0-7.4      | 7.2            | 2                 | 8.4             | -1.2            | 1.44              | 2.88                            |
| 7.5-7.9      | 7.7            | 4                 | 8.4             | -0.7            | 0.49              | 1.96                            |
| 8.0-8.4      | 8.2            | 5                 | 8.4             | -0.2            | 0.04              | 0.20                            |
| 8.5-8.9      | 8.7            | 4                 | 8.4             | 0.3             | 0.09              | 0.36                            |
| 9.0-9.4      | 9.2            | 3                 | 8.4             | 0.8             | 0.64              | 1.92                            |
| 9.5-9.9      | 9.7            | 2                 | 8.4             | 1.3             | 1.69              | 3.38                            |
|              |                | $\sum f = n = 20$ |                 |                 |                   | $\sum f(X - \bar{X})^2 = 10.70$ |

$$Sk = 3 \frac{\bar{X} - \text{med}}{s} = 3 \frac{8.40 - 8.32}{0.75} \approx 0.32$$

(ج) (أنظر شكل ؛)



٢- (أ) تطلب المسألة إيجاد  $P(1,120 < X < 1,180)$  حيث تشير  $X$  إلى الزمن مقياساً بالساعة لعمر الأجزاء الإلكترونية .  
بمعلومية أن  $\mu = 1000$  ساعة و  $\sigma = 80$  ساعة وبوضع  $X_1 = 1,120$  و  $X_2 = 1,180$  نحصل على

$$z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1,120 - 1,000}{80} = 1.5 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{1,180 - 1,000}{80} = 2.25$$

وبالكشف بالجدول ( جدول التوزيع الطبيعي القياسي ) مقابل  $z = 2.25$  نحصل على 4878 ومقابل القيمة  $z = 1.5$  نحصل على 0.4332 ثم بطرح العددين نحصل على

$$P(1,120 < X < 1,180) = 0.0546, \text{ or } 5.46\%$$

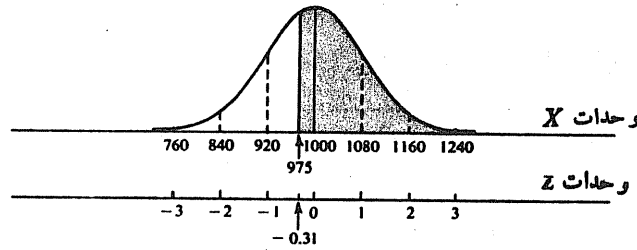
$$z_1 = \frac{955 - 1,000}{80} = -0.5625 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{975 - 1,000}{80} = -0.3125 \quad (\text{ب})$$

بالكشف بالجدول مقابل  $z_1 = 0.56$  نحصل على 0.2123 ، ومقابل قيمة  $z_2 = 0.31$  نحصل على 0.1217 . وعليه تكون  
 $P(955 < X < 975) = 0.2123 - 0.1217 = 0.0906$  أو 9.06%

$$P(X < 955) = 0.5 - 0.2123 = 0.2877, \text{ or } 28.77\%. \quad (\text{ج})$$

$$P(X > 975) = 0.1217 + 0.5 = 0.6217, \text{ or } 62.17\%. \quad (\text{د})$$

(هـ) أنظر شكل (٢) .



شكل (٢)

٢- (أ) حيث أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و  $\sigma$  معلومة فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي :

$$\mu = \bar{X} \pm z\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 110 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{25}} = 110 \pm 3.92$$

فتكون  $\mu$  بين 106.08 و 113.92 بدرجة ثقة 95% .

(ب) حيث أن التوزيع طبيعي ،  $n < 30$  و  $\sigma$  غير معلومة ، فيجب استخدام توزيع  $t$  بدلا من التوزيع الطبيعي ، مع استخدام  $\sigma$  كتقدير بدلا من  $\sigma$

$$\mu = \bar{X} \pm t_{0.025} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad t_{0.025} \text{ with } 24 \text{ df} = 2.064$$

$$= 110 \pm 2.064 \frac{8}{\sqrt{25}}$$

$$= 110 \pm 3.30$$



وتكون  $\mu$  بين 106.70 و 113.30 بدرجة ثقة 95% .

(ج) يمكن استخدام التوزيع الطبيعي ( ١ ) إذا كان المجتمع الأصل طبيعياً ،  $\sigma$  و  $n < 30$  معلومة ( ٢ ) إذا كانت  $n \geq 30$  ( بالجوء لنظرية النهاية المركزية ) وباستخدام  $s$  كتقدير بدلا من  $\sigma$  يمكن استخدام توزيع  $t$  ( لدرجات الحرية المعينة ) عندما  $n < 30$  ولكن  $\sigma$  غير معلومة والمجتمع الذي أخذت منه العينة من المعلوم أنه يتبع التوزيع الطبيعي . وفي غير الحالات السابقة نلجأ إلى استخدام متباينة تشبثشيف أو زيادة حجم العينة إلى  $n \geq 30$  ( حتى يمكن استخدام التوزيع الطبيعي ) .

٤ - (أ) حيث أن الشركة ترغب في اختبار ما إذا كان  $\mu > 1,000$  g في مصنع ١ ، فإننا بصدد اختبار الذيل الأيمن :

$$H_0: \mu_1 = 1,000 \quad \text{و} \quad H_1: \mu_1 > 1,000$$

وحيث أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي ولكن  $n < 30$  و  $\sigma$  غير معلومة ، فيجب استخدام توزيع  $t$  بدرجات حرية  $n - 1 = 24$  :

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \mu_1}{s_1/\sqrt{n_1}} = \frac{1,064 - 1,000}{100/\sqrt{25}} = 3.2$$

وتزيد قيمة  $t$  المحسوبة عن قيمة  $t$  الجدولية  $t_{0.05} = 1.71$  بدرجات حرية 24 . وعليه فإننا نرفض  $H_0$  ونقبل  $H_1$  ، ويمكن للشركة أن تدعى بدرجة ثقة 95% أن صناديق الصابون من مصنع ١ تحتوي على أكثر من 1,000 g من الصابون .

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{or} \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{or} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{100^2}{25} + \frac{60^2}{25}} = \sqrt{544} \approx 23.32$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{1,064 - 1,024}{23.32} \approx 1.72$$

وهذا اختبار ذو ذيلين بدرجات حرية  $n_1 + n_2 - 1 = 49$  . وحيث أن القيمة الجدولية  $t_{0.025} > 2.00$  بدرجات حرية 49 ، فنتقبل الشركة بدرجة ثقة 95% الفرض أنه لا يوجد اختلاف في كمية الصابون بالصناديق من إنتاج المصنعين .

## الفصل السادس

### تحليل الانحدار البسيط

#### ١-٦ النموذج الخطي لتفسيرين

يستخدم النموذج الخطي ذي المتغيرين ، أو تحليل الانحدار البسيط ، لاختبار الفروض حول العلاقة بين متغير تابع ،  $Y$  ، ومتغير مستقل أو مفسر  $X$  ، والتنبؤ . ويبدأ الانحدار الخطي البسيط عادة برسم مجموعة قيم  $XY$  في شكل انتشار ثم التحديد بالنظر ما إذا كانت هناك علاقة خطية تقريبية .

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i \quad (١ - ٦)$$

وحيث أنه من غير المتوقع أن تقع النقاط تماماً على الخط ، فإن العلاقة الخطية التامة في معادلة (١ - ٦) يجب أن تعدل لكي تضم حد تشويش عشوائي أو خطأ أي «عصر عشوائي» ،  $u_i$  (أنظر قسم ١-٢ والمسألة ١-٨) :

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + u_i \quad (٢ - ٦)$$

ويفترض في حد الخطأ أنه (١) موزع طبيعياً ، (٢) وقيمته المتوقعة أي وسطه صفر ، (٣) وتباينه ثابت ، ويفترض أيضاً (٤) أن حدود الخطأ غير مترابطة بعضها ببعض (٥) وأن المتغير المفسر يأخذ قيماً ثابتة في المعاينات المتكررة (حتى تكون  $X_i$  ،  $U_i$  غير مترابطة) .

مثال ١ : يعطى جدول ١-٦ «بوشلات» الحنطة للأكر (وحدة مساحة) ،  $Y$  الناتجة عن كيات مختلفة من السماد بالرطل ،  $X$  ، في إحدى المزارع خلال 10 سنوات من ١٩٧١ إلى ١٩٨٠ . وهذه البيانات موضوعة في شكل الانتشار المغطى في الشكل ١-٦ . إن العلاقة بين  $X$  ،  $Y$  في شكل ١-٦ تبدو خطية تقريبياً (أي أن النقاط تقع على خط مستقيم أو بالقرب منه) .

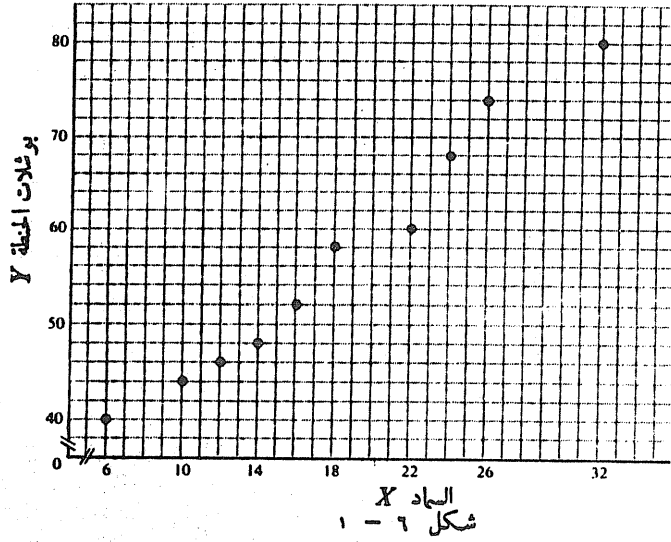
جدول ١ - ٦ الحنطة المنتجة مع السماد المستخدم

| السنة | $n$ | $Y_i$ | $X_i$ |
|-------|-----|-------|-------|
| 1971  | 1   | 40    | 6     |
| 1972  | 2   | 44    | 10    |
| 1973  | 3   | 46    | 12    |
| 1974  | 4   | 48    | 14    |
| 1975  | 5   | 52    | 16    |
| 1976  | 6   | 58    | 18    |
| 1977  | 7   | 60    | 22    |
| 1978  | 8   | 68    | 24    |
| 1979  | 9   | 74    | 26    |
| 1980  | 10  | 80    | 32    |

#### ٢-٦ طريقة المربعات الصغرى العادية

طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) هي أسلوب لتوفيق «أفضل» خط مستقيم لعينة مشاهدات  $XY$  . وهو يتضمن تصغير مجموع المربعات لانحرافات النقاط (الرأسية) عن الخط إلى أدنى حد ممكن :

$$\text{Min} \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (٣ - ٦)$$



شكل ٦ - ١

حيث تشير  $Y_i$  إلى المشاهدات الفعلية ، وتشير  $\hat{Y}_i$  إلى القيم « الموقفة » المناظرة ، بحيث تكون  $Y_i - \hat{Y}_i = e_i$  هي البواقي .  
ويعطى هذا الأسلوب المعادلتين الطبيعيين التاليين ( أنظر مسألة ٦ - ٦ ) :

$$\sum Y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_i \quad (٦ - ٤)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{b}_0 \sum X_i + \hat{b}_1 \sum X_i^2 \quad (٦ - ٥)$$

حيث  $n$  عدد المشاهدات ،  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  هي مقدرتان للمعلمتين الحقيقيتين  $b_0$  ،  $b_1$  .

وبحل المعادلتين ( ٦ - ٤ ) ، ( ٦ - ٥ ) آنياً ، نحصل على ( أنظر المسألة ٦ - ٧ (أ) ) :

$$\hat{b}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (٦ - ٦)$$

ونحصل على قيمة  $\hat{b}_0$  كما يلي ( أنظر المسألة ٦ - ٧ (ب) ) :

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} \quad (٦ - ٧)$$

ومن المفيد عادة استخدام صيغة مكافئة لتقدير  $\hat{b}_1$  ( أنظر المسألة ٦ - ١٠ (أ) ) :

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (٦ - ٨)$$

حيث  $y_i = Y_i - \bar{Y}$  ،  $x_i = X_i - \bar{X}$  وتكون معادلة انحدار المربعات الصغرى المقدرة (OLS) :

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_i \quad (٦ - ٩)$$

مثال ٢ - يوضح جدول ٦ - ٢ الحسابات اللازمة لتقدير معادلة الانحدار لمشكلة الحطة والمعاد في جدول ٦ - ١ . باستخدام

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{956}{576} = 1.66 \quad \text{معادلة (٦ - ٨) ، ( أ ) ( ميل خط الانحدار المقدر )}$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} \approx 57 - (1.66)(18) \approx 57 - 29.88 \approx 27.12 \quad \text{( ب ) ( تقاطع Y )}$$

$$\hat{Y}_i = 27.12 + 1.66 X_i \quad \text{( ج ) ( معادلة الانحدار المقدرة )}$$

وعليه ، فمعد  $X_i = 0$  فإن  $\hat{b}_0 = 27.12 = \bar{Y}$  . وعند  $X_i = 18 = \bar{X}$  فإن  $\hat{Y} = 27.12 + 16.66(18) = 57 = \bar{Y}$  من هذا يتضح أن خط الانحدار يمر خلال النقطة  $\bar{X}\bar{Y}$  (أنظر شكل ٦ - ٢) .

جدول ٦ - ٢ الحنطة المنتجة مع الأسمدة المستخدمة : الحسابات

| $n$      | $Y_i$<br>(الحنطة)                  | $X_i$<br>(السماد)                  | $y_i$          | $x_i$          | $x_i y_i$            | $x_i^2$            |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|----------------|----------------|----------------------|--------------------|
| 1        | 40                                 | 6                                  | -17            | -12            | 204                  | 144                |
| 2        | 44                                 | 10                                 | -13            | -8             | 104                  | 64                 |
| 3        | 46                                 | 12                                 | -11            | -6             | 66                   | 36                 |
| 4        | 48                                 | 14                                 | -9             | -4             | 36                   | 16                 |
| 5        | 52                                 | 16                                 | -5             | -2             | 10                   | 4                  |
| 6        | 58                                 | 18                                 | 1              | 0              | 0                    | 0                  |
| 7        | 60                                 | 22                                 | 3              | 4              | 12                   | 16                 |
| 8        | 68                                 | 24                                 | 11             | 6              | 66                   | 36                 |
| 9        | 74                                 | 26                                 | 17             | 8              | 136                  | 64                 |
| 10       | 80                                 | 32                                 | 23             | 14             | 322                  | 196                |
| $n = 10$ | $\sum Y_i = 570$<br>$\bar{Y} = 57$ | $\sum X_i = 180$<br>$\bar{X} = 18$ | $\sum y_i = 0$ | $\sum x_i = 0$ | $\sum x_i y_i = 956$ | $\sum x_i^2 = 576$ |

### ٦-٣ اختبارات المعنوية لتقديرات المعامل

لاختبار المعنوية الإحصائية لتقديرات معامل الانحدار ، يلزمنا معرفة تباين  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  (أنظر مسألتى ٦ - ١٤ ، ٦ - ١٥) :

$$\text{Var } \hat{b}_0 = \sigma_u^2 \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \quad (٦ - ١٠)$$

$$\text{Var } \hat{b}_1 = \sigma_u^2 \frac{1}{\sum x_i^2} \quad (٦ - ١١)$$

وحيث أن  $\sigma_u^2$  غير معلومة ، فإن تباين البواقي ،  $s^2$  ، يستخدم كتقدير غير متحيز للتباين :

$$s^2 = \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \quad (٦ - ١٢)$$

حيث  $k$  عدد المعامل المقدرة .

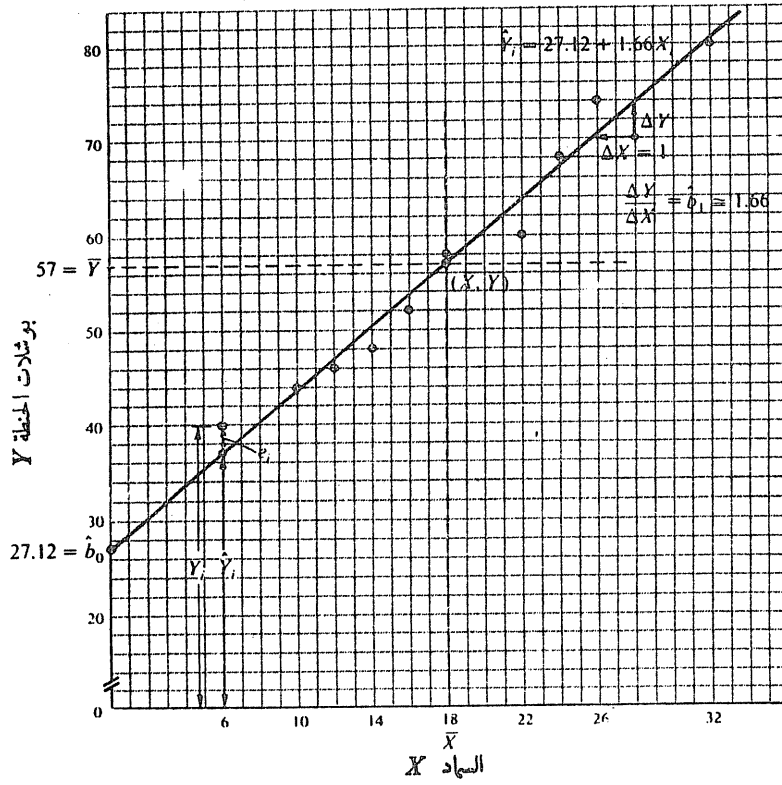
والمعادلات التالية تعطى تقديرات غير متحيزة لتباين  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$

$$s_{\hat{b}_0}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \quad (٦ - ١٣)$$

$$s_{\hat{b}_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{1}{\sum x_i^2} \quad (٦ - ١٤)$$

فتكون  $s_{\hat{b}_0}$  و  $s_{\hat{b}_1}$  هي الأخطاء المعيارية للتقدير . وحيث أن  $u$  موزعة طبيعياً فإن  $Y_i$  ، وبالتالي  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  تكون هي الأخرى موزعة طبيعياً ، ومن ثم يمكننا استخدام توزيع  $t$  بدرجات حرية  $n - k$  ، لاختبار الفروض عن كل من  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  وعمل فترات ثقة لهما (أنظر قسم ٤ - ٤ ، ٤ - ٥) .

مثال ٣ - جدول ٦ - ٣ (امتداد ٦ - ٢) يوضح الحسابات اللازمة لاختبار المعنوية الإحصائية لكل من  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  . ولقد حصلنا على قيم  $\hat{Y}_i$  في جدول ٦ - ٣ بإحلال قيم  $X_i$  في معادلة الانحدار المقدرة التي حصلنا عليها في مثال ٢ .



شكل ٦ - ٢

(ونحصل على قيم  $y_i^2$  بتربيع  $y_i$  من جدول ٦ - ٢ وسوف نستخدمها في قسم ٦ - ٤) .

$$s_{b_0}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = \frac{47.3056}{10-2} \frac{3.816}{10(576)} \approx 3.92 \quad \text{و} \quad s_{b_0} = \sqrt{3.92} \approx 1.98$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{(n-k) \sum x_i^2} = \frac{47.3056}{(10-2)576} \approx 0.01 \quad \text{و} \quad s_{b_1} = \sqrt{0.01} \approx 0.1$$

جدول ٦ - ٣ حسابات الخطئة - السماح لاختبار معنوية المعامل

| السنة    | $Y_i$ | $X_i$ | $\hat{Y}_i$ | $e_i$          | $e_i^2$                | $X_i^2$              | $x_i^2$            | $y_i^2$              |
|----------|-------|-------|-------------|----------------|------------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| 1        | 40    | 6     | 37.08       | 2.92           | 8.5264                 | 36                   | 144                | 289                  |
| 2        | 44    | 10    | 43.72       | 0.28           | 0.0784                 | 100                  | 64                 | 169                  |
| 3        | 46    | 12    | 47.04       | -1.04          | 1.0816                 | 144                  | 36                 | 121                  |
| 4        | 48    | 14    | 50.36       | -2.36          | 5.5696                 | 196                  | 16                 | 81                   |
| 5        | 52    | 16    | 53.68       | -1.68          | 2.8224                 | 256                  | 4                  | 25                   |
| 6        | 58    | 18    | 57.00       | 1.00           | 1.0000                 | 324                  | 0                  | 1                    |
| 7        | 60    | 22    | 63.64       | -3.64          | 13.2496                | 484                  | 16                 | 9                    |
| 8        | 68    | 24    | 66.96       | 1.04           | 1.0816                 | 576                  | 36                 | 121                  |
| 9        | 74    | 26    | 70.28       | 3.72           | 13.8384                | 676                  | 64                 | 289                  |
| 10       | 80    | 32    | 80.24       | -0.24          | 0.0576                 | 1,024                | 196                | 529                  |
| $n = 10$ |       |       |             | $\sum e_i = 0$ | $\sum e_i^2 = 47.3056$ | $\sum X_i^2 = 3,816$ | $\sum x_i^2 = 576$ | $\sum y_i^2 = 1,634$ |

$$t_0 = \frac{\hat{b}_0 - b_0}{s_{\hat{b}_0}} = \frac{27.12 - 0}{1.98} \approx 13.7 \quad \text{و} \quad t_1 = \frac{\hat{b}_1 - b_1}{s_{\hat{b}_1}} = \frac{1.66}{0.1} \approx 16.6$$

وعليه فإن  $t_0$  و  $t_1$  تتجاوز  $t = 2.306$  بدرجات حرية 8 عند مستوى معنوية 5% (من ملحق ه) ، نستنتج أن كلا من  $b_0$  و  $b_1$  معنوية إحصائياً بمستوى معنوية 5% .

#### ٦-٤ اختبار جودة التوفيق والارتباط

كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار ( أى ، كلما صغرت البواقي ) ، كلما زاد التغير في  $Y$  الذى « تفسره » معادلة الانحدار المقدرة . والتغير الإجمالى في  $Y$  يساوى التغير المفسر زائداً تغير البواقي :

$$\begin{aligned} \sum (Y_i - \bar{Y})^2 &= \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (١٥ - ٦) \\ \text{التغير الإجمالى في } Y &\quad \text{التغير المفسر في } Y &\quad \text{تغير البواقي في } Y \\ (\text{أو إجمالى مجموع المربعات}) &\quad (\text{مجموع مربعات الانحدار}) &\quad (\text{مجموع مربعات الخطأ}) \\ \text{TSS} &= \text{RSS} + \text{ESS} \end{aligned}$$

وبقسمة الطرفين على TSS نحصل على :

$$1 = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} + \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}}$$

ومن هنا يمكن تعريف معامل التحديد  $R^2$  بأنه النسبة من التغير الإجمالى في  $Y$  « الذى يفسره » انحدار  $Y$  على  $X$  :

$$R^2 = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} \quad (١٦ - ٦)$$

ويمكن حساب  $R^2$  كالاتى :

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \quad (١٧ - ٦)$$

$$\sum \hat{y}_i^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad \text{حيث :}$$

وتتراوح قيمة  $R^2$  بين 0 ( عندما لا تفسر معادلة الانحدار أيّاً من التغير في  $Y$  ) و 1 ( عندما تقع كل النقاط على خط الانحدار ) .

معامل الارتباط ،  $r$  ، يتم حسابه كالاتى ( أنظر المسألة ٦ - ٢٢ )

$$r = \sqrt{R^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}} = \sqrt{\hat{b}_1 \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}} \quad (١٨ - ٦)$$

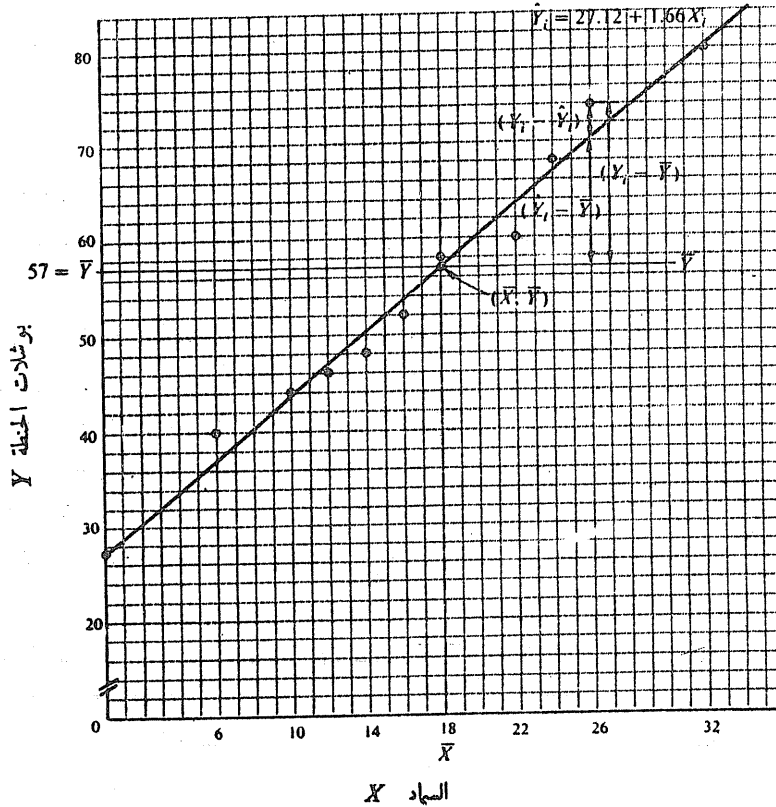
وتتراوح قيمة  $r$  من 1 - ( للارتباط الخطى السالب التام ) إلى 1 + ( للارتباط الخطى الموجب التام ) . إن علاقة الارتباط بين متغيرين لا تعنى وجود علاقة سببية أو علاقة تبعية بينهما . وفى حالة البيانات الكيفية ، يمكن استخدام معامل ارتباط الرتب ،  $r'$  (معامل سبيرمان) ، ( أنظر المسألة ٦ - ٢٥ ) .

مثال ٤ - يمكن إيجاد معامل التحديد لمثال الحنطة - السماد من جدول ٦ - ٣ .

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \approx 1 - \frac{47.31}{1.634} \approx 1 - 0.0290 \approx 0.9710, \text{ or } 97.10\%$$

أى أن معادلة الانحدار تفسر حوالى 97% من التغير الإجمالى فى إنتاج الخطة . أما نسبة 3% الباقية فيمكن نسبتها إلى عوامل متضمنة فى حد الخطأ .

وتكون  $r = \sqrt{R^2} \cong \sqrt{0.9710} \cong 0.9854$  أو 98.54% وهو موجب لأن  $b_1$  موجبة . ويوضح شكل ٦ - ٣ التغير الإجمالى ، والتغير المفسر ، وتغير البواقي فى  $Y$  .



#### ٦-٥ خواص مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية

مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS) هى أفضل مقدرات خطية غير متحيزة (BLUE) . وعدم التحيز يعنى

$$E(\hat{b}) = b$$

$$\text{Bias} = E(\hat{b}) - b$$

بحيث أن

أما وصف مقدر بأنه « أفضل مقدر غير متحيز » أو أنه مقدر كفى فيعنى أنه ذو أصغر تباين . وبالتالي فإن مقدرات OLS هى الأنفضل من بين كل المقدرات الخطية غير المتحيزة (أنظر المسألتين ٦ - ١٤ ، ٦ - ١٥ (أ) ) . وتعرف هذه الخاصية بنظرية « جاورس - ماركوف » ، وهى تمثل أهم مبرر لاستخدام OLS .

أحياناً ، قد يرغب الباحث أن يقبل بعض التحيز فى مقابل تباين أصغر ، بتصغير متوسط مربع الخطأ ، MSE (أنظر المسألة ٦ - ٢٩) :

$$\text{MSE}(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)^2 = \text{var}(\hat{b}) + (\text{bias } \hat{b})^2$$

ويكون المقدّر متسقاً إذا اقتربت قيمته من المعلمة الحقيقية مع اقتراب حجم العينة من ما لا نهاية (بمعنى أنه غير متحيز في النهاية) وينتهي توزيعه إلى المعلمة الحقيقية (أنظر المسألة ٦ - ٣٠).

مثال ٥ = مقدرات OLS  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  السابق إيجادها في مثال ٢ هي مقدرات خطية غير متحيزة لكل من  $b_0$  و  $b_1$  لأن

$$E(\hat{b}_0) = b_0 \quad \text{and} \quad E(\hat{b}_1) = b_1$$

كذلك فإن تباين  $\hat{b}_0$  وتباين  $\hat{b}_1$  السابق إيجادها في مثال ٣ أقل من تباين أى مقدرات خطية غير متحيزة أخرى . وعليه فإن كلا من  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  BLUE

### مسائل محلولة

الفؤج الخطي ذو المتغيرين :

٦ - ١ ماذا يعنى وما هي وظيفة كل من (أ) تحليل الانحدار البسيط ؟ (ب) تحليل الانحدار الخطي ؟ (ج) شكل الانتشار ؟ (د) حد الخطأ ؟

(أ) يستخدم « الانحدار البسيط » لاختبار الفروض عن العلاقة بين متغير تابع ،  $Y$  ، ومتغير مستقل أو مفسر ،  $X$  ، وللتنبؤ . قارن هذا بتحليل « الانحدار المتعدد » ، والذي ليس فيه متغير مستقل واحد وإنما اثنان أو أكثر من المتغيرات المستقلة أو المفسرة . وسوف نتناول الانحدار المتعدد في الفصل السابع .

(ب) تحليل الانحدار الخطي يفترض أن هناك علاقة خطية تقريبية بين  $X$  و  $Y$  (بمعنى أن مجموعة قيم  $X$  ،  $Y$  في العينة العشوائية تقع على أو قريباً من خط مستقيم) . قارن هذا بتحليل « الانحدار غير الخطي » (ويناقش في قسم ٨ - ١) .

(ج) شكل الانتشار هو شكل يعبر فيه عن كل زوج من المشاهدات المستقلة والتابعة بنقطة في مستوى  $XY$  . والفرض منه هو أن نحدد (بالنظر) ما إذا كانت توجد علاقة خطية تقريبية بين المتغير التابع ،  $Y$  ، والمتغير المستقل أو المفسر .

(د) حد الخطأ (والمعروف أيضاً بمحد التشويش أو الحد العشوائى) يقيس انحراف القيمة المشاهدة  $Y$  من خط الانحدار الحقيقى (غير المشاهد) . وتنشأ حدود الخطأ هذه والتي يدل عليها  $u_i$  ، بسبب (١) وجود عدة متغيرات مفسرة ذات تأثير ضئيل أو غير منتظم على  $Y$  وقد استبعدت من العلاقة الخطية التامة في معادلة ٦ - ١ ، (٢) أخطاء ممكنة في قياس  $Y$  . (٣) السلوك الإنسانى العشوائى (أنظر المسألة ١ - ٨) .

٦ - ٢ ارسم شكل انتشار لبيانات جدول ٦ - ٤ وحدد بالنظر ما إذا كانت توجد علاقة خطية تقريبية بين  $Y$  (إجمالى الإنفاق الاستهلاكى ، ببلاتين الدولارات الأمريكية) ،  $X$  (إجمالى الدخل المتاح ، ببلاتين الدولارات الأمريكية أيضاً) لإثنى عشر عاماً من ١٩٧١ إلى ١٨٩٢ .

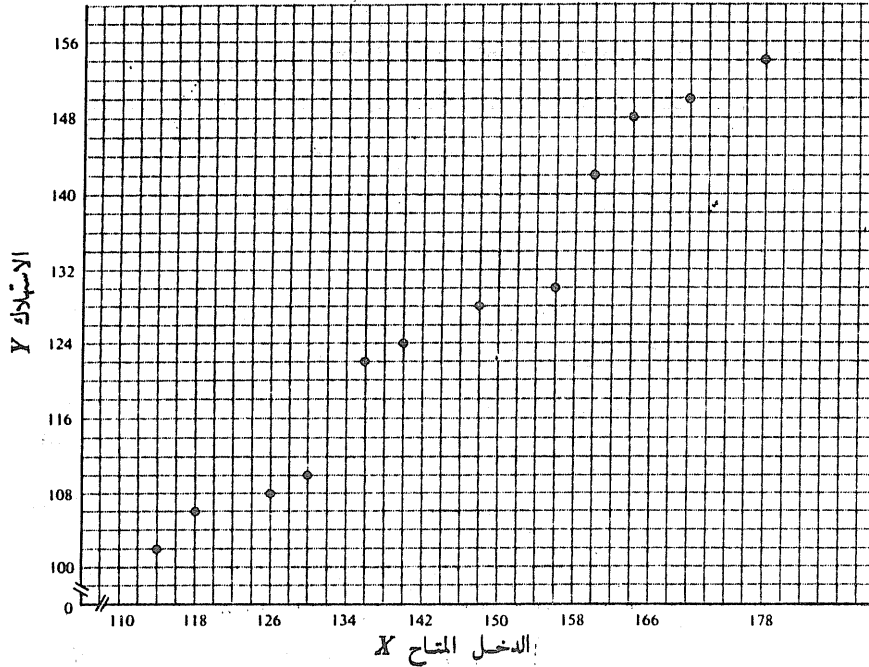
جدول ٦ - ٤ : إجمالى الاستهلاك والدخل المتاح

| السنة | $n$ | $Y_i$ | $X_i$ |
|-------|-----|-------|-------|
| 1971  | 1   | 102   | 114   |
| 1972  | 2   | 106   | 118   |
| 1973  | 3   | 108   | 126   |
| 1974  | 4   | 110   | 130   |
| 1975  | 5   | 122   | 136   |
| 1976  | 6   | 124   | 140   |
| 1977  | 7   | 128   | 148   |
| 1978  | 8   | 130   | 156   |
| 1979  | 9   | 142   | 160   |
| 1980  | 10  | 148   | 164   |
| 1981  | 11  | 150   | 170   |
| 1982  | 12  | 154   | 178   |



من شكل ٦ - ٤ يمكن ملاحظة أن العلاقة بين الإنفاق الاستهلاكي ،  $Y$  ، والدخل المتاح ،  $X$  ، هي تقريباً خطية ، كما يقضى نموذج الانحدار الخطي .

٦ - ٣ عبر عن العلاقة العامة بين الاستهلاك ،  $Y$  ، والدخل المتاح ،  $X$  ، في شكل (أ) صورة خطية تامة (ب) صورة عشوائية (ج) لماذا نتوقع أن معظم القيم المشاهدة للمتغير  $Y$  لا تقع تماماً على خط مستقيم ؟



شكل ٦ - ٤

(أ) العلاقة العامة المحددة أو التامة بين إجمالي الإنفاق الاستهلاكي ،  $Y$  ، وإجمالي الدخل المتاح  $X$  ، يمكن كتابتها كالآتي :

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i \quad (١ - ٦)$$

حيث تشير  $i$  إلى سنة ما في تحليل السلاسل الزمنية ( كما في البيانات في جدول ٦ - ٤ ) أو إلى كل وحدة اقتصادية ( مثل الأسرة ) في تحليل البيانات المقطعية . وفي المعادلة ( ١ - ٦ )  $b_0$  ،  $b_1$  هي ثوابت غير معلومة تسمى معالم . المعلمة  $b_0$  هي الثابت أو الجزء المقطوع من محور  $Y$  ، بينما  $b_1$  تقيس  $\Delta Y / \Delta X$  ، والتي تشير ، بالنسبة للسألة ٦ - ٢ ، إلى الميل الحدي للاستهلاك ، MPC ( أنظر قسم ١ - ٢ ) . أما العلاقة الخطية المعينة المناظرة للعلاقة الخطية العامة في معادلة ( ١ - ٦ ) فنحصل عليها بتقدير قيم  $b_0$  ،  $b_1$  ( ويمثلها  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  وقرأ ، "sub one hat" ،  $b$  "sub zero hat" .

(ب) يمكن جعل العلاقة الخطية التامة في معادلة ( ١ - ٦ ) عشوائية بإضافة حد « تشويش » عشوائي أي حد خطأ  $n_i$  ، فتصبح

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + u_i \quad (٢ - ٦)$$

(ج) لا يتوقع أن تقع معظم قيم  $Y$  المشاهدة تماماً على خط مستقيم ( ١ ) لأنه حتى لو سلمنا أن الاستهلاك  $Y$  ، يعتمد أساساً على الدخل المتاح  $X$  ، فإنه أيضاً من الممكن أن يعتمد على العديد من المتغيرات الأخرى المحذوفة ذات التأثير الصغير

أو غير المنتظم على  $Y$  ( لو كان لبعض هذه المتغيرات الأخرى تأثير جوهري أو منتظم على  $Y$  ، لكنت قد دخلت في العلاقة كتغيرات مفسرة إضافية ، كما في نموذج الانحدار المتعدد ) (٢) . بسبب الأخطاء الممكنة في قياس  $Y$  (٣) بسبب السلوك الإنساني العشوائي المتأصل ، والذي يؤدي عادة إلى قيم مختلفة للمتغير  $Y$  مقابل نفس القيمة للمتغير  $X$  في ظل ظروف متطابقة ( أنظر المسألة ١ - ٨ ) .

٦ - ٤ أذكر الفروض الخمسة لنموذج الانحدار الخطي الكلاسيكي (OLS) واعط تفسيراً بديهياً لمعنى كل منها والحاجة إليه .

١ - الفرض الأول لنموذج الانحدار الخطي الكلاسيكي (OLS) هو أن حد الخطأ العشوائي  $u$  يقع التوزيع الطبيعي . وكتيجة فإن  $Y$  وتوزيع المعاينة لمعامل الانحدار تتبع أيضاً التوزيع الطبيعي ، بحيث يمكن القيام باختبارات لمعنوية هذه المعامل ( أنظر أقسام ٤ - ٢ ، ٥ - ٢ ، ٦ - ٣ ) .

٢ - والفرض الثاني هو أن القيمة المتوقعة لحد الخطأ أي وسطه يساوي الصفر أي

$$E(u_i) = 0 \quad (١٩ - ٦)$$

وبسبب هذا الفرض فإن معادلة (١ - ٦) تعطي متوسط قيمة  $Y$  . وبالتحديد ، حيث أنه يفترض أن  $X$  ثابتة ، فإن قيمة  $Y$  في معادلة (٢ - ٦) تتغير فوق أو تحت وسطها مع زيادة  $u$  أو نقصها عن ٠ . وحيث أننا نفترض أن متوسط  $u$  يساوي ٠ ، فإن معادلة (١ - ٦) تعطي القيمة المتوسطة للمتغير  $Y$  .

٣ - الفرض الثالث هو أن تباين حد الخطأ ثابت في كل فترة ولكل قيم  $X$  ، أي

$$E(u_i)^2 = \sigma_u^2 \quad (٢٠ - ٦)$$

ويكفل هذا الفرض أن كل مشاهدة يمكن الاعتماد عليها بنفس القدر ، بحيث تكون تقديرات معاملات الانحدار كفاً ، وتكون اختبارات الفروض الخاصة بها غير متحيزة . ويمكن تلخيص الفروض الثلاثة الأولى على حد الخطأ كالاتي

$$u \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (٢١ - ٦)$$

٤ - الفرض الرابع هو أن القيمة التي يأخذها حد الخطأ في فترة ما تكون غير مرتبطة أو غير متعلقة بقيمته في أي فترة أخرى ، أي

$$E(u_i u_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (٢٢ - ٦)$$

وهذا يكفل أن القيمة المتوسطة للمتغير  $Y$  تعتمد فقط على  $X$  وليس على  $u$  ، وهذا ، مرة أخرى ، مطلوب للحصول على تقديرات كفء لمعاملات الانحدار واختبارات غير متحيزة لمعنويتها .

٥ - الفرض الخامس أن المتغير المفسر يأخذ قيماً ثابتة والتي يمكن الحصول عليها في العينات المتكررة ، بحيث أن المتغير المفسر يكون هو الآخر غير مرتبط بمنصر الخطأ ، أي

$$E(X_i u_i) = 0 \quad (٢٣ - ٦)$$

ويوضح هذا الفرض لتبسيط التحليل .

طريقة المربعات الصغرى العادية :

٦ - ٥ (أ) يقصد بطريقة المربعات الصغرى العادية أو  $OLS$  ، لتقدير « أفضل خط مستقيم يوفق عينة المشاهدات  $X$  ؟

(ب) لماذا نأخذ الانحرافات الرأسية ؟ (ج) لماذا لا نأخذ ببساطة مجموع الانحرافات دون تربيعها ؟ (د) لماذا لا نأخذ مجموع الانحرافات المطلقة ؟

(أ) تغطي طريقة OLS أفضل خط مستقيم يوفق مشاهدات العينة  $XY$  بمعنى أنها تغطي أقل مجموع مربعات (الرأسية) لانحرافات كل مشاهدة عن الخط المستقيم في الرسم .

(ب) نأخذ الانحرافات الرأسية لأننا نحاول أن نفسر وأن نتنبأ بالتغيرات في  $Y$  التي تقاس على المحور الرأسى .

(ج) لا يمكننا أخذ مجموع الانحرافات لكل مشاهدة عن خط OLS لأن الانحرافات المتساوية في الحجم والمختلفة في الإشارة يلغى بعضها البعض ، فيكون مجموع الانحرافات مساوياً للصفر (أنظر جدول ٦ - ٢) .

(د) بأخذ مجموع الانحرافات المطلقة نتجنب مشكلة أن يصبح مجموع الانحرافات 0 . ولكن ، يفضل مجموع مربعات الانحرافات لمقابلة الانحرافات الكبيرة أكثر من الانحرافات الصغيرة .

٦ - ٦ بدءاً من معادلة ٣ - ٦ والتي تدعو إلى تصغير مجموع مربعات الانحرافات أو البواقي ، اشتق (أ) المعادلة الطبيعية (٤ - ٦) (ب) المعادلة الطبيعية (٥ - ٦) . (القارئ غير الملم بالتفاضل يمكنه أن يتخطى هذه المسألة) .

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i)^2 \quad (1)$$

تشتق المعادلة الطبيعية (٤ - ٦) بتصغير  $\sum e_i^2$  بالنسبة إلى  $\hat{b}_0$  .

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_0} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i)^2}{\partial \hat{b}_0} = 0$$

$$2 \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$\sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i) = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_i \quad (4-6)$$

(ب) وتشتق المعادلة الطبيعية (٥ - ٦) بتصغير  $\sum e_i^2$  بالنسبة إلى  $\hat{b}_1$  :

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i)^2}{\partial \hat{b}_1} = 0$$

$$2 \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

$$\sum (Y_i X_i - \hat{b}_0 X_i - \hat{b}_1 X_i^2) = 0$$

$$\sum Y_i X_i = \hat{b}_0 \sum X_i + \hat{b}_1 \sum X_i^2 \quad (5-6)$$

٧ - ٦ اشتق (أ) معادلة (٦ - ٦) لإيجاد  $\hat{b}_1$  ، (ب) معادلة (٧ - ٦) لإيجاد  $\hat{b}_0$  (ارشاد بالنسبة لجزء (أ) : ابدأ بضرب المعادلة (٥ - ٦) في  $n$  والمعادلة (٤ - ٦) في  $\sum X_i$  ) .

(أ) يضرب معادلة (٥ - ٦) في  $n$  ومعادلة (٤ - ٦) في  $\sum X_i$  ، نحصل على :

$$n \sum X_i Y_i = \hat{b}_0 n \sum X_i + \hat{b}_1 n \sum X_i^2 \quad (24-6)$$

$$\sum X_i \sum Y_i = \hat{b}_0 \sum X_i + \hat{b}_1 (\sum X_i)^2 \quad (25-6)$$

بطرح معادلة (٢٥ - ٦) من معادلة (٢٤ - ٦) نحصل على :

$$n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i = \hat{b}_1 [n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2] \quad (26-6)$$

بجمل معادلة (٦ - ٢٦) بالنسبة إلى  $\hat{b}_1$  ، نحصل على

$$\hat{b}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (٦ - ٦)$$

(ب) يمكن الحصول على معادلة ٦ - ٧ بجمل معادلة (٦ - ٤) في  $\hat{b}_0$  :

$$\sum Y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_i \quad (٦ - ٤)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{b}_1 \frac{\sum X_i}{n} \\ &= \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} \quad (٦ - ٧) \end{aligned}$$

٦ - ٨ (أ) أذكر الفرق بين  $b_0$  ،  $b_1$  ، من ناحية  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  من ناحية أخرى . (ب) أذكر الفرق بين  $u_i$  ،  $e_i$  (ج) أكتب معادلات العلاقات الحقيقية والمقدرة بين  $Y$  ،  $X$  (د) أكتب المعادلات الحقيقية والمقدرة لخطوط الانحدار بين  $Y$  ،  $X$  .

(أ)  $b_0$  ،  $b_1$  هي معالم خط الانحدار الحقيقي ولكن غير المعلوم ، بينما  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  هي معالم خط الانحدار المقدر .

(ب)  $u_i$  هي حد تشويش عشوائي ، أو الخطأ في العلاقة الحقيقية غير الملمومة بين  $Y$  ،  $X$  . بينما  $e_i$  هي البواقي بين قيمة كل مشاهدة  $Y$  والقيمة المناظرة لها  $\hat{Y}$  ، في العلاقة المقدرة .

(ج) المعادلات للعلاقات الحقيقية والمقدرة بين  $Y$  ،  $X$  هي على الترتيب ،

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + u_i \quad (٦ - ٢)$$

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_i + e_i \quad (٦ - ٢٧)$$

(د) المعادلات للانحدار الحقيقي والمقدرة بين  $Y$  ،  $X$  هي على الترتيب ،

$$E(Y_i) = b_0 + b_1 X_i \quad (٦ - ٢٨)$$

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_i \quad (٦ - ٩)$$

٦ - ٩ أوجد معادلة انحدار جدول الاستهلاك في جدول (٦ - ٤) ، باستخدام معادلة (٦ - ٦) لإيجاد  $\hat{b}_1$  (ب) ارسم خط ، الانحدار وبين انحرافات كل  $Y_i$  عن القيمة المناظرة  $\hat{Y}_i$  .

(أ) يوضح جدول ٦ - ٥ حسابات إيجاد  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  لبيانات جدول ٦ - ٤ .

$$\hat{b}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{(12)(225,124) - (1,740)(1,524)}{(12)(257,112) - (1,740)^2} = \frac{2,701,488 - 2,651,760}{3,085,344 - 3,027,600} = \frac{49,728}{57,744} \approx 0.86$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} \approx 127 - 0.86(145) \approx 127 - 124.70 \approx 2.30$$

وتكون المعادلة لانحدار الاستهلاك المقدر

$$\hat{Y}_i = 2.30 + 0.86 X_i$$

جدول ٦ - ٥ الاستهلاك الإجمالي والدخل المتاح : حسابات

| $n$      | $Y_i$                                 | $X_i$                                 | $X_i Y_i$                | $X_i^2$                |
|----------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1        | 102                                   | 114                                   | 11,628                   | 12,996                 |
| 2        | 106                                   | 118                                   | 12,508                   | 13,924                 |
| 3        | 108                                   | 126                                   | 13,608                   | 15,876                 |
| 4        | 110                                   | 130                                   | 14,300                   | 16,900                 |
| 5        | 122                                   | 136                                   | 16,592                   | 18,496                 |
| 6        | 124                                   | 140                                   | 17,360                   | 19,600                 |
| 7        | 128                                   | 148                                   | 18,944                   | 21,904                 |
| 8        | 130                                   | 156                                   | 20,280                   | 24,336                 |
| 9        | 142                                   | 160                                   | 22,720                   | 25,600                 |
| 10       | 148                                   | 164                                   | 24,272                   | 26,896                 |
| 11       | 150                                   | 170                                   | 25,500                   | 28,900                 |
| 12       | 154                                   | 178                                   | 27,412                   | 31,684                 |
| $n = 12$ | $\sum Y_i = 1,524$<br>$\bar{Y} = 127$ | $\sum X_i = 1,740$<br>$\bar{X} = 145$ | $\sum X_i Y_i = 225,124$ | $\sum X_i^2 = 257,112$ |

(ب) لرسم معادلة الانحدار ، نحتاج إلى نقطتين على خط الانحدار . فمثلاً ،

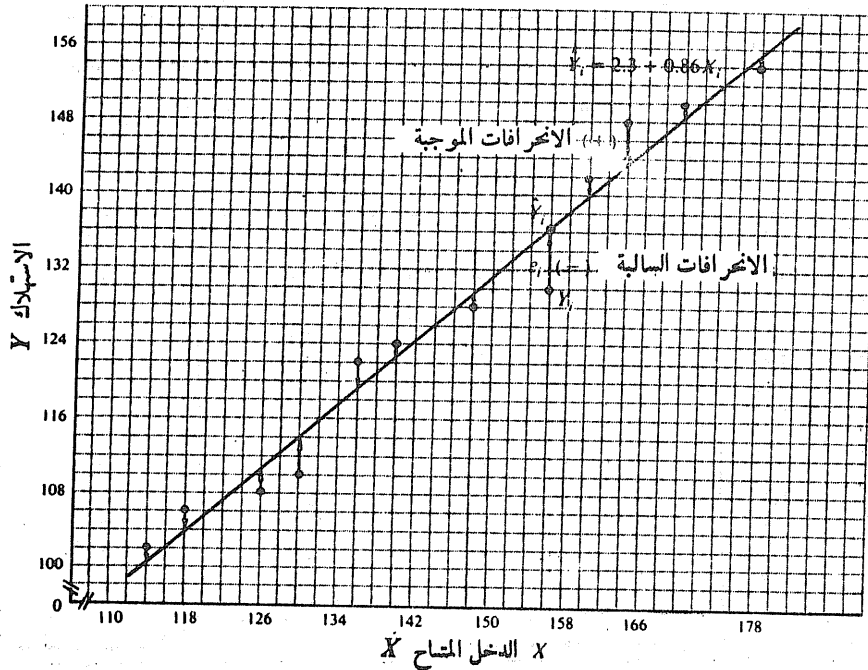
عند  $X_i = 114$  تكون  $Y_i = 2.30 + 0.86 (114) = 100.34$  ،

وعند  $X_i = 178$  تكون  $Y_i = 2.30 + 0.86 (178) = 155.38$  ،

وقد رسم خط الانحدار الاستهلاك في شكل ٦ - ٥ ، حيث توضح أيضاً البواقي السالبة والموجبة . ويمثل خط الانحدار أفضل توفيق للعينة المشوائية لمشاهدات الاستهلاك - الدخل المتاح بمعنى أنه يجعل مجموع مربعات الانحرافات (الرأسية) عن الخط أقل ما يمكن .

٦ - ١٠ (أ) بدءاً بالمعادلة (٦ - ٦) ، اشتق معادلة للمعامل  $\hat{b}_1$  باستخدام الانحرافات عن المتوسطات عندما يكون  $\bar{X} = \bar{Y} = 0$  ؟

(ب) ما هي قيمة  $\hat{b}_0$  عند  $\bar{X} = \bar{Y} = 0$  ؟



شكل ٦ - ٥

(أ) بدءاً بمعادلة  $\hat{b}_1$  (٦-٦) :

$$\hat{b}_1 = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (٦ - ٦)$$

بقسمة البسط والمقام على  $n^2$  نحصل على

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= \frac{\sum X_i Y_i / n - (\sum X_i / n)(\sum Y_i / n)}{\sum X_i^2 / n - (\sum X_i / n)^2} \\ &= \frac{\sum X_i Y_i / n - \bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 / n - \bar{X}^2} \\ &= \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \quad \text{وحيذف } \bar{X} = \bar{Y} = 0 \text{ من البسط والمقام حيث} \\ &= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad \text{حيث } \bar{X} = \bar{Y} = 0 \quad (٨ - ٦) \end{aligned}$$

(ب) بدءاً بمعادلة  $\hat{b}_0$  (٧-٦) :

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} \quad (٧ - ٦)$$

وباحلال 0 محل كل من  $\bar{X}$  ،  $\bar{Y}$  نحصل على :

$$\hat{b}_0 = 0 - \hat{b}_1(0) = 0$$

٦ - ١١ بالنسبة لبيانات جدول ٦-٤ (أ) أوجد قيمة  $\hat{b}_1$  باستخدام معادلة (٨-٦) ، (ب) ارسم خط الانحدار مع قياس المتغيرات كمتغيرات عن متوسطاتها . كيف يقارن خط الانحدار هذا بخط الانحدار في شكل ٦-٥ ؟

(أ) جدول ٦-٦ يوضح الحسابات لإيجاد  $\hat{b}_1$  لبيانات جدول ٦-٤ .

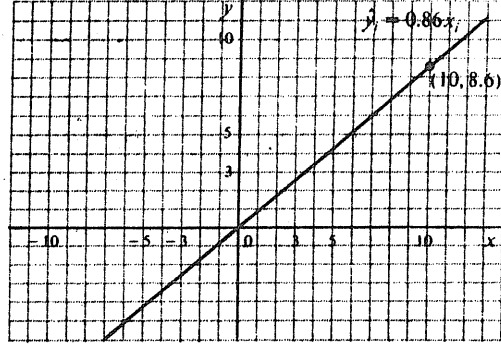
جدول ٦-٦ الاستهلاك الإجمالي والدخل المتاح : حسابات بديلة

| n  | $Y_i$ | $X_i$ | $y_i$          | $x_i$          | $x_i y_i$              | $x_i^2$              |
|----|-------|-------|----------------|----------------|------------------------|----------------------|
| 1  | 102   | 114   | -25            | -31            | 775                    | 961                  |
| 2  | 106   | 118   | -21            | -27            | 567                    | 729                  |
| 3  | 108   | 126   | -19            | -19            | 361                    | 361                  |
| 4  | 110   | 130   | -17            | -15            | 255                    | 225                  |
| 5  | 122   | 136   | -5             | -9             | 45                     | 81                   |
| 6  | 124   | 140   | -3             | -5             | 15                     | 25                   |
| 7  | 128   | 148   | 1              | 3              | 3                      | 9                    |
| 8  | 130   | 156   | 3              | 11             | 33                     | 121                  |
| 9  | 142   | 160   | 15             | 15             | 225                    | 225                  |
| 10 | 148   | 164   | 21             | 19             | 399                    | 361                  |
| 11 | 150   | 170   | 23             | 25             | 575                    | 625                  |
| 12 | 154   | 178   | 27             | 33             | 891                    | 1,089                |
|    |       |       | $\sum y_i = 0$ | $\sum x_i = 0$ | $\sum x_i y_i = 4,144$ | $\sum x_i^2 = 4,812$ |

في صورة انحرافات ( لاحظ أن  $\sum y_i = \sum x_i = 0$  ) :

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{4,144}{4,812} \approx 0.86 \quad (أ)$$

(ب) نعلم من المسألة ٦ - ١٠ (ب) أن خط الانحدار يمر بنقطة الأصل عندما يرسم في شكل بياني محاوره تقيس المتغيرات في صورة انحرافات عن متوسطاتها ، ومن (أ) من هذه المسألة نعلم أن خط الانحدار هذا له نفس ميل خط الانحدار في شكل ٦ - ٥ . أنظر شكل ٦ - ٦ .



شكل ٦ - ٦

١٢ - ٦ في سياق المسألة ٦ - ٩ (أ) ما معنى كل من (أ) المقدّر  $\hat{b}_0$  ؟ (ب) المقدّر  $\hat{b}_1$  ؟ (ج) أوجد المرونة الداخلية للاستهلاك .

(أ) المقدّر  $\hat{b}_0 \approx 2.30$  هو الجزء المقطوع من  $Y$  ، أو قيمة الاستهلاك الإجمالي بالبلليون دولار ، عندما يساوى الدخل المتاح ، أيضاً بالبلليون دولار ، صفراً . وحقيقة أن  $\hat{b}_0 > 0$  يؤكد ما كان متوقفاً على أسس نظرية في مثال ٣ في الفصل الأول .

(ب) المقدّر  $\hat{b}_1 = dY/dX \approx 0.86$  هو ميل خط الانحدار المقدّر . وهو يقيس الميل الحدى للاستهلاك ، MPC ، أو التغير في الاستهلاك لوحدة التغير في الدخل . مرة أخرى ، حقيقة أن  $0 < \hat{b}_1 < 1$  يؤكد ما كان متوقفاً على أسس نظرية في مثال ٣ في الفصل الأول .

(ج) المرونة الداخلية للاستهلاك  $\eta$  تقيس نسبة التغير في الاستهلاك الناتجة عن تغير نسبي معين في الدخل المتاح . وحيث أن المرونة تتغير عادة عند كل نقطة للدالة ، فإنها تقاس عند المتوسطات

$$\eta = \hat{b}_1 \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad (٢٩ - ٦)$$

من بيانات جدول ٦ - ٤ .

$$\eta = 0.86 \frac{145}{127} \approx 0.98$$

لاحظ أن المرونة ، بالمقارنة بالميل ، هي رقم مطلق ( بدون تمييز ) .

اختبارات المعنوية لتقديرات المعالم :

١٣ - ٦ عرف (أ)  $\sigma_u^2$  و  $S^2$  (ب) تباين  $\hat{b}_0$  وتباين  $\hat{b}_1$  (ج)  $s_{\hat{b}_0}^2$  و  $s_{\hat{b}_1}^2$  و (د)  $s_{\hat{b}_0}$  و  $s_{\hat{b}_1}$  .

(أ)  $\sigma_u^2$  هو تباين حد الخطأ في العلاقة الحقيقية بين  $X_i$  و  $Y_i$  . ولكن  $\sigma_u^2 = \sum e_i^2 / (n - k)$  وهو تباين البواقي وهو تقدير (غير متحيز) للتباين  $\sigma_u^2$  غير المعلوم .  $K$  هي عدد المعالم المقدرة . في تحليل الانحدار البسيط ،  $k = 2$  وعليه فإن  $n - k = n - 2$  وتشير إلى درجات الحرية .

(ب) تباين  $\hat{b}_0 = \sigma_u^2 \sum X_i / n \sum x_i^2$  بينما تباين  $\hat{b}_1 = \sigma_u^2 / \sum x_i^2$  . إن تباين  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  (أو تقديراتهما) مطلوبة لاختبار الفروض عن وتكوين فترات الثقة لكل من  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  .

$$s_{b_0}^2 = s^2 \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = \frac{\sum e_i^2 \sum X_i^2}{(n - k) n \sum x_i^2} \quad \text{و} \quad s_{b_1}^2 = \frac{s^2}{\sum x_i^2} = \frac{\sum e_i^2}{(n - k) \sum x_i^2} \quad (ج)$$

$s_{b_0}^2$  ،  $s_{b_1}^2$  هي ، على الترتيب ، تقديرات (غير متحيزة) لتباين  $\hat{b}_0$  وتباين  $\hat{b}_1$  ، غير المعلومين نظراً لأن غير معلومة .

(د)  $s_{b_0} = \sqrt{s_{b_0}^2}$  و  $s_{b_1} = \sqrt{s_{b_1}^2}$  .  $s_{b_0}$  و  $s_{b_1}$  هي على الترتيب ، الانحرافات المعيارية  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  وتسمى الأخطاء المعيارية .

١٤ - ٦ أثبت أن (أ) متوسط  $\hat{b}_1 = b_1$  ، و (ب) تباين  $\hat{b}_1 = \sigma_u^2 / \sum x_i^2$  (ج) متوسط  $\hat{b}_0 = b_0$  و (د) تباين  $\hat{b}_0 = \sigma_u^2 (\sum X_i^2 / n \sum x_i^2)$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{\sum x_i \bar{Y}}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} \quad \text{حيث} \quad \sum x_i = 0$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum c_i Y_i$$

حيث  $c_i = x_i / \sum x_i^2$  ثابت طبقاً لفرض 5 (قسم ٦ - ١)

$$b_1 = \sum c_i Y_i = \sum c_i (b_0 + b_1 X_i + u_i) = b_0 \sum c_i + b_1 \sum c_i X_i + \sum c_i u_i = b_1 + \sum c_i u_i = b_1 + \frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}$$

و  $\sum c_i = \sum x_i / \sum x_i^2 = 0$  (لأن  $\sum x_i = 0$ ) حيث

$$\sum c_i X_i = \frac{\sum x_i X_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) X_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X} \sum X_i}{\sum X_i^2 - 2\bar{X} \sum X_i + n\bar{X}^2} = \frac{\sum X_i^2 - \bar{X} \sum X_i}{\sum X_i^2 - \bar{X} \sum X_i} = 1$$

$$E(\hat{b}_1) = E(b_1) + E\left[\frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}\right] = E(b_1) + \frac{1}{\sum x_i^2} E(\sum x_i u_i) = b_1 \quad \text{وسط} \quad b_1$$

وحيث أن  $b_1$  ثابت ،  $(\sum x_i u_i) = 0$  طبقاً لفرض 5 (قسم ٦ - ١) .

(ب) من (أ)

$$b_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum c_i Y_i$$

$$\text{Var } \hat{b}_1 = \text{var}(\sum c_i Y_i)^2 = \sum c_i^2 \text{var } Y_i = \sum c_i^2 \sigma_u^2$$

وحيث أن  $Y_i$  تتغير بسبب  $u_i$  فقط ثبات  $X_i$  فرضاً .

$$\text{Var } \hat{b}_1 = \sum c_i^2 \sigma_u^2 = \sum \left( \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 \sigma_u^2 = \frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} \sigma_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum x_i^2}$$



$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} = \frac{\sum Y_i}{n} - \bar{X} \sum c_i Y_i \quad (ج)$$

$$\hat{b}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \bar{X} \sum c_i Y_i = \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right) Y_i$$

(٣٢) (من معادلة (١-٦) في المسألة ٦-٨ (د))

$$E(b_0) = \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right) E(Y_i) = \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right) (b_0 + b_1 X_i)$$

وبفك الأقواس

$$E(b_0) = \sum \left( \frac{b_0}{n} - \bar{X} c_i b_0 + \frac{b_1 X_i}{n} - \bar{X} c_i b_1 X_i \right) = b_0 + b_1 \bar{X} - b_1 \bar{X} = b_0$$

إذ أن  $\sum c_i = 0$  و  $\sum c_i X_i = 1$  ، من (أ)

(د) رأينا في (ج) أن

$$\hat{b}_0 = \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right) Y_i$$

$$\text{Var } \hat{b}_0 = \text{var} \left[ \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right) Y_i \right] = \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right)^2 \text{var } Y_i = \sigma_u^2 \sum \left( \frac{1}{n} - \bar{X} c_i \right)^2$$

$$\text{Var } \hat{b}_0 = \sigma_u^2 \sum \left( \frac{1}{n^2} - \frac{2\bar{X} c_i}{n} + \bar{X}^2 c_i^2 \right) = \sigma_u^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right) = \sigma_u^2 \frac{\sum x_i^2 + n\bar{X}^2}{n \sum x_i^2}$$

حيث  $\sum c_i = 0$  ، و  $\sum c_i^2 = 1/\sum x_i^2$  .

$$\text{Var } \hat{b}_0 = \sigma_u^2 \frac{\sum x_i^2 + n\bar{X}^2}{n \sum x_i^2} = \sigma_u^2 \frac{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2}{n \sum x_i^2} = \sigma_u^2 \frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2}$$

حيث أننا رأينا في (أ) أن  $\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$  .

٦ - ١٥ بالنسبة لملاحظات الاستهلاك - الدخل الإجماليين في جدول ٦-٤ ، أوجد

(أ)  $S^2$  ، (ب)  $s_{b_0}^2$  و  $s_{b_1}^2$  (ج)  $s_{b_0}^2$  و  $s_{b_1}^2$  .

(أ) الحسابات المطلوبة لإيجاد  $S^2$  موضحة في جدول ٦-٧ ، الذي يعتبر امتداداً لجدول ٦-٦ . نحصل على قيم  $Y_i$  الموجودة في جدول ٦-٧ بإحلال قيم  $X_i$  في معادلة الانحدار السابق إيجادها في المسألة ٦-٩ (أ) .

$$s^2 = \sigma_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} = \frac{115.2752}{12 - 2} = 11.52752 \approx 11.53$$

$$s_{b_0}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = \frac{s \sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = \frac{(11.53)(257,112)}{(12)(4,812)} \approx 51.34 \quad (ب)$$

$$s_{b_0} = \sqrt{s_{b_0}^2} = \sqrt{51.34} \approx 7.17 \quad \text{فتكون :}$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{(n - k) \sum x_i^2} = \frac{s^2}{\sum x_i^2} \approx \frac{11.53}{4,812} \approx 0.0024 \quad (ج)$$

جدول ٦ - ٧ انحدار الاستهلاك : حسابات اختبار معنوية المعامل

| n  | $Y_i$ | $X_i$ | $\hat{Y}_i$ | $e_i$          | $e_i^2$                 | $X_i^2$                | $x_i^2$              |
|----|-------|-------|-------------|----------------|-------------------------|------------------------|----------------------|
| 1  | 102   | 114   | 100.34      | 1.66           | 2.7556                  | 12,996                 | 961                  |
| 2  | 106   | 118   | 103.78      | 2.22           | 4.9284                  | 13,924                 | 729                  |
| 3  | 108   | 126   | 110.66      | - 2.66         | 7.0756                  | 15,876                 | 361                  |
| 4  | 110   | 130   | 114.10      | - 4.10         | 16.8100                 | 16,900                 | 225                  |
| 5  | 122   | 136   | 119.26      | 2.74           | 7.5076                  | 18,496                 | 81                   |
| 6  | 124   | 140   | 122.70      | 1.30           | 1.6900                  | 19,600                 | 25                   |
| 7  | 128   | 148   | 129.58      | - 1.58         | 2.4964                  | 21,904                 | 9                    |
| 8  | 130   | 156   | 136.46      | - 6.46         | 41.7316                 | 24,336                 | 121                  |
| 9  | 142   | 160   | 139.90      | 2.10           | 4.4100                  | 25,600                 | 225                  |
| 10 | 148   | 164   | 143.34      | 4.66           | 21.7156                 | 26,896                 | 361                  |
| 11 | 150   | 170   | 148.50      | 1.50           | 2.2500                  | 28,900                 | 625                  |
| 12 | 154   | 178   | 155.38      | - 1.38         | 1.9044                  | 31,684                 | 1,089                |
|    |       |       |             | $\sum e_i = 0$ | $\sum e_i^2 = 115.2752$ | $\sum X_i^2 = 257,112$ | $\sum x_i^2 = 4,812$ |

$$s_{\hat{b}_1} = \sqrt{s_{\hat{b}_1}^2} = \sqrt{0.0024} \approx 0.05$$

فكون

١٦ - ٩ (أ) أذكر القرض العدمي والفرض البديل لاختبار المعنوية الإحصائية لمعامل معادلة الانحدار المقدرة في المسألة ٩ - ٩ (ب) ما شكل توزيع المعاينة لكل من  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  ؟ (ج) أى توزيع يجب استخدامه لاختبار المعنوية الإحصائية لكل من  $b_0$  و  $b_1$  ؟ (د) ما هي درجات الحرية ؟

(أ) لاختبار المعنوية الإحصائية لكل من  $b_0$  و  $b_1$  ، نستخدم المرض العدمي ،  $H_0$  والفرض البديل ،  $H_1$  التاليين (أنظر قسم ٥ - ٢) :

$$H_0 : b_0 = 0 \quad \text{مقابل} \quad H_1 : b_0 \neq 0$$

$$H_0 : b_1 = 0 \quad \text{مقابل} \quad H_1 : b_1 \neq 0$$

المرجو من تحليل الانحدار أن نرفض الفرض  $H_0$  وأن نقبل الفرض  $H_1$  ، بأن كلا من  $b_0$  و  $b_1$  لا تساوى الصفر مستخدمين اختباراً له ذيلان .

(ب) حيث يفترض أن  $u_i$  تتبع التوزيع الطبيعي (فرض ١ في قسم ٩ - ١) ، فإن  $Y_i$  أيضاً تتبع التوزيع الطبيعي (حيث أن  $X_i$  ثابتة فرضاً - الفرض ٠) . وكنتيجة ، فإن  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  تكون أيضاً موزعة طبيعياً .

(ج) لاختبار المعنوية الإحصائية لكل من  $b_0$  و  $b_1$  ، فإنه يجب استخدام توزيع  $t$  (من ملحق ٠) لأن  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  تتبع التوزيع الطبيعي ، ولكن تباين  $b_0$  وتباين  $b_1$  غير معلومين (حيث أن  $\sigma_u^2$  غير معلوم) وكذلك  $n < 30$  (أنظر قسم ٤ - ٤) .

(د) درجات الحرية هي  $n - k$  ، حيث  $n$  هي عدد المشاهدات و  $k$  هي عدد المعاملات المقدرة . حيث أنه في تحليل الانحدار البسيط يتم تقدير اثنين من المعامل ( $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$ ) ، تكون درجات الحرية  $df = n - k = n - 2$  . وتكون  $b_1$  بين ٠.٧٥ ، ٠.٩٧ (أى أن  $0.75 < b_1 < 0.97$  بدرجة ثقة ٩٥٪) .

١٧ - ٩ اختبر عند مستوى معنوية (أ)  $b_0$  ، (ب)  $b_1$  في المسألة ٩ - ٩ (أ) .

$$t_0 = \frac{\hat{b}_0 - b_0}{s_{\hat{b}_0}} = \frac{2.30 - 0}{7.17} \approx 0.32 \quad (أ)$$

وحيث أن  $t_0$  أصغر من القيمة الجدولية  $2.228 = t$  عند مستوى  $5\%$  (اختبار له ذيلان) بدرجات حرية  $10$  .  
(من ملحق ) . وننتهي إلى أن  $b_0$  ليست معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية  $5\%$  (بمعنى أنه لا يمكننا رفض الفرض  $H_0$  ، بأن  $b_0 = 0$  ) .

$$t_1 = \frac{\hat{b}_1 - b_1}{s_{\hat{b}_1}} = \frac{0.86 - 0}{0.05} \approx 17.2 \quad (ب)$$

وبالتالي فإن  $b_1$  معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية  $5\%$  (وكذلك مستوى  $1\%$  ) (بمعنى أنه لا يمكننا رفض الفرض  $H_1$  بأن  $b_1 \neq 0$  ) .

٦ - ١٨ كون فترة الثقة  $95\%$  لكل من (أ)  $b_0$  ، (ب)  $b_1$  في تمرين ٦ - ٩ (أ) .

(أ) فترة الثقة  $5\%$  للمعلمة  $b_0$  هي (أنظر قسم ٤ - ٤)

$$b_0 = \hat{b}_0 \pm 2.228 s_{\hat{b}_0} = 2.30 \pm 2.228(7.17) = 2.30 \pm 15.97$$

أي أن  $b_0$  تقع بين  $13.67$  ،  $18.27$  بدرجة ثقة  $95\%$  . لاحظ اتساع فترة الثقة  $95\%$  للمعلمة  $b_0$  (وغير ذات معنى) ، مما يعكس حقيقة أن  $\hat{b}_0$  غير معنوية بدرجة كبيرة .

(ب) فترة الثقة  $65\%$  للمعلمة  $b_1$  هي :

$$b_1 = \hat{b}_1 \pm 2.228 s_{\hat{b}_1} = 0.86 \pm 2.228(0.05) = 0.86 \pm 0.11$$

أي أن  $b_1$  تقع بين  $0.75$  ،  $0.97$  (أي  $0.75 < b_1 < 0.97$  ) بدرجة ثقة  $95\%$  .

اختبار عودة التوفيق والارتباط :

٦ - ١٩ اشتق صيغة في  $R^2$

يعرف معامل التحديد ،  $R^2$  بأنه نسبة التغير الإجمالي في  $Y$  «الذي يفسره» انحدار  $Y$  على  $X$  . أما التغير الإجمالي في  $Y$  فهو إجمالي مجموع المربعات  $TSS = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2$  . التغير المفسر في  $Y$  أو مجموع مربعات الانحدار  $RSS = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum y_i^2$  . بتغير البواقي في  $Y$  أو مجموع مربعات الخطأ  $ESS = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum e_i^2$  .

$$\begin{aligned} TSS &= RSS + ESS \\ \sum (Y_i - \bar{Y})^2 &= \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\ \sum y_i^2 &= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \end{aligned}$$

بقسمة الطرفين على  $\sum y_i^2$  ، نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2} &= \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \\ 1 &= \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \\ R^2 &= \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \end{aligned}$$

وبالتالي :

$R^2$  ليس لها تمييز وتقع  $0 < R^2 < 1$  لأن  $0 < ESS < TSS$  .  $R^2 = 0$  عندما ، على سبيل المثال ، تقع كل نقاط العينة على خط مستقيم  $Y = \bar{Y}$  : أو على دائرة .  $R^2 = 1$  عندما تقع كل نقاط العينة على خط الانحدار المقدّر ، مشيراً إلى علاقة تامة .

٢٠ - ٩ ماذا يقيس معامل الارتباط ؟ ما هو مدى قيم هذا المعامل ؟ (ب) ما هي العلاقة بين الارتباط وتحليل الانحدار ؟  
(أ) يقيس معامل الارتباط درجة الاقتران بين متغيرين أو أكثر . في حالة المتغيرين ، فإن معامل الارتباط الخطي البسيط ،  
r لمجموعة مشاهدات عينة هو

$$r = \sqrt{R^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}} = \sqrt{\hat{b}_1 \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}}$$

$r < 0$  .  $-1 < r < +1$  - تعني أن X و Y يتحركان في اتجاهات عكسية مثل ، على سبيل المثال ، الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها .  $r > 0$  تشير إلى أن X و Y يتغيران في نفس الاتجاه ، مثل الكمية المعروضة من سلعة ما وسعرها .  
 $r = -1$  تشير إلى ارتباط عكسي تام (يعني أن كل مشاهدات العينة تقع على خط مستقيم ذي ميل سالب) ؛ ولكن  $r = 1$  تشير إلى ارتباط تام موجب (أي أن كل مشاهدات العينة تقع على خط مستقيم ذي ميل موجب) . ونادراً ما تكون  $r = \pm 1$  . وكلما قربت r من  $\pm 1$  ، كلما زادت درجة العلاقة الخطية الموجبة أو السالبة . ويجب ملاحظة أن إشارة r هي نفس إشارة  $\hat{b}_1$  . ويعني معامل ارتباط صفر أنه لا توجد علاقة خطية من أي نوع بين X و Y (بمعنى أنهما يميلان إلى التحرك بدون صلة بينهما) . فثلاً ، إذا كانت مشاهدات العينة تقع تماماً على دائرة ، فإن هناك علاقة تامة غير خطية ولكن علاقة خطية صفرية وتكون  $r = 0$  .

(ب) ينطوي تحليل الانحدار (ولكنه لا يثبت) على وجود علاقة سببية بين المتغير المستقل ، X ، والمتغير التابع ، Y . تحليل الارتباط لا ينطوي على أي سببية أو تبعية ولكنه ببساطة يشير إلى نوع ودرجة الاقتران بين متغيرين . فمثلاً ، ولكن ، يمكن أن يكون بين X و Y ارتباط مرتفع بسبب أن متغيراً ثالثاً يؤثر بشدة على r . فمثلاً ، فإن تحليل الارتباط هو أداة أقل قوة من تحليل الانحدار . ونادراً ما يستخدم بمفرده في الحياة العملية . فمثلاً ، فإن الاستخدام الرئيسي لتحديد الارتباط هو لتحديد درجة الاقتران الموجودة في تحليل الانحدار . وهذا يسمى بمعامل التحديد ، وهو مربع معامل الارتباط .

٢١ - ٩ اشتق المعادلة (أ)  $r = \sum x_i y_i / (\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2})$

أرشاد : ابدأ بتوضيح أن  $\sum x_i y_i$  هي مقياس للاقتران بين X و Y (ب)  $r = \sqrt{\hat{b}_1 (\sum x_i y_i / \sum y_i^2)}$

أرشاد : ابدأ بالمعادلة  $r = \sum x_i y_i / (\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2})$

(أ) تمدنا  $\sum x_i y_i$  بمقياس للاقتران بين X ، Y لأنه إذا كانت X ، Y تزيدان أو تنقصان معاً فإن  $x_i y_i > 0$  ،  
بينما إذا زادت X ونقصت Y أو العكس ، فإن  $x_i y_i < 0$  . إذا تضمنت كل أو معظم مشاهدات العينة زيادة أو نقصان في X ، Y كليهما ، تكون  $\sum x_i y_i$  وكبيرة ، مشيرة إلى ارتباط طردي كبير . إذا كانت كل أو معظم مشاهدات العينة تتضمن تغيرات عكسية في X و Y تكون  $\sum x_i y_i < 0$  . وكبيرة ، مشيرة إلى ارتباط عكسي كبير . ولكن ، إذا كان بعض مشاهدات X و Y تتحرك في نفس الاتجاه ، بينما البعض الآخر يتحرك في الاتجاه المضاد ، فإن  $\sum x_i y_i$  سوف تكون صغيرة ، مشيرة إلى صافي ارتباط موجب أو سالب . ولكن ، قياس درجة الاقتران باستخدام  $\sum x_i y_i$  يكون له عيبان . الأول ، أنه كلما كبر عدد مشاهدات العينة ، كلما كبرت  $\sum x_i y_i$  والثاني ، أن  $\sum x_i y_i$  تكون مبعراً عنها بوحدات المشكلة . ويمكن التغلب على هذه المشاكل بقسمة  $\sum x_i y_i$  على n (عدد المشاهدات في العينة) وعلى الانحراف المعياري للمتغيرات X و Y  $(\sqrt{\sum y_i^2 / n})$  و  $(\sqrt{\sum x_i^2 / n})$  وتصيح

$$Y \text{ و } X \text{ تغاير} = \frac{\sum x_i y_i}{n} \quad (٣٠ - ٩)$$

$$\frac{\sum x_i y_i}{n \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}} = r$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{\sqrt{\sum x_i y_i}}{\sqrt{\sum x_i^2}} \frac{\sqrt{\sum x_i y_i}}{\sqrt{\sum y_i^2}} = \sqrt{\hat{b}_1 \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}} \quad (\text{ب})$$

٢٢ - ٦ أوجد  $R^2$  لانحدار الاستهلاك المقدّر في المسألة ٦ - ٩ باستخدام المعادلة (أ)  $R^2 = \sum \hat{y}_i^2 / \sum y_i^2$  (ب)  $R^2 = 1 - \sum e_i^2 / \sum y_i^2$

(أ) نعرف من المسألة ٦ - ٩ أن  $\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$  ، فتكون  $\sum \hat{y}_i^2 = \sum y_i^2 - \sum e_i^2$  ، وحيث أن  $\sum y_i^2 = 3,684$  (بتربيع وإضافة عناصر  $\hat{y}_i$  من جدول ٦ - ٩) ،  $\sum e_i^2 = 115.2572$  (من جدول ٦ - ٩)  $\sum y_i^2 = 3,684 - 115.2572 = 3,568.7428$  فتكون

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{3,568.7428}{3,684} \approx 0.9687, \text{ or } 96.87\%$$

(ب) باستخدام  $\sum e_i^2 = 115.2572$  ، و  $\sum y_i^2 = 3,684$  ، نحصل على

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{115.2572}{3,684} \approx 0.9687, \text{ or } 96.87\%$$

كافي (أ)

٢٣ - ٦ أوجد  $r$  لانحدار الاستهلاك المقدّر في المسألة ٦ - ٩ باستخدام (أ)  $\sqrt{R^2}$  ، (ب)  $r = \sum x_i y_i / (\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2})$  ، و

$$r = \sqrt{\hat{b}_1 (\sum x_i y_i / \sum y_i^2)} \quad (\text{ج})$$

وهي موجبة لأن  $\hat{b}_1 > 0$  .

$$r = \sqrt{R^2} \approx \sqrt{0.9687} \approx 0.9842 \quad (\text{أ})$$

(ب) باستخدام  $\sum x_i y_i = 4,144$  ،  $\sum x_i^2 = 4,812$  من جدول ٦ - ٩ ،  $\sum y_i^2 = 3,684$  من تمرين ٢٢ - ٦ (أ) ، نحصل على :

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{4,144}{\sqrt{4,812} \sqrt{3,684}} \approx 0.9841$$

والفرق الصغير جدا بين قيمة  $r$  هنا والقيمة السابق إيجادها في (أ) يرجع إلى أخطاء التقريب .

(ج) باستخدام  $\hat{b}_1 \approx 0.86$  السابق إيجادها في المسألة ٦ - ٩ (أ) ،

$$r = \sqrt{\hat{b}_1 \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}} = \sqrt{\frac{(0.86)(4,144)}{3,684}} \approx 0.9836$$

٢٤ - ٦ (أ) أوجد معامل ارتباط الرتب أي معامل ارتباط سيرمان بين درجات أعمال السنة وترتيب اختبار الذكاء IQ لمينة عشوائية من 10 طلاب من فصل كبير ، كما هي موضحة بجدول ٦ - ٨ ، باستخدام معادلة (٦ - ٣١) . (ب) متى يستخدم ارتباط الرتب ؟

جدول ٦ - ٨ درجات أعمال السنة والترتيب في اختبار IQ

| الطالب            | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| درجات أعمال السنة | 77 | 78 | 65 | 84 | 84 | 88 | 67 | 92 | 68 | 96 |
| ترتيب             | 7  | 6  | 8  | 5  | 4  | 3  | 9  | 1  | 10 | 2  |

$$(١) \quad r' = 1 - \frac{6\sum D^2}{n(n^2 - 1)} \quad (٦ - ٣١)$$

حيث  $D$  = الفرق في رتبة العنصرين المتناظرين في كل زوج ( إما ترتيباً تنازلياً أو تصاعدياً ، مع تخصيص الرتبة المتوسطة للمشاهدات من ذات القيمة الواحدة )

$n$  = عدد المشاهدات

ويتضمن جدول ٦ - ٩ الحسابات اللازمة لإيجاد  $r$  .

$$r' = 1 - \frac{6\sum D^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(10.50)}{10(99)} = 1 - \frac{63}{990} \approx 0.94$$

جدول ٦ - ٩ الحسابات اللازمة لإيجاد معامل ارتباط الرتب

| $n$ | درجات<br>أعمال السنة | رتبة أعمال السنة | رتبة IQ | $D$  | $D^2$              |
|-----|----------------------|------------------|---------|------|--------------------|
| 1   | 96                   | 1                | 2       | -1   | 1                  |
| 2   | 92                   | 2                | 1       | 1    | 1                  |
| 3   | 88                   | 3                | 3       | 0    | 0                  |
| 4   | 84                   | 4.5              | 4       | 0.5  | 0.25               |
| 5   | 84                   | 4.5              | 5       | -0.5 | 0.25               |
| 6   | 78                   | 6                | 6       | 0    | 0                  |
| 7   | 77                   | 7                | 7       | 0    | 0                  |
| 8   | 68                   | 8                | 10      | -2   | 4                  |
| 9   | 67                   | 9                | 9       | 0    | 0                  |
| 10  | 65                   | 10               | 8       | 2    | 4                  |
|     |                      |                  |         |      | $\sum D^2 = 10.50$ |

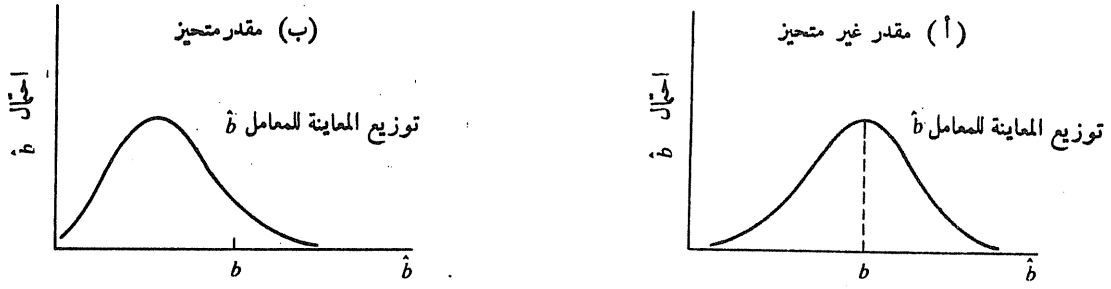
(ب) يستخدم ارتباط الرتب للبيانات الكيفية مثل المهنة ، التعليم ، الجنس ، الخ . عندما لا يمكن إيجاد معامل الارتباط لغياب القيم الرقمية . كما يستخدم ارتباط الرتب عندما لا يكون متاحاً القيم الدقيقة لبعض أو كل المتغيرات ( وبالتالي ، مرة أخرى ، لا يمكن إيجاد معامل الارتباط ) . فضلاً على ذلك ، ففي حالة عدد كبير من المشاهدات ذات القيم العالية ، فيمكن إيجاد  $r'$  كتقدير للمعامل  $r$  لتجنب استخدام وقت طويل في الحسابات ( ولكن ، سهولة استخدام الكمبيوتر قد حذفت من الناحية العملية هذا السبب لاستخدام  $r'$  ) .

خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية :

٦ - ٢٥ (أ) ماذا يقصد بمقدر غير متحيز ؟ كيف يعرف التحيز ؟ (ب) ارسم شكلاً يوضح توزيع المعاينة لمقدر غير متحيز وآخر متحيز .

(أ) يعتبر المقدر غير متحيز إذا كان وسط توزيع المعاينة الخاص به يساوي المعلمة الحقيقية . وسط توزيع المعاينة هو القيمة المتوقعة للمقدر . وغياب التحيز يعني أن  $E(\hat{b}) = b$  ، حيث  $\hat{b}$  هي المقدر للمعلمة الحقيقية ،  $b$  . وعليه فيعرف التحيز بالفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر وبين المعلمة الحقيقية . أي أن التحيز  $= E(\hat{b}) - b$  . لاحظ أن عدم وجود التحيز لا يعني أن  $\hat{b} = b$  ، ولكن في المعاينة العشوائية المتكررة ، فإننا نحصل ، في المتوسط ، على التقدير الصحيح . ونأمل أن العينة التي حصلنا عليها فعلاً قريبة من وسط توزيع المعاينة للمقدر .

(ب) يوضح شكل ٦ - ٧ (أ) توزيع المعاينة لمقدر غير متحيز ، كما يوضح شكل ٦ - ٧ (ب) توزيع المعاينة لمقدر متحيز .



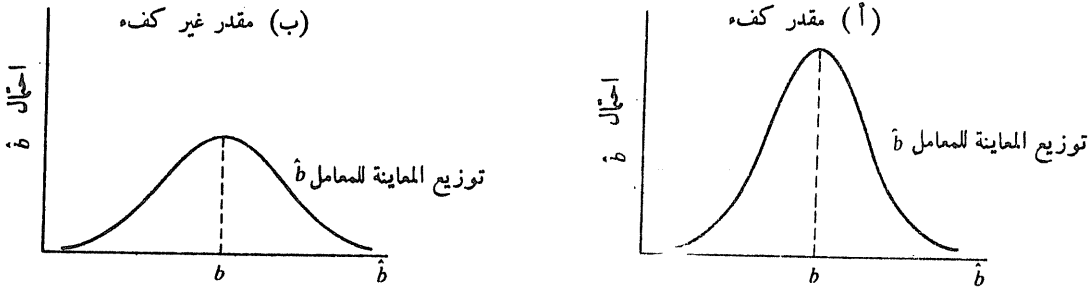
شكل ٦ - ٧

٦ - ٢٦ (أ) ماذا يقصد بأفضل مقدر غير متحيز أو مقدر كفء ؟ لماذا يكون هذا مهما ؟ (ب) ارسم شكلاً لتوزيع المعاينة لمقدرين غير متحيزين ، أحدهما كفؤ .

(أ) أفضل مقدر غير متحيز أى مقدر كفؤ يشير إلى المقدر صاحب أصغر تباين بين المقدرات غير المتحيزة . فهو مقدر غير متحيز ذو توزيع أكثر تقارباً وأقل انتشاراً من غيره .

وهذا مهم جداً لأن الباحث يكون أكثر تأكيداً بأن المقدر أقرب إلى المعلمة الحقيقية للمجتمع موضع التقدير . أو بطريقة أخرى ، فإن المقدر الكفء يكون له أصغر فترة ثقة ومن المرجح أن يكون معنوياً إحصائياً عن غيره من المقدرات . ويجب أن يلاحظ أن أصغر تباين ليس مهماً في حد ذاته - إلا إذا اقترن بغياب التحيز .

(ب) يوضح شكل ٦ - ٨ (أ) توزيع المعاينة كمقدر كفء . بينما يوضح شكل ٦ - ٨ (ب) مقدر غير كفء .



شكل ٦ - ٨

٦ - ٢٧ لماذا يكثر استخدام مقدرات OLS ؟ هل هي تمتاز عن غيرها من المقدرات ؟

يكثر استخدام مقدرات OLS لأنها BLUE (أفضل مقدرات خطية غير متحيزة) . أى ، من بين جميع المقدرات الخطية غير المتحيزة ، فإن لها أصغر تباين . وعادة ما يشار إلى خصائص BLUE هذه لمقدرات OLS كنظرية جاوس - ماركوف . ولكن ، قد تمتاز مقدرات غير خطية عن OLS (بمعنى أنها يمكن أن تكون غير متحيزة ولها تباين أقل) . وحيث أنه عادة من الصعب أو المستحيل إيجاد تباين أو تحيز المقدرات غير الخطية ، تبقى مقدرات OLS الأكثر شيوعاً في الاستخدام . ومقدرات OLS ، بوصفها خطية ، تكون أسهل في الاستخدام من المقدرات غير الخطية .

٦ - ٢٨ ماذا يقصد بمتوسط مربع الخطأ ؟ لماذا ومتى يكون استخدام قاعدة « النهاية الصغرى لمتوسط مربع الخطأ » مفيداً ؟ (ب) أثبت أن متوسط مربع الخطأ يساوى التباين زائداً مربع تحيز المقدر .

$$MSE(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)^2 = \text{var } \hat{b} + (\text{bias } \hat{b})^2 \quad (1)$$

$$\text{MSE}(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)^2 \quad (\text{ب})$$

٦ - ٣٠ يعطى جدول ٦-١٠ دخل الفرد الحقيقي ، لأقرب 1.000 دولار أمريكي ،  $Y_i$  في 15 لمقدولة متقدمة والنسبة الناقصة لقوة العمل في الزراعة ،  $X_i$  ، لأقرب 1% في عام ١٩٨١ . (أ) .قدر معادلة المخدر  $Y_i$  على  $X_i$  (ب) اختبر عند مستوى منوية 5% المنوية الاحصائية للمعام . (ج) أوجد معامل التحديد (د) ضم نتائج (أ) في صورة موجزة قياسية .



جدول ٦ - ١٠ دخل الفرد ،  $Y_i$  (بالألف دولار) ، ونسبة القوة العاملة في الزراعة  $X_i$  ، في 15 دولة متقدمة في ١٩٨١ .

| الدولة | 1 | 2  | 3 | 4 | 5  | 6  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|--------|---|----|---|---|----|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| $Y_i$  | 6 | 8  | 8 | 7 | 7  | 12 | 9 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 9  | 10 | 11 |
| $X_i$  | 9 | 10 | 8 | 7 | 10 | 4  | 5 | 5 | 6 | 8  | 7  | 4  | 9  | 5  | 8  |

(أ) تستخدم الأعمدة السبعة الأولى في جدول ٦ - ١١ للإجابة على (أ) . ويتم ملء باقي الجدول باستخدام نتائج (أ) للإجابة (ب) ، (ج) من المسألة .

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-28}{60} \approx -0.47$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} = 9 - (-0.47)(7) \approx 12.29$$

$$\hat{Y}_i = 12.29 - 0.47 X_i$$

جدول ٦ - ١١ مسودة

| الدولة   | $Y_i$                             | $X_i$                             | $y_i$          | $x_i$          | $x_i y_i$            | $x_i^2$           | $\hat{Y}_i$ | $e_i$          | $e_i^2$                | $X_i^2$            | $y_i^2$           |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------|----------------|----------------------|-------------------|-------------|----------------|------------------------|--------------------|-------------------|
| 1        | 6                                 | 9                                 | -3             | 2              | -6                   | 4                 | 8.06        | -2.06          | 4.2436                 | 81                 | 9                 |
| 2        | 8                                 | 10                                | -1             | 3              | -3                   | 9                 | 7.59        | 0.41           | 0.1681                 | 100                | 1                 |
| 3        | 8                                 | 8                                 | -1             | 1              | -1                   | 1                 | 8.53        | -0.53          | 0.2809                 | 64                 | 1                 |
| 4        | 7                                 | 7                                 | -2             | 0              | 0                    | 0                 | 9.00        | -2.00          | 4.0000                 | 49                 | 4                 |
| 5        | 7                                 | 10                                | -2             | 3              | -6                   | 9                 | 7.59        | -0.59          | 0.3481                 | 100                | 4                 |
| 6        | 12                                | 4                                 | 3              | -3             | -9                   | 9                 | 10.41       | 1.59           | 2.5281                 | 16                 | 9                 |
| 7        | 9                                 | 5                                 | 0              | -2             | 0                    | 4                 | 9.94        | -0.94          | 0.8836                 | 25                 | 0                 |
| 8        | 8                                 | 5                                 | -1             | -2             | 2                    | 4                 | 9.94        | -1.94          | 3.7636                 | 25                 | 1                 |
| 9        | 9                                 | 6                                 | 0              | -1             | 0                    | 1                 | 9.47        | -0.47          | 0.2209                 | 36                 | 0                 |
| 10       | 10                                | 8                                 | 1              | 1              | 1                    | 1                 | 8.53        | 1.47           | 2.1609                 | 64                 | 1                 |
| 11       | 10                                | 7                                 | 1              | 0              | 0                    | 0                 | 9.00        | 1.00           | 1.0000                 | 49                 | 1                 |
| 12       | 11                                | 4                                 | 2              | -3             | -6                   | 9                 | 10.41       | 0.59           | 0.3481                 | 16                 | 4                 |
| 13       | 9                                 | 9                                 | 0              | 2              | 0                    | 4                 | 8.06        | 0.94           | 0.8836                 | 81                 | 0                 |
| 14       | 10                                | 5                                 | 1              | -2             | -2                   | 4                 | 9.94        | 0.06           | 0.0036                 | 25                 | 1                 |
| 15       | 11                                | 8                                 | 2              | 1              | 2                    | 1                 | 8.53        | 2.47           | 6.1009                 | 64                 | 4                 |
| $n = 15$ | $\sum Y_i = 135$<br>$\bar{Y} = 9$ | $\sum X_i = 105$<br>$\bar{X} = 7$ | $\sum y_i = 0$ | $\sum x_i = 0$ | $\sum x_i y_i = -28$ | $\sum x_i^2 = 60$ |             | $\sum e_i = 0$ | $\sum e_i^2 = 26.9340$ | $\sum X_i^2 = 795$ | $\sum y_i^2 = 40$ |

$$s_{b_0}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = \frac{(26.9340)(795)}{(15-2)(15)(60)} \approx 1.83 \quad \text{and} \quad s_{b_0} \approx 1.35 \quad (\text{ب})$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{(n-k) \sum x_i^2} = \frac{26.9340}{(15-2)(60)} \approx 0.03 \quad \text{and} \quad s_{b_1} \approx 0.17$$

$$t_0 = \frac{\hat{b}_0}{s_{b_0}} \approx \frac{12.29}{1.35} \approx 9.10$$

$$t_1 = \frac{\hat{b}_1}{s_{b_1}} \approx \frac{-0.47}{0.17} \approx -2.76$$

وبالتالى ، فإن كلا من  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% .

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{26.9340}{40} \approx 0.33 \quad (ج)$$

$$\hat{y}_i = 12.29 - 0.47X_i \quad R^2 = 0.33 \quad (د)$$

(9.10)    (-2.76)

الأرقام داخل الأقواس تحت المعامل المقدرة تشير إلى قيم (t) المناظرة . كطريقة بديلة يمكن كتابة الخطأ المياري للتقدير داخل الأقواس .

### مسائل إضافية

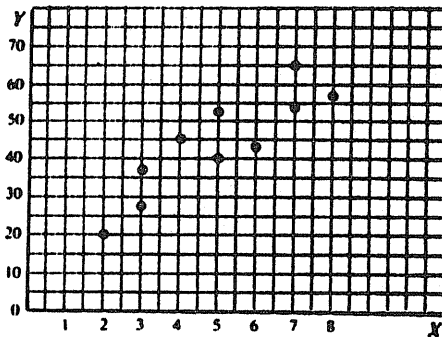
النموذج الخطى ذو المتغيرين :

٦ - ٣١ ارسم شكل انتشار لبيانات جدول ٦-١٢ وحدد بالنظر إذا كان هناك علاقة خطية تقريبية بين  $X_i$  ،  $Y_i$  .

الإجابة : العلاقة بين  $X$  ،  $Y$  في شكل ٦-١٠ خطية تقريباً .

جدول ٦-١٢ مشاهدات من المتغيرات  $X$  و  $Y$

| $n$ | $Y_i$ | $X_i$ |
|-----|-------|-------|
| 1   | 20    | 2     |
| 2   | 28    | 3     |
| 3   | 40    | 5     |
| 4   | 45    | 4     |
| 5   | 37    | 3     |
| 6   | 52    | 5     |
| 7   | 54    | 7     |
| 8   | 43    | 6     |
| 9   | 65    | 7     |
| 10  | 56    | 8     |



شكل ٦-١٠ :

٦ - ٣٢ اذكر فروض نموذج الانحدار الكلاسيكي (OLS) في صورة رياضية .  
الإجابة :

$$u \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (٦ - ٢١)$$

$$E(u_i u_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (٦ - ٢٢)$$

$$E(X_i u_i) = 0 \quad (٦ - ٢٣)$$

(نظر المسألة ٦ - ٤) .

طريقة المربعات الصغرى العادية :

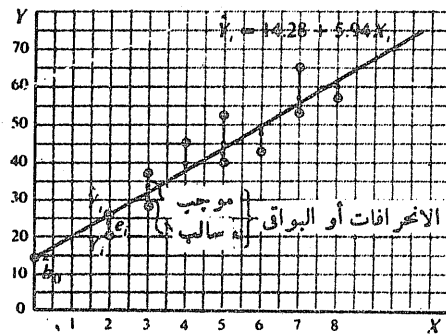
٦ - ٣٣ عبر رياضيا عن العبارات والصيغ الآتية : (أ) أوجد القيمة الصغرى لمجموع مربعات انحرافات كل قيمة  $Y$  عن القيمة التوفيقية المناظرة لها .

(ب) أوجد القيمة الصغرى لمجموع مربعات البواقي . (ج) المعادلات الطبيعية (د) الصيغ لتقدير  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  .  
الإجابة : (أ)  $\text{Min} \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  (ب)  $\sum e_i^2$  (ج)  $\sum Y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_i$  و  $\sum X_i Y_i = \hat{b}_0 \sum X_i + \hat{b}_1 \sum X_i^2$  (د)  $\hat{b}_1 = (n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i) / [n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2] = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$  و  $\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X}$

٦ - ٣٤ بالنسبة لبيانات جدول ٦ - ١٢ ، أوجد قيمة (أ)  $b_1$  ، (ب)  $b_0$  .

(ج) اكتب معادلة خط انحدار OLS المقدّر . الإجابة (أ)  $\hat{b}_1 \approx 5.94$  (ب)  $\hat{b}_0 \approx 14.28$  (ج)  $\hat{Y}_i = 14.28 + 5.94 X_i$

٦ - ٣٥ (أ) ارسم على مجموعة من المحاور بيانات جدول ٦ - ١٢ ، خط انحدار OLS المقدّر في مسألة ٦ - ٣٤ ، ووضح البواقي .  
(ب) وضح بالرسم أن خط الانحدار يمر بالنقطة  $\bar{X}\bar{Y}$  .  
الإجابة : (أ) انظر شكل ٦ - ١١ (ب) عند  $X_i = 5 = \bar{X}$  ،  $\hat{Y}_i = 14.28 + 5.94(5) = 43.98 \approx \bar{Y} = 44$   
(الفرق البسيط ناتج عن التقريب)



شكل ٦ - ١١

٦ - ٣٦ بالإشارة إلى خط انحدار OLS المقدّر في المسألة ٦ - ٣٤ ، اذكر (أ) معنى  $\hat{b}_1$  ، (ب) معنى  $\hat{b}_0$  ، (ج) مرونة  $Y$  بالنسبة إلى  $X$  عند المتوسطات .

الإجابة : (أ)  $\hat{b}_0$  هي (الجزء المقطوع من  $Y$ ) (ب)  $\hat{b}_1$  هي ميل خط انحدار OLS المقدّر (ج)  $\eta \approx 0.68$

اختبارات معنوية تقديرات المعامل :

- ٦ - ٣٧ بالنسبة لبيانات جدول ٦-١٢ في مسألة ٦-٣١ ، أوجد (أ)  $S^2$  (ب)  $s_{b_0}^2$  و  $s_{b_1}^2$  ، (ج)  $s_{b_1}^2$  و  $s_{b_0}^2$  الإجابة : (أ)  $s^2 \approx 46.97$  (ب)  $s_{b_0}^2 \approx 37.31$  و  $s_{b_1}^2 \approx 6.11$  (ج)  $s_{b_1}^2 \approx 1.31$  و  $s_{b_0}^2 \approx 1.14$  .
- ٦ - ٣٨ اختبر عند مستوى معنوية 5% كلا من (أ)  $b_0$  ، (ب)  $b_1$  في المسألة ٦-٣٤ .
- الإجابة : (أ)  $b_0$  معنوية إحصائياً عند مستوى 5% (ب)  $b_1$  أيضاً معنوية إحصائياً عند مستوى 5% .
- ٦ - ٣٩ كون فترة الثقة 95% لكل من (أ)  $b_0$  ، (ب)  $b_1$  في مسألة ٦-٣٤ .
- الإجابة : (أ)  $0.19 < b_0 < 28.37$  (ب)  $3.31 < b_1 < 8.57$

اختبار جودة التوفيق والارتباط :

- ٦ - ٤٠ بالنسبة لبيانات معادلة انحدار OLS المقدرة في مسألة ٦-٣٤ ، أوجد (أ)  $R^2$  (ب)  $r$  .
- الإجابة : (أ)  $R^2 \approx 0.77$  (ب)  $r \approx 0.88$
- ٦ - ٤١ أوجد معامل ارتباط الرتب لعينة مشاهدات  $XY$  في جدول ٦-١٢ .
- الإجابة :  $r' \approx 0.90$  ( $\approx r \approx 0.88$ )

خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية :

- ٦ - ٤٢ بالإشارة إلى  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  في المسألة ٦-٣٤ ، هل هي : (أ) BLUE ؟ (ب) غير متحيزة في النهاية ؟ (ج) متسقة ؟
- الإجابة : (أ) نعم (ب) نعم (ج) نعم
- ٦ - ٤٣ بالإشارة إلى  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  في المسألة ٦-٣٤ : (أ) ما هو MSE ؟ (ب) هل تعطى  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  أصغر قيمة للمقدار MSE ؟
- الإجابة : (أ)  $MSE(\hat{b}_0) = \text{var } \hat{b}_0$  و  $MSE(\hat{b}_1) = \text{var } \hat{b}_1$  (ب) نعم

مسألة شاملة :

- ٦ - ٤٤ يمثلي جدول ٦-١٣ بيانات عينة عشوائية من 12 عائلة من عدد الأطفال في الأسرة  $Y_i$  ، وعدد الأطفال الذين قالوا وقت الزواج إنهم يرغبون في إنجاب  $X_i$  . أوجد انحدار  $Y_i$  على  $X_i$  وضع النتائج في صورة موجزة .

جدول ٦-١٣ عدد الأطفال في الأسرة والعدد المرغوب من الأطفال

| المائلة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $Y_i$   | 4 | 3 | 0 | 4 | 4 | 3 | 0 | 4 | 3 | 1  | 3  | 1  |
| $X_i$   | 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1  | 3  | 2  |

- الإجابة :  $\hat{Y}_i = 0.22 + 1.14X_i$  ،  $R^2 = 0.68$  (0.39) (4.56)
- والأرقام داخل الأقواس هي قيم  $t$  . وعليه فإن  $\hat{b}_1$  معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% ، 1% ، ولكن  $\hat{b}_0$  ليست معنوية .

## الفصل السابع

### تحليل الانحدار المتعدد

#### ١-٧ النموذج الخطي لثلاثة متغيرات

يستخدم تحليل الانحدار المتعدد لاختبار الفروض عن العلاقة بين متغير تابع ،  $Y$  ، واثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة ،  $X_1, X_2, \dots$  . ويمكن كتابة نموذج الانحدار الثلاثي كالاتي :

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + u_i \quad (١ - ٧)$$

الفرض الإضافي ( إلى فروض النموذج الخطي البسيط ) أنه لا توجد علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة  $X_1, X_2, \dots$  .

ويمكن الحصول على تقديرات معالم المربعات الصغرى العادية OLS بإيجاد النهاية الصغرى لمجموع مربعات البواقي .

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1X_{1i} - \hat{b}_2X_{2i})^2$$

ويعطى هذا المادلات الطبيعية الثلاث الآتية ( انظر المسألة ٧ - ٢ ) :

$$\sum Y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_{1i} + \hat{b}_2 \sum X_{2i} \quad (٢ - ٧)$$

$$\sum X_{1i}Y_i = \hat{b}_0 \sum X_{1i} + \hat{b}_1 \sum X_{1i}^2 + \hat{b}_2 \sum X_{1i}X_{2i} \quad (٣ - ٧)$$

$$\sum X_{2i}Y_i = \hat{b}_0 \sum X_{2i} + \hat{b}_1 \sum X_{1i}X_{2i} + \hat{b}_2 \sum X_{2i}^2 \quad (٤ - ٧)$$

والتي ( عندما يعبر عنها في صورة انحرافات المتغيرات عن متوسطاتها ) يمكن حلها آلياً لإيجاد  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  معطية ( انظر تمرين ٧ - ٣ )

$$\hat{b}_1 = \frac{(\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \quad (٥ - ٧)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{(\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}^2) - (\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \quad (٦ - ٧)$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1\bar{X}_1 - \hat{b}_2\bar{X}_2 \quad (٧ - ٧) \quad \text{وتكون}$$

و يقيس المقدار  $\hat{b}_1$  التغير في  $Y$  بالنسبة لتغير مقداره الوحدة في  $X_1$  مع تثبيت  $X_2$  . وتعرف  $\hat{b}_2$  على نفس النمط . وتسمى المقدرات  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  بمعاملات الانحدار الجزئية وتكون  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  BLUE ( انظر قسم ٦ - ٥ ) .

مثال ١ : جدول ١ - ٧ هو امتداد لجدول ١ - ٦ ويعطى عدد بوشلات الحنطة للأكر ،  $Y$  ، الناتج من استخدام كميات مختلفة من الأسمدة  $X_1$  ، وكميات مختلفة من المبيدات الحشرية  $X_2$  ، معبراً عنها بعدد الأرتال للأكر ، من عام ١٩٧١ إلى ١٩٨٠ . باستخدام معادلات ( ٥ - ٧ ) ، ( ٦ - ٧ ) ، ( ٧ - ٧ ) ، نحصل على

$$\hat{b}_1 = \frac{(\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} = \frac{(956)(504) - (900)(524)}{(576)(504) - (524)^2} \approx 0.65$$

$$\hat{b}_2 = \frac{(\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}^2) - (\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} = \frac{(900)(576) - (956)(524)}{(576)(504) - (524)^2} \approx 1.11$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1\bar{X}_1 - \hat{b}_2\bar{X}_2 \approx 57 - (0.65)(18) - (1.11)(12) \approx 31.98$$

جمل ٧ - ١ : الخطة التجريبية من السارد والبيد المستخدم مع حسابات تقديرات المعالم

| السنة    | $y$            | $x_1$            | $x_2$            | $y$          | $x_1$          | $x_2$          | $x_1 y$            | $x_2 y$            | $x_1 x_2$            | $x_1^2$            | $x_2^2$            |
|----------|----------------|------------------|------------------|--------------|----------------|----------------|--------------------|--------------------|----------------------|--------------------|--------------------|
| 1971     | 40             | 6                | 4                | -17          | -12            | -8             | 204                | 136                | 96                   | 144                | 64                 |
| 1972     | 44             | 10               | 4                | -13          | -8             | -8             | 104                | 104                | 64                   | 64                 | 64                 |
| 1973     | 46             | 12               | 5                | -11          | -6             | -7             | 66                 | 77                 | 42                   | 36                 | 49                 |
| 1974     | 48             | 14               | 7                | -9           | -4             | -5             | 36                 | 45                 | 20                   | 16                 | 25                 |
| 1975     | 52             | 16               | 9                | -5           | -2             | -3             | 10                 | 15                 | 6                    | 4                  | 9                  |
| 1976     | 58             | 18               | 12               | 1            | 0              | 0              | 0                  | 0                  | 0                    | 0                  | 0                  |
| 1977     | 60             | 22               | 14               | 3            | 4              | 2              | 12                 | 6                  | 8                    | 16                 | 4                  |
| 1978     | 68             | 24               | 20               | 11           | 6              | 8              | 66                 | 88                 | 48                   | 36                 | 64                 |
| 1979     | 74             | 26               | 21               | 17           | 8              | 9              | 136                | 153                | 72                   | 64                 | 81                 |
| 1980     | 80             | 32               | 24               | 23           | 14             | 12             | 322                | 276                | 168                  | 196                | 144                |
| $n = 10$ | $\sum y = 570$ | $\sum x_1 = 180$ | $\sum x_2 = 120$ | $\sum y = 0$ | $\sum x_1 = 0$ | $\sum x_2 = 0$ | $\sum x_1 y = 956$ | $\sum x_2 y = 900$ | $\sum x_1 x_2 = 524$ | $\sum x_1^2 = 576$ | $\sum x_2^2 = 504$ |
|          | $\bar{y} = 57$ | $\bar{x}_1 = 18$ | $\bar{x}_2 = 12$ |              |                |                |                    |                    |                      |                    |                    |

وعليه فإن ،  $\hat{Y}_i = 31.98 + 0.65 X_{1i} + 1.10 X_{2i}$  . لتقدير معالم الانحدار لثلاثة متغيرات مستقلة أو أكثر ، انظر برنامج الكمبيوتر للمسألة ٧-٢٢ .

### ٧-٢ اختبارات معنوية لتقديرات المعالم

لاختبار المعنوية الاحصائية لتقديرات المعالم للانحدار المتعدد ، فإن تبين التقديرات مطلوب :

$$\text{Var } \hat{b}_1 = \sigma_u^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \quad (٧ - ٨)$$

$$\text{Var } \hat{b}_2 = \sigma_u^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \quad (٧ - ٩)$$

( عادة  $b_0$  ليست موضع اهتمام أساسى ، أنظر المسألة ٧-٦ (٨) ) . وحيث أن غير معلومة ، فإن تبين البواقي ،  $S^2$  يستخدم كتقدير غير متحيز للتباين  $\sigma_u^2$  :

$$s^2 = \hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \quad (٦ - ١٢)$$

حيث  $K$  = عدد المعالم المقدرة

فتكون التقديرات غير المتحيزة لتباين  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_0$  هي :

$$s_{\hat{b}_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \quad (٧ - ١٠)$$

$$s_{\hat{b}_2}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \quad (٧ - ١١)$$

وبالتالى فإن  $S\hat{b}_1$  و  $S\hat{b}_2$  هي الأخطاء المعيارية للتقديرات . وتجربى اختبارات الفروض عن  $b_1$  و  $b_2$  كما فى قسم ٦-٣ .

مثال ٢ : جدول ٧-٢ ( وهو امتداد لجدول ٧-١ ) يبين الحسابات الإضافية اللازمة لاختبار المعنوية الإحصائية لكل من  $b_1$  و  $b_2$  . ويتم الحصول على قيم  $Y_i$  فى جدول ٧-٢ بالتمويض عن قيم  $X_{1i}$  و  $X_{2i}$  فى معادلة انحدار OLS المقدرة السابق إيجادها فى مثال ١ . ( ويتم الحصول على قيم  $Y_i^2$  بتربيع  $Y_i$  من جدول ٧-١ وسوف تستخدم فى قسم ٧-٢ ) .

جدول ٧-٢ حسابات الخطئة - السهاد - المبيد لاختبار معنوية المعالم

| السنة  | Y  | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | $\hat{Y}$ | e            | e <sup>2</sup>       | Y <sup>2</sup>     |
|--------|----|----------------|----------------|-----------|--------------|----------------------|--------------------|
| 1971   | 40 | 6              | 4              | 40.32     | - 0.32       | 0.1024               | 289                |
| 1972   | 44 | 10             | 4              | 42.92     | 1.08         | 1.1664               | 169                |
| 1973   | 46 | 12             | 5              | 45.33     | 0.67         | 0.4489               | 121                |
| 1974   | 48 | 14             | 7              | 48.85     | - 0.85       | 0.7225               | 81                 |
| 1975   | 52 | 16             | 9              | 52.37     | - 0.37       | 0.1369               | 25                 |
| 1976   | 58 | 18             | 12             | 57.00     | 1.00         | 1.0000               | 1                  |
| 1977   | 60 | 22             | 14             | 61.82     | - 1.82       | 3.3124               | 9                  |
| 1978   | 68 | 24             | 20             | 69.78     | - 1.78       | 3.1684               | 121                |
| 1979   | 74 | 26             | 21             | 72.19     | 1.81         | 3.2761               | 289                |
| 1980   | 80 | 32             | 24             | 79.42     | 0.58         | 0.3364               | 529                |
| n = 10 |    |                |                |           | $\sum e = 0$ | $\sum e^2 = 13.6704$ | $\sum Y^2 = 1,634$ |

باستخدام قيم جدول ٧-٢ ، ٧-١ نحصل على :

$$s_{b_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{13.6704}{10-3} \frac{504}{(576)(504) - (524)^2} \approx 0.06 \quad \text{and} \quad s_{b_1} \approx 0.24$$

$$s_{b_2}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{13.6704}{10-3} \frac{576}{(576)(504) - (524)^2} = 0.07 \quad \text{and} \quad s_{b_2} \approx 0.27$$

وعليه فإن  $t_1 = \hat{b}_1 / s_{b_1} \approx 0.65 / 0.24 \approx 2.70$  و  $t_2 = \hat{b}_2 / s_{b_2} \approx 1.11 / 0.27 \approx 4.11$  . وحيث أن كلا من  $t_1$  و  $t_2$  تتجاوز  $t_{2.365} = 7$  بدرجات حرية 7 عند مستوى معنوية 5% (من ملحقه) ، فإن كلا من  $b_1$  و  $b_2$  معنوية عند مستوى معنوية 5% .

### ٧-٢ معامل التحديد المتعدد

يعرف معامل التحديد المتعدد  $R^2$  ، بأنه نسبة التغير الإجمالي في  $Y$  الذي « يفسره » الانحدار المتعدد للمتغير  $Y$  على المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  ، (وكما هو موضح في قسم ٦-٤) يمكن حسابه كالآتي (انظر المسألة ٧-١٠) .

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2}{\sum y^2}$$

وحيث إن إضافة متغيرات مستقلة أو مفسرة أخرى يرفع على الأرجح  $\sum \hat{y}_i^2$  و  $RSS = \sum y_i^2$  لنفس قيمة  $TSS = \sum y_i^2$  (انظر قسم ٦-٤) ، فإن  $R^2$  تزيد . فإذا أخذنا في الاعتبار نقص عدد درجات الحرية مع إضافة متغيرات مستقلة إضافية ، فإن المعدل  $\bar{R}^2$  أو  $R^2$  يمكن حسابها كالآتي (انظر المسألة ٧-١٢) :

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k} \quad (٧-١٢)$$

حيث  $n$  = عدد المشاهدات

$k$  = عدد المعالم المقدرة

مثال ٣ : يمكن إيجاد  $R^2$  لمثال الخطئة - السداد - المبيد باستخدام جدول ٧-٢ :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{13.6704}{1,634} \approx 1 - 0.0084 = 0.9916, \text{ or } 99.16\%$$

قارن هذا مع قيمة  $R^2$  وقدرها 97.10% في حالة الانحدار البسيط ، عندما استخدم السداد كتغير مستقل وحيد .

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - 0.9916) \frac{10-1}{10-3} = 1 - 0.0084(1.2857) = 0.9892, \text{ or } 98.92\%$$

### ٧-٤ اختبار المعنوية الكلية للانحدار

يمكن اختبار المعنوية الإجمالية للانحدار باستخدام نسبة التباين « المفسر » إلى التباين غير « المفسر » ، ويتبع هذا توزيع (انظر قسم ٥-٥) بدرجات حرية  $k-1$  و  $n-k$  حيث  $n$  عدد المشاهدات ،  $k$  عدد المعالم المقدرة .

$$F_{k-1, n-k} = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / (k-1)}{\sum e_i^2 / (n-k)} = \frac{R^2 / (k-1)}{(1 - R^2) / (n-k)} \quad (٧-١٣)$$

فإذا تجاوزت نسبة  $F$  المحسوبة قيمة  $F$  الجدولية عند مستوى المعنوية ودرجات الحرية المحددة (من ملحق ٧) يقبل الفرض بأن معالم  $F$  الانحدار ليست جميعها مساوية للصفر وأن  $R^2$  تختلف جوهريا عن الصفر .

مثال ٤ - اختبار المعنوية الكلية للانحدار المقدر في مثال ١ بمستوى 5% يمكن استخدام  $R^2 = 0.9916$  (من مثال ٣) بحيث

$$F_{2,7} = \frac{0.9916/2}{(1 - 0.9916)/7} \approx 413.17$$



وحيث أن قيمة  $F$  المحسوبة تفوق القيمة الجدولية  $F=4.74$  عند مستوى معنوية 5% وحيث  $df = 2, 7$  (من ملحق ٧) ، نقبل الفرض بأن  $b_1$  و  $b_2$  لا تساوى الصفر معا وأن  $R^2$  تختلف معنوياً عن الصفر .

#### ٧-٥ معاملات الارتباط الجزئي

يقيس معامل الارتباط الجزئي صافي الارتباط بين المتغير التابع ومتغير مستقل بعد حذف التأثير المشترك ( أى مع تثبيت ) للمتغيرات المستقلة الأخرى في النموذج . فمثلاً  $r_{YX_1.X_2}$  هو الارتباط الجزئي بين  $Y$  و  $X_1$  بعد حذف تأثير  $X_2$  من كل من  $Y$  و  $X_1$  ( أنظر المسألة ٧-١٩ (أ) ) :

$$r_{YX_1.X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_2}^2}} \quad (٧ - ١٤)$$

$$r_{YX_2.X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_1}^2}} \quad (٧ - ١٥)$$

حيث  $r_{YX_1}$  معامل الارتباط البسيط بين  $Y$  و  $X_1$  ، ويعرف  $r_{YX_2}$  و  $r_{X_1X_2}$  على نفس النمط . وتراوح معاملات الارتباط الجزئية بين  $-1$  ،  $+1$  ( كما هو الحال بالنسبة لمعاملات الارتباط البسيط ) ، ويكون لها نفس إشارة معلمة المجتمع المناظرة ، وتستخدم لتحديد الأهمية النسبية للمتغيرات المفسرة المختلفة في الانحدار المتعدد .

مثال ٥ : بالتعويض بقيم جدول ٧-١ ، ٧-٢ في معادلة ( ٦-١٨ ) لمعامل الارتباط البسيط ، نحصل على

$$r_{YX_1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_1^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{956}{\sqrt{576} \sqrt{1,634}} \approx 0.9854$$

$$r_{YX_2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{900}{\sqrt{504} \sqrt{1,634}} \approx 0.9917$$

$$r_{X_1X_2} = \frac{\sum x_2 x_1}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{524}{\sqrt{504} \sqrt{576}} \approx 0.9725$$

$$r_{YX_1.X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2}r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_2}^2}} = \frac{0.9854 - (0.9917)(0.9725)}{\sqrt{1 - 0.9725^2} \sqrt{1 - 0.9917^2}} \quad \text{وعليه}$$

$$\approx 0.7023, \text{ or } 70.23\%$$

$$r_{YX_2.X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1}r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_1}^2}} = \frac{0.9917 - (0.9854)(0.9725)}{\sqrt{1 - 0.9725^2} \sqrt{1 - 0.9854^2}} \approx 0.8434, \text{ or } 84.34\% \quad \text{و}$$

وعليه ، فإن  $X_2$  أكثر أهمية من  $X_1$  في تفسير التغير في  $Y$  .

مثال ٩ : يمكن تلخيص النتائج الكلية لمثال الخطوة - السداد - المبيد كالاتي :

$$\hat{Y} = 31.98 + 0.65X_1 + 1.10X_2$$

$$t = (2.70) \quad (4.11) \quad \text{قيم}$$

$$R^2 = 0.992 \quad \bar{R}^2 = 0.989 \quad F_{2,7} = 413.17$$

$$r_{YX_1.X_2} = 0.70 \quad r_{YX_2.X_1} = 0.84$$

وبالرغم من الحصول على النتائج عادة باستخدام الكمبيوتر ، إلا أنه من المهم القيام بعمل المسألة « يدوياً » كما فعلنا لكي نفهم خطوات الحل بوضوح . وتعرض المسألة ٧ - ٢٢ عينة برنامج - كمبيوتر كامل يشرح بالكامل كيفية استخدام Statistical Package for the Social Sciences (SPSS) وهو أكثر برامج الكمبيوتر شيوعاً في الاستخدام ، لانحدار متعدد ذي ثلاث متغيرات .

#### مسائل محلولة

النموذج الخطي ذو المتغيرات الثلاثة :

٧ - ١ (أ) اكتب معادلة نموذج الانحدار الخطي المتعدد لحالة متغيرين مستقلين أو مفسرين وحالة  $k$  متغير مستقل أو مفسر (ب) اذكر فروض النموذج الخطي للانحدار المتعدد .

(أ) في حالة متغيرين مستقلين أو مفسرين ، المعادلة هي :

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + u_i \quad (٧ - ١)$$

وفي حالة  $k$  متغير مستقل أو مفسر ، المعادلة هي :

$$Y_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + \dots + b_kX_{ki} + u_i$$

حيث تمثل  $X_{2i}$  ، كل سبيل المثال . المشاهدة التي ترتيبها  $i$  للمتغير المستقل  $X_2$  .

(ب) الفروض الخمسة الأول لنموذج الانحدار الخطي المتعدد هي نفس فروض نموذج الانحدار البسيط OLS ( انظر المسألة ٦ - ٤ ) . أي أن الفروض الثلاثة الأول يمكن تلخيصها على النحو  $u_i \sim N(0, \sigma)$  . الفرض الرابع هو  $E(u_i u_j) = 0$  عند  $i \neq j$  ؛ والفرض الخامس هو  $E(X_i u_i) = 0$  . الفرض الإضافي الوحيد المطلوب لنموذج الانحدار الخطي المتعدد OLS هو أنه لا توجد علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة  $X_1, X_2, \dots$  لأنه لو كان بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة ارتباط خطي تام ، لاستحال حساب تقديرات معالم OLS لأن مجموعة المعادلات الطبيعية سوف تشتمل على معادلتين أو أكثر ليست مستقلة . أما إذا كان هناك ارتباط خطي كبير وليس تاماً بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المفسرة ، فإنه يمكن تقدير معالم OLS ، ولكن لا يمكن عزل تأثير كل من المتغيرات المستقلة ذات الارتباط الخطي الكبير فيما بينها ( انظر قسم ٩ - ١ )

٧ - ٢ باستخدام طريقة OLS في حالة متغيرين مستقلين أو مفسرين ، اشتق (أ) المعادلة الطبيعية (٧ - ٢) ، (ب) المعادلة الطبيعية (٧ - ٣) ، (ج) المعادلة الطبيعية (٧ - ٤) . (القرأي غير الملم بالتفاضل يمكنه أن يتخطى هذه المسألة) .

(أ) تشتق المعادلة الطبيعية (٧ - ٢) بإيجاد النهاية الصغرى للمقدار  $\sum e_i^2$  بالنسبة إلى  $\hat{b}_0$  :

$$\frac{\partial e_i^2}{\partial \hat{b}_0} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i})^2}{\partial \hat{b}_0} = 0$$

$$-2 \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i}) = 0 \quad (٧ - ٢)$$

$$\sum Y_i = n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum X_{1i} + \hat{b}_2 \sum X_{2i}$$

(ب) وتشتق المعادلة الطبيعية (٧ - ٣) بإيجاد النهاية الصغرى للمقدار  $\sum e_i^2$  بالنسبة إلى  $\hat{b}_1$  :

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i})^2}{\partial \hat{b}_1} = 0$$

$$-2X_{1i} \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i}) = 0 \quad (3 - \text{v})$$

(ج) وتشتق المعادلة الطبيعية (٤ - v) بإيجاد النهاية الصغرى للمقدار  $\sum e_i^2$  بالنسبة إلى  $\hat{b}_2$  :

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_2} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i})^2}{\partial \hat{b}_2} = 0$$

$$-2X_{2i} \sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_{1i} - \hat{b}_2 X_{2i}) = 0 \quad (4 - \text{v})$$

$$\sum X_{2i} Y_i = \hat{b}_0 \sum X_{2i} + \hat{b}_1 \sum X_{1i} X_{2i} + \hat{b}_2 \sum X_{2i}^2$$

٣ - v بالنسبة لنموذج الانحدار الخطى المتعدد ذو المتغيرين المستقلين ، (أ) اشتق المعادلات الطبيعية باستخدام الانحرافات (إرشاد : ابدأ باشتقاق تعبير  $\hat{Y}_i$  ؛ يمكن للقارئ غير الملم بالتفاضل أن يتخطى هذا الجزء من المسألة) . (ب) كيف يمكن اشتقاق المعادلات ٥ - v ، ٦ - v ، ٧ - v ، لإيجاد  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  ،  $\hat{b}_2$  ؟

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1i} + \hat{b}_2 X_{2i} \quad (1)$$

$$\bar{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \bar{X}_1 + \hat{b}_2 \bar{X}_2$$

بالطرح ، نحصل على

$$\hat{y}_i = \hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{b}_1 x_{1i} + \hat{b}_2 x_{2i}$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i} \quad \text{وعليه}$$

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i})^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = \frac{\partial \sum (y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i})^2}{\partial \hat{b}_1} = 0$$

$$-2x_{1i} \sum (y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i}) = 0$$

$$\sum x_{1i} y_i = \hat{b}_1 \sum x_{1i}^2 + \hat{b}_2 \sum x_{1i} x_{2i} \quad (16 - \text{v})$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_2} = \frac{\partial \sum (y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i})^2}{\partial \hat{b}_2} = 0$$

$$-2x_{2i} \sum (y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i}) = 0$$

$$\sum x_{2i} y_i = \hat{b}_1 \sum x_{1i} x_{2i} + \hat{b}_2 \sum x_{2i}^2 \quad (17 - \text{v})$$

(ب) المعادلات (٥ - v) ، (٦ - v) لحساب  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  على الترتيب ، يتم الحصول عليها بحل معادلات (١٦ - v) ، (١٧ - v) آنياً . ويمكن دائماً حساب  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  ، إلا إذا كانت هناك علاقة خطية تامة بين  $X_1$  و  $X_2$  أو كان عدد المشاهدات عن كل متغير في النموذج 3 أو أقل . ويمكن حساب المعلمة  $\hat{b}_0$  بالتعويض في معادلة (٧ - v) بقيم  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  (المحسوبة باستخدام معادلات (٥ - v) ، (٦ - v)) رقيم  $\bar{Y}$  و  $\bar{X}_1$  و  $\bar{X}_2$  (المحسوبة من معطيات المسألة) .

٧ - ٤ : بالنسبة لتحليل الانحدار المتعدد ذي المتغيرين المستقلين بين معنى (أ)  $b_0$  (ب)  $b_1$  ، (ج)  $b_2$  (د) هل  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  BLUE ؟

(أ) المعلمة  $b_0$  هي الحد الثابت أو مقطع الانحدار وتمطى قيمة المتغير  $Y_i$  ، عندما  $X_{1i} = X_{2i} = 0$  .

(ب) تقيس المعلمة  $b_1$  التغير في  $Y$  لكل وحدة تغير في  $X_1$  مع إبقاء  $X_2$  ثابتة . ومعلمة الميل  $b_1$  هي معامل انحدار جزئي لأنها تناظر المشتقة الجزئية للمتغير  $Y$  بالنسبة إلى  $X_1$  ، أى  $\partial Y / \partial X_1$  .

(ج) تقيس المعلمة  $b_2$  التغير في  $Y$  لكل وحدة تغير في  $X_2$  مع إبقاء  $X_1$  ثابتة . ومعلمة الميل  $b_2$  هي المعامل الجزئي الثانى للانحدار لأنها تناظر المشتقة الجزئية للمتغير  $Y$  بالنسبة إلى  $X_2$  ، أى  $\partial Y / \partial X_2$  .

(د) حيث أنه يتم الحصول على  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  بطريقة OLS ، فإنها أيضاً أفضل مقدرات خطية غير متحيزة (BLUE) ، انظر قسم ٦ - ٥ . أى أن  $E(\hat{b}_0) = b_0$  ،  $E(\hat{b}_1) = b_1$  ،  $E(\hat{b}_2) = b_2$  ،  $S_{\hat{b}_0}^2$  ،  $S_{\hat{b}_1}^2$  ،  $S_{\hat{b}_2}^2$  أصغر منها لأى مقدرات خطية غير متحيزة أخرى ولما كان إثبات هذه الخصائص يمثل عبئاً ثقيلاً بدون استخدام جبر المصفوفات لذا لا نتناولها هنا .

٧ - ٥ : جدول ٧ - ٣ هو امتداد لجدول ٦ - ١١ ويمطى دخل الفرد الحقيقي بآلاف الدولارات  $Y$  ، مع نسبة القوة العاملة في الزراعة ،  $X_1$  ومتوسط سنوات التعليم للسكان فوق سن ٢٥ سنة ،  $X_2$  لعدد ١٥ دولة متقدمة في ١٩٨١ . (أ) أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى للمتغير  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  (ب) فسر النتائج في (أ) وقارنها بنتائج المسألة ٦ - ٣٠ .

جدول ٧ - ٣ : دخل الفرد ، القوة العاملة في الزراعة ، وسنوات التعليم

| $n$   | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $Y$   | 6 | 8  | 8  | 7  | 7  | 12 | 9  | 8  | 9  | 10 | 10 | 11 | 9  | 10 | 11 |
| $X_1$ | 9 | 10 | 8  | 7  | 10 | 4  | 5  | 5  | 6  | 8  | 7  | 4  | 9  | 5  | 8  |
| $X_2$ | 8 | 13 | 11 | 10 | 12 | 16 | 10 | 10 | 12 | 14 | 12 | 16 | 14 | 10 | 12 |

جدول ٧ - ٤ : مسودة لتقدير المعالم لبيانات جدول ٧ - ٣

| $n$      | $Y$                               | $X_1$                                 | $X_2$                                  | $y$            | $x_1$            | $x_2$            | $x_1 y$              | $x_2 y$             | $x_1 x_2$              | $x_1^2$             | $x_2^2$             |
|----------|-----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|----------------|------------------|------------------|----------------------|---------------------|------------------------|---------------------|---------------------|
| 1        | 6                                 | 9                                     | 8                                      | -3             | 2                | -4               | -6                   | 12                  | -8                     | 4                   | 16                  |
| 2        | 8                                 | 10                                    | 13                                     | -1             | 3                | 1                | -3                   | -1                  | 3                      | 9                   | 1                   |
| 3        | 8                                 | 8                                     | 11                                     | -1             | 1                | -1               | -1                   | 1                   | -1                     | 1                   | 1                   |
| 4        | 7                                 | 7                                     | 10                                     | -2             | 0                | -2               | 0                    | 4                   | 0                      | 0                   | 4                   |
| 5        | 7                                 | 10                                    | 12                                     | -2             | 3                | 0                | -6                   | 0                   | 0                      | 9                   | 0                   |
| 6        | 12                                | 4                                     | 16                                     | 3              | -3               | 4                | -9                   | 12                  | -12                    | 9                   | 16                  |
| 7        | 9                                 | 5                                     | 10                                     | 0              | -2               | -2               | 0                    | 0                   | 4                      | 4                   | 4                   |
| 8        | 8                                 | 5                                     | 10                                     | -1             | -2               | -2               | 2                    | 2                   | 4                      | 4                   | 4                   |
| 9        | 9                                 | 6                                     | 12                                     | 0              | -1               | 0                | 0                    | 0                   | 0                      | 1                   | 0                   |
| 10       | 10                                | 8                                     | 14                                     | 1              | 1                | 2                | 1                    | 2                   | 2                      | 1                   | 4                   |
| 11       | 10                                | 7                                     | 12                                     | 1              | 0                | 0                | 0                    | 0                   | 0                      | 0                   | 0                   |
| 12       | 11                                | 4                                     | 16                                     | 2              | -3               | 4                | -6                   | 8                   | -12                    | 9                   | 16                  |
| 13       | 9                                 | 9                                     | 14                                     | 0              | 2                | 2                | 0                    | 0                   | 4                      | 4                   | 4                   |
| 14       | 10                                | 5                                     | 10                                     | 1              | -2               | -2               | -2                   | -2                  | 4                      | 4                   | 4                   |
| 15       | 11                                | 8                                     | 12                                     | 2              | 1                | 0                | 2                    | 0                   | 0                      | 1                   | 0                   |
| $n = 15$ | $\Sigma Y = 135$<br>$\bar{Y} = 9$ | $\Sigma X_1 = 105$<br>$\bar{X}_1 = 7$ | $\Sigma X_2 = 180$<br>$\bar{X}_2 = 12$ | $\Sigma y = 0$ | $\Sigma x_1 = 0$ | $\Sigma x_2 = 0$ | $\Sigma x_1 y = -28$ | $\Sigma x_2 y = 38$ | $\Sigma x_1 x_2 = -12$ | $\Sigma x_1^2 = 60$ | $\Sigma x_2^2 = 74$ |

(أ) يبين جدول ٧ - ٤ الحسابات اللازمة لتقدير معالم معادلة انحدار OLS للمتغير  $Y$  على المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$ .

$$\hat{b}_1 = \frac{(\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} = \frac{(-28)(74) - (38)(-12)}{(60)(74) - (-12)^2} = \frac{-2,072 + 456}{4,440 - 144} = -0.38$$

$$\hat{b}_2 = \frac{(\sum x_{2i}y_i)(\sum x_{1i}^2) - (\sum x_{1i}y_i)(\sum x_{1i}x_{2i})}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} = \frac{(38)(60) - (-28)(-12)}{(60)(74) - (-12)^2} = \frac{2,280 - 336}{4,440 - 144} = 0.45$$

$$\hat{b}_0 = Y - \hat{b}_1X_1 - \hat{b}_2X_2 = 9 - (-0.38)(7) - (0.45)(12) = 9 + 2.66 - 5.40 = 6.26$$

وعليه فمعادلة OLS لانحدار  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  هي :

$$\hat{Y}_i = 6.26 - 0.38 X_{1i} + 0.45 X_{2i}$$

(ب) تشير معادلة انحدار OLS المقدرة على أن مستوى دخل الفرد الحقيقي  $Y$  ، يرتبط عكسياً مع نسبة القوة العاملة في الزراعة  $X_1$  ، وطردياً مع عدد سنوات التعليم للسكان فوق سن 25 ( كما قد يكون متوقفاً ) . بالتحديد تشير  $\hat{b}_1$  ، إلى أن نقص نسبة القوة العاملة في الزراعة بمقدار 1% من إجمالي القوة العاملة سوف يصاحبه زيادة قدرها 380 دولاراً أمريكياً في دخل الفرد مع تثبيت  $X_2$ . ولكن ، زيادة سنة واحدة في سنوات التعليم للسكان فوق سن 25 سنة يصاحبها زيادة في دخل الفرد قدرها 450 دولاراً أمريكياً ، مع تثبيت  $X_1$  . وعند  $X_{1i} = X_{2i} = 0$  ،  $\hat{Y}_i = \hat{b}_0 = 6.26$  . وبالنسبة لـ  $X_1$  ، وبالنسبة لـ  $X_2$  ما اتضح أن  $X_2$  معنوية إحصائياً ( انظر المسألة ٧ - ٨ ) ، وبالتالي يجب أن تدخل في علاقة الانحدار ، فقد اتضح أيضاً أن  $\hat{b}_1 \approx -0.47$  السابق إيجادها في تمرين ٦ - ٣٠ لا تكون تقديراً موثوقاً للمعلمة  $b_1$ .

اختبارات معنوية تقديرات المعالم :

٦ - ٧ عرف (أ)  $\sigma_u^2$  و  $s^2$  ، (ب) تباين  $\hat{b}_1$  وتباين  $\hat{b}_2$  ، (ج)  $s_{\hat{b}_1}^2$  و  $s_{\hat{b}_2}^2$  ، (د)  $s_{\hat{b}_1}$  و  $s_{\hat{b}_2}$  . (هـ) لماذا لا تكون  $b_0$  عادة موضع اهتمام أساسي ؟

(أ)  $\sigma_u^2$  هو تباين حداً خطأ في العلاقة الحقيقية بين  $X_{1i}$  و  $X_{2i}$  و  $Y_i$  . ولكن  $s^2 = \sigma_u^2 = \sum e_i^2 / (n - k)$  هي تباين البواقي وهي تقدير غير متحيز للتباين غير المعروف  $\sigma_u^2$  .  $k$  هي عدد المعالم المقدرة . في حالة الانحدار المتعدد ذي المتغيرين ،  $k = 3$  ، وعليه  $df = n - 3 = n - k$  .

$$\text{Var } \hat{b}_1 = \sigma_u^2 \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \quad (\text{ب})$$

$$\text{Var } \hat{b}_2 = \sigma_u^2 \frac{\sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \quad \text{بينما}$$

إن تباين  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  (أو تقديراتها) مطلوبة لاختبار الفروض وتكوين فترات الثقة لكل من  $b_1$  و  $b_2$  .

$$s_{\hat{b}_1}^2 = s^2 \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} \quad (\text{ج})$$

$$s_{\hat{b}_2}^2 = s^2 \frac{\sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}x_{2i})^2} = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \frac{\sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - (\sum x_{1i}x_{2i})^2}$$

$s_{b_1}^2$  و  $s_{b_2}^2$  هما على الترتيب ، تقديران غير متحيزين لتباين  $b_1$  و  $b_2$  غير المعلومين حيث أن  $\sigma_u^2$  غير معلومة .

(د)  $s_{b_1} = \sqrt{s_{b_1}^2}$  و  $s_{b_2} = \sqrt{s_{b_2}^2}$  .  $s_{b_1}$  و  $s_{b_2}$  هما ، على الترتيب ، الانحراف المعياري لكل من  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  ويسميان بالأخطاء المعيارية .

(هـ) ما لم تتوفر مشاهدات كافية بالقرب من  $X_{1i} = X_{2i} = 0$  فإن معلمة المقطع  $b_0$  لا تكون عادة ذات أهمية أساسية ويمكن حذف اختبار معنوية الإحصائية الخاص بها . ومعادلة (٧ - ١٨) لتباين  $\hat{b}_0$  معادلة معقدة في الحساب ولهذا السبب أيضاً فن التادر أن تذكر أو تستخدم :

$$\text{Var } \hat{b}_0 =$$

$$\sigma_u^2 \cdot \frac{\sum X_1^2 \sum X_2^2 - (\sum X_1 X_2)^2}{n \left[ \sum X_1^2 X_2^2 - (\sum X_1 X_2)^2 \right] - \sum X_1 (\sum X_1 \sum X_2^2 - \sum X_2 \sum X_1 X_2) + \sum X_2 (\sum X_1 \sum X_1 X_2 - \sum X_2 \sum X_1^2)}$$

(٧ - ١٨)

ومع ذلك ، ترد  $S_{b_0}^2$  أحياناً في نتائج الكمبيوتر ، ويمكن إجراء الاختبارات الإحصائية لمعنوية  $b_0$  بسهولة .

٧ - ٧ من بيانات جدول ٧ - ٣ ، أوجد (أ)  $S^2$  ، (ب)  $s_{b_1}^2$  و  $s_{b_2}^2$  ، (ج)  $s_{b_1}^2$  و  $s_{b_2}^2$  .  
(أ) الحسابات اللازمة لإيجاد  $S^2$  موضحة في جدول ٧ - ٥ ، وهو امتداد لجدول ٧ - ٤ . وقد تم الحصول على قيم  $\hat{Y}_i$  بالتوسيع بقيم  $X_{1i}$  و  $X_{2i}$  في معادلة انحدار OLS المقدرة السابق إيجادها في المسألة ٧ - ١) :

$$s^2 = e_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} = \frac{12.2730}{15 - 3} = 1.02$$

جدول ٧ - ٥ : انحدار دخل الفرد : حسابات اختبار معنوية المعامل

| الدولة | Y  | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | $\hat{Y}$ | e            | e <sup>2</sup>       |
|--------|----|----------------|----------------|-----------|--------------|----------------------|
| 1      | 6  | 9              | 8              | 6.44      | -0.44        | 0.1936               |
| 2      | 8  | 10             | 13             | 8.31      | -0.31        | 0.0961               |
| 3      | 8  | 8              | 11             | 8.17      | -0.17        | 0.0289               |
| 4      | 7  | 7              | 10             | 8.10      | -1.10        | 1.2100               |
| 5      | 7  | 10             | 12             | 7.86      | -0.86        | 0.7396               |
| 6      | 12 | 4              | 16             | 11.94     | 0.06         | 0.0036               |
| 7      | 9  | 5              | 10             | 8.86      | 0.14         | 0.0196               |
| 8      | 8  | 5              | 10             | 8.86      | -0.86        | 0.7396               |
| 9      | 9  | 6              | 12             | 9.38      | -0.38        | 0.1444               |
| 10     | 10 | 8              | 14             | 9.52      | 0.48         | 0.2304               |
| 11     | 10 | 7              | 12             | 9.00      | 1.00         | 1.0000               |
| 12     | 11 | 4              | 16             | 11.94     | -0.94        | 0.8836               |
| 13     | 9  | 9              | 14             | 9.14      | -0.14        | 0.0196               |
| 14     | 10 | 5              | 10             | 8.86      | 1.14         | 1.2996               |
| 15     | 11 | 8              | 12             | 8.62      | 2.38         | 5.6644               |
| n = 15 |    |                |                |           | $\sum e = 0$ | $\sum e^2 = 12.2730$ |

(ب) باستخدام قيمة  $S^2$  السابق إيجادها في (أ) وقيم جدول  $t$  - ٧ ،  $\epsilon$  ، حصل على :

$$s_{b_1}^2 = s^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \approx 1.02 \frac{74}{(60)(74) - (-12)^2} \approx 0.02$$

$$s_{b_1} \approx \sqrt{0.02} \approx 0.14$$

$$s_{b_2}^2 = s^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \approx 1.02 \frac{60}{(60)(74) - (-12)^2} \approx 0.01 \quad (ج)$$

$$s_{b_2} \approx \sqrt{0.01} \approx 0.10$$

٨ - ٧ اختبار عند مستوى معنوية 5% كل من (أ)  $b_1$  (ب)  $b_2$  في المسألة ٧ - هـ (أ) .

$$t_1 = \frac{\hat{b}_1 - b_1}{s_{b_1}} = \frac{-0.38 - 0}{0.14} \approx 2.71 \quad (أ)$$

وحيث أن قيمة  $t_1$  المطلقة تتجاوز القيمة الجدولية  $t = 2.179$  (من ملحق هـ) بمستوى معنوية 5% (اختبار ذو ذيلين) ،  $n - k = 15 - 3 = 12df$  ، فإننا نستنتج أن  $b_1$  معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% (أى أننا نستطيع أن نرفض  $H_1$  ، بأن  $b_1 \neq 0$ ) .

$$t_2 = \frac{\hat{b}_2 - b_2}{s_{b_2}} = \frac{0.45 - 0}{0.10} = 4.50 \quad (ب)$$

أى أن  $b_2$  معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% (وأيضاً 1%) (أى أنه لا يمكن رفض  $H_1$  بأن  $b_2 \neq 0$ ) .

٩ - ٧ كون فترة الثقة 95% لكل من (أ)  $b_1$  (ب)  $b_2$  في المسألة ٧ - هـ (أ) .  
(أ) فترة الثقة 95% للمعلمة  $b_1$  :

$$b_1 = \hat{b}_1 \pm 2.179 s_{b_1} = -0.38 \pm 2.179(0.14) = -0.38 \pm 0.31$$

أى أن  $b_1$  بين -0.69 ، -0.07 (أى  $-0.69 \leq b_1 \leq -0.07$ ) (بدرجة ثقة 95% .

(ب) فترة الثقة 95% للمعلمة  $b_2$  :

$$b_2 = \hat{b}_2 \pm 2.179 s_{b_2} = 0.45 \pm 2.179(0.10) = 0.45 \pm 0.22$$

أى أن  $b_2$  بين 0.23 ، 0.67 (أى  $0.23 \leq b_2 \leq 0.67$ ) (بدرجة ثقة 95% .

معامل التحديد المتعدد :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \quad \text{اشتق} \quad R^2 = (\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2) / \sum y_i^2$$

(إرشاد : ابدأ بتبيان أن  $\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{b}_1 \sum y x_1 - \hat{b}_2 \sum y x_2$  يمكن للقارئ غير الملم بالتفاضل أن يتخطى هذه المسألة) .

$$\sum e_i^2 = \sum e_i (y_i - \hat{y}_i) = \sum e_i (y_i - \hat{b}_1 x_{1i} - \hat{b}_2 x_{2i}) = \sum e_i y_i - \hat{b}_1 \sum e_i x_{1i} - \hat{b}_2 \sum e_i x_{2i}$$

ولكن من طريقة OLS وجدنا

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_1} = - \sum e_i x_{1i} = 0 \quad \text{and} \quad \sum e_i x_{1i} = 0$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{b}_2} = -\sum e_i x_{2i} = 0 \quad \text{و} \quad \sum e_i x_{2i} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum e_i^2 &= \sum e_i y_i = \sum (y_i - \hat{y}_i) y_i = \sum y_i (y_i - \hat{b}_1 \sum y_i x_{1i} - \hat{b}_2 \sum y_i x_{2i}) \\ &= \sum y_i^2 - \hat{b}_1 \sum y_i x_{1i} - \hat{b}_2 \sum y_i x_{2i} \end{aligned} \quad \text{وبالتالى}$$

بالتعويض في معادلة  $R^2$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum y_i^2 - \hat{b}_1 \sum y_i x_{1i} - \hat{b}_2 \sum y_i x_{2i}}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{b}_1 \sum y_i x_{1i} + \hat{b}_2 \sum y_i x_{2i}}{\sum y_i^2}$$

أو بحذف  $i$  للتبسيط ، نحصل على ( كما في قسم ٧ - ٣ )

$$R^2 = \frac{\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2}{\sum y^2}$$

١١ - ٧ أوجد  $R^2$  من معادلة انحدار OLS المقدرة في المسألة ٧ - ٥ (أ) ، باستخدام (أ)  $R^2 = \sum \hat{y}_i^2 / \sum y_i^2$

$$R^2 = (\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2) / \sum y_i^2 \quad (ب) \quad R^2 = 1 - \sum e_i^2 / \sum y_i^2$$

(أ) نعرف من المسألة ٦ - ٢٠ أن

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \quad \text{so that} \quad \sum \hat{y}_i^2 = \sum y_i^2 - \sum e_i^2$$

حيث  $\sum y_i^2 = 40$  (بتربيع وجمع قيم  $y_i$  من جدول ٧ - ٤)  $\sum e_i^2 = 12.2730$  (من جدول ٧ - ٥) ،  
 $R^2 = \sum \hat{y}_i^2 / \sum y_i^2 = 27.7270 / 40 \approx 0.6932$  ، وبالتالي  $\sum \hat{y}_i^2 = 40 - 12.2730 = 27.7270$

(ب) باستخدام  $\sum e_i^2 = 12.2730$  و  $\sum y_i^2 = 40$  نحصل على  $R^2 = 1 - \sum e_i^2 / \sum y_i^2 = 1 - 12.2730 / 40 \approx 0.6932$   
 أو  $69.32\%$  كما في (أ)

(ج) باستخدام  $b_2 = 0.45$  و  $b_1 = 0.38$  (السابق إيجادها في مسألة ٧ - ٥ (أ) ،  $\sum y x_1 = -28$  و  $\sum y x_2 = 38$  (من جدول ٧ - ٤) ،  $\sum y_i^2 = 40$  نحصل على

$$R^2 = \frac{\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2}{\sum y^2} = \frac{(-0.38)(-28) + (0.45)(38)}{40} \approx \frac{27.74}{40} = 0.6935, \text{ or } 69.35\%$$

وتختلف قيمة  $R^2$  هذه قليلا عن تلك السابق إيجادها في (أ) ، (ب) كنتيجة لأخطاء التقريب .

١٢ - ٧ من  $R^2 = 1 - (\sum e_i^2 / \sum y_i^2)$  اشتق  $\bar{R}^2$  (ب) ما هو المدى لقيم  $\bar{R}^2$  (ارشاد بالنسبة لجزء (أ) : ابدأ بالتشابه بين  $\sum e_i^2$  و  $\sum y_i^2$  وتباين  $Y$  ) .

(أ) صموبة  $R^2$  (غير المدلة) أنها لا تأخذ في الاعتبار درجات الحرية ولكن  $s^2 = \sum e_i^2 / (n - k)$  حيث  $df = n - k$  درجات الحرية و  $\text{var } Y = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 / (n - 1)$  حيث  $df = n - 1$  . وبالتالي  $\sum e_i^2 = s^2(n - k)$  و  $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2 = \text{var } Y(n - 1)$  فتكون

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{s^2(n - k)}{\text{var } Y(n - 1)}$$

وعليه  $1 - \bar{R}^2 = s^2 / \text{var } Y$  ولكن  $1 - R^2 = (s^2 / \text{var } Y)(n - k) / (n - 1)$  فتكون



$$1 - R^2 = (1 - \bar{R}^2) \frac{(n-k)}{(n-1)}$$

وبالحل لإيجاد  $R^2$  ، نحصل على

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-k)} \quad (١٢ - ٧)$$

(ب) عندما  $k = 1$  ،  $(n-k) = (n-1)$  تكون  $R^2 = \bar{R}^2$

عندما  $k > 1$  ،  $(n-k) < (n-1)$  تكون  $R^2 > \bar{R}^2$

عندما تكون  $n$  كبيرة ، لقيمة معينة  $k$  ، تكون  $(n-1)/(n-k)$  قريبة من الوحدة ، ولن تختلف  $\bar{R}^2$  عن  $R^2$  كثيراً . عندما تكون  $n$  صغيرة وتكون  $k$  كبيرة بالنسبة إلى  $n$  ، فإن  $\bar{R}^2$  سوف تكون أصغر كثيراً من  $R^2$  وقد تكون  $\bar{R}^2$  (سالبة بالرغم من أن  $0 \leq R^2 \leq 1$ ) . أنظر المسائل من ٧-٢٩ إلى ٧-٣٢ .

٧-١٣ (أ) أوجد  $\bar{R}^2$  بالنسبة لمعادلة انحدار OLS المقدرة في مسألة ٧-٥ (أ) .

(ب) كيف تقارن  $\bar{R}^2$  المحسوبة في (أ) مع  $R^2$  في مسألة ٧-١١ (أ) ، في مسألة ٦-٣١ (ج) ؟

(أ) باستخدام  $R^2 = 0.6932$  السابق إيجادها في المسألة ٧-١١ (ب) ، نحصل على

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - 0.6932) \frac{15-1}{15-3} = 0.6410$$

(ب)  $R^2 = 0.33$  في حالة الانحدار البسيط ، باستخدام نسبة القوة العاملة في الزراعة  $X_1$  ، كتغير مستقل وحيد ( انظر

المسألة ٦-٣١ (ج) ) .  $R^2 = 0.69$  بعد إضافة سنوات التعليم للسكان فوق سن 25 سنة ،  $X_2$  كتغير مستقل

ثان . ولكن ، عندما نأخذ في الاعتبار حقيقة أن إضافة  $X_2$  يقلل درجات الحرية بمقدار 1

$n-k = 15-2 = 13$  في حالة الانحدار البسيط للمتغير  $Y$  على  $X_1$  ، إلى  $n-k = 15-3 = 12$  ،

في الانحدار المتعدد للمتغير  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  ، فإن  $\bar{R}^2$  تنخفض إلى 0.64

وحقيقة أن  $b_2$  وجدت معنوية إحصائياً (في المسألة ٧-٨ (ب) )  $R^2 = \bar{R}^2 = 0.33$  في حالة الانحدار البسيط

للمتغير  $Y$  على  $X_1$  ترتفع إلى  $\bar{R}^2 = 0.64$  في حالة الانحدار المتعدد للمتغير  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  يبرر الإبقاء على

$X_2$  كتغير مستقل إضافي في معادلة الانحدار .

٧-١٤ (أ) كيف يمكن إيجاد  $\sum e_i^2$  (المطلوبة لإجراء اختبارات المعنوية) بدون إيجاد  $\hat{Y}_i$  أولاً ؟ (ب) أوجد  $\sum e_i^2$  لبيانات

جدول ٧-٣ بدون إيجاد  $\hat{Y}_i$  (جدول ٧-٥) .

(أ) باستخدام القيم المقدرة لكل من  $b_1$  و  $b_2$  وكذلك  $\sum yx_1$  ،  $\sum yx_2$  و  $\sum y^2$  نحصل أولاً على :

$$R^2 = \frac{\hat{b}_1 \sum yx_1 + \hat{b}_2 \sum yx_2}{\sum y^2}$$

وبالتالي ، so  $R^2 = 1 - (\sum e_i^2 / \sum y_i^2)$  فتكون  $\sum e_i^2 = (1 - R^2) \sum y_i^2$  . وهذه الطريقة لإيجاد  $\sum e_i^2$  تتضمن

حسابات أقل عن استخدام  $\hat{Y}_i$  (فالحسابات الوحيدة الإضافية بجانب تلك المطلوبة لتقدير  $b_1$  و  $b_2$  هي  $(\sum y_i^2)$  .

(ب) من قيمة  $R^2 = 0.6935$  السابق إيجادها في المسألة ٧-١١ (ج) (التي تستخدم فقط القيم المقدرة لكل من

$\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  السابق إيجادها في مسألة ٧-٥ (أ) والقيم المحسوبة في جدول ٧-٤) . ومن قيمة  $\sum y_i^2 = 40$  من

المسألة ٧-١١ (أ) ، نحصل على

$$\sum e_i^2 = (1 - R^2) \sum y_i^2 = (1 - 0.6935)(40) = 12.26$$

قارن هذه بقيمة  $\sum e_i^2 = 12.2730$  السابق إيجادها في جدول ٧ - ٥ . ( الفرق الصغير في قيمتي  $\sum e_i^2$  اللتين حصلنا عليهما باستخدام الطريقتين راجع إلى أخطاء التقريب ) . لاحظ ، أن إيجاد  $\sum e_i^2$  بالطريقة السابقة يلغى تماماً الحاجة إلى جدول ٧ - ٥ .

اختبار المعنوية الإجمالية للانحدار :

١٥ - ٧ أذكر الفرض العدمي والفرض البديل لاختبار معنوية الانحدار ككل . (ب) كيف تختبر المعنوية الكلية للانحدار ؟ ما هو منطق هذا الاختبار ؟ (ج) أعط صيغة التباين المفسر ، التباين غير المفسر أو تباين البواقي .

(أ) يشير اختبار المعنوية الإجمالية للانحدار إلى اختبار الفرض أ ككل المتغيرات المستقلة لا تساعد على تفسير التغير في المتغير التابع حول وسطه . وبشكل محدد ، الفرض العدمي هو :

$$H_0: b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$$

مقابل الفرض البديل

ليست كل قيم  $b_i$  تساوى الصفر :  $H_1$

(ب) تختبر المعنوية الكلية للانحدار بحساب النسبة  $F$  بين التباين المفسر والتباين غير المفسر أو تباين البواقي . وتوحي القيمة « المرتفعة » الإحصائية  $F$  بعلاقة معنوية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة ، مؤدية إلى رفض الفرض العدمي بأن معاملات كل المتغيرات المفسرة كلها أصفار .

(ج) التباين المفسر  $= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 / (k - 1) = RSS / (k - 1) = \sum \hat{y}_i^2 / (k - 1)$  حيث  $k$  عدد المعالم المقدرة ( انظر قسم ٦ - ٤ ) . والتباين غير المفسر  $= \sum e_i^2 / (n - k) = ESS / (n - k) = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (n - k)$  .

١٦ - ٧ (أ) أعط صيغة إحصائية أو نسبة  $F$  المحسوبة لحالة الانحدار البسيط وللانحدار عند  $n = 15$  ،  $k = 3$  (ب) هل يمكن أن تكون  $F$  المحسوبة « كبيرة » ومع ذلك فكل المعالم المقدرة ليست معنوية إحصائياً ؟

$$F_{1,n-2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / 1}{\sum e_i^2 / (n - 2)} \quad (1)$$

حيث تشير رموز دليل  $F$  إلى عدد درجات الحرية في البسط والمقام على الترتيب . في حالة الانحدار البسيط ،  $F_{1,n-2} = F_{1,12}$  لنفس مستوى الثقة . بالنسبة للانحدار المتعدد عند  $n = 15$  ،  $k = 3$  ،  $F_{1,n-2} = F_{2,12} = (\sum \hat{y}_i^2 / 2) / (\sum e_i^2 / 12)$  .

(ب) من الممكن أن تكون  $F$  المحسوبة « كبيرة » وليس بين المعالم المحسوبة ما هو معنوي إحصائياً . وقد يحدث هذا عندما يكون هناك ارتباط مرتفع بين المتغيرات المستقلة بعضها البعض ( انظر قسم ٩ - ٢ ) . وغالباً ما يكون اختبار  $F$  ذا فائدة محدودة لأنه من الممكن أن يرفض الفرض العدمي ، بصرف النظر عما إذا كان النموذج يشرح « جزءاً كبيراً » من التغير في  $Y$  .

١٧ - ٧ (أ) أثبت أن  $[\sum \hat{y}_i^2 / (k - 1)] / [\sum e_i^2 / (n - k)] = [R^2 / (k - 1)] / [(1 - R^2) / (n - k)]$  .

(ب) على ضوء نتائج (أ) ، ما هي الطريقة البديلة للتعبير عن الفرض لاختبار المعنوية الكلية للانحدار ؟

$$\frac{\sum \hat{y}_i^2 / (k - 1)}{\sum e_i^2 / (n - k)} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum e_i^2} \cdot \frac{n - k}{k - 1} = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / \sum \hat{y}_i^2}{\sum e_i^2 / \sum \hat{y}_i^2} \cdot \frac{n - k}{k - 1} = \frac{R^2}{(1 - R^2)} \cdot \frac{n - k}{k - 1} = \frac{R^2 / (k - 1)}{(1 - R^2) / (n - k)} \quad (1)$$

(ب) نسبة  $F$  ، كاختبار لمعنوية القدرة التفسيرية لكل المتغيرات المستقلة معاً ، تعادل تقريباً اختبار معنوية الإحصائية  $R^2$  فإذا قبل الفرض البديل فإننا نتوقع أن تكون  $R^2$  ، وبالتالي  $F$  ، « عالية » .

١٨ - ٧ اختبر عند مستوى معنوية 5% المعنوية الإجمالية لاختبار OLS المقدر في المسألة ٧ - ٥ (أ) باستخدام (أ)

$$[\sum \hat{y}_i^2 / (k - 1)] / [\sum e_i^2 / (n - k)]$$

$$[R^2 / (k - 1)] / [(1 - R^2) / (n - k)] \quad (ب)$$

(أ) باستخدام  $\sum \hat{y}_i^2 = 27.727$  من المسألة ٧ - ١١ (أ) ،  $\sum e_i^2 = 12.2730$  من جدول ٧ - ٥ ، نحصل على

$$F_{2,12} = \frac{27.727/2}{12.273/12} \approx 13.59$$

وحيث أن القيمة المحسوبة للنسبة  $F$  تفوق القيمة الجدولية  $F = 3.38$  عند مستوى معنوية 5% ودرجات حرية 2 ، 12 (انظر ملحق ٧) ، فإننا نقبل الفرض البديل بأنه ليست كل قيم  $b_i$  تساوى الصفر عند مستوى معنوية 5% ..

(ب) باستخدام  $R^2 = 0.6932$  من تمرين ٧ - ١١ (ب) ، نحصل على

$$F_{2,12} = \frac{R^2 / (k - 1)}{(1 - R^2) / (n - k)} = \frac{0.6932/2}{(1 - 0.6932)/12} \approx 13.54$$

ونقبل الفرض أن  $R^2$  تختلف معنوياً عن الصفر عند مستوى معنوية 5% .

معاملات الارتباط الجزئي :

١٩ - ٧ (أ) كيف يمكن إبعاد تأثير  $X_2$  عن كل من  $X_1$  و  $Y$  عند إيجاد  $r_{YX_1 \cdot X_2}$  ؟ (ب) ما هو الذى نقيم معادلات الارتباط الجزئي ؟ (ج) ما هي إشارة معاملات الارتباط الجزئي ؟ (د) ما فائدة معاملات الارتباط الجزئي ؟

(أ) لإبعاد تأثير  $X_2$  على  $Y$  ، فإننا نوجد انحدار  $Y$  على  $X_2$  ، ونوجد البواقي  $e_1 = Y^*$  . ولإبعاد تأثير  $X_2$  على  $X_1$  فإننا نوجد انحدار  $X_1$  و  $X_2$  ونوجد البواقي  $e_2 = X_1^*$  . وفي هذه الحالة فإن  $Y^*$  و  $X_1^*$  يمثلان التغير في  $Y$  و  $X_1$  على الترتيب ، الباقي يكون تفسير بعد إزاحة تفسير  $X_2$  على كل من  $Y$  و  $X_1$  . وبالتالي ، فعال الارتباط الجزئي ليس إلى معامل الارتباط البسيط بين البواقي  $Y^*$  و  $X_1^*$  (أى أن ،  $r_{YX_1 \cdot X_2} = r_{Y^*X_1^*}$  )

(ب) مدى معاملات الارتباط الجزئي هو من -1 إلى +1 (تماماً كما في حالة معاملات الارتباط البسيط) . على سبيل المثال ، تشير  $r_{YX_1 \cdot X_2} = -1$  إلى الحالة عندما توجد علاقة خطية تامة عكسية بين  $Y$  و  $X_1$  بعد إزاحة التأثير المشترك للمتغير  $X_2$  على كل من  $Y$  و  $X_1$  . ولكن ، تشير  $r_{YX_1 \cdot X_2} = 1$  إلى علاقة خطية تامة طردية صافية بين  $Y$  و  $X_1$  . تشير  $r_{YX_1 \cdot X_2} = 0$  إلى عدم وجود علاقة بين  $Y$  و  $X_1$  بعد إزاحة تأثير  $X_2$  على كل من  $Y$  و  $X_1$  . وكنتيجة ، فإنه يمكن حذف  $X_1$  من الانحدار .

(ج) إشارة معامل الانحدار الجزئي هي نفس إشارة المتلمة المقدرة المناظرة . فعلاً ، بالنسبة لمعادلة الانحدار المقدرة (د) فإن  $\hat{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_1 + \hat{b}_2 X_2$  ،  $r_{YX_1 \cdot X_2}$  له نفس إشارة  $\hat{b}_1$  وكذلك  $r_{YX_2 \cdot X_1}$  له نفس إشارة  $\hat{b}_2$  .

(د) تستخدم معاملات الارتباط الجزئية في تحليل الانحدار المتعدد لتحديد الأهمية النسبية لكل متغير مفسر في النموذج . والمتغير المستقل صاحب أعلى معامل ارتباط جزئي مع المتغير التابع يساهم أكثر من المتغيرات المستقلة الأخرى في القدرة التفسيرية للنموذج ويدخل أولاً في تحليل الانحدار المتعدد خطوة - خطوة . ولكن يجب ملاحظة أن معامل الارتباط الجزئي يعطى مقياساً لترتيب صفات الارتباط وليس مقياساً لقيمتها ، فمجموع معاملات الارتباط الجزئي بين المتغير التابع وكل المتغيرات المستقلة لا يساوى 1 بالضرورة .

٧ - ٢٠ بالنسبة للانحدار المقدر في المسألة ٧ - ٥ (أ) ، أوجد (أ)  $r_{YX_1 \cdot X_2}$  ، (ب)  $r_{YX_2 \cdot X_1}$  ، (ج) هل تساهم  $X_1$  أو  $X_2$  أكثر في القدرة التفسيرية للنموذج ؟

(أ) لإيجاد  $r_{YX_1 \cdot X_2}$  فإننا نحتاج أولاً إلى إيجاد  $r_{YX_1}$  ،  $r_{YX_2}$  و  $r_{X_1 X_2}$  . باستخدام القيم من جدول ٧ - ٤ ، نحصل على

$$r_{YX_1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_1^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{-28}{\sqrt{60} \sqrt{40}} \approx -0.5715$$

$$r_{YX_2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{38}{\sqrt{74} \sqrt{40}} \approx 0.6984 \quad (١)$$

$$r_{X_1 X_2} = \frac{\sum x_2 x_1}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{-12}{\sqrt{74} \sqrt{60}} \approx -0.1801$$

$$r_{YX_1 \cdot X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2} r_{X_1 X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1 X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_2}^2}} = \frac{(-0.5715) - (0.6984)(-0.1801)}{\sqrt{1 - (-0.1801)^2} \sqrt{1 - 0.6984^2}} \approx -0.6331$$

(ب) باستخدام قيم  $r_{YX_1}$  ،  $r_{YX_2}$  ،  $r_{X_1 X_2}$  السابق حسابها في (أ) ، نحصل على

$$r_{YX_2 \cdot X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} r_{X_1 X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1 X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_1}^2}} = \frac{(0.6984) - (-0.5715)(-0.1801)}{\sqrt{1 - (-0.1801)^2} \sqrt{1 - (-0.5715)^2}} \approx 0.8072$$

(ج) حيث أن  $r_{YX_2 \cdot X_1}$  تتجاوز القيمة المطلقة للمعامل  $r_{YX_2}$  ، فإننا نستنتج أن  $X_2$  تساهم أكثر من  $X_1$  في القدرة التفسيرية للنموذج .

مسائل شاملة :

٧ - ٢١ يغطي جدول ٧ - ٦ الكمية المطلوبة (فرضاً) من سلعة ما ،  $Y$  وسعرها  $X_1$  ، ودخل المستهلك ،  $X_2$  من عام ١٩٧١ إلى ١٩٨٥ . (أ) هي انحدار OLS لهذه المشاهدات .

جدول ٧ - ٦ الكمية المطلوبة من سلعة ما ، سعرها ، ودخل المستهلك ، ١٩٧١ - ١٩٨٥

| السنة | $Y$ | $X_1$ | $X_2$ |
|-------|-----|-------|-------|
| 1971  | 40  | 9     | 400   |
| 1972  | 45  | 8     | 500   |
| 1973  | 50  | 9     | 600   |
| 1974  | 55  | 8     | 700   |
| 1975  | 60  | 7     | 800   |
| 1976  | 70  | 6     | 900   |
| 1977  | 65  | 6     | 1,000 |
| 1978  | 65  | 8     | 1,100 |
| 1979  | 75  | 5     | 1,200 |
| 1980  | 75  | 5     | 1,300 |
| 1981  | 80  | 5     | 1,400 |
| 1982  | 100 | 3     | 1,500 |
| 1983  | 90  | 4     | 1,600 |
| 1984  | 95  | 3     | 1,700 |
| 1985  | 85  | 4     | 1,800 |

(ب) اختبر عند مستوى معنوية 5% المنوية الإحصائية لمعامل الميل . (ج) أوجد معامل الارتباط المتعدد غير المعدل والمعدل . (د) اختبر المنوية الكلية للانحدار (هـ) أوجد معاملات الارتباط الجزئي وحدد أى متغير مستقل يساهم أكثر فى قدرة النموذج التفسيرية (و) أوجد معامل المرونة السعرية للطلب  $\eta_p$  ، والمرونة الدخلية للطلب  $\eta_M$  ، عند المتوسطات . (ز) ضع جميع النتائج فى شكل ملخص مع تقريب كل الحسابات إلى 4 علامات عشرية .

(أ) يعطى جدول  $v-v$  الحسابات اللازمة لتوفيق الانحدار الخطى .

$$\hat{b}_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{(-505)(2,800,000) - (107,500)(-11,900)}{(60)(2,800,000) - (-11,900)^2} \approx 5.1061$$

$$\hat{b}_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{(107,500)(60) - (-505)(-11,900)}{(60)(2,800,000) - (-11,900)^2} \approx 0.1607$$

$$\hat{b}_0 = Y - \hat{b}_1 X_1 - \hat{b}_2 X_2 = 70 - (-5.1061)(6) - (0.1607)(1,100) \approx 82.2666$$

$$\hat{Y} = 82.2666 - 5.1061 X_1 + 0.1607 X_2$$

(ب) ويمكننا إيجاد  $\sum e_i^2$  بحساب  $R^2$  أولاً من جدول  $v-v$  :

$$R^2 = \frac{\hat{b}_1 \sum y x_1 + \hat{b}_2 \sum y x_2}{\sum y^2} = \frac{(-5.1061)(-505) + (0.1607)(107,500)}{4,600} \approx 0.9508$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum y^2}$$

ولكن

$$\sum e^2 = (1 - R^2) \sum y^2 = (1 - 0.9508) 4,600 \approx 226.32.$$

وبالتالى

$$s_{\hat{b}_1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{226.32}{15-3} \frac{2,800,000}{(60)(2,800,000) - (-11,900)^2} \approx 2.0011 \quad \text{and} \quad s_{\hat{b}_1} \approx 1.4146$$

$$s_{\hat{b}_2}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{226.32}{15-3} \frac{60}{(60)(2,800,000) - (-11,900)^2} \approx 0.00004 \quad \text{and} \quad s_{\hat{b}_2} \approx 0.0065$$

$$t_1 = \frac{\hat{b}_1}{s_{\hat{b}_1}} = \frac{-5.1061}{1.4146} \approx -3.6096 \quad \text{and} \quad t_2 = \frac{\hat{b}_2}{s_{\hat{b}_2}} = \frac{0.1607}{0.0065} \approx 2.5692$$

وبالتالى ، فإن كلا من  $b_1$  و  $b_2$  معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% .

(ج)  $R^2 = 0.9508$  (من (ب) ) ، وعليه

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k} = 1 - (1 - 0.9508) \frac{15-1}{15-3} \approx 0.9426$$

$$F_{k-1, n-k} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} = \frac{0.9508/(3-1)}{(1-0.9508)/(15-3)} \approx 115.9512 \quad (د)$$

وبالتالى ، فإن  $R^2$  تختلف معنوياً عن الصفر عند مستوى معنوية 5% .



(د) لإيجاد  $r_{YX_1, X_2}$  و  $r_{YX_2, X_1}$  ، فيجب أولاً إيجاد (من جدول ٧-٧) .

$$r_{YX_1} = \frac{\sum x_1 y}{\sqrt{\sum x_1^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{-505}{\sqrt{60} \sqrt{4,600}} \approx 0.9613$$

$$r_{YX_2} = \frac{\sum x_2 y}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum y^2}} = \frac{107,500}{\sqrt{2,800,000} \sqrt{4,600}} \approx 0.9472$$

$$r_{X_1, X_2} = \frac{\sum x_2 x_1}{\sqrt{\sum x_2^2} \sqrt{\sum x_1^2}} = \frac{-11,900}{\sqrt{2,800,000} \sqrt{60}} \approx 0.9181$$

$$r_{YX_1, X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2} r_{X_1, X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1, X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_2}^2}} = \frac{(-0.9613) - (0.9472)(-0.9181)}{\sqrt{1 - (-0.9181)^2} \sqrt{1 - (-0.9472)^2}} \approx -0.7213$$

$$r_{YX_2, X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} r_{X_1, X_2}}{\sqrt{1 - r_{X_1, X_2}^2} \sqrt{1 - r_{YX_1}^2}} = \frac{(0.9472) - (-0.9613)(-0.9181)}{\sqrt{1 - (-0.9181)^2} \sqrt{1 - (-0.9613)^2}} \approx 0.5919$$

وبالتالي فإن  $X_1$  تساهم أكثر من  $X_2$  في القدرة التفسيرية للنموذج

$$\eta_P = \hat{b}_1 \frac{X_1}{Y} = -5.1061 \frac{6}{70} \approx 0.4377$$

$$\eta_M = \hat{b}_2 \frac{X_2}{Y} = 0.0167 \frac{1,100}{70} \approx 0.2624$$

(و)

$$\hat{Y}_1 = 82.2666 - 5.1061 X_1 + 0.0167 X_2 \quad R^2 = 0.9508 \quad \bar{R}^2 = 0.9426 \quad F_{2,12} = 155.9512$$

t values (-3.6096) (2.5692)

(ز)

$$r_{YX_1, X_2} = 0.7023 \quad r_{YX_2, X_1} = 0.8434$$

$$\eta_P = -0.4377 \quad \eta_M = 0.2624$$

٧-٢٢ جدول ٧-٨ هو نفس جدول ٧-٦ فيما عدا أنه يشمل سعر سلعة بديلة بالدولار ،  $X_3$  كتغير مستقل ثالث . جدول

٧-٩ يغطي صورة من مخرجات الكمبيوتر للانحدار الخطي للمتغير  $Y$  على  $X_1$  ،  $X_2$  ،  $X_3$  باستخدام Statistical

SPSS Package for the Social Sciences أكثر برامج الكمبيوتر شيوعاً .

جدول ٧-٨ الكمية المطلوبة ، السعر ، دخل المستهلك ، وسعر سلعة بديلة

| السنة | $Y$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|-------|-----|-------|-------|-------|
| 1971  | 40  | 9     | 400   | 10    |
| 1972  | 45  | 8     | 500   | 14    |
| 1973  | 50  | 9     | 600   | 12    |
| 1974  | 55  | 8     | 700   | 13    |
| 1975  | 60  | 7     | 800   | 11    |
| 1976  | 70  | 6     | 900   | 15    |
| 1977  | 65  | 6     | 1,000 | 16    |
| 1978  | 65  | 8     | 1,100 | 17    |
| 1979  | 75  | 5     | 1,200 | 22    |
| 1980  | 75  | 5     | 1,300 | 19    |
| 1981  | 80  | 5     | 1,400 | 20    |
| 1982  | 100 | 3     | 1,500 | 23    |
| 1983  | 90  | 4     | 1,600 | 18    |
| 1984  | 95  | 3     | 1,700 | 24    |
| 1985  | 85  | 4     | 1,800 | 21    |

أجب عن الأسئلة التالية من خلال فحص مخرجات الكمبيوتر في جدول ٧ - ٩ . (أ) اكتب معادلة انحدار OLS مع قيم  $t$  ،  $R^2$  ،  $\bar{R}^2$  نسبة  $F$  مع درجات الحرية ، الخطأ المعياري للانحدار ، ومجموع مربعات البواقي ، وفسر النتائج .

(ب) كيف أجرى برنامج SPSS ؟

(أ) من صفحة ٤ من مخرجات الكمبيوتر في جدول ٧ - ٩ ، نحصل على :

$$t_1 = \frac{\hat{b}_1}{s_{\hat{b}_1}} = \frac{-4.9281}{1.6111} = -3.059 \quad t_2 = \frac{\hat{b}_2}{s_{\hat{b}_2}} = \frac{0.0159}{0.0074} = 2.149 \quad t_3 = \frac{\hat{b}_3}{s_{\hat{b}_3}} = \frac{0.1748}{0.6367} = 0.275$$

وعليه

$$Y = 79.1063 - 4.9281X_1 + 0.0159X_2 + 0.1748X_3 \quad R^2 = 0.95 \quad \bar{R}^2 = 0.94 \quad F_{3,11} = 71.13$$

$$(-3.059) \quad (2.149) \quad (0.275) \quad s = 4.53 \quad SEE = 225.49$$

إشارات  $\hat{b}_1$  ،  $\hat{b}_2$  ،  $\hat{b}_3$  تتفق مع ما هو متوقع طبقاً للنظرية الاقتصادية . ولكن  $\hat{b}_1$  فقط معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% ، بينما كادت  $\hat{b}_2$  أن تكون معنوية . من نسبة  $F$  ، ننهي إلى أن  $R^2$  (والانحدار ككل) معنوي إحصائياً عند مستوى 5% . يجب ملاحظة أنه في صفحة ٤ من جدول ٧ - ٩ ، المتعددة هي الحذر التربيعي للمقدار  $R$  تربيع وبالتالي تشير إلى معامل الارتباط المتعدد  $r$  .

جدول ٧ - ٩ مخرجات الكمبيوتر SPSS لانحدار الطلب

SPSS Batch System 11-Dec-80 Page 1  
SPSS for DECSYSTEM-20, Version M, Release 8.0 (17-Dec-79)

Default SPACE allocation! Allows for! 98 Transformations  
WORKSPACE 17920 words 394 RECODE values + LAO variables  
TRANSPACE 2560 words 1576 IF/COMPUTE operations

1 RUN NAME MULTIPLE REGRESSION  
2 FILE NAME MULTRO  
3 VARIABLE LIST N= Y, X1, X2, X3  
4 INPUT FORMAT FREEFIELD  
5 N OF CASES 15  
6 REGRESSION VARIABLES=Y, X1, X2, X3/  
7 REGRESSION=Y WITH X1 TO X3 (2) RESID=0/  
8 OPTION 11, 12  
9 STATISTICS 1 TO 8

\*\*\*\*\* REGRESSION problem requires 128 words WORKSPACE, not including residuals \*\*\*\*\*

10 READ INPUT DATA

MULTIPLE REGRESSION 11-Dec-80 Page 2  
File MULTRO (Creation date = 11-Dec-80)

| Variable | Mean      | Standard Dev | Cases |
|----------|-----------|--------------|-------|
| Y        | 70.0000   | 18.1265      | 15    |
| X1       | 4.0000    | 2.0702       | 15    |
| X2       | 1100.0000 | 447.2136     | 15    |
| X3       | 17.0000   | 4.4721       | 15    |

MULTIPLE REGRESSION 11-Dec-80 Page 3  
File MULTRO (Creation date = 11-Dec-80)

Correlation coefficients  
A value of 99.00000 is printed  
if a coefficient cannot be computed.

|    | Y        | X1       | X2       | X3       |
|----|----------|----------|----------|----------|
| Y  | 1.00000  | -0.96125 | 0.94722  | 0.88995  |
| X1 | -0.96125 | 1.00000  | -0.91810 | -0.88724 |
| X2 | 0.94722  | -0.91810 | 1.00000  | 0.83571  |
| X3 | 0.88995  | -0.88724 | 0.83571  | 1.00000  |



## تابع جدول ٧ - ٩

## MULTIPLE REGRESSION

11-Dec-80

Page 4

File MULTRO (Creation date = 11-Dec-80)

\*\*\*\*\* MULTIPLE REGRESSION \*\*\*\*\* Variable list 1  
 Regression list 1

Dependent variable: Y

Variable(s) entered on step number 1:  
 X3  
 X1  
 X2

|  | Multiple R | R square | Adjusted R square | Standard error | Analysis of variance | Df  | Sum of squares | Mean square | F        |
|--|------------|----------|-------------------|----------------|----------------------|-----|----------------|-------------|----------|
|  | 0.97518    | 0.95098  | 0.93761           | 4.52761        | Regression           | 3.  | 4374.50821     | 1458.16940  | 71.13280 |
|  |            |          |                   |                | Residual             | 11. | 225.49179      | 20.49975    |          |

| Variables in the equation |                |          |             |       | Variables not in the equation |         |         |           |   |
|---------------------------|----------------|----------|-------------|-------|-------------------------------|---------|---------|-----------|---|
| Variable                  | B              | Beta     | Std error B | F     | Variable                      | Beta in | Partial | Tolerance | F |
| X3                        | 0.1747977D+00  | 0.04313  | 0.63472     | 0.075 |                               |         |         |           |   |
| X1                        | -0.4928058D+01 | -0.56282 | 1.61105     | 9.357 |                               |         |         |           |   |
| X2                        | 0.1590040D-01  | 0.39229  | 0.00741     | 4.604 |                               |         |         |           |   |
| (Constant)                | 0.7910638D+02  |          |             |       |                               |         |         |           |   |

All variables are in the equation

Statistics which cannot be computed are printed as all minus.

## MULTIPLE REGRESSION

11-Dec-80

Page 5

File MULTRO (Creation date = 11-Dec-80)

\*\*\*\*\* MULTIPLE REGRESSION \*\*\*\*\* Variable list 2  
 Regression list 2

Dependent variable: Y

## Summary table

| Variable   | Multiple R | R square | Res change | Simple R | B              | Beta     |
|------------|------------|----------|------------|----------|----------------|----------|
| X3         | 0.88995    | 0.79200  | 0.79200    | 0.88995  | 0.1747977D+00  | 0.04313  |
| X1         | 0.96461    | 0.93047  | 0.13846    | -0.96125 | -0.4928058D+01 | -0.56282 |
| X2         | 0.97518    | 0.95098  | 0.02051    | 0.94722  | 0.1590040D-01  | 0.39229  |
| (Constant) |            |          |            |          | 0.7910638D+02  |          |

## MULTIPLE REGRESSION

11-Dec-80

Page 6

\*\*\*\*\* Note change in formula for Standardized Residuals as of 17 Dec 79 \*\*\*\*\*  
 It was (Residual/Std. Dev. of Dep. Variable)  
 It is now (Residual/Std. Error of Regression)

\*\*\*\*\* REGRESSION problem requires 1094 words WORKSPACE including residuals \*\*\*\*\*

## MULTIPLE REGRESSION

11-Dec-80

Page 7

File MULTRO (Creation date = 11-Dec-80)

\*\*\*\*\* MULTIPLE REGRESSION \*\*\*\*\*

Dependent variable: Y from variable list 1  
 regression list 1

| SEQUEN | Observed Y | Predicted Y | Residual   | Plot of standardized residual |
|--------|------------|-------------|------------|-------------------------------|
|        |            |             |            | -2.0 -1.0 0.0 1.0 2.0         |
| 1      | 50.00000   | 46.39144    | 3.608563   |                               |
| 2      | 95.00000   | 95.54800    | -0.5479991 |                               |
| 3      | 75.00000   | 78.45773    | -3.457734  |                               |
| 4      | 65.00000   | 60.14388    | 4.856112   |                               |
| 5      | 100.0000   | 92.19312    | 7.806880   |                               |
| 6      | 85.00000   | 91.68559    | -6.685589  |                               |
| 7      | 70.00000   | 66.47032    | 3.529676   |                               |
| 8      | 40.00000   | 42.86196    | -2.861960  |                               |
| 9      | 45.00000   | 50.07925    | -5.079249  |                               |
| 10     | 90.00000   | 87.98112    | 2.018885   |                               |
| 11     | 55.00000   | 53.08453    | 1.915448   |                               |
| 12     | 80.00000   | 80.22257    | -0.2225719 |                               |
| 13     | 75.00000   | 77.39209    | -2.392086  |                               |
| 14     | 65.00000   | 68.23516    | -3.235162  |                               |
| 15     | 60.00000   | 59.25304    | 0.7469649  |                               |

Durbin-Watson test of residual differences compared by case order (SEQUEN).

Variable list 1: regression list 1. Durbin-Watson test 2.39460

وتشير بيتا إلى المعاملات المياريّة ، أو المعاملات المقدرة مضروبة في نسبة الانحراف المعياري للمتغير مستقل معين إلى الانحراف المعياري للمتغير التابع . قيمة  $R^2$  لكل معامل ليست إلا مربع قيمة  $t$  لكل معامل .

(ب) الخطوة الأولى لإجراء برنامج كمبيوتر هي « الدخول » من إحدى محطات الكمبيوتر ويحتاج هذا إلى رقم حساب « وكلمة مرور » (والتي تحصل عليها من مركز الكمبيوتر في جامعتك ، أو شركتك) . لاستخدام SPSS فإنك تستخدم أمراً ، يمدك به أيضاً مركز الكمبيوتر . الخطوات التالية موجودة في صفحة ١ (السطور من ٥ إلى ١٥) من مخرجات الكمبيوتر في جدول ٧-٩ . وهذه في معظمها لا تحتاج إلى شرح . في السطر الرابع (INPUT FORMAT) تشير FREEFIELD إلى الطريقة التي يغذي بها الكمبيوتر بالبيانات ، حيث تدخل قيمة كل متغير في التسلسل المشار إليه في سطر ٣ (أى 75 24 700 1 3 95 12 600 9 50) في سطر ٧ ، تشير الأقواس إلى أن المطلوب هو انحدار متعدد عادي ، بينما تطلب  $RESID = 0$  حساب البواقي المياريّة وقيم التنبؤ للمتغير  $Y$  . ويطلب OPITON 11, 12 على سطر ٨ كتابة البواقي المياريّة وقيم التنبؤ للمتغير  $Y$  (المعطاة في صفحة ٧ من مخرجات الكمبيوتر) . وتطلب STATISTICS 1 to 8 في سطر ٩ كتابة المتوسط ، الانحراف المعياري وعدد الحالات الصحيحة (السنوات) لكل متغير (المعطاة في صفحة ٢ من مخرجات الكمبيوتر ؛ مصفوفة الارتباط البسيط (المعطاة في صفحة ٣) ؛ كل الإحصائيات في صفحة ٤ (السابق مناقشتها في (أ)) ، وإحصائية ديربين واتسون . ارجع إلى دليل SPSS في مركز الكمبيوتر . وأخيراً ، فإن الجدول الموجز في صفحة ٥ (ويتضمن كل مخرجات الكمبيوتر بشكل أوتوماتيكي) يعالج المتغيرات كما لو كانت أدخلت الكمبيوتر واحداً وراء الآخر وليس معاً .

#### مسائل إضافية

النموذج الخطي ذو المتغيرات الثلاثة :

٧ - ٢٣ جدول ٧-١٠ امتداد لجدول ٦-١٢ ويمطي مشاهدات عن  $Y$  ،  $X_1$  ،  $X_2$  . أوجد معادلة انحدار OLS للمتغير  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  .

$$\hat{Y}_i = 4.76 + 5.29X_{1i} + 2.13X_{2i} \quad \text{الإجابة :}$$

جدول ٧-١٠ مشاهدات عن  $Y$  ،  $X_1$  ،  $X_2$

| $n$   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $Y$   | 20 | 28 | 40 | 45 | 37 | 52 | 54 | 43 | 65 | 56 |
| $X_1$ | 2  | 3  | 5  | 4  | 3  | 5  | 7  | 6  | 7  | 8  |
| $X_2$ | 5  | 6  | 6  | 5  | 5  | 7  | 6  | 6  | 7  | 7  |

٧ - ٢٤ بالرجوع إلى معادلة انحدار OLS المقدرة في المسألة ٧-٢٣ فسر (أ)  $\hat{b}_0$  ، (ب)  $\hat{b}_1$  ، (ج)  $\hat{b}_2$  .  
الإجابة : (أ)  $\hat{b}_0 = 4.76$  هي الثابت أو مقطع  $Y$  ،  $\hat{Y}_i = \hat{b}_0 = 4.76$  عند  $X_{1i} = X_{2i} = 0$  .  
(ب)  $b_1 = 5.29$  تشير إلى أن زيادة قدرها الوحدة في  $X_1$  (مع تثبيت  $X_2$ ) ينتج عنها زيادة في  $\hat{Y}_i$  قدرها 5.29 وحدة .  
(ج)  $b_2 = 2.13$  ، تشير إلى أن زيادة قدرها الوحدة في  $X_2$  (مع تثبيت  $X_1$ ) ينتج عنها زيادة في  $\hat{Y}_i$  قدرها 2.13 وحدة .

اختبارات معنوية تقديرات المعامل :

٧ - ٢٥ بالرجوع إلى بيانات جدول ٧-١٠ ، أوجد (أ)  $S^2$  ، (ب)  $s_{\hat{b}_1}^2$  و  $s_{\hat{b}_2}^2$  ، (ج)  $s_{\hat{b}_1}^2$  و  $s_{\hat{b}_2}^2$  .  
الإجابة : (أ)  $S^2 = 50$  (ب)  $s_{\hat{b}_1}^2 \approx 1.78$  and  $s_{\hat{b}_2}^2 \approx 3.16$  (ج)  $s_{\hat{b}_1}^2 \approx 18.95$  و  $s_{\hat{b}_2}^2 \approx 4.35$

٧ - ٢٦ اختبر عند مستوى معنوية 5% كلا من (أ)  $b_1$  ، (ب)  $b_2$  في المسألة ٧ - ٢٣ .

الإجابة : (أ)  $b_1$  معنوية إحصائياً عند مستوى 5% .

(ب)  $b_2$  ليست معنوية إحصائياً عند مستوى 5% .

٧ - ٢٧ كون فترة الثقة 95% لكل من (أ)  $b_1$  ، (ب)  $b_2$  في المسألة ٧ - ٢٣ .

الإجابة : (أ)  $1.08 \leq b_1 \leq 9.50$  (ب)  $-8.16 \leq b_2 \leq 12.42$

معامل التحديد المتعدد :

٧ - ٢٨ بالنسبة لانحدار OLS المقدرة في المسألة ٧ - ٢٣ ، أوجد (أ)  $R^2$  ، (ب)  $\bar{R}^2$  (ج) هل يجب أن تدخل  $X_2$  في الانحدار ؟

الإجابة : (أ)  $R^2 \approx 0.79$  (ب)  $R^2 \approx 0.73$  (ج) حيث أن  $b_2$

وجدت غير معنوية إحصائياً (في المسألة ٧ - ٢٦) ،  $R^2$  نقصت من  $R^2 = \bar{R}^2 = 0.77$  عندما كانت  $X_1$  المتغير المستقل الوحيد (انظر المسألة ٦ - ٤١) إلى  $\bar{R}^2 = 0.73$  (أعلاه) ، فإن  $X_2$  يجب ألا تدخل الانحدار .

٧ - ٢٩ بالنسبة إلى  $R^2 = 0.60$  ،  $n = 10$  ،  $K = 1$  ، أوجد  $\bar{R}^2$  .

الإجابة :  $\bar{R}^2 = 0.60$

٧ - ٣٠ بالنسبة إلى  $R^2 = 0.60$  ،  $n = 10$  ،  $K = 2$  ، أوجد  $\bar{R}^2$  .

الإجابة :  $\bar{R}^2 = 0.55$

٧ - ٣١ بالنسبة إلى  $R^2 = 0.60$  ،  $K = 2$  (كما في المسألة ٧ - ٣٠) ولكن  $n = 100$  ، أوجد  $\bar{R}^2$

الإجابة :  $\bar{R}^2 = 0.596$

٧ - ٣٢ بالنسبة إلى  $R^2 = 0.40$  ،  $n = 10$  ،  $K = 5$  ، أوجد  $\bar{R}^2$  .

الإجابة :  $\bar{R}^2 = -0.08$  (ولكنها تفسر على أنها تساوى الصفر) .

اختبار المعنوية الكلية للانحدار :

٧ - ٣٣ من انحدار OLS المقدرة في المسألة ٧ - ٢٣ ، أوجد (أ) التباين المفسر ، (ب) التباين غير المفسر أو تباين البواقي (ج) نسبة أو إحصائية  $F$  .

الإجابة : (أ)  $\sum y^2 / (k - 1) \approx 649$  (ب)  $\sum e^2 / (n - k) = 50$  (ج)  $F_{2,7} = 12.98$

٧ - ٣٤ اختبر المعنوية الإجمالية لانحدار OLS المقدرة في المسألة ٧ - ٢٣ عند (أ) مستوى 5% (ب) مستوى 1% .

الإجابة : (أ) حيث أن نسبة  $F$  المحسوبة (12.98) تتجاوز قيمة  $F$  النظرية أو الجدولية (4.74) عند  $\alpha = 0$

و درجات حرية 2 ، 7 ، فإننا نقبل الفرض بأن معالم انحدار OLS المقدرة هي معاً معنوية عند مستوى 5% .

(ب) حيث أن قيمة  $F$  الجدولية عند مستوى  $\alpha = 0.01$  هي  $F = 9.55$  ، يقبل الفرض البديل عند مستوى معنوية 1% أيضاً .

معاملات الارتباط الجزئية :

٧ - ٣٥ بالنسبة لانحدار OLS المقدرة في المسألة ٧ - ٢٣ ، أوجد (أ)  $r_{YX_1 \cdot X_2}$  ، (ب)  $r_{YX_2 \cdot X_1}$  (ج) أي متغير مستقل يساهم أكثر في القدرة التفسيرية للنموذج ؟

الإجابة : (أ)  $0.74$  (ب)  $r_{YX_1 \cdot X_2} = 0.13$  (ج)  $X_1$

مسألة شاملة :

٧ - ٣٦ جدول ١١ - ٧ امتداد لجدول ١٣ - ٦ ويمطى بيانات عينة عشوائية من ١٢ من الأسر عن عدد الأطفال في الأسرة  $Y$  ، وعدد الأطفال الذين قالوا إنهم كانوا يرغبون في إنجابهم وقت الزواج ،  $X_1$  ، وعدد سنوات تعليم الزوجة ،  $X_2$  .  
 (أ) أوجد معادلة انحدار OLS للمتغير  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  . (ب) احسب قيم  $t$  واختبر عند مستوى 5% المعنوية الإحصائية لمعامل الميل . (ج) أوجد معامل الارتباط المتعدد غير المعدل والمعدل (د) اختبر المعنوية الإجمالية للانحدار (هـ) أوجد معاملات الارتباط الجزئية وحدد أى المتغيرات المستقلة يساهم أكثر في القدرة التفسيرية للنموذج . قم بجميع الحسابات إلى رقمين عشريين .

جدول ٧ - ١١ عدد الأطفال في الأسرة وعدد الأطفال المرغوب فيهم وتعليم الزوجة

| الأسرة | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $Y$    | 4  | 3  | 0  | 4  | 4  | 3  | 0  | 4  | 3  | 1  | 3  | 1  |
| $X_1$  | 3  | 3  | 0  | 2  | 2  | 3  | 0  | 3  | 2  | 1  | 3  | 2  |
| $X_2$  | 12 | 14 | 18 | 10 | 10 | 14 | 18 | 12 | 15 | 16 | 14 | 15 |

الإجابة : (أ)  $\hat{Y} = 6.90 + 0.53X_1 - 0.39X_2$  (ب) حيث أن  $t_1 = 3.12$  و  $t_2 = -5.57$  ، فإن كلا من  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  معنوية إحصائياً عند مستوى 5% . (ج)  $R^2 = 0.92$  و  $\bar{R}^2 = 0.90$  (د) حيث أن  $F_{2,9} = 51.31$  فإن  $R^2$  معنوية إحصائياً عند مستوى 5% (هـ)  $r_{YX_1 \cdot X_2} = 0.71$  و  $r_{YX_2 \cdot X_1} = 0.87$  وبالتالي فإن  $X_2$  تساهم أكثر من  $X_1$  في القدرة التفسيرية للنموذج .

## الفصل الثامن

### أساليب وتطبيقات أخرى في تحليل الانحدار

#### ٨-١ شكل الدالة

كثيراً ما توحى النظرية أو شكل الانتشار بوجود علاقة غير خطية . ومن الممكن تحويل بعض الدوال غير الخطية إلى دوال خطية حتى يمكن تطبيق طريقة OLS . ويوضح جدول ( ٨ - ١ ) بعضاً من أكثر هذه الدوال شيوعاً وتحويلاتها . وتطبيق طريقة OLS على الملاحظات الخطية المحولة يعطى تقديرات غير متحيزة للميل . في معادلة ( ٨ - ١ ) ،  $b_1$  هي مرونة  $Y$  بالنسبة إلى  $X$

جدول ( ٨ - ١ ) أشكال الدالة وتحويلاتها

| المعادلة                                                                                                                                          | الشكل           | التحويلية                     | الدالة                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------------------|---------------------------------|
| ( ٨ - ١ )                                                                                                                                         | لوغاريتمى مزدوج | $Y^* = b_0^* + b_1 X^* + u$   | $Y = b_0 X^{b_1} e^u$           |
| ( ٨ - ٢ )                                                                                                                                         | نصف لوغاريتمى   | $Y^* = b_0 + b_1 X + u$       | $\ln Y = b_0 + b_1 X + u$       |
| ( ٨ - ٣ )                                                                                                                                         | مقلوب           | $Y = b_0 + b_1 Z + u$         | $Y = b_0 + \frac{b_1}{X} + u$   |
| ( ٨ - ٤ )                                                                                                                                         | تربيعى          | $Y = b_0 + b_1 X + b_2 W + u$ | $Y = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + u$ |
| حيث $Y^* = \ln Y$ , $b_0^* = \ln b_0$ , $X^* = \ln X$ , $u = \ln e^u$ , $Z = 1/X$ , $W = X^2$<br>$\ln = \ln e = 2.718$ اللوغاريتم الطبيعي الأساسى |                 |                               |                                 |

مثال ( ١ ) : افترض أننا سلمنا مقدماً بمعادلة طلب من الشكل

$$Y = b_0 X_1^{b_1} X_2^{b_2} e^u$$

حيث  $Y$  = الكمية المطلوبة من السلعة

$X_1$  = سعرها

$X_2$  = دخول المستهلكين

باستخدام بيانات جدول ( ٧ - ٦ ) وتطبيق طريقة OLS لدالة الاستهلاك هذه بعد تحويلها إلى شكل خطى لوغاريتمى مزدوج ، نحصل على :

$$\ln Y = 1.96 - 0.26 \ln X_1 + 0.39 \ln X_2 \quad R^2 = 0.97$$

(-3.54)      (6.64)

حيث 0.26 - و 0.39 هما ، على الترتيب ، تقديرات غير متحيزة للمرونة السعرية والدخلية للطلب ( انظر المسألة ٨ - ٢ ) ويبدو أن التوفيق هنا أفضل منه في الحالة الخطية ( انظر المسألة ( ٧ - ٢٠ ) ( ز ) ) .

#### ٨-٢ المتغيرات الصورية

يمكن تقديم المتغيرات المفسرة الكيفية ( مثل الحرب مقابل السلام ، فترات الإضراب مقابل فترات عدم الإضراب ، الذكور مقابل الإناث ، الخ ) في تحليل الانحدار بتعيين قيمة 1 لأحد التصنيفين ( الحرب مثلاً ) و 0 للتصنيف الآخر ( السلام ، مثلاً ) . وتسمى هذه

بالمتغيرات الصورية وتعامل معاملة المتغيرات الأخرى. ويمكن استخدام المتغيرات الصورية للإسكاف بالمتغيرات ( التقلات ) في ثابت  
المعادلة ( معادلة ( ٥ - ٨ ) ) ، والمتغيرات في الميل ( معادلة ( ٦ - ٨ ) ) ، أو التغيرات في كليهما ( معادلة ( ٧ - ٨ ) ) :

$$Y = b_0 + b_1X + b_2D + u \quad (٥ - ٨)$$

$$Y = b_0 + b_1X + b_2XD + u \quad (٦ - ٨)$$

$$Y = b_0 + b_1X + b_2D + b_3XD + u \quad (٧ - ٨)$$

حيث  $D$  هي 1 لأحد التصنيفين و 0 للتصنيف الآخر  $X$  هي المتغير المفسر الكمي المتعدد . ويمكن استخدام المتغيرات الصورية للإسكاف  
بالبروق بين أكثر من تصنيفين ، مثل المواسم والمناطق ( معادلة ( ٨ - ٨ ) ) :

$$Y = b_0 + b_1X + b_2D_1 + b_3D_2 + b_4D_3 + u \quad (٨ - ٨)$$

حيث  $b_0$  هي المقطع للموسم أو الإقليم الأول و  $D_1$  ،  $D_2$  و  $D_3$  تشير على الترتيب إلى المواسم أو الأقاليم 2 ، 3 و 4 . لاحظ  
أنه بالنسبة لأي عدد من التصنيفات  $k$  ، فإننا نحتاج إلى  $k - 1$  من المتغيرات الصورية ( أنظر المسائل ٨ - ٩ ، ٨ - ٢٦ ،  
و ٨ - ٢٧ ) . بالنسبة للمتغيرات التابعة الكيفية ، أنظر المسألة ( ٨ - ١٠ ) .

مثال ( ٢ ) : يعطى جدول ( ٢ - ٨ ) إجمال الاستثمار الخاص المحلي ،  $Y$  ، والناتج القومي الإجمالي ،  $X$  ، بالبلين دولار وبالأسمار  
الجارية في الولايات المتحدة من ١٩٣٩ إلى ١٩٥٤ ، باستخدام  $D = 1$  لسنوات الحرب ( ١٩٤٢ - ١٩٤٥ ) و  $D = 0$  لسنوات  
السلام ، نحصل على

$$\hat{Y} = -2.58 - 0.16X - 20.81D \quad R^2 = 0.94$$

(10.79)      (-6.82)

$D$  معنوية إحصائياً عند مستوى 5% . أي أن  $\hat{b}_0 = -2.58$  لوقت السلم و 23.39 - لوقت الحرب ، بينما  $\hat{b}_1 = 0.16$   
هي معامل الميل المشترك . ( لاختبارات الاختلاف في الميل ، وكذلك الاختلاف في المقطع وفي الميل ، ( أنظر المسائل ( ٨ - ٧ ) ) ،  
( ٨ - ٨ ) ، ( ٨ - ٢٤ ) ، و ( ٨ - ٢٥ ) .

جدول ( ٢ - ٨ ) إجمال الاستثمار الخاص المحلي والناتج القومي الإجمالي ( ببلين الدولارات )  
الولايات المتحدة ( ١٩٣٩ - ١٩٥٤ )

| السنة | 1939 | 1940  | 1941  | 1942  | 1943  | 1944  | 1945  | 1946  | 1947  | 1948  | 1949  | 1950  | 1951  | 1952  | 1953  | 1954  |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Y$   | 9.3  | 13.1  | 17.9  | 9.9   | 5.8   | 7.2   | 10.6  | 30.7  | 34.0  | 45.9  | 35.3  | 53.8  | 59.2  | 52.1  | 53.3  | 52.7  |
| $X$   | 90.8 | 100.0 | 124.9 | 158.3 | 192.0 | 210.5 | 212.3 | 209.3 | 232.8 | 259.1 | 258.0 | 286.2 | 330.2 | 347.2 | 366.1 | 366.3 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ١٩٨٠ ، صفحة ٢٠٣

### ٢-٨ نماذج فترات الإبطاء الموزعة

غالباً ما تكون قيمة المتغير التابع الحالية دالة في أو تعتمد على مجموع مرجح للقيم الحالية ؟ والماضية للمتغير المستقل ( وحد الخطأ ) ،  
مع تعيين أوزان مختلفة عادة للترات الزمنية المختلفة :

$$Y_t = a + b_0X_t + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + \dots + u_t \quad (٩ - ٨)$$

وتقدير نموذج فترات الإبطاء الموزعة ( معادلة ( ٩ - ٨ ) ) يمثل صموبتي . الأولى ، أن بيانات مشاهدة أو فترة زمنية تضيق  
لكل قيمة مبطة للمتغير  $X$  والثانية ، إن قيم المتغيرات المستقلة  $X$  على الأرجح سوف تكون مرتبطة بعضها ببعض وبالتالي سوف يصعب  
عزل تأثير كل  $X$  على  $Y$

ويمكن التخلص من هذه الصعوبات بأن نشق من معادلة (٨ - ٩) نموذج إبطاء كويك ، ( معادلة (٨ - ١٠) ) ، والذي يفترض أن الأوزان تتناقص كتوالي هندسية ( أنظر المسألة ٨ - ١٢ ) :

$$Y_t = a(1 - \lambda) + b_0X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t \quad (٨ - ١٠)$$

حيث  $0 < \lambda < 1$  و  $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$  .

ولكن معادلة (٨ - ١٠) تخرق اثنين من فروض نموذج OLS وتؤدي إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة ومن ثم تحتاج إلى تعديل ( أنظر قسم ٩ - ٣ ) .

وكبدل ، يمكن استخدام نموذج إبطاء المون . ويسمح هذا بهيكل إبطاء أكثر مرونة ، ويمكن تقريبه عملياً باستخدام كثيرة حدود تزيد درجتها عن عدد نقاط التحول في الدالة بواحد على الأقل ( أنظر مسألة ٨ - ١٣ ) . وبافتراض إبطاء لثلاث فترات ( معادلة ٨ - ١١ ) على شكل معادلة تربيعية ( معادلة ٨ - ١٢ ) ، يمكننا اشتقاق معادلة (٨ - ١٣) ( أنظر المسألة ٨ - ١٥ ) :

$$Y_t = a + b_0X_t + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + b_3X_{t-3} + u_t \quad (٨ - ١١)$$

$$b_i = c_0 + c_1i + c_2i^2 \quad \text{حيث (٨ - ١٢)}$$

$$Y_t = a + c_0Z_{1t} + c_1Z_{2t} + c_2Z_{3t} + v_t \quad \text{بحيث أن (٨ - ١٣)}$$

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^3 X_{t-i} \quad Z_{2t} = \sum_{i=1}^3 iX_{t-i} \quad \text{و} \quad Z_{3t} = \sum_{i=1}^3 i^2X_{t-i} \quad \text{حيث}$$

ونحصل على قيم المعاملات  $\hat{b}_i$ 's في معادلة (٨ - ١١) بالتعويض بالقيم المقدرة للمعاملات  $c_0$  ،  $c_1$  و  $c_2$  من معادلة (٨ - ١٣) في معادلة (٨ - ١٢) ( أنظر المسألة ٨ - ١٦ ) .

مثال (٣) : يعطى جدول (٨ - ٣) مستوى الواردات  $Y$  ، والدخل القوي الإجمالي  $X$  ، كليهما ببلاتين الدولارات ، للولايات المتحدة للسنوات من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ . بتوفيق نموذج كويك ، نحصل على

$$\hat{Y}_t = -27.45 + \frac{0.06}{(2.52)} X_t + \frac{0.60}{(2.66)} Y_{t-1} \quad R^2 = 0.99$$

حيث  $\hat{\lambda} = 0.60$  و  $\hat{a} = -27.45$  أي أن  $\hat{a}(1 - 0.60) = -68.63$  .

جدول (٨ - ٣) الواردات والدخل القوي الإجمالي ( ببلاتين الدولارات ) : الولايات المتحدة ، ١٩٦٠ - ١٩٧٩

| Year    | 1960  | 1961    | 1962    | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    |
|---------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Imports | 23.2  | 23.1    | 25.2    | 26.4    | 28.4    | 32.0    | 37.7    | 40.6    | 47.7    | 52.9    |
| GNP     | 506.0 | 523.3   | 563.8   | 594.7   | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   |
| Year    | 1970  | 1971    | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| Imports | 58.5  | 64.0    | 75.9    | 94.4    | 131.9   | 126.9   | 155.4   | 185.8   | 217.5   | 260.9   |
| GNP     | 982.4 | 1,063.4 | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس . مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة . واشنطن ١٩٨٠ صفحة ٢٠٣

### ٨-١ التنبؤ

يشير التنبؤ إلى تقدير قيمة المتغير التابع ،  $Y_F$  ، بمعلومية القيمة الفعلية أو المتوقعة للمتغير المستقل ،  $X_F$  . ويغثل تباين خطأ التنبؤ ،  $\sigma_F^2$  ، بالآتي :

$$\sigma_F^2 = \sigma_u^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_F - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] \quad (٨-١٤)$$

حيث  $n$  هي عدد المشاهدات و  $\sigma_u^2$  هي تباين  $u$  . وحيث أن  $\sigma_u^2$  تكون عادة غير معلومة ، فإننا نستخدم  $s^2$  كتقدير غير متحيز للتباين  $\sigma_u^2$  ، فيكون تباين خطأ التنبؤ

$$s_F^2 = s^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_F - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] \quad (٨-١٥)$$

وتكون فترة الثقة 95% للتنبؤ ،  $Y_F$  ، هي

$$\hat{Y}_F \pm t_{0.025} s_F$$

حيث  $Y_F = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_F$  وتشير  $t$  إلى توزيع  $t$  بدرجات حرية  $n - 2$  .

مثال ( ٤ ) : بالعودة إلى مثال الخطئة - السباد في الفصل السادس ، نتذكر أن  $\hat{Y}_i = 27.12 + 1.66 X_i$  ،  $\bar{X} = 18$  ،  $n = 10$  ،  $\sum (X_i - \bar{X})^2 = 576$  ،  $\sum e_i^2 = 47.31$  ،  $s^2 = \sum e_i^2 / (n - 2) \approx 5.91$  ( من مثال ٦ - ٣ ) .

فإذا توقعنا أن كمية السباد المستخدمة للفدان سنة ١٩٨١ سوف تكون  $X_F = 35$  ، فإننا نحصل على

$$s_F^2 = 5.91 \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{(35 - 18)^2}{576} \right] \approx 9.46 \quad \text{and} \quad s_F \approx 3.08$$

$$\hat{Y}_F = 27.12 + 1.66(35) = 45.38$$

فتكون فترة الثقة 95 % أو فترة التنبؤ بالنسبة إلى  $Y_F$  في عام ١٩٨١ هي  $45.38 \pm (2.31)(3.08)$  ، أو بين 38.27 و 52.49 . ( انظر المسألة ٨ - ٢٠ للتنبؤ في حالة تحليل الانحدار المتعدد ) .

### مسائل محلولة

#### شكل الدالة :

٨ - ١ ( أ ) كيف يقرر شكل العلاقة الدالية ؟ ( ب ) ماهي بعض التحويلات إلى دوال خطية الأكثر فائدة ؟ ( ج ) هل تكون المعالم المقدرة بتطبيق طريقة OLS على الدوال الخطية المحولة تقديرات غير متحيزة لمعالم المجتمع الحقيقية ؟

( أ ) في بعض الأحيان يمكن أن تقترح النظرية الاقتصادية شكل الدالة لعلامة اقتصادية ما . فمثلاً ، نظرية الاقتصاد الجزئي أن منحني متوسط التكلفة ( في الأجل القصير ) يأخذ شكل U وأن منحني متوسط التكلفة الثابتة يتناقص باستمرار ويقترّب - في النهاية - من محور الكمية حيث يقسم إجمال التكاليف الثابتة على عدد أكبر فأكبر من الوحدات المنتجة . كما قد يوحى شكل انتشار النقاط أيضاً بشكل الدالة المناسب في حالة علاقة بين متغيرين . وعندما لا يتوفر اقتراح بشكل العلاقة سواء عن طريق النظرية أو عن طريق شكل الانتشار ، فإنه عادة ما يتم تجربة الدالة الخطية لمساطتها .



(ب) بعض التحويلات الأكثر فائدة والأكثر شيوعاً من دوال غير خطية إلى دوال خطية هي الدوال اللوغاريتمية المزدوجة ، نصف اللوغاريتمية ، المقلوبة ، كثيرات الحدود ( انظر جدول ٨ - ١ ) . ومن مزايا الصورة اللوغاريتمية المزدوجة أن معالم الميل تمثل المرونات ( انظر المسألة ٨ - ٢ ) . وتكون الدالة نصف اللوغاريتمية ملائمة عندما يزيد المتغير التابع بمعدل ثابت تقريباً مع الزمن ، كما في حالة القوة العاملة والسكان ( انظر المسألة ٨ - ٤ ) . أما الدالة المقلوبة والدالة كثيرة الحدود فتعتبر ملائمة لتقدير منحنيات متوسط التكاليف وإجمالي التكاليف ( انظر المسألة ٨ - ٥ ) .

(ج) يؤدي تقدير الدالة اللوغاريتمية المزدوجة المحولة باستخدام طريقة OLS إلى مقدرات للميل غير متحيزة . ولكن ،  $\hat{b}_0 =$  العدد المقابل للوغاريتم للمعامل  $\hat{b}_0$  يكون مقدراً متحيزاً ، وإن كان متسقاً ، للمعلمة  $b_0$  . وحقيقة أن  $\hat{b}_0$  تكون متحيزة ليس لها تأثير كبير حيث أن الثابت عادة لا يكون محل اهتمام أساسي ( انظر مسألة ٧ - ٦ ( هـ ) ) .  $\hat{b}_0$  غير متحيزة أيضاً في الدوال المحلولة الأخرى في جدول ٨ - ١ . ويكون النموذج اللوغاريتمى المزدوج الخطى مناسباً إذا وقعت النقاط لو  $Y -$  لو  $X$  تقريباً على خط مستقيم .

٨ - ٢ أثبت أنه في معادلة الطلب اللوغاريتمية المزدوجة على الصورة

$$Q = b_0 P^{b_1} Y^{b_2} e^u$$

حيث  $Q =$  الكمية المطلوبة ،  $P =$  السعر ،  $Y =$  الدخل ،  $b_1$  ( أ ) هي المرونة السعرية للطلب ، أو  $\eta_P$  ،  $b_2$  ( ب ) هي المرونة الدخلية للطلب أو  $\eta_Y$  . ( يمكن للقارئ بدون العام بالتفاضل أن يتخطى هذه المسألة ) .  
( أ ) تعريف المرونة السعرية للطلب هو :

$$\eta_P = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

مشتقة دالة  $Q$  بالنسبة إلى  $P$  هي :

$$\frac{dQ}{dP} = b_1 (b_0 P^{b_1-1} Y^{b_2} e^u) = b_1 (b_0 P^{b_1} Y^{b_2} e^u) P^{-1} = b_1 \cdot \frac{Q}{P}$$

بإحلال قيمة  $dQ/dP$  في صيغة  $\eta_P$  نحصل على :

$$\eta_P = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = b_1 \cdot \frac{Q}{P} \cdot \frac{P}{Q} = b_1$$

(ب) تعريف المرونة الدخلية للطلب هو :

$$\eta_Y = \frac{dQ}{dY} \cdot \frac{Y}{Q}$$

مشتقة الدالة  $Q$  بالنسبة إلى  $Y$  هي :

$$\frac{dQ}{dY} = b_2 (b_0 P^{b_1} Y^{b_2-1} e^u) = b_2 (b_0 P^{b_1} Y^{b_2} e^u) Y^{-1} = b_2 \cdot \frac{Q}{Y}$$

بإحلال قيمة  $dQ/dY$  في صيغة  $\eta_Y$  ، نحصل على :

$$\eta_Y = \frac{dQ}{dY} \cdot \frac{Y}{Q} = b_2 \cdot \frac{Q}{Y} \cdot \frac{Y}{Q} = b_2$$

٨ - ٣ يعطى جدول ( ٨ - ٤ ) الإنتاج بالأطنان ،  $Q$  ، ومدخلات العمل بالساعة ،  $L$  ، ومدخلات رأس المال ، ساعة ماكينة ،  $K$  ، لعدد ١٤ شركة في صناعة ما . والمطلوب توفيق البيانات لدالة إنتاج كوب - دوجلاس .

$$Q = b_0 L^{b_1} K^{b_2} e^u$$

جدول ( ٨ - ٤ ) الإنتاج ومدخلات العمل ورأس المال في ١٤ شركة في صناعة ما

| الشركة | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Q$    | 240   | 400   | 110   | 530   | 590   | 470   | 450   | 160   | 290   | 490   | 350   | 550   | 560   | 430   |
| $L$    | 1,480 | 1,660 | 1,150 | 1,790 | 1,880 | 1,860 | 1,940 | 1,240 | 1,240 | 1,850 | 1,570 | 1,700 | 2,000 | 1,850 |
| $K$    | 410   | 450   | 380   | 430   | 480   | 450   | 490   | 395   | 430   | 460   | 435   | 470   | 480   | 440   |

تحول البيانات أولاً إلى الصورة اللوغاريتمية الطبيعية ، كما هو موضح في جدول ( ٨ - ٥ ) ، ثم تطبق طريقة OLS على المتغيرات المحولة كما سبق شرحه في قسم ( ٦ - ٢ ) ( ويقوم الكمبيوتر بكل هذا ) . النتائج هي

$$\ln Q = -23.23 + \frac{1.43}{(2.55)} \ln L + \frac{3.05}{(2.23)} \ln K \quad R^2 = 0.88$$

وتشير المعاملات المقدرة 1.43 و 3.05 على الترتيب ، إلى مرونة الإنتاج بالنسبة إلى  $L$  و  $K$  . وحيث أن  $1.43 + 3.05 = 4.48 > 1$  ، فإن هناك تزايداً في الغلة لهذه الصناعة ( بمعنى أن زيادة مدخلات كل من  $L$  و  $K$  بمقدار 10% يؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار 44.8% ) .

جدول ( ٨ - ٥ ) الإنتاج ومدخلات العمل ورأس المال في صورتها الأصلية وفي الصورة اللوغاريتمية

| الشركة | $Q$ | $L$  | $K$ | $\ln Q$ | $\ln L$ | $\ln K$ |
|--------|-----|------|-----|---------|---------|---------|
| 1      | 240 | 1480 | 410 | 5.48064 | 7.29980 | 6.01616 |
| 2      | 400 | 1660 | 450 | 5.99146 | 7.41457 | 6.10925 |
| 3      | 110 | 1150 | 380 | 4.70048 | 7.04752 | 5.94017 |
| 4      | 530 | 1790 | 430 | 6.27288 | 7.48997 | 6.06379 |
| 5      | 590 | 1880 | 480 | 6.38012 | 7.53903 | 6.17379 |
| 6      | 470 | 1860 | 450 | 6.15273 | 7.52833 | 6.10925 |
| 7      | 450 | 1940 | 490 | 6.10925 | 7.57044 | 6.19441 |
| 8      | 160 | 1240 | 395 | 5.07517 | 7.12287 | 5.97889 |
| 9      | 290 | 1240 | 430 | 5.66988 | 7.12287 | 6.06379 |
| 10     | 490 | 1850 | 460 | 6.19441 | 7.52294 | 6.13123 |
| 11     | 350 | 1570 | 435 | 5.85793 | 7.35883 | 6.07535 |
| 12     | 550 | 1700 | 470 | 6.30992 | 7.43838 | 6.15273 |
| 13     | 560 | 2000 | 480 | 6.32794 | 7.60090 | 6.17379 |
| 14     | 430 | 1850 | 440 | 6.06379 | 7.52294 | 6.08677 |

٨ - ٤ يعطي جدول ( ٨ - ٦ ) عدد الأشخاص العاملين ،  $N$  ، ( إلى أقرب مليون ) في الولايات المتحدة من عام ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ . المطلوب توفيق خط انحدار OLS إلى بيانات جدول ( ٨ - ٦ ) .

جدول ( ٨ - ٦ ) عدد الأشخاص العاملين في الولايات المتحدة من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩

| السنة | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968  | 1969  |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| $N$   | 69.6 | 70.5 | 70.6 | 71.8 | 73.1 | 74.5 | 75.8 | 77.3 | 78.7  | 80.7  |
| السنة | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978  | 1979  |
| $N$   | 82.7 | 84.1 | 86.5 | 88.7 | 91.0 | 92.6 | 94.8 | 97.4 | 100.4 | 102.9 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ١٩٨٠ صفحة ٢٣٤ .

حيث أن التوظيف يميل إلى الزيادة بمعدل ثابت مع الزمن ،  $T$  ، فإنه يمكننا توفيق دالة نصف لوغاريتمية على الصورة الواردة في معادلة ( ٨ - ٢ ) للبيانات المحولة في جدول ( ٨ - ٧ ) . النتائج هي

$$\ln N = 4.19 + 0.02T \quad R^2 = 0.99$$

(41.18)

جدول ( ٨ - ٧ ) عدد العاملين في الولايات المتحدة

١٩٦٠ - ١٩٧٩ : البيانات الأصلية والمحولة

| السنة | $N$   | $\ln N$ | $T$ |
|-------|-------|---------|-----|
| 1960  | 69.6  | 4.24276 | 1   |
| 1961  | 70.5  | 4.25561 | 2   |
| 1962  | 70.6  | 4.25703 | 3   |
| 1963  | 71.8  | 4.27388 | 4   |
| 1964  | 73.1  | 4.29183 | 5   |
| 1965  | 74.5  | 4.31080 | 6   |
| 1966  | 75.8  | 4.32810 | 7   |
| 1967  | 77.3  | 4.34769 | 8   |
| 1968  | 78.7  | 4.36564 | 9   |
| 1969  | 80.7  | 4.39074 | 10  |
| 1970  | 82.7  | 4.41522 | 11  |
| 1971  | 84.1  | 4.43201 | 12  |
| 1972  | 86.5  | 4.46014 | 13  |
| 1973  | 88.7  | 4.48526 | 14  |
| 1974  | 91.0  | 4.51086 | 15  |
| 1975  | 92.6  | 4.52829 | 16  |
| 1976  | 94.8  | 4.55177 | 17  |
| 1977  | 97.4  | 4.57883 | 18  |
| 1978  | 100.4 | 4.60916 | 19  |
| 1979  | 102.9 | 4.63376 | 20  |

٨ - هـ المطلوب توفيق منحنى متوسط التكلفة قصير الأجل لبيانات جدول ( ٨ - ٨ ) ، الذي يعطي متوسط التكلفة ،  $AC$  ، والإنتاج  $Q$  لشركة ما خلال فترة 12 أسبوعاً .

جدول ( ٨ - ٨ ) متوسط التكاليف والإنتاج لشركة ما خلال فترة 12 أسبوعاً

| الأسبوع | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $AC$    | 82  | 86  | 100 | 100 | 95  | 85  | 110 | 88  | 86  | 108 | 87  | 87  |
| $Q$     | 149 | 121 | 190 | 100 | 109 | 138 | 209 | 170 | 158 | 201 | 130 | 181 |

حيث أن نظرية الاقتصاد الجزئي تفترض منحنى تكاليف للأجل القصير على شكل  $U$  ، فإننا نعمل على توفيق

$$AC = b_0 - b_1 Q + b_2 W + u \quad \text{حيث } W = Q^2$$

وتكون النتيجة

$$\widehat{AC} = 244.86 - 2.20Q + 0.01Q^2 \quad R^2 = 0.94$$

(-9.84) (10.42)

المتغيرات الصورية :

٨ - ٦ (أ) اكتب معادلة لوقت السلم وأخرى لوقت الحرب للمعادلات (٨ - ٥) ، (٨ - ٦) ، و (٨ - ٧) ، إذا كانت  $C =$  الاستهلاك ،  $Y_d =$  الدخل المتاح و  $D = 1$  في سنوات الحرب ،  $D = 0$  في سنوات السلم .

(ب) ارسم شكلاً لمعادلات (٨ - ٥) ، (٨ - ٦) ، و (٨ - ٧) مبيناً دالة استهلاك في سنوات السلم ، ودالة استهلاك في سنوات الحرب

(ج) ماهي مزايا تقدير المعادلات (٨ - ٥) ، (٨ - ٦) ، و (٨ - ٧) بدلا من تقدير انحدارين ، أحدهما لسنوات السلم والآخر لسنوات الحرب ، في كل حالة ؟

(أ) يجعل المعادلات التي تحتوي على  $a$  تشير إلى وقت السلم ، والمعادلات التي تحتوي على  $b$  تشير إلى وقت الحرب ، نحصل على

$$C = b_0 + b_1 Y_d + u \quad (٨ - ٥ \text{ أ})$$

$$C' = (b_0 + b_2) + b_1 Y_d + u \quad (٨ - ٥ \text{ ب})$$

$$C = b_0 + b_1 Y_d + u \quad (٨ - ٦ \text{ أ})$$

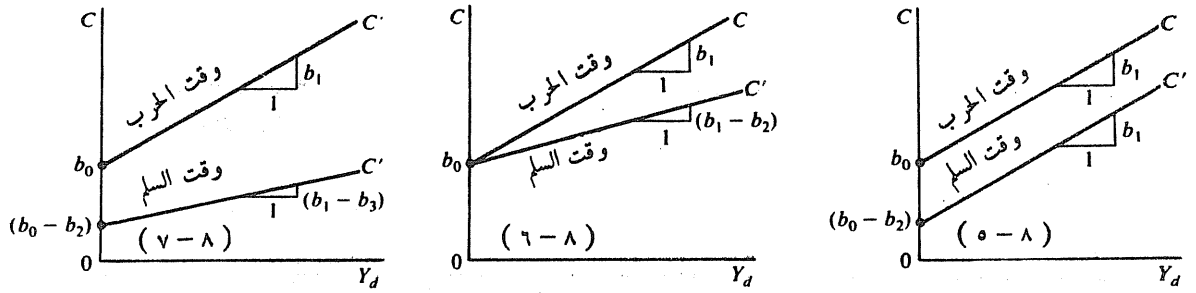
$$C' = b_0 + (b_1 + b_2) Y_d + u \quad (٨ - ٦ \text{ ب})$$

$$C = b_0 + b_1 Y_d + u \quad (٨ - ٧ \text{ أ})$$

$$C' = (b_0 + b_2) + (b_1 + b_3) Y_d + u \quad (٨ - ٧ \text{ ب})$$

لاحظ أن كل معادلات وقت السلم متطابقة لأن  $D = 0$  . خلال وقت الحرب ، يكون الاستهلاك أقل من وقت السلم بسبب القيود ونقص المتاح من السلع والخدمات ، وبسبب الدوافع الخلقية . وعليه فإن  $b_2$  و  $b_3$  ( معاملات  $D$  ) من المتوقع أن تكون سالبة لسنوات الحرب ، بحيث يكون المقطع و / أو الميل أقل لمعادلات سنوات الحرب عن معادلات سنوات السلم .

(ب) انظر شكل (٨ - ١)



(شكل ٨ - ١)

(ج) إن مزايا تقدير معادلات (٨ - ٥) ، (٨ - ٦) ، و (٨ - ٧) بالمقارنة مع تقدير معادلة المقطع منفصلة لكل حالة ، واحدة لوقت السلم وأخرى لوقت الحرب هي (١) درجات حرية أكبر (٢) يمكن بسهولة اختبار عدد من الفروض لمعرفة ما إذا كانت الفروق في الثوابت و / أو معاملات الميل معنوية إحصائياً ، (ج) توفير وقت الكمبيوتر .

٨ - ٧ يغطي جدول (٨ - ٩) كمية الألبان ( بالآلاف ) ( الواحدة ١/٤ جالون ) التي توردتها شركة ما خلال شهر Q عند أسعار مختلفة ، P ، على فترة زمنية 14 شهراً . وقد واجهت الشركة إضراباً في بعض مصانعها خلال الشهور الخامس ، والسادس ،

والسابع . بإجراء انحدار  $Q$  على  $P$  المطلوب (أ) إختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع خلال فترات الإضراب وعدم الإضراب (ب) إختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع وفي الميل .

جدول ( ٨ - ٩ ) الكمية الموردة من الألبان ( بالآلاف ) عند أسعار مختلفة

| الشهر | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $Q$   | 98   | 100  | 103  | 105  | 80   | 87   | 94   | 113  | 116  | 118  | 121  | 123  | 126  | 128  |
| $P$   | 0.79 | 0.80 | 0.82 | 0.82 | 0.93 | 0.95 | 0.96 | 0.88 | 0.88 | 0.90 | 0.93 | 0.94 | 0.96 | 0.97 |

(أ) بوضع  $D = 1$  خلال شهور الإضراب و  $D = 0$  في غير ذلك ، نحصل على

$$\hat{Q} = -32.47 + 165.97P - 37.64D \quad R^2 = 0.98$$

(15.65)      (-23.59)

حيث  $D$  معنوية إحصائياً عند مستوى أفضل من 1% ، فالمقطع هو  $\hat{b}_0 = -32.47$  خلال فترات عدم الإضراب ، ويساوى  $\hat{b}_0 + \hat{b}_2 = 32.47 - 37.64 = -70.11$  خلال فترة الإضراب .

$$\hat{Q} = -29.74 + 162.86P - 309.62D + 287.14XD \quad R^2 = 0.99 \quad (\text{ب})$$

(27.16)      (-5.67)      (4.98)

كل من  $D$  و  $XD$  معنوية إحصائياً عند مستوى أفضل من 1% . ويكون المقطع والميل على الترتيب ، هما  $-29.74$  و  $162.86$  خلال فترات عدم الإضراب . أما في فترات الإضراب فإن المقطع يساوى

$$\hat{b}_0 + \hat{b}_2 = -29.74 - 309.26 = -339$$

بينما يكون الميل  $\hat{b}_1 + \hat{b}_3 = 162.86 + 287.14 = 450$  ( وحيث يفترض أن الشركة تستطيع زيادة إنتاجها بدرجة كبيرة في المصانع التي ليس بها إضراب ) .

٨ - ٨ يعطى جدول ( ٨ - ١٠ ) الإنفاق الاستهلاكي ،  $C$  ، والدخل المتاح ،  $Y_d$  ، وجنس رب البيت  $S$  لعدد 12 عائلة عشوائية . (أ) أوجد انحدار  $C$  على  $Y_d$  . (ب) اختبر الفرق في المقطع للعائلات التي ربها رجل وتلك التي ربها سيدة ( ج ) اختبر الفرق في العمل أو الميل الحدى للاستهلاك MPC للعائلات التي ربها رجل دن العائلات التي ربها سيدة . ( د ) اختبر الفرق في كل من المقطع والميل ( هـ ) أى النتائج هي « الأفضل » ؟

جدول ( ٨ - ١٠ ) الاستهلاك ، الدخل المتاح ، وجنس رب البيت لإثنتا عشرة أسرة عشوائية

| العائلة | 1      | 2      | 3      | 4      | 5     | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     |
|---------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $C$     | 18,535 | 11,350 | 12,130 | 15,210 | 8,680 | 16,760 | 13,480 | 9,680  | 17,840 | 11,180 | 14,320 | 19,860 |
| $Y_d$   | 22,550 | 14,035 | 13,040 | 17,500 | 9,430 | 20,635 | 16,470 | 10,720 | 22,350 | 12,200 | 16,810 | 23,000 |
| $S$     | M      | M      | F      | M      | F     | M      | M      | F      | M      | F      | F      | M      |

$$\hat{C} = 1,663.60 + 0.75 Y_d \quad R^2 = 0.978$$

(2.73)      (21.12)

(أ)

(ب) بوضع  $D = 1$  للعائلات التي على رأسها سيدة و  $D = 0$  لغير ذلك ، نحصل على

$$\hat{C} = 186.12 + 0.82 Y_d + 832.09 D \quad R^2 = 0.984$$

(16.56) (1.82)

$$\hat{C} = 709.18 + 0.79 Y_d + 0.05 Y_d D \quad R^2 = 0.983 \quad (ج)$$

(18.11) (1.51)

$$\hat{C} = -184.70 + 0.83 Y_d + 1,757.99 D - 0.06 Y_d D \quad R^2 = 0.985 \quad (د)$$

(13.65) (1.03) (-0.57)

(و) حيث أن كلا من  $D$  ،  $Y_d D$  غير معنوية إحصائياً عند مستوى 5% في أجزاء (ب) ، (ج) ، و (د) ، فإنه لا يوجد اختلاف في نمط الاستهلاك بين العائلات التي يرأسها رجال وتلك التي ترأسها سيدات . وتكون أفضل النتائج تلك الواردة في (أ) .

٨ - ٩ يعطى جدول (٨ - ١١) الأرباح (بعد الضرائب) والمبيعات للمؤسسات الإنتاجية الأمريكية من الربع الأول لعام ١٩٧٤ حتى الربع الثالث لعام ١٩٧٩ . (أ) رتب جدولاً يوضح الأرباح والمبيعات ومتغيراً صورياً ليأخذ في الحسبان الآثار الموسمية (ب) باستخدام البيانات من الجدول في (أ) أجز تقدير الانحدار للأرباح على المبيعات والمتغيرات الصورية الموسمية وفسر النتائج .

جدول (٨ - ١١) الأرباح والمبيعات للمؤسسات الإنتاجية في الولايات المتحدة (ببلايين الدولارات)

|          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| الأرباح  | 13.5  | 16.3  | 15.5  | 13.4  | 9.3   | 12.4  | 13.2  | 14.2  | 14.8  | 18.1  | 16.0  | 15.6  |
| المبيعات | 242.0 | 269.4 | 272.1 | 277.0 | 247.1 | 265.8 | 271.0 | 281.3 | 284.2 | 307.6 | 301.6 | 309.8 |
| الربع    | I     | II    | III   | IV    | I     | II    | III   | IV    | I     | II    | III   | IV    |
| السنة    | 1974  |       |       |       | 1975  |       |       |       | 1976  |       |       |       |
| الأرباح  | 15.6  | 19.7  | 16.7  | 18.4  | 16.0  | 22.1  | 20.4  | 22.6  | 22.6  | 26.8  | 24.8  |       |
| المبيعات | 311.5 | 338.6 | 331.7 | 346.2 | 340.2 | 377.5 | 376.9 | 401.8 | 406.2 | 436.4 | 437.5 |       |
| الربع    | I     | II    | III   | IV    | I     | II    | III   | IV    | I     | II    | III   |       |
| السنة    | 1977  |       |       |       | 1978  |       |       |       | 1979  |       |       |       |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب الحكومة الأمريكية للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٣٠٠

(أ) بأخذ الربع الأول كأساس ، ووضع  $D_1 = 1$  للربع الثاني وتساوى الصفر لغير ذلك .  $D_2 = 1$  للربع الثالث وتساوى الصفر لغير ذلك ، و  $D_3 = 1$  للربع الرابع وتساوى الصفر لغير ذلك ، فإننا نحصل على جدول (٨ - ١٢) .

(ب) باستخدام بيانات جدول (٨ - ١٢) لإيجاد انحدار الأرباح ،  $P$  ، على المبيعات  $S$  ،  $D_1$  ،  $D_2$  ، و  $D_3$  نحصل على

$$\hat{P} = -5.20 + 0.07 S + 2.10 D_1 + 0.68 D_2 + 0.33 D_3 \quad R^2 = 0.93$$

(14.79) (2.91) (0.94) (0.44)

وحيث أن  $D_1$  فقط ذات معنوية إحصائية عند مستوى 5% ،

$$\hat{P} = -5.20 + 0.07 S \quad \text{في الربع الأول والثالث والرابع}$$

$$\hat{P} = -3.10 + 0.07 S \quad \text{في الربع الثاني}$$

ولا تتغير هذه النتائج لو استخدمنا أربعة متغيرات صورية ، واحد لكل ربع سنة ، ولكن يتم حذف ثابت معادلة الانحدار . أن استخدام المتغيرات الصورية الأربعة مع الثابت يجعل من غير الممكن تقدير انحدار OLS (أنظر قسم ٩ - ٢) .

جدول ( ٨ - ١٢ ) الأرباح ، المبيعات ، والمتغيرات الموسمية الصورية

| المبيعات | الأرباح | الربع | السنة | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|----------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1974     | I       | 13.5  | 242.0 | 0     | 0     | 0     |
|          | II      | 16.3  | 269.4 | 1     | 0     | 0     |
|          | III     | 15.5  | 272.1 | 0     | 1     | 0     |
|          | IV      | 13.4  | 277.0 | 0     | 0     | 1     |
| 1975     | I       | 9.3   | 247.1 | 0     | 0     | 0     |
|          | II      | 12.4  | 265.8 | 1     | 0     | 0     |
|          | III     | 13.2  | 271.0 | 0     | 1     | 0     |
|          | IV      | 14.2  | 281.3 | 0     | 0     | 1     |
| 1976     | I       | 14.8  | 284.2 | 0     | 0     | 0     |
|          | II      | 18.1  | 307.6 | 1     | 0     | 0     |
|          | III     | 16.0  | 301.6 | 0     | 1     | 0     |
|          | IV      | 15.6  | 309.8 | 0     | 0     | 1     |
| 1977     | I       | 15.6  | 311.5 | 0     | 0     | 0     |
|          | II      | 19.7  | 338.6 | 1     | 0     | 0     |
|          | III     | 16.7  | 331.7 | 0     | 1     | 0     |
|          | IV      | 18.4  | 346.2 | 0     | 0     | 1     |
| 1978     | I       | 16.0  | 340.2 | 0     | 0     | 0     |
|          | II      | 22.1  | 377.5 | 1     | 0     | 0     |
|          | III     | 20.4  | 376.9 | 0     | 1     | 0     |
|          | IV      | 22.6  | 401.8 | 0     | 0     | 1     |
| 1979     | I       | 22.6  | 406.2 | 0     | 0     | 0     |
|          | II      | 26.8  | 436.4 | 1     | 0     | 0     |
|          | III     | 24.8  | 437.5 | 0     | 1     | 0     |

٨ - ١٠ (أ) ماذا يقصد بمتغير تابع كمي؟ (ب) ماهي المشاكل أو الصعوبات التي تنشأ في انحدار ذي متغير تابع كمي؟

(أ) المتغير التابع الكمي : هو متغير ثنائي الوجه ، مشيراً إلى حدوث أو عدم حدوث حدث ما أو إلى وجود أو غياب ظروف معينة . فمثلاً ، يكون الشخص داخل القوة العاملة أو خارجها ، عاملاً أو غير عامل . يكون لدى الشخص سيارة ومنزل ويذهب للجامعة أولاً . في هذه الحالات ، فإن وقوع الحدث ، أو وجود الظروف تعين له عادة القيمة 1 ، بينما يعطى عدم الحدث أو الغياب القيمة 0 .

(ب) عندما يكون المتغير التابع ثنائي الوجه أو كمي ، يظل من الممكن استخدام طريقة المربعات الصغرى لتقدير معادلة الانحدار ولكن تنشأ بعض المشاكل . الأولى ، مخالفة فرض نموذج الانحدار الخطي الكلاسيكي OLS من أن حد الخطأ  $u$  يتبع التوزيع الطبيعي ( أنظر قسم ٦ - ١ ) . وهذا الفرض مطلوب لإجراء اختبارات معنوية المعالم . على أنه يمكن المجوء إلى نظرية النهاية المركزية ( أنظر قسم ٤ - ٢ ) للعينات الكبيرة ( $n \geq 30$ ) . الثانية ، مخالفة الفرض بأن عنصر الخطأ غير مرتبط بالمتغير المفسر . ؟ ويؤدي هذا إلى مقدرات غير متحيزة ولكن غير كفوءة ( أي أن المقدرات لا يكون لها أصغر تباين ) . ولكن يمكن أيضاً التغلب على هذه المشكلة كما هو موضح في قسم ( ٩ - ٢ ) . وأخيراً ، فإن القيم المقدرة للمتغير التابع قد تأخذ قيماً خارج المدى من 0 إلى 1 . ويمكن التغلب على هذه الصعوبة بضغط الاحتمالات المقدرة داخل المدى من 0 إلى 1 أما باستخدام الدالة الطبيعية التراكمية ( نموذج probit ) أو الدالة اللوجستية ( نموذج logit ) . وتقدم أساليب التقدير هذه في كتب الاقتصاد القياسي الأكثر تقدماً .

نماذج فترات الإبطاء الموزعة :

٨ - ١١ (أ) ماذا يقصد بنموذج فترات الإبطاء الموزعة؟ (ب) اكتب المعادلة للنموذج العام لفترات الإبطاء الموزعة مع عدد لانهائي من فترات الإبطاء وأخرى لعدد  $k$  من فترات الإبطاء . (ج) ماهي الصعوبات العملية التي تنشأ من تقدير نموذج بعدد  $k$  من فترات الإبطاء؟

(أ) غالباً ما يتوزع تأثير متغير يتعلق بالسياسات على سلسلة من الفترات الزمنية (أى أن المتغير التابع قد يكون بطيء الاستجابة للمتغير في السياسات) مما يتطلب سلسلة من التغيرات المفسرة المبطأة لتفسير عملية التكيف الكاملة خلال الزمن . نموذج فترات الإبطاء الموزعة هو نموذج تعتمد فيه القيمة الحاضرة للمتغير التابع  $Y_t$  ، على المجموع المرجح لمقيم الخاضعة والماضية للمتغيرات المستقلة (أى  $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$  الخ) وعلى حد الخطأ ، مع تعيين أوزان مختلفة عدة للفترات الزمنية المختلفة (عادة تتناقص مع تباعد الفترات الزمنية) .

$$Y_t = a + b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \dots + u_t \quad (ب) (٩-٨)$$

$$Y_t = a + b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \dots + b_k X_{t-k} + u_t \quad (أ) (٩-٨)$$

لاحظ أنه في معادلات (٩-٨) و (أ) (٩-٨) ،  $a$  ثابت ، بينما  $b_0$  هي معامل  $X_t$  . وقد فعلنا ذلك لتبسيط المعالجة الجبرية في المسألة (٨-١٢) (أ) .

(ج) عند تقدير نموذج فترات الإبطاء الموزعة ، فإنه في مقابل إدخال حد مبطأ تفقد واحدة من درجات الحرية . وعندما يكون عدد الحدود المستقلة المبطأة ،  $k$  ، صغيراً فإنه يمكن تقدير النموذج باستخدام OLS ، كما في الفصل السابع . ولكن ، عندما تكون  $k$  كبيرة (بالنسبة لطول السلسلة الزمنية) ، فإنه قد يتبقى عدد غير كاف من درجات الحرية لتقدير النموذج أو لى يكون الإنسان واثقاً في المعالم المقدرة . ثانياً ، فإن المتغيرات المفسرة المبطأة في نموذج فترات الإبطاء الموزعة ، سوف يكون بينها على الأرجح ارتباط قوى ، وبالتالي قد يكون من الصعب الفصل بدرجة كافية بين تأثيرات المتغيرات المستقلة على المتغير التابع (انظر المسألة ٧-٣) (ب) .

٨-١٢ (أ) اشتق نموذج فترات الإبطاء الموزعة لكويك . (ب) ما هي المشاكل التى تنشأ عند تقدير هذا النموذج ؟ (إرشاد بالنسبة لجزء (أ) : ابدأ بالنموذج العام لفترات الإبطاء الموزعة وافترض أن الأوزان تتناقص بمتوالية هندسية ، حيث تشير  $\lambda$  إلى ثابت أكبر من 0 وأصغر من 1 ، ثم ابطئ العلاقة بفترة زمنية واحدة ، واضرب في  $\lambda$  ، واطرح من العلاقة الأصلية) .

(أ) بدءاً بمعادلة (٩-٨) ، من المفترض أن كل شروط OLS متوفرة (أنظر المسألة ٧-١) :

$$Y_t = a + b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-2} + \dots + u_t \quad (٩-٨)$$

استخدام أوزان تتناقص كمتوالية هندسية و  $0 < \lambda < 1$  يعطى

$$b_i = \lambda^i b_0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (١٦-٨)$$

بالتعويض من معادلة (١٦-٨) في معادلة (٩-٨) .

$$Y_t = a + b_0 X_t + \lambda b_0 X_{t-1} + \lambda^2 b_0 X_{t-2} + \dots + u_t$$

بالإبطاء بفترة زمنية واحدة

$$Y_{t-1} = a + b_0 X_{t-1} + \lambda b_0 X_{t-2} + \lambda^2 b_0 X_{t-3} + \dots + u_{t-1}$$

بالضرب في

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda a + \lambda b_0 X_{t-1} + \lambda^2 b_0 X_{t-2} + \dots + \lambda u_{t-1}$$

بالطرح من معادلة (٩-٨) ،

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a - \lambda a + b_0 X_t + \lambda b_0 X_{t-1} - \lambda b_0 X_{t-1} \\ + \lambda^2 b_0 X_{t-2} - \lambda^2 b_0 X_{t-2} + \dots + u_t - \lambda u_{t-1}$$

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a(1 - \lambda) + b_0 X_t + u_t - \lambda u_{t-1}$$

$$Y_t = a(1 - \lambda) + b_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t \quad (١٠-٨)$$



$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$

لاحظ أنه في معادلة (٨ - ١٠) نقص عدد المتغيرات المنحدرة إلى اثنين ، مع بقاء  $X$  واحدة فقط .  
(ب) تنشأ مشكلتان خطيرتان في تقدير نموذج فترات الإبطاء الموزعة لكويك الأولى ، إذا كانت  $u_t$  في معادلة (٨ - ٩) تتوفر فيها كل فروض OLS (أنظر المسألة ٦ - ٤) ، فإن  $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$  في معادلة (٨ - ١٠) لا تتوفر فيها هذه الشروط . وبالتحديد فإن ،  $E(v_t v_{t-1}) \neq 0$  لأن كلا من  $v_t$  و  $v_{t-1}$  كما يتضمن في تعريفها القيمة  $u_{t-1}$  (أى  $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$  و  $v_{t-1} = u_{t-1} - \lambda u_{t-2}$  بالإضافة إلى أن ،  $E(v_t Y_{t-1}) \neq 0$  . أن خرق فروض OLS هذه ينتج عنها مقدرات متحيزة وغير متسقة لنموذج كويك المبطل (معادلة (٨ - ١٠)) ، وتتطلب إجراءات تصحيحية مفصلة (يناقش بعضها في قسم ٩ - ٣) . المشكلة الخطيرة الثانية هي أن نموذج كويك يفترض أوزاناً متناقصة كمتوالية هندسية . وغالباً مايكون الواقع غير ذلك ، متطلباً بذلك خطة إبطاء أكثر مرونة (أنظر المسألة ٨ - ١٤) .

٨ - ١٣ يعطي جدول (٨ - ١٣) مستوى المخزون ،  $Y$  ، والمبيعات ،  $X$  ، ببلادين الدولارات ، في الصناعة التحويلية الأمريكية من ١٩٥٩ إلى ١٩٧٨ والمطلوب (أ) توفيق نموذج كويك لبيانات جدول (٨ - ١٣) (ب) ماقية  $\lambda$  و  $a$  ؟

جدول (٨ - ١٣) المخزون والمبيعات في الصناعات التحويلية الأمريكية ، ١٩٧٨-١٩٥٩  
( ببلادين الدولارات )

| السنة | 1959 | 1960  | 1961  | 1962  | 1963  | 1964  | 1965  | 1966  | 1967  | 1968  |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Y$   | 52.9 | 53.8  | 54.9  | 58.2  | 60.0  | 63.4  | 68.2  | 78.0  | 84.7  | 90.6  |
| $X$   | 30.3 | 30.9  | 30.9  | 33.4  | 35.1  | 37.3  | 41.0  | 44.9  | 46.5  | 50.3  |
| السنة | 1969 | 1970  | 1971  | 1972  | 1973  | 1974  | 1975  | 1976  | 1977  | 1978  |
| $Y$   | 98.2 | 101.7 | 102.7 | 108.3 | 124.7 | 157.9 | 158.2 | 170.2 | 180.0 | 198.0 |
| $X$   | 53.5 | 52.8  | 55.9  | 63.0  | 73.0  | 84.8  | 86.6  | 98.9  | 110.8 | 124.7 |

المصدر : التقرير الاقتصادى للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة واشتطن ١٩٨٠ ، صفحة ٢٥٦

$$\hat{Y}_t = 2.37 + 0.94X_t + 0.47Y_{t-1} \quad R^2 = 0.99 \quad (أ)$$

(4.17)      (3.15)

$$\hat{\lambda} = 0.47 \quad \text{and} \quad d(1 - 0.47) = 2.37 \quad \text{so} \quad d = 4.47 \quad (ب)$$

٨ - ١٤ (أ) ماهو هيكل الإبطاء في نموذج ألمان للإبطاء ؟ (ب) ماهى مزايا وعيوب نموذج ألمان للإبطاء بالمقارنة مع نموذج كويك ؟  
(أ) بينما يفترض نموذج كويك للإبطاء أوزاناً متناقصة بمتوالية هندسية ، فإن نموذج ألمان للإبطاء يسمح بأى هيكل للإبطاء ، على أن يقرب عملياً بكثيرة حدود درجتها تزيد عن عدد نقاط التحول في الدالة واحداً . فثلاً ، هيكل إبطاء على صورة  $U$  معكوسة (أى عندما  $b_1 > b_0$ ) يمكن تقريبها باستخدام كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الأقل . وقد ينشأ هذا ، كما في حالة دالة الاستثمار ، وبسبب التأخر الناشئ عن تفهم الظروف واتخاذ القرارات ، فإن مستوى الاستثمار في الفترة الحالية يكون أكثر استجابة لظروف الطلب في الفترات القريبة الماضية عنه في الفترة الحالية .

(ب) لنموذج ألمان للإبطاء ميزتان هامتان عن نموذج كويك للإبطاء . الأولى ( كما أشرنا سابقاً ) ، أن لنموذج ألمان هيكل إبطاء مرن على عكس هيكل الإبطاء الجامد لنموذج كويك . الثانية ، أنه حيث أن نموذج ألمان للإبطاء لا يستبدل متغيراً تابعاً مبطلًا بالمتغيرات المستقلة المبطلّة ، فإنه لا يخرق أبداً من فروض OLS ( كما يفعل نموذج كويك ) . ومن عيوب

نموذج ألون أن عدد المعاملات اللازم تقديرها لا ينخفض كثيراً كما يحدث في نموذج كوك . ومن عيوبه أيضاً أنه في الواقع العمل ، قد لا نستطيع تحديد فترة الإبطاء أو شكل الإبطاء عن طريق النظرية أو بمعلومات مسبقة

٨ - ١٥ اشتق تحويلة ألون لكل من (أ) ثلاث فترات إبطاء تأخذ شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية (ب) أربع فترات إبطاء تأخذ شكل كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

(أ) بدءاً بمعادلة (٨ - ١١) و (٨ - ١٢) :

$$Y_t = a + b_0X_t + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + b_3X_{t-3} + u_t \quad (٨ - ١١)$$

$$b_i = c_0 + c_1i + c_2i^2 \quad \text{with } i = 0, 1, 2, 3 \quad (٨ - ١٢)$$

وبالتعويض بمعادلة (٨ - ١٢) في معادلة (٨ - ١١) ، نحصل على :

$$Y_t = a + c_0X_t + (c_0 + c_1 + c_2)X_{t-1} + (c_0 + 2c_1 + 4c_2)X_{t-2} + (c_0 + 3c_1 + 9c_2)X_{t-3} + u_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود في التعبير الأخير :

$$Y_t = a + c_0 \left( \sum_{i=0}^3 X_{t-i} \right) + c_1 \left( \sum_{i=1}^3 iX_{t-i} \right) + c_2 \left( \sum_{i=1}^3 i^2X_{t-i} \right) + u_t$$

بوضع  $Z_{1t} = \sum_{i=0}^3 X_{t-i}$ ،  $Z_{2t} = \sum_{i=1}^3 iX_{t-i}$ ، and  $Z_{3t} = \sum_{i=1}^3 i^2X_{t-i}$  ، نحصل على

$$Y_t = a + c_0Z_{1t} + c_1Z_{2t} + c_2Z_{3t} + u_t \quad (٨ - ١٣)$$

(ب) باستخدام إبطاء لمدة أربع فترات في شكل كثيرة حدود من الدرجة الثالثة يكون لدينا

$$Y_t = a + b_0X_t + b_1X_{t-1} + b_2X_{t-2} + b_3X_{t-3} + b_4X_{t-4} + u_t$$

$$b_i = c_0 + c_1i + c_2i^2 + c_3i^3 \quad \text{with } i = 0, 1, 2, 3, 4$$

وبالتعويض من المعادلة الثانية في المعادلة الأولى ، نحصل على

$$Y_t = a + c_0X_t + (c_0 + c_1 + c_2 + c_3)X_{t-1} + (c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3)X_{t-2} \\ + (c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27c_3)X_{t-3} + (c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3)X_{t-4} + u_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود في التعبير الأخير ، يكون لدينا

$$Y_t = a + c_0 \left( \sum_{i=0}^4 X_{t-i} \right) + c_1 \left( \sum_{i=1}^4 iX_{t-i} \right) + c_2 \left( \sum_{i=1}^4 i^2X_{t-i} \right) + c_3 \left( \sum_{i=1}^4 i^3X_{t-i} \right) + u_t$$

وبمساواة الحدود داخل الأقواس بالمقادير  $Z_{1t}$  ،  $Z_{2t}$  ،  $Z_{3t}$  ، و  $Z_{4t}$  على الترتيب نحصل على :

$$Y_t = a + c_0Z_{1t} + c_1Z_{2t} + c_2Z_{3t} + c_3Z_{4t} + u_t$$

٨ - ١٦ باستخدام بيانات جدول (٨ - ١٣) وبافتراض إبطاء لمدة ثلاث فترات في صورة كثيرة حدود الدرجة الثانية :

(أ) رتب جدولاً بالمتغيرات الأصلية وقيم  $Z$  المحسوبة لاستخدامها في تقدير نموذج ألون للإبطاء .

(ب) أوجد انحدار مستوى المخزون ،  $Y$  ، على قيم  $Z$  الواردة في الجدول (أ) ، أى قدر معادلة الانحدار (٨ - ١٣)

(ج) أوجد قيم  $\hat{b}$  واكتب المعادلة المقدرة (٨ - ١١) .

(أ) تحسب قيم  $Z$  المعطاة في جدول ( ٨ - ١٤ ) كما يلي :

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^3 X_{t-i} = (X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3})$$

$$Z_{2t} = \sum_{i=1}^3 iX_{t-i} = (X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3})$$

$$Z_{3t} = \sum_{i=1}^3 i^2X_{t-i} = (X_{t-1} + 4X_{t-2} + 9X_{t-3})$$

جدول ( ٨ - ١٤ ) المخزون ، المبيعات ، وقيم  $Z$  في الصناعة التحويلية الأمريكية ، ١٩٦٠ - ١٩٧٩ (ببلايين الدولارات)

| السنة | $Y$   | $X$   | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$   |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 1960  | 52.9  | 30.3  | —     | —     | —       |
| 1961  | 53.8  | 30.9  | —     | —     | —       |
| 1962  | 54.9  | 30.9  | —     | —     | —       |
| 1963  | 58.2  | 33.4  | 125.5 | 183.6 | 427.2   |
| 1964  | 60.0  | 35.1  | 130.3 | 187.9 | 435.1   |
| 1965  | 63.4  | 37.3  | 136.7 | 194.6 | 446.8   |
| 1966  | 68.2  | 41.0  | 146.8 | 207.7 | 478.3   |
| 1967  | 78.0  | 44.9  | 158.3 | 220.9 | 506.1   |
| 1968  | 84.7  | 46.5  | 169.7 | 238.8 | 544.6   |
| 1969  | 90.6  | 50.3  | 182.7 | 259.3 | 595.1   |
| 1970  | 98.2  | 53.5  | 195.2 | 278.0 | 640.4   |
| 1971  | 101.7 | 52.8  | 203.1 | 293.6 | 673.2   |
| 1972  | 102.7 | 55.9  | 212.5 | 310.7 | 719.6   |
| 1973  | 108.3 | 63.0  | 225.2 | 322.0 | 748.6   |
| 1974  | 124.7 | 73.0  | 244.7 | 333.2 | 761.8   |
| 1975  | 157.9 | 84.8  | 276.7 | 366.7 | 828.1   |
| 1976  | 158.2 | 86.6  | 307.4 | 419.8 | 943.8   |
| 1977  | 170.2 | 98.8  | 343.2 | 475.2 | 1,082.8 |
| 1978  | 180.0 | 110.8 | 381.0 | 526.4 | 1,208.4 |
| 1979  | 198.0 | 124.7 | 420.9 | 568.2 | 1,285.4 |

(ب) بإجراء انحدار  $Y$  على قيم  $Z$  ، نحصل على :

$$\hat{Y}_t = 8.68 + 0.91Z_{1t} + 0.30Z_{2t} - 0.28Z_{3t} \quad R^2 = 0.98$$

(1.94)      (0.27)      (-0.74)

$$\hat{a} = 8.68$$

(ج)

$$\hat{b}_0 = \hat{\epsilon}_0 = 0.91$$

$$\hat{b}_1 = (\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2) = (0.91 + 0.30 - 0.28) = 0.93$$

$$\hat{b}_2 = (\hat{\epsilon}_0 + 2\hat{\epsilon}_1 + 4\hat{\epsilon}_2) = (0.91 + 0.60 - 1.12) = 0.30$$

$$\hat{b}_3 = (\hat{\epsilon}_0 + 3\hat{\epsilon}_1 + 9\hat{\epsilon}_2) = (0.91 + 0.90 - 2.52) = -0.71$$

بحيث أن :

$$\hat{Y}_t = 8.68 + 0.91X_t + 0.93X_{t-1} + 0.30X_{t-2} - 0.71X_{t-3}$$

(1.94)      (2.49)      (0.28)      (-1.05)

حيث تم إيجاد الخطأ المعياري لقيم  $X$  المبينة كالتالي :

$$\sqrt{\text{var } \hat{b}_i} = \sqrt{\text{var}(\hat{\epsilon}_0 + \hat{\epsilon}_1 i + \hat{\epsilon}_2 i^2)} \quad (٨ - ١٧)$$

التنبؤ :

٨ - ١٧ ( أ ) ماذا يقصد بالتنبؤ ؟ التنبؤ المشروط ؟ الإسقاط ؟ (ب) ماهي مصادر الخطأ المحتملة في التنبؤ ؟ ( ج ) ماهو تباين خطأ التنبؤ ؟ اذكر تقديراً غير متحيز لتباين خطأ التنبؤ . علام يعتمد ؟

( د ) كيف يتم إيجاد قيمة  $\hat{Y}_F$  ؟ فترة الثقة 95% للتنبؤ ،  $Y_F$  ؟

( أ ) يشير التنبؤ إلى تقدير قيمة المتغير التابع ، بمعلومية القيمة الفعلية أو المتوقعة للمتغير المستقل ( المتغيرات المستقلة ) وعندما يبنى التنبؤ على قيمة مقدرة أو متوقعة ( بدلا من قيمة فعلية ) للمتغير المستقل ، يكون لدينا تنبؤ مشروط أما الإسقاط فإنه يستخدم بالتبادل مع التنبؤ . في بعض الأحيان ، يستخدم الإسقاط عند تقدير قيمة المتغير التابع داخل العينة ( فترة العينة ) . ويشير التنبؤ في هذه الحالة إلى تقدير قيمة مستقبلية للمتغير التابع .

( ب ) ينشأ خطأ التنبؤ كنتيجة ( ١ ) للطبيعة العشوائية لحد الخطأ ، ( ٢ ) أن المعالم المقدرة غير المتحيزة تساوى المعالم الحقيقية في المتوسط فقط ( ٣ ) أخطاء في توقع المتغيرات المستقلة ( ٤ ) تحديد خاطئ للنموذج .

( ج ) تباين خطأ التنبؤ ،  $\sigma_F^2$  هو :

$$\sigma_F^2 = \sigma_u^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_F - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] \quad (١٤ - ٨)$$

حيث  $n$  عدد المشاهدات و  $\sigma_u^2$  تباين  $u$  . وتقدير غير متحيز لتباين وخطأ التنبؤ ،  $s_F^2$  هو :

$$s_F^2 = s^2 \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_F - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] \quad (١٥ - ٨)$$

حيث  $s^2$  تقدير غير متحيز للتباين  $\sigma_u^2$  وبحسب كالاتي :

$$s^2 = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2} = \frac{\sum e_i^2}{n - 2} \quad (١٦ - ٦)$$

كلما كبرت  $n$  ، صغر  $\sigma_F^2$  ( أو  $s_F^2$  ) ،  $\sigma_u^2$  ( أو  $s^2$  ) ، والفرق بين  $X_F$  و  $\bar{X}$  .

( د ) يتم إيجاد قيمة  $\hat{Y}_F$  بإحلال القيمة الفعلية أو المقدرة للمتغير  $X_F$  في معادلة الانحدار المقدرة . أى

$$\hat{Y}_F = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_F$$

فترة الثقة 95% للتنبؤ ،  $Y_F$  ، هي

$$\hat{Y}_F \pm t_{0.025} s_F$$

حيث تشير  $t$  إلى توزيع  $t$  بدرجات حرية  $n - 2$  .

٨ - ١٨ أوجد فترة الثقة 95% للتنبؤ بقيمة  $Y$  في المسألة ( ٦ - ٣١ ) لكل من ( أ )  $X = 11\%$  ( ب )  $X = 8.5\%$  ( أ ) وجدنا في المسألة ( ٦ - ٣٠ ) أن  $\hat{Y}_i = 12.29 - 0.47 X_i$  ،  $n = 15$  ،  $\bar{X} = 7$  ،  $\sum (X - \bar{X})^2 = 60$  ، عندما  $X = 11\%$   $s^2 = 26.93/13 \approx 2.07$

$$s_F^2 = 2.07 \left[ 1 + \frac{1}{15} + \frac{(11 - 7)^2}{60} \right] \approx 2.77 \quad \text{and} \quad s_F \approx 1.66$$

$$\hat{Y}_F = 12.29 - 0.47(11) = 7.12$$

وتكون فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$

$$(1.66)(2.18) \pm 7.12 \text{ أى بين } 3.50 \text{ و } 10.74 \text{ حيث } t_{0.025} = 2.18 \text{ بدرجات حرية } 13$$

(ب) عندما  $X = 8.5\%$  ،

$$s_F^2 = 2.07 \left[ 1 + \frac{1}{15} + \frac{(8.5 - 7)^2}{60} \right] \approx 2.30 \quad \text{and} \quad s_F \approx 1.52$$

$$\hat{Y}_F = 12.29 - 0.47(8.5) = 8.29$$

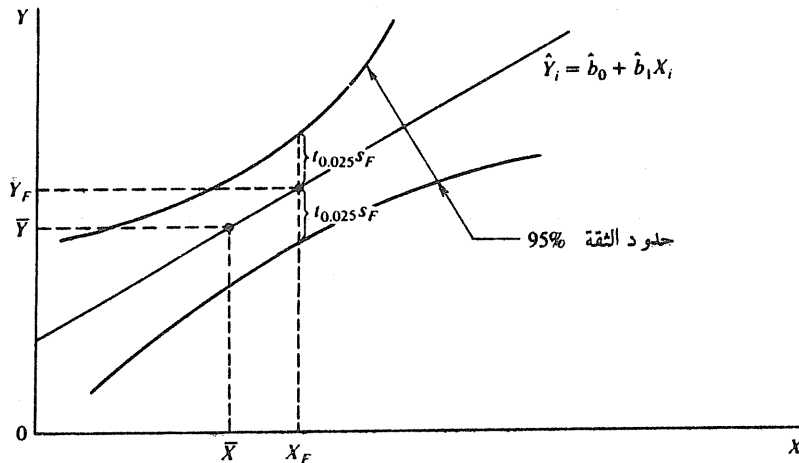
فتكون فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$

$$(1.62)(2.18) \pm 8.29 \text{ أى بين } 4.98 \text{ و } 11.60$$

لاحظ أن مدى فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  أصغر هنا عن مدى فترة الثقة في (أ) لأن الفرق بين قيمة  $X$  المتوقعة وقيمة  $\bar{X}$  أصغر هنا .

٨ - ١٩ ارسم شكلاً يوضح خط تقدير انحدار OLS والمفترض أنه موجب الميل، وكذلك فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  عند قيمة معينة  $X_F$  وحدود فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  .

أنظر شكل (٨ - ٢) . لاحظ أن حدود فترة الثقة 95% أضيق ما تكون عند  $X_F = \bar{X}$  .



شكل (٨ - ٢)

٨ - ٢٠ أوجد فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  عند  $X_{1F} = 35$  و  $X_{2F} = 25$  في ١٩٨١ ،

بمعلومية أن  $\hat{Y}_i = 31.98 + 0.65 X_{1i} + 1.10 X_{2i}$  ،  $\bar{X}_1 = 18$  ،  $\bar{X}_2 = 12$  ،

$$s^2 = \sum e_i^2 / (n - k) = 13.67 / 7 \approx 1.95, \quad s_{b_1}^2 \approx 0.06, \quad s_{b_2}^2 \approx 0.07, \quad (\text{من مثال ٧ - ١})$$

$$s_{b_0}^2 \approx 2.66, \quad \text{cov}(\hat{b}_1, \hat{b}_2) \approx s_{b_1 b_2} \approx 0.07, \quad (\text{من مثال ٧ - ٢})$$

(من حسابات الكمبيوتر) ، وإذا كانت

$$s_F^2 = s^2 + s_{b_0}^2 + s_{b_1}^2 (X_{1F} - \bar{X}_1)^2 + s_{b_2}^2 (X_{2F} - \bar{X}_2)^2 + s_{b_1 b_2} (X_{1F} - \bar{X}_1)(X_{2F} - \bar{X}_2) \quad (\text{٨ - ١٨})$$

$$s_F^2 = 1.95 + 2.66 + 0.06(35 - 18)^2 + 0.07(25 - 12)^2 + (-0.07)(35 - 18)(25 - 12)$$

$$\approx 18.31 \quad \text{and} \quad s_F \approx 4.28$$

$$\hat{Y}_F = 31.98 + 0.65(35) + 1.10(25) = 82.23$$

وتكون فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  في عام ١٩٨١

$$92.37 \pm (2.37) \quad (4.28) \quad \text{أى بين } 72.09 \text{ و } 82.23$$

#### مسائل إضافية

شكل الدالة :

٨ - ٢١ حول الدوال غير الخطية التالية إلى دوال خطية : (أ)  $Y = b_0 e^{b_1 X} e^u$  (ب)  $Y = b_0 + b_1 \ln X + u$

(ج)  $Y = b_0 - b/X + u$  (د)  $Y = b_0 + b_1 X - b_2 X^2 + b_3 X^3 + u$

الإجابة : (أ)  $\ln Y = \ln b_0 + b_1 X + u$  (ب)  $R = \ln X$  حيث  $Y = b_0 + b_1 R + u$  ، (ج)  $Y = b_0 - b_0 Z + u$  ، حيث  $Z = 1/X$  (د)  $Y = b_0 + b_1 X - b_2 W + b_3 T + u$  ، حيث  $T = X^3$  ،  $W = X^2$

٨ - ٢٢ المطلوب توفيق دالة لوغاريتمية مزدوجة لبيانات جدول (٦ - ١٢) .

الإجابة :  $\ln Y = \frac{2.64}{(14.69)} + \frac{0.72 \ln X}{(6.31)} \quad R^2 = 83.26\%$

٨ - ٢٣ المطلوب توفيق دالة نصف لوغاريتمية على الصورة  $Y = b_0 + b_1 \ln X + u$  لبيانات جدول (٦ - ١٢)

الإجابة :  $Y = \frac{2.62}{(0.36)} + \frac{27.12 \ln X}{(5.90)} \quad R^2 = 81.29\%$

٨ - ٢٤ (أ) المطلوب توفيق كثيرة الحدود على الصورة  $Y = b_0 + b_1 X - b_2 X^2 + u$  لبيانات جدول (٦ - ١٢) .

(ب) أيها يعطى نتائج أفضل لبيانات جدول (٦ - ١٢) ، الصورة الخطية للمسائل (٦ - ٣٤) ، (٦ - ٣٧) ، (٦ - ٣٨) ، و (٦ - ٤٠) ، أم الصورة نصف اللوغاريتمية للمسألة (٨ - ٢٣) أم الصورة كثيرة الحدود الواردة في (أ)

الإجابة : (أ)  $Y = -2.25 + \frac{13.67 X}{(1.99)} - \frac{0.77 X^2}{(-1.14)} \quad R^2 = 80.75\% \quad F_{2,7} = 14.68$

(ب) التوفيق نصف اللوغاريتمى أفضل من الخطى وكثيرة الحدود

#### المتفسيرات الصورية :

٨ - ٢٥ بالنسبة لبيانات جدول (٨ - ٢) (أ) قدر معادلة انحدار (٨ - ٦) (ب) هل يختلف معامل الميل جوهرياً في وقت الحرب عن وقت السلم ؟ (ج) ماهو معامل الميل في وقت السلم ؟ في وقت الحرب ؟

الإجابة : (أ)  $\hat{Y} = -2.89 + \frac{0.17 X}{(11.88)} - \frac{0.11 X D}{(-7.56)} \quad R^2 = 0.95$

(ب) نعم (ج)  $\hat{b}_1 = 0.17$  في وقت السلم و  $\hat{b}_1 = 0.06$  في وقت الحرب

٨ - ٢٦ بالنسبة لبيانات جدول (٨ - ٢) (أ) قدر معادلة انحدار (٨ - ٧) (ب) هل يختلف المقطع معنوياً في وقت الحرب عن وقت السلم ؟ (ج) هل يختلف معامل الميل معنوياً في وقت الحرب عن وقت السلم ؟

الإجابة : (أ)  $\hat{Y} = -3.34 + \frac{0.17 X}{(11.58)} + \frac{14.59 D}{(0.67)} - \frac{0.18 X D}{(-1.64)} \quad R^2 = 0.95$

(ب) لا (ج) لا

٨ - ٢٧ يعطى جدول (٨ - ١٥) صافي المبيعات لصناعات السلع المعمرة في الولايات المتحدة ،  $S$  ، من الربع الأول لعام ١٩٧٤ حتى الربع الثالث لعام ١٩٧٩ . (أ) اختبر وجود اتجاه عام خطى في نمو المبيعات ووجود تأثيرات موسمية . (ب) ماقيمة المقطع لكل موسم ؟

جدول (٨ - ١٥) صافي مبيعات صناعات السلع المعمرة ( بـبلايين الدولارات )

| السنة | الربع |        |        |        |
|-------|-------|--------|--------|--------|
|       | الأول | الثاني | الثالث | الرابع |
| 1974  | 120.3 | 136.8  | 134.8  | 137.1  |
| 1975  | 121.3 | 132.4  | 131.0  | 136.3  |
| 1976  | 137.8 | 153.7  | 146.2  | 151.8  |
| 1977  | 151.2 | 169.5  | 163.8  | 172.7  |
| 1978  | 170.1 | 195.0  | 189.7  | 205.9  |
| 1979  | 208.1 | 223.3  | 214.6  |        |

المصدر : التقرير الاقتصادى للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٣٠٠

الإجابة : (أ) بتعيين قيمة للاتجاه العام ،  $T$  ، مساوية 1, 2, 3, ..., 23 على التتابع لكل ربع سنة وبوضع  $D_1 = 1$  للربع الثانى و 0 لغير ذلك ،  $D_2 = 1$  للربع الثالث و 0 لغير ذلك ،  $D_3 = 1$  للربع الرابع و 0 لغير ذلك ، نحصل على

$$\hat{S} = 103.60 + 4.35T + 12.63D_1 + 3.18D_2 + 4.94D_3 \quad R^2 = 0.92$$

(13.69) (2.17) (0.54) (0.81)

(ب) حيث أن  $D_1$  فقط معنوية إحصائياً عند مستوى 5% ،  $b_0 = 103.60$  في ربع السنة الأول والثالث والرابع ، بينما  $b_0 = 116.23$  في ربع السنة الثانى

٨ - ٢٨ يعطى جدول (٨ - ١٦) متوسط الدخل الأسبوعى ،  $Y$  ، بالدولار لعمال الإنتاج في الصناعة ونسبة خريجي المدارس الثانوية للسكان سن 18 سنة فأكثر ،  $X$  لشرق الولايات المتحدة في ١٩٧٦ . (أ) أجرا نحدار  $Y$  على  $X$  وعلى متغيرات صورية تأخذ التأثيرات الموسمية في الحسبان . (ب) ماقيمة المقطع لكل منطقة ؟

جدول (٨ - ١٦) الدخل ونسبة خريجي المدارس الثانوية في الشرق عام ١٩٧٦

| الدخل                             | 166           | 168  | 180  | 190   | 164  | 209   | 208          | 216  | 210  |
|-----------------------------------|---------------|------|------|-------|------|-------|--------------|------|------|
| نسبة الحاصلين على الثانوية العامة | 67.8          | 70.3 | 69.7 | 72.3  | 61.7 | 70.3  | 66.2         | 66.4 | 64.8 |
| الولاية                           | Maine         | N.H. | Vt.  | Mass. | R.I. | Conn. | N.Y.         | N.J. | Pa.  |
| المنطقة                           | نيوانجلند     |      |      |       |      |       | وسط الأطلنطى |      |      |
| الدخل                             | 220           | 219  | 172  | 212   | 149  | 158   | 164          | 176  |      |
| نسبة الحاصلين على الثانوية العامة | 69.5          | 69.3 | 64.2 | 53.3  | 55.3 | 57.1  | 58.7         | 64.8 |      |
| الولاية                           | Del.          | Md.  | Va.  | W.Va. | N.C. | S.C.  | Ga.          | Fla. |      |
| المنطقة                           | جنوب الأطلنطى |      |      |       |      |       |              |      |      |

المصدر : التقرير الاقتصادى للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٤٢٤ ، ١٤٦ .

الإجابة : (أ) بأخذ نيوانجلند كأساس ،  $D_1 = 1$  لولايات « وسط الأطلنطى » ، و 0 لغير ذلك ،  $D_2 = 1$  لولايات « الأطلنطى » و 0 لغير ذلك ، نحصل على

$$\hat{Y} = 10.80 + 2.46 X + 38.92 D_1 + 21.83 D_2 \quad R^2 = 0.45$$

(2.26) (2.66) (1.63)

(ب)  $\hat{b}_0 = 10.80$  لولايات نيوانجلند وجنوب الأطلنطي ، بينما  $\hat{b}_0 = 49.82$  لولايات وسط الأطلنطي

نماذج فترات الإبطاء الموزعة :

٨ - ٢٩ ماهي المشاكل في تقرير : (أ) معادلة (٨ - ٩) ؟ (ب) معادلة (٨ - ١٠) ؟ (ج) معادلة (٨ - ١٣) ؟  
 الإجابة : (أ) تضييع مشاهدة مقابل كل قيمة مبطأة من  $X$  وعلى الأرجح سوف يكون هناك ارتباط بين قيم  $X$  بعضها البعض .  
 (ب) جمود هيكل الإبطاء على صورة تناقص هندسي وخرق اثنين من فروض OLD مما يؤدي إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة .  
 (ج) عدد المعاملات المطلوب تقديرها لا يقل بنفس الدرجة كما في معادلة (٨ - ١٠) وقد لا يكون معروفاً طول وشكل فترة الإبطاء .

٨ - ٣٠ يعطى جدول (٨ - ١٧) إنفاق قطاع الأعمال على المعدات الجديدة للمرافق العامة  $Y$  ، والدخل القومي الإجمالي  $X$  ، كليهما بـبلايين الدولارات ، للولايات المتحدة من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ . (أ) قدر نموذج كويك (أى معادلة (٨ - ١٠) ) .  
 (ب) ماقيمة كل من  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{d}$  ؟

$$\hat{Y}_t = -1.92 + 0.01 X_t + 0.40 Y_{t-1} \quad R^2 = 0.99$$

(4.55) (2.63)

(ب)  $\hat{\lambda} = 0.40$  و  $\hat{d} = -320$

جدول (٨ - ١٧) إنفاق قطاع الأعمال على المعدات الجديدة للمرافق العامة والدخل القومي الإجمالي : الولايات المتحدة ١٩٦٠ - ١٩٧٩ (بلايين الدولارات)

| السنة | 1960  | 1961   | 1962   | 1963   | 1964   | 1965   | 1966   | 1967   | 1968   | 1969   |
|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $Y$   | 5.2   | 5.0    | 4.9    | 5.0    | 5.5    | 6.3    | 7.4    | 8.7    | 10.2   | 11.6   |
| $X$   | 506.0 | 523.3  | 563.8  | 594.7  | 635.7  | 688.1  | 753.0  | 796.3  | 868.5  | 935.5  |
| السنة | 1970  | 1971   | 1972   | 1973   | 1974   | 1975   | 1976   | 1977   | 1978   | 1979   |
| $Y$   | 13.1  | 15.3   | 17.0   | 18.7   | 20.6   | 20.1   | 22.3   | 25.8   | 29.5   | 33.2   |
| $X$   | 982.4 | 1063.4 | 1171.1 | 1306.6 | 1412.9 | 1528.8 | 1702.2 | 1899.5 | 2127.6 | 2368.5 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة واشتطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٠٣ ، ٢٥٥

٨ - ٣١ يعطى جدول (٨ - ١٨) إجمال الإنفاق الاستهلاكي الشخصي  $Y$  ، وإجمال الدخل المتاح الشخصي  $X$  ، كليهما بـبلايين الدولارات ، للولايات المتحدة من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ . (أ) قدر نموذج ألمان للإبطاء بافترض إبطاء لثلاث فترات على شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية (ب) هل يناسب هذا النموذج البيانات جيداً ؟



جدول ( ٨ - ١٨ ) الاستهلاك والدخل المتاح ( ببلاتين الدولارات ) : الولايات المتحدة ١٩٦٠ - ١٩٧٩

| السنة | 1960  | 1961  | 1962  | 1963  | 1964  | 1965   | 1966   | 1967   | 1968   | 1969   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Y     | 324.9 | 335.9 | 355.2 | 374.6 | 400.4 | 430.2  | 464.8  | 490.4  | 535.9  | 579.7  |
| X     | 349.4 | 362.9 | 383.9 | 402.8 | 437.0 | 472.2  | 510.4  | 544.5  | 588.1  | 630.4  |
| السنة | 1970  | 1971  | 1972  | 1973  | 1974  | 1975   | 1976   | 1977   | 1978   | 1979   |
| Y     | 618.8 | 668.2 | 733.0 | 809.9 | 889.6 | 979.1  | 1089.9 | 1210.0 | 1350.8 | 1509.8 |
| X     | 685.9 | 742.8 | 801.3 | 901.7 | 984.6 | 1086.7 | 1184.5 | 1305.1 | 1458.4 | 1623.2 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب الحكومة الأمريكية الطباعة ، واشنطن ١٩٨٠ صفحة ٢٢٩ .

$$\hat{Y} = -19.08 + 1.94X_t + 0.77X_{t-1} + 0.14X_{t-2} + 0.04X_{t-3} \quad R^2 = 0.99 \quad (\text{أ}) \text{ الإجابة}$$

(0.98)      (2.62)      (0.36)      (0.13)

(ب) حيث أن معامل  $X_{t-1}$  فقط ( أى  $b_1$  ) معنوى إحصائياً عند مستوى 5% وتتجاوز قيمته قيمة  $b_0$  ، فإن هذا النموذج لا يناسب البيانات جيداً . قد يكون نموذج كويك أو صورة أخرى من نموذج ألون أكثر ملاءمة .

التنبؤ :

٨ - ٣٢ عندما  $X = 4$  في المسألة ( ٦ - ٤٤ ) ، أوجد ( أ )  $s_F^2$  ، (ب)  $\hat{Y}_F$  ، و ( ج ) فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  .

$$\text{الإجابة : ( أ ) } s_F^2 \approx 1.19 \quad (\text{ب}) \hat{Y}_F = 4.78 \quad (\text{ج}) 4.78 \pm 2.43$$

٨ - ٣٣ في المسألة ( ٧ - ٢٠ ) وعند  $X_{1F} = 2$  و  $X_{2F} = 1,250$  لعام ١٩٨٦ ، ( أ ) أوجد  $s_F^2$  (ب) أوجد فترة الثقة 95% للتنبؤ  $Y_F$  ، معلومية أن

for  $Y_F$ , given that  $\hat{Y} = 82.27 - 5.11X_1 + 0.02X_2$ ,  $\bar{X}_1 = 6$ ,  $\bar{X}_2 = 1,100$ ,  $s^2 = \sum e^2 / n - k = 226.32 / 12 \approx 18.86$ ,  $s_{b_1}^2 \approx 1.41$ ,  $s_{b_2}^2 \approx 0.01$ ,  $s_{b_0}^2 \approx 238.19$ , and  $s_{b_1b_2} \approx 0.01$ .

$$\text{الإجابة : ( أ ) } s_F^2 \approx 468.61 \quad (\text{ب}) 97.05 \pm (2.18)(21.65) \text{ أى بين } 48.85 \text{ و } 144.25$$

## الفصل التاسع

### مشاكل في تحليل الانحدار

#### ٩-١ تعدد العلاقات الخطية

يشير تعدد العلاقات الخطية إلى الحالة التي يكون فيها بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المفسرة في نموذج الانحدار ارتباط قوي ، مما يجعل من الصعب أو المستحيل عزل تأثيراتها الفردية على المتغير التابع . في وجود هذا التعدد ، فإن معاملات OLS المقدرة قد تكون غير معنوية إحصائياً ( وقد تأخذ الإشارة الخطأ ) بالرغم من أن  $R^2$  قد تكون « عالية » . وأحياناً يمكن التغلب على تعدد العلاقات الخطية أو اختزاله بجمع بيانات أكثر ، وباستخدام معلومات مسبقة ، بتحويل العلاقة الدالية ( أنظر مسألة ٩-٣ ) ، أو بالتخلص من واحد من المتغيرات ذات الارتباط العالي .

مثال ١ : يعطى جدول ٩-١ مستوى الواردات ،  $Y$  ، والناتج القوي الإجمالي  $X_1$  ،  $GNP$  كليهما ببلاتين الدولارات ، والرقم القياسي العام لأسعار المستهلكين  $X_2$  ، للولايات المتحدة من ١٩٦٤ إلى ١٩٧٩ . ومن المتوقع أن يرتفع مستوى الواردات مع زيادة  $GNP$  وارتفاع مستوى الأسعار المحلية . باجراء انحدار  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  ، نحصل على

$$\hat{Y} = -101.49 + 0.08X_1 + 0.76X_2$$

(1.40)      (1.00)

$$R^2 = 0.97$$

$$\bar{R}^2 = 0.985$$

$$r_{12} = 0.997$$

وحيث أن كلا من  $b_1$  ،  $b_2$  ليست معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% بينما  $R^2 \approx 0.99$  ، فإن هناك إشارة واضحة لوجود ازدواج خطي بين  $X_1$  و  $X_2$  . ويؤكد هذا معامل الارتباط البسيط المرتفع جداً بين  $X_1$  و  $X_2$  ( $r_{12} \approx 1.0$ ) بأعادة تقدير الانحدار بدون  $X_1$  أو  $X_2$  نحصل على

$$\hat{Y} = -69.03 + 0.13X_1 \quad R^2 = 0.986$$

(-12.00)      (31.87)

$$\hat{Y} = -146.52 + 1.82X_2 \quad R^2 = 0.985$$

(-17.58)      (30.79)

في الانحدار البسيط ، كل من  $C_1$  ،  $X_2$  معنوي إحصائياً عند مستوى أفضل من 1% . ولكن استبعاد أي منهما من علاقة الانحدار يؤدي إلى تقديرات OLS متحيزة ، لأن النظرية الاقتصادية تشير إلى وجوب دخول كل من  $GNP$  ومستوى الأسعار في دالة الواردات .

جدول ٩-١ الواردات و  $GNP$  ( كلاهما بالبلاتين دولارات ) والرقم القياسي لأسعار المستهلكين : الولايات المتحدة ١٩٦٤-١٩٧٩

| السنة | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    | 1970    | 1971    |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $Y$   | 28.4    | 32.0    | 37.7    | 40.6    | 47.7    | 52.9    | 58.5    | 64.0    |
| $X_1$ | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   | 982.4   | 1,063.4 |
| $X_2$ | 92.9    | 94.5    | 97.2    | 100.0   | 104.2   | 109.8   | 116.3   | 121.3   |
| السنة | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| $Y$   | 75.9    | 94.4    | 131.9   | 126.9   | 155.4   | 185.8   | 217.5   | 260.9   |
| $X_1$ | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |
| $X_2$ | 125.3   | 133.1   | 147.7   | 161.2   | 170.5   | 181.5   | 195.4   | 217.4   |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس : مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة واشتغلت ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٠٣ ، ٢٥٩ .

## ٢-٩ اختلاف التباين

إذا لم يتوفر شرط OLS أن تباين حد الخطأ ثابت بالنسبة لكل قيم المتغيرات المستقلة ، فإننا نواجه مشكلة اختلاف التباين .  
ويؤدى هذا إلى تقديرات متحيزة وغير كفؤ ( أى أكبر من أصغر تباين ) للأخطاء المعيارية ( وبالتالي اختبارات إحصائية وفترات  
ثقة خاطئة ) . وأحد اختبارات الكشف عن اختلاف التباين يتضمن ترتيب البيانات من القيم الأصغر إلى القيم الأكبر للمتغير المستقل  $X$   
وإجراء انحدارين ، واحد للقيم الصغيرة للمتغير  $X$  والآخر للقيم الكبيرة ، مع حذف ، خمس المشاهدات الوسطية مثلاً . ثم نختبر  
ما إذا كانت نسبة مجموع مربعات الخطأ (ESS) للانحدار الثانى إلى الانحدار الأول تختلف معنوياً عن الواحد ، باستخدام جداول  $F$   
بدرجات حرية  $(n-d-2k)/2$  ، حيث  $n$  إجمالى عدد المشاهدات ،  $d$  عدد المشاهدات المحذوفة ،  $k$  عدد المعالم المقدرة .

أما إذا كان تباين الخطأ يتناسب مع  $X^2$  ( وهذا غالباً ما يحدث ) ، فإنه يمكن التغلب على اختلاف التباين بقسمة كل حدود النموذج  
على  $X$  ثم إعادة تقدير الانحدار باستخدام المتغيرات المحولة .

مثال ٢ : يعطى جدول ٢-٩ متوسط الأجور  $Y$  ، وعدد العاملين  $X$  ، فى 30 شركة فى إحدى الصناعات . بإجراء انحدار  
 $Y$  على  $X$  لعينة كلها ، نحصل على

$$\hat{Y} = 7.5 + 0.009X \quad R^2 = 0.90$$

(40.27) (16.10)

نتائج انحدار  $Y$  على  $X$  للإثنى عشرة مشاهدة الأولى والإثنى عشرة مشاهدة الأخيرة هى ، على الترتيب

$$\hat{Y} = 8.1 + 0.006X \quad R^2 = 0.66$$

(39.4) (4.36)  $ESS_1 = 0.507$

$$\hat{Y} = 6.1 + 0.013X \quad R^2 = 0.60$$

(4.16) (3.89)  $ESS_2 = 3.095$

وحيث أن  $ESS_2/ESS_1 = 3.095/0.507 = 6.10$  تتجاوز  $F_{10,10} = 2.97$  عند مستوى معنوية 5% ( أنظر ملحق ٧ ) ،  
نقبل فرض اختلاف التباين . وبإعادة تقدير النموذج المحول لتصحيح اختلاف التباين ، نحصل على

$$\hat{Y}/X = 0.008 + 7.8(1/X) \quad R^2 = 0.99$$

(14.43) (76.58)

لاحظ أن معامل الميل يمثل الآن المقطع ( أى 0.008 ) ، وأنه أصغر الآن من ذى قبل ( أى 0.009 ) .

جدول ٢-٩ متوسط الأجور وعدد العاملين

| متوسط الأجور |       |       |       |       |       | عدد العاملين |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| 8.40         | 8.40  | 8.60  | 8.70  | 8.90  | 9.00  | 100          |
| 8.90         | 9.10  | 9.30  | 9.30  | 9.40  | 9.60  | 200          |
| 9.50         | 9.80  | 9.90  | 10.30 | 10.30 | 10.50 | 300          |
| 10.30        | 10.60 | 10.90 | 11.30 | 11.50 | 11.70 | 400          |
| 11.60        | 11.80 | 12.10 | 12.50 | 12.70 | 13.10 | 500          |

## ٣-٩ الارتباط الذاتى

عندما يكون حد الخطأ فى فترة زمنية مرتبطاً طردياً مع حد الخطأ فى الفترة الزمنية السابقة عليها ، فإننا نواجه مشكلة الارتباط الذاتى  
( موجب ومن الدرجة الأولى ) . وهذا شائع فى تحليل السلاسل الزمنية ويؤدى إلى أخطاء معيارية متحيزة إلى أسفل ( وبالتالي إلى اختبارات  
إحصائية وفترات ثقة خاطئة ) .

ويختبر وجود ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى باستخدام جدول إحصائية ديرين - واتسون ( ملحق ٨ ) عند مستويات معنوية 5%  
أو 1% لعدد  $n$  مشاهدات و  $k'$  متغيرات مفسرة . فإذا كانت القيمة المحسوبة باستخدام معادلة ( ٩ - ١ ) أصغر من القيمة الجدولية  
 $d_L$  ( الحد الأدنى ) ، نقبل فرض وجود ارتباط ذاتى موجب من الدرجة الأولى .

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (١ - ٩)$$

ويرفض الفرض في حالة  $d < d_U$  (الحد الأعلى) ، ويكون الاختبار غير حاسم في حالة  $d_L < d < d_U$  (وبالنسبة للارتباط الذاتي السالب ، أنظر المسألة ٩ - ٨) .

وكطريقة لتصحيح النموذج لوجود ارتباط ذاتي نقدر أولاً  $\rho$  (الحرف اليوناني رو) من المعادلة (٩ - ٢) :

$$Y_t = b_0(1 - \rho) + \rho Y_{t-1} + b_1 X_t - b_1 \rho X_{t-1} + v_t \quad (٩ - ٢)$$

ثم يعاد تقدير الانحدار على المتغيرات المحولة :

$$(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) = b_0(1 - \hat{\rho}) + b_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho} u_{t-1}) \quad (٩ - ٣)$$

ولتجنب ضياع المشاهدة الأولى في عملية إيجاد الفروق ، نستخدم  $X_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$  و  $Y_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$  للمشاهدة الأولى المحولة لكل من  $Y$  و  $X$  على الترتيب . وعندما تكون  $|\hat{\rho}| \approx 1$  يمكن تصحيح الارتباط الذاتي بإعادة إجراء الانحدار على شكل فروق وحذف حد المقطع (أنظر المسألة ٩ - ١٢) .

مثال ٣ - يعطى جدول ٩ - ٣ مستوى المخزون ،  $Y$  والمبيعات  $X$  ، كليهما بالبلليون دولار ، في الصناعة التحويلية الأمريكية من ١٩٥٩ إلى ١٩٧٨ ، بإجراء انحدار  $Y$  على  $X$  ، نحصل على

$$\hat{Y}_t = 6.61 + 1.63 X_t \quad R^2 = 0.98$$

(1.98) (32.00)  $d = 0.70$

وحيث أن  $d_L = 1.20 < d = 0.70$  عند مستوى معنوية 5% مع  $n = 20$  و  $k' = 1$  (من ملحق ٨) ، فهناك دليل على وجود ارتباط ذاتي . ويعطى معامل  $\rho$  في الانحدار التالي تقديراً للمعامل  $Y_{t-1}$  :

$$\hat{Y}_t = 4.08 + 0.74 Y_{t-1} + 1.49 X_t - 1.11 X_{t-1} \quad R^2 = 0.99$$

(2.85) (3.10) (-1.30)

باستخدام  $\hat{\rho} = 0.74$  لتحويل المتغيرات الأصلية ، كما في معادلة (٩ - ٣) ، وباستخدام  $52.9 \sqrt{1 - 0.74^2} = 35.58$  و  $30.3 \sqrt{1 - 0.74^2} = 20.38$  للمشاهدة الأولى المحولة لكل من  $Y$  و  $X$  على الترتيب ، نعيد إجراء الانحدار على المتغيرات المحولة (المميزة بالنجمة) ونحصل على

$$Y_t^* = 4.14 + 1.49 X_t^* \quad R^2 = 0.92$$

(1.77) (13.99)  $d = 1.46$

وحيث أنه الآن  $d_U = 1.41 < d = 1.46$  (من ملحق ٨) ، فليس هناك دليل على وجود الارتباط الذاتي . لاحظ أن قيمة  $R^2$  للمتغير  $X_t^*$  أقل منها بالنسبة للمتغير  $X_t$  (ولكنها لازالت عالية المعنوية) وأن  $R^2$  أيضاً أقل .

جدول ٩ - ٣ المخزون والمبيعات (بالبلليون دولار) في الصناعة التحويلية الأمريكية ، ١٩٥٩ - ١٩٧٨

| السنة | 1959 | 1960  | 1961  | 1962  | 1963  | 1964  | 1965  | 1966  | 1967  | 1968  |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Y$   | 52.9 | 53.8  | 54.9  | 58.2  | 60.0  | 63.4  | 68.2  | 78.0  | 84.7  | 90.6  |
| $X$   | 30.3 | 30.9  | 30.9  | 33.4  | 35.1  | 37.3  | 41.0  | 44.9  | 46.5  | 50.3  |
| السنة | 1969 | 1970  | 1971  | 1972  | 1973  | 1974  | 1975  | 1976  | 1977  | 1978  |
| $Y$   | 98.2 | 101.7 | 102.7 | 108.3 | 124.7 | 157.9 | 158.2 | 170.2 | 180.0 | 198.0 |
| $X$   | 53.5 | 52.8  | 55.9  | 63.0  | 73.0  | 84.8  | 86.6  | 98.8  | 110.8 | 124.7 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس . مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ صفحة ٢٥٦ .

## ٩-٤ أخطاء في المتغيرات

تشير الأخطاء في المتغيرات إلى الحالة التي تحتوي فيها متغيرات الانحدار على أخطاء في القياس . إن أخطاء القياس في المتغير التابع تدخل في حد التشويش ولا تخلق أى مشكلة . ولكن الأخطاء في المتغيرات المفسرة تؤدي إلى تقديرات للمعالم متحيزة وغير متنسقة .

وإحدى الطرق للحصول على تقديرات معالم OLS متنسقة هي أن نستخدم ، بدلا من المتغير المفسر المتضمن أخطاء في القياس ، متغيراً آخر ( يسمى متغيراً وسيطاً ) يكون ذا ارتباط عال مع المتغير المفسر الأصلي ولكنه مستقل عن حد الخطأ . وغالباً ما يكون القيام بهذا صعباً ويتضمن قدرًا من التحكم . وأبسط متغير وسيط هو استخدام المتغير المفسر المبطل (أنظر مثال ٤ ) . وطريقة أخرى تستخدم عندما تتضمن  $X$  وحدها أخطاء في القياس وتتلخص في إيجاد انحدار  $X$  على  $Y$  ( المربعات الصغرى المعكوسة ، أنظر المسألة ٩ - ١٥ ) .

مثال ٤ : يعطى جدول ٩ - ٤ المخزون  $Y$  ، والمبيعات الفعلية  $X$  ، وقيم افتراضية للمتغير  $X'$  تشمل أخطاء في القياس  $X'$  ، كلها بالبلليون دولار ، لتجارة التجزئة الأمريكية من ١٩٦٣ إلى ١٩٧٨ . ويفترض أن  $X$  و  $Y$  خاليتان من الخطأ بإجراء انحدار  $Y_t$  على  $X_t$  نحصل على

$$\hat{Y}_t = -1.92 + 1.53X_t \quad R^2 = 0.996 \\ (-1.79) \quad (56.34) \quad d = 1.86$$

بإجراء انحدار  $Y_t$  على  $X'_t$  ( في حالة عدم توفر  $X_t$  ) ، نحصل على

$$\hat{Y}_t = 0.74 + 1.32X'_t \quad R^2 = 0.996 \\ (0.73) \quad (57.01) \quad d = 1.88$$

لاحظ أن  $b_0 > b_0$  ، بينما  $b_1 < b_1$  . باستخدام قيم  $X'_{t-1}$  كمتغير وسيط بدلا من  $X'_t$  (إذا كان هناك شك بأن  $X'_t$  مرتبطة مع  $u_t$ ) ، نحصل على

$$\hat{Y}_t = -1.56 + 1.50X'_{t-1} \quad R^2 = 0.993 \\ (-1.13) \quad (44.47) \quad d = 2.19 \\ r_{X'_t, X'_{t-1}} = 0.998$$

إن تقديرات المعالم الجديدة أقرب الآن إلى المعالم الحقيقية ومتنسقة .

جدول ٩ - ٤ المخزون والمبيعات ( بالبلليون دولار ) في تجارة التجزئة الأمريكية : ١٩٦٣ - ١٩٧٨

| السنة | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970  |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $Y$   | 29.4 | 31.1 | 34.4 | 38.1 | 35.3 | 38.9 | 42.5 | 43.9  |
| $X$   | 20.6 | 21.8 | 23.7 | 25.3 | 24.4 | 27.0 | 28.9 | 30.7  |
| $X'$  | 21.9 | 23.3 | 25.5 | 27.3 | 26.3 | 29.3 | 31.5 | 33.6  |
| السنة | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978  |
| $Y$   | 50.1 | 55.1 | 63.2 | 71.1 | 71.1 | 79.3 | 90.1 | 100.8 |
| $X$   | 33.9 | 37.4 | 41.9 | 44.7 | 48.7 | 54.6 | 60.3 | 66.6  |
| $X'$  | 37.3 | 41.4 | 46.6 | 49.9 | 54.5 | 61.3 | 67.9 | 75.3  |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس . مكتب الحكومة الأمريكية للطباعة واشتطن ١٩٨٠ ، صفحة ٢٥٦ .

### مسائل محلولة

تعدد العلاقات الخطية :

- ٩ - ١ (أ) ماذا يقصد بتعدد العلاقات الخطية التام ؟ ما هو تأثيره ؟ (ب) ماذا يقصد بتعدد مرتفع ولكن ليس تاماً ؟ ما هي المشاكل التي يمكن أن تنشأ عنه ؟ (ج) كيف يمكن اكتشاف تعدد العلاقات الخطية ؟ (د) ماذا يمكن عمله للتغلب على أو اختزال المشاكل الناجمة عن تعدد العلاقات الخطية ؟

(أ) يكون بين متغيرين مستقلين أو أكثر تعدد خطي تام إذا كان من الممكن التعبير عن واحد أو أكثر من المتغيرات كترتيب خطي للمتغير (المتغيرات) الآخر. فمثلاً يكون هناك تعدد خطي تام بين  $X_1$  و  $X_2$  إذا كانت  $X_1 = 2X_2$  أو  $X_1 = 5 - \frac{1}{2}X_2$  إذا كان هناك تعدد خطي تام بين متغيرين مستقلين أو أكثر ، سيكون من غير الممكن تقدير معالم OLS لأن مجموعة المعادلات الطبيعية سوف يكون بينها معادلة أو أكثر غير مستقلة .

(ب) يشير تعدد العلاقات الخطية المرتفع ، ولكن غير التام ، إلى الحالة التي يكون فيها بين متغيرين مستقلين أو أكثر في النموذج الخطي ارتباط مرتفع . ويجعل هذا من الصعب أو من غير الممكن عزل تأثير كل متغير مفسر ، من بين المتغيرات ذات الارتباط المرتفع فيما بينها ، على المتغير التابع . ولكن ، تظل تقديرات OLS غير متحيزة (إذا كان النموذج قد حدد بدقة) . بالإضافة إلى أنه إذا كان الهدف الرئيسي هو التنبؤ ، لا يمثل الازدواج الخطي مشكلة إذا استمر أيضاً نمط التعدد خلال فترة التنبؤ .

(ج) الحالة الكلاسيكية للتعدد الخطي تحدث عندما لا يكون أي من المتغيرات المفسرة في انحدار OLS معنوياً إحصائياً (وبعضها قد يأخذ الإشارة الخطأ) ، بالرغم من أن  $R^2$  قد تكون عالية (مثلاً ، بين 0.7 و 1.0) . في الحالات الأقل وضوحاً ، قد يكون اكتشاف التعدد الخطي أكثر صعوبة . أحياناً يستخدم المعامل المرتفع للارتباط البسيط أو للارتباط الجزئي بين المتغيرات المفسرة كقياس للتعدد الخطي . ولكن قد يوجد تعدد خطي خطير ، حتى لو كان الارتباط البسيط أو الجزئي منخفضاً نسبياً (أقل من 0.5 مثلاً) .

(د) يمكن أحياناً تصحيح التعدد الخطي الكبير من خلال (١) زيادة حجم بيانات العينة ، (٢) استخدام المعلومات المسبقة (مثلاً ، قد نعرف من دراسة سابقة أن  $b_2 = 0.25b_1$ ) (٣) تحويل العلاقة الدالية ، أو (٤) حذف أحد المتغيرات ذات الارتباط المرتفع مع غيرها من المتغيرات (ولكن ، قد يؤدي هذا إلى تحيز أو خطأ في تحديد النموذج إذا كانت النظرية تخبرنا أن المتغير المحذوف يجب أن يكون في النموذج) .

٩ - ٢ يعطى جدول ٩ - ٥ الإنتاج بالأطنان  $Q$  ، مدخلات العمل عامل - ساعة  $L$  ، ومدخلات رأس المال ماكينة - ساعة  $K$  ، لعدد 15 شركة في إحدى الصناعات والمطلوب (أ) توفيق دالة إنتاج كوب - دوجلاس في صورة  $Q = b_0 L^{b_1} K^{b_2} e^u$  للبيانات وإيجاد  $\bar{R}^2$  ومعامل الارتباط البسيط بين  $\ln L$  و  $\ln K$  (ب) إيجاد انحدار  $\ln Q$  على  $\ln L$  فقط . (ج) إيجاد انحدار  $\ln Q$  على  $\ln K$  فقط . (د) ما هي النتائج التي يمكن التوصل إليها بصدد تعدد العلاقات الخطية .

جدول ٩ - ٥ الإنتاج ، مدخلات العمل ورأس المال في 15 شركة في صناعة ما

| الشركة | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $Q$    | 2350 | 2470 | 2110 | 2560 | 2650 | 2240 | 2430 | 2530 | 2550 | 2450 | 2290 | 2160 | 2400 | 2490 | 2590 |
| $L$    | 2334 | 2425 | 2230 | 2463 | 2565 | 2278 | 2380 | 2437 | 2446 | 2403 | 2301 | 2253 | 2367 | 2430 | 2470 |
| $K$    | 1570 | 1850 | 1150 | 1940 | 2450 | 1340 | 1700 | 1860 | 1880 | 1790 | 1480 | 1240 | 1660 | 1850 | 2000 |

(أ) بتحويل البيانات إلى صورة اللوغاريتمات الطبيعية كما هو موضح في جدول ٩ - ٦ ثم بإيجاد انحدار  $\ln Q$  على  $\ln K$  و  $\ln L$  ، نحصل على

$$\ln Q = 0.50 + \frac{0.76 \ln L}{(1.07)} + \frac{0.19 \ln K}{(1.36)}$$

$$R^2 = 0.969$$

$$\bar{R}^2 = 0.964$$

$$r_{\ln L \ln K} = 0.992$$

$$\ln Q = -5.50 + \frac{1.71 \ln L}{(18.69)} \quad R^2 = 0.964 \quad (\text{ب})$$

$$\ln Q = 5.30 + \frac{0.34 \ln K}{(19.19)} \quad R^2 = 0.966 \quad (\text{ج})$$

(د) حيث أن كلا من  $\hat{b}_1$  ،  $\hat{b}_2$  في (أ) غير معنوية إحصائياً عند مستوى معنوية 5% (بمعنى أن لهما أخطاء معيارية كبيرة بدون داع) ، بينما  $R^2 = 0.97$  ، فإن هناك إشارة واضحة لوجود تعدد علاقات خطية . أى أن ، الشركات الكبيرة تميل إلى استخدام عمل أكثر ورأس مال أكبر من الشركات الصغيرة . ويؤكد هذا معامل الارتباط البسيط المرتفع ، 0.99 بين  $\ln K$  و  $\ln L$  . وقد أعيد تقدير معادلات الانحدار البسيط في (ب) و (ج) باستخدام إما  $\ln K$  أو  $\ln L$  كمتغير مفسر وحيد . وفي حالات الانحدار البسيط فإن كلا من  $\ln K$  و  $\ln L$  معنوية إحصائياً عند مستوى أفضل من 1% مع  $R^2$  تتجاوز 0.96 . ولكن حذف  $\ln K$  أو  $\ln L$  من الانحدار المتعدد يؤدي إلى تقدير متحيز . لميل OLS للمتغير الباقى في العلاقة لأن النظرية الاقتصادية تفترض مقدماً أن كلا من العمل ورأس المال يجب أن يكون في دالة الإنتاج .

جدول ٩ - ٦ الإنتاج ، مدخلات العمل ورأس المال في صورتها الأصلية وفي الصورة اللوغاريتمية

| الشركة | $Q$  | $L$  | $K$  | $\ln Q$ | $\ln L$ | $\ln K$ |
|--------|------|------|------|---------|---------|---------|
| 1      | 2350 | 2334 | 1570 | 7.76217 | 7.75534 | 7.35883 |
| 2      | 2470 | 2425 | 1850 | 7.81197 | 7.79359 | 7.52294 |
| 3      | 2110 | 2230 | 1150 | 7.65444 | 7.70976 | 7.04752 |
| 4      | 2560 | 2463 | 1940 | 7.84776 | 7.80914 | 7.57044 |
| 5      | 2650 | 2565 | 2450 | 7.88231 | 7.84971 | 7.80384 |
| 6      | 2240 | 2278 | 1340 | 7.71423 | 7.73105 | 7.20042 |
| 7      | 2430 | 2380 | 1700 | 7.79565 | 7.77486 | 7.43838 |
| 8      | 2530 | 2437 | 1860 | 7.83597 | 7.79852 | 7.52833 |
| 9      | 2550 | 2446 | 1880 | 7.84385 | 7.80221 | 7.53903 |
| 10     | 2450 | 2403 | 1790 | 7.80384 | 7.78447 | 7.48997 |
| 11     | 2290 | 2301 | 1480 | 7.73631 | 7.74110 | 7.29980 |
| 12     | 2160 | 2253 | 1240 | 7.67786 | 7.72002 | 7.12287 |
| 13     | 2400 | 2367 | 1660 | 7.78322 | 7.76938 | 7.41457 |
| 14     | 2490 | 2430 | 1850 | 7.82004 | 7.79565 | 7.52294 |
| 15     | 2590 | 2470 | 2000 | 7.85941 | 7.81197 | 7.60090 |

٩ - ٣ كيف يمكن التغلب على صعوبة التمدد الخطي في المسألة ٩ - ٢ إذا كان من المعلوم أن هذه الصناعة تخضع لثبات الغلة (أى أن  $b_1 + b_2 = 1$ ) ؟

عند ثبات الغلة ، يمكن إعادة كتابة دالة إنتاج كوب - دوجلاس كما يلي :

$$Q = b_0 + L^{b_1} K^{1-b_1} e^u$$

وبالتعبير عن دالة الإنتاج في صورة لوغاريتمية مزدوجة وإعادة ترتيب الحدود ، نحصل على :

$$\ln Q = \ln b_0 + b_1 \ln L + (1 - b_1) \ln K + u$$

$$\ln Q - \ln K = \ln b_0 + b_1 (\ln L - \ln K) + u$$

بوضع  $\ln Q^* = \ln Q - \ln K$  و  $\ln L^* = \ln L - \ln K$  ثم بإيجاد انحدار  $\ln Q^*$  على  $\ln L^*$  نحصل على

$$\ln Q^* = \frac{0.07}{(9.26)} + \frac{0.83}{(39.81)} \ln L^* \quad R^2 = 0.992$$

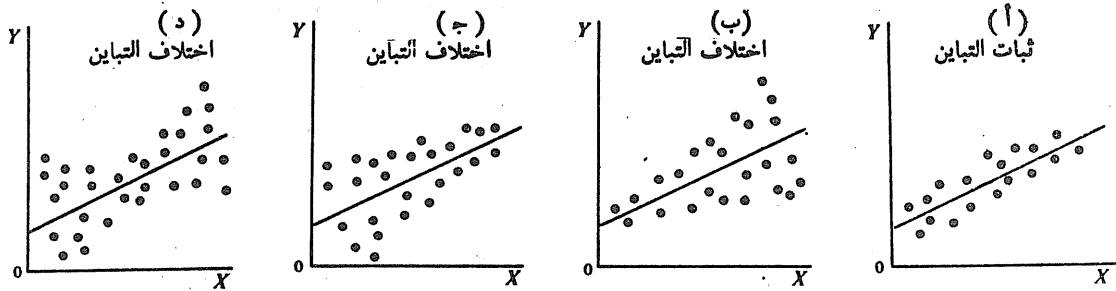
$$\hat{b}_2 = 1 - \hat{b}_1 = 1 - 0.83 = 0.17. \text{ إذن}$$

اختلاف التباين :

٩ - ٤ (أ) ماذا يقصد باختلاف التباين ؟ (ب) ارسم شكلاً يوضح عناصر تشويش لها تباين ثابت وكذلك الأشكال المختلفة لاختلاف التباين . (ج) لماذا يمثل اختلاف التباين مشكلة ؟

(أ) يشير اختلاف التباين إلى الحالة التي يكون فيها تباين حد الخطأ غير ثابت عند كل قيم المتغير المستقل . أي أن ،  $E(u_i | X_i) \neq 0$  وعليه فإن  $E(u_i)^2 \neq \sigma_u^2$  . ويخرق هذا الفرض الثالث لنموذج الانحدار OLS (أنظر المسألة ٩-٤) ويحدث هذا أساساً في البيانات المقطعية . فمثلاً ، ثبات الخطأ الخاص بالإنفاق لمئات الدخل المنخفض عادة يكون أصغر عنه بالنسبة لمئات الدخل المرتفع لأن معظم إنفاق الأسر ذات الدخل المنخفض يكون على الضروريات ، مما يترك مجالات ضيقة لحرية الاختيار .

(ب) يوضح شكل ٩-١ (أ) حالة ثبات التباين لعناصر التشويش . بينما توضح أشكال ٩-١ ب ، ج ، د ، اختلاف التباين لعناصر التشويش . في شكل ٩-١ ب يزداد  $\sigma_u^2$  مع  $X_i$  . في شكل ٩-١ ج يقل  $\sigma_u^2$  مع  $X_i$  . في شكل ٩-١ د يقل  $\sigma_u^2$  ثم يزداد مع تزايد  $X_i$  . في الاقتصاد ، اختلاف التباين كما في ٩-١ ب هو الأكثر شيوعاً ، ومن ثم فإن المناقشة التالية تتعلق بهذه الحالة .



شكل ٩ - ١

(ج) في وجود حالة اختلاف التباين ، فإن تقديرات معالم OLS تظل غير متحيزة ومتسقة ولكنها تكون غير كفؤة (بمعنى أن لها تبايناً أكبر من أقل تباين) . بالإضافة فإن تقديرات التباين تكون متحيزة ، مما يؤدي إلى اختبارات إحصائية غير صحيحة للمعالم وفترات ثقة متحيزة .

٩ - ٥ كيف يتم اختبار وجود حالة اختلاف التباين ؟ (ب) كيف يمكن تصحيح اختلاف التباين ؟

(أ) يمكن اختبار وجود حالة اختلاف التباين بترتيب البيانات من أصغر قيمة إلى أكبر قيمة من قيم المتغير المستقل ،  $X_i$  ، وإجراء انحدارين منفصلين ، واحد للقيم الصغيرة ، وآخر للقيم الكبيرة للمتغير  $X_i$  ، مع حذف بعض المشاهدات الوسطية (خمس المشاهدات مثلاً) . ثم يختبر نسبة مجموع مربعات الخطأ للانحدار الأول إلى مجموع مربعات الخطأ للانحدار الثاني (أي  $ESS_2 / ESS_1$ ) نرى هل تختلف معنوياً عن الواحد . ويستخدم توزيع  $F$  للاختبار



بدرجات حرية  $(n - d - 2k)/2$  ، حيث  $n$  إجمال عدد المشاهدات ،  $d$  عدد المشاهدات المحفوفة  $k$  ، عدد المعالم المقدرة . وهذا هو اختبار جولد فيلد - كوانت لاختلاف التباين وهو مناسب تماماً للعينات الكبيرة (أى عندما  $n \geq 30$ ) . إذا لم تحذف أية مشاهدات وسيطة ، يظل الاختبار صحيحاً ، ولكن قوته في الكشف عن اختلاف التباين تكون أقل .

(ب) إذا افترض (وكثيراً ما يحدث هذا) أن  $var u_i = CX_i^2$  ، حيث  $C$  ثابت يختلف عن الصفر ، فإنه يمكننا تصحيح اختلاف التباين بالقسمة (أى بترجيح) كل حد من حدود الانحدار على  $X_i$  ، ثم إعادة تقدير الانحدار باستخدام المتغيرات المحولة . في حالة الانحدار ذو المتغيرين ، يكون لدينا

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{b_0}{X_i} + b_1 + \frac{u_i}{X_i} \quad (٩ - ٤)$$

ويصبح الآن حد الخطأ المحول ثابت التباين :

$$var u_i = var \frac{u_i}{X_i} = \frac{1}{X_i^2} var u_i = C \frac{X_i^2}{X_i^2} = C$$

لاحظ أن المقطع الأصل أصبح متغيراً في معادلة (٩-٤) بينما معلمة الميل الأصلية  $b_1$  ، أصبحت هي المقطع الجديد . ولكن ، يجب توخي الحرص في تفسير النتائج للانحدار المحول أو المرجح . حيث أن الأخطاء في معادلة (٩-٤) ثابتة التباين ، ولذا فإن تقديرات OLS ليست فقط غير متحيزة ومتسقة ، ولكنها أيضاً كفءة . وفي حالة الانحدار المتعدد ، يقسم كل حد في الانحدار (أى يرجح) على المتغير المستقل (مثلاً  $X_{2i}$ ) الذى يظن أنه يرتبط مع حد الخطأ ، فيصبح لدينا

$$\frac{Y_i}{X_{2i}} = \frac{b_0}{X_{2i}} + b_1 \frac{X_{1i}}{X_{2i}} + b_2 + \frac{u_i}{X_{2i}} \quad (٩ - ٥)$$

في معادلة ٩-٥ يصبح المقطع الأصل  $b_0$  ، متغيراً ، بينما يصبح المقطع الجديد  $b_2$  . ويمكننا أن نحدد بالنظر إذا كانت  $X_{1i}$  أو  $X_{2i}$  هي المرتبطة مع  $u_i$  برسم كل من  $X_{1i}$  و  $X_{2i}$  مقابل بواق الانحدار .

٩ - ٦ يعطى جدول ٩-٧ الانفاق الاستهلاكى  $C$  ، والدخل المتاح  $Y_d$  ، لعدد 30 أسرة (أ) أوجد انحدار  $C$  على  $Y_d$  للعينات ككل واختبر بالنسبة لاختلاف التباين . (ب) صحح بالنسبة لاختلاف التباين إن وجد في (أ) .

جدول ٩-٧ بيانات الاستهلاك والدخل لعدد 30 أسرة

| الدخل    | الاستهلاك |          |          |
|----------|-----------|----------|----------|
| \$12,000 | \$10,600  | \$10,800 | \$11,100 |
| 13,000   | 11,400    | 11,700   | 12,100   |
| 14,000   | 12,300    | 12,600   | 13,200   |
| 15,000   | 13,000    | 13,300   | 13,600   |
| 16,000   | 13,800    | 14,000   | 14,200   |
| 17,000   | 14,400    | 14,900   | 15,300   |
| 18,000   | 15,000    | 15,700   | 16,400   |
| 19,000   | 15,900    | 16,500   | 16,900   |
| 20,000   | 16,900    | 17,500   | 18,100   |
| 21,000   | 17,200    | 17,800   | 18,500   |

(أ) باجراء انحدار  $C$  على  $Y_d$  للعينات كلها من 30 مشاهدة ، نحصل على :

$$\hat{C} = 1,480.0 + 0.788Y_d \quad R^2 = 0.97$$

(3.29)      (29.37)

للاختبار بالنسبة لاختلاف التباين ، نجرى انحدار  $C$  على  $Y_d$  لعدد 12 مشاهدة الأولى ولعدد 12 مشاهدة الأخيرة ، مع حذف عدد ، مشاهدات الوسيطة ، ونحصل على

$$\hat{C} = 846.7 + 0.837 Y_d \quad R^2 = 0.91$$

(0.74)      (9.91)       $ESS_1 = 1,069,000$

$$\hat{C} = 2,306.7 + 0.747 Y_d \quad R^2 = 0.71$$

(0.79)      (5.00)       $ESS_2 = 3,344,000$

وحيث أن  $ESS_2/ESS_1 = 3,344,000/1,096,000 = 3.13$  تتجاوز  $F = 2.97$  بدرجات حرية  $10 = (4 - 6 - 30)$  في البسط والمقام عند مستوى معنوية 5% (أنظر ملحق ٧) ، نقبل فرض وجود اختلاف التباين .

(ب) بافترض أن تباين الخطأ يتناسب مع  $Y_d^2$  ، وباعادة تقدير الانحدار باستخدام المتغيرات المحولة في جدول ٩ - ٨ لتصحيح اختلاف التباين ، نحصل على في العمود الأخير من ٩ - ٨  $(0.833333E-04 = 0.0000833333)$  :

$$\frac{\hat{C}}{Y_d} = 0.792 + 1,421.3 \frac{1}{Y_d} \quad R^2 = 0.32$$

(31.51)      (3.59)

لاحظ أن الميل الحدى للاستهلاك هو الآن المقطع (أى 0.792) وهو أكبر مما كان قبل التعديل (أى 0.788) . فإن المعنوية الإحصائية للمعلمتين المقدرتين أعلى الآن من ذي قبل . أما  $R^2$  للانحدار المرجح (أى 0.32) فهي أقل كثيراً وإن كانت المقارنة المباشرة مع قيمة  $R^2$  ، 0.97 ، قبل التحويل غير ممكنة ، لأن المتغيرات التابعة أصبحت مختلفة ( $Y/X$  مقابل  $Y$ ) .

جدول ٩ - ٨ الاستهلاك والدخل في الصورة الأصلية والمحولة

| الأسرة | $C$   | $Y_d$ | $C/Y_d$  | $1/Y_d$      |
|--------|-------|-------|----------|--------------|
| 1      | 10600 | 12000 | 0.883333 | 0.833333E-04 |
| 2      | 10800 | 12000 | 0.900000 | 0.833333E-04 |
| 3      | 11100 | 12000 | 0.925000 | 0.833333E-04 |
| 4      | 11400 | 13000 | 0.876923 | 0.769231E-04 |
| 5      | 11700 | 13000 | 0.900000 | 0.769231E-04 |
| 6      | 12100 | 13000 | 0.930769 | 0.769231E-04 |
| 7      | 12300 | 14000 | 0.878571 | 0.714286E-04 |
| 8      | 12600 | 14000 | 0.900000 | 0.714286E-04 |
| 9      | 13200 | 14000 | 0.942857 | 0.714286E-04 |
| 10     | 13000 | 15000 | 0.866667 | 0.666667E-04 |
| 11     | 13300 | 15000 | 0.886667 | 0.666667E-04 |
| 12     | 13600 | 15000 | 0.906667 | 0.666667E-04 |
| 13     | 13800 | 16000 | 0.862500 | 0.625000E-04 |
| 14     | 14000 | 16000 | 0.875000 | 0.625000E-04 |
| 15     | 14200 | 16000 | 0.887500 | 0.625000E-04 |
| 16     | 14400 | 17000 | 0.847059 | 0.588235E-04 |
| 17     | 14900 | 17000 | 0.876471 | 0.588235E-04 |
| 18     | 15300 | 17000 | 0.900000 | 0.588235E-04 |
| 19     | 15000 | 18000 | 0.833333 | 0.555556E-04 |
| 20     | 15700 | 18000 | 0.872222 | 0.555556E-04 |
| 21     | 16400 | 18000 | 0.911111 | 0.555556E-04 |
| 22     | 15900 | 19000 | 0.836842 | 0.526316E-04 |
| 23     | 16500 | 19000 | 0.868421 | 0.526316E-04 |
| 24     | 16900 | 19000 | 0.889474 | 0.526316E-04 |
| 25     | 16900 | 20000 | 0.845000 | 0.500000E-04 |
| 26     | 17500 | 20000 | 0.875000 | 0.500000E-04 |
| 27     | 18100 | 20000 | 0.905000 | 0.500000E-04 |
| 28     | 17200 | 21000 | 0.819048 | 0.476190E-04 |
| 29     | 17800 | 21000 | 0.847619 | 0.476190E-04 |
| 30     | 18500 | 21000 | 0.880952 | 0.476190E-04 |

٧ - ٩ يعطى جدول ٩ - ٩ مستوى المخزون  $I$  ، والمبيعات  $S$  ، كليهما بالمليون دولار ، ومعدلات الاقتراض لعدد 35 شركة في إحدى الصناعات . ومن المتوقع أن  $I$  سوف تكون مرتبطة بمطردياً مع  $S$  وعكسياً مع  $R$  (أ) أوجد انحدار  $I$  على  $S$  و  $R$  للعينة كلها واختبر وجود اختلاف التباين . (ب) صحح بالنسبة لاختلاف التباين إن وجد في (أ) ، بافتراض أن تباين الخطأ يتناسب مع  $S^2$

جدول ٩ - ٩ المخزون ، المبيعات ، ومعدلات الاقتراض لعدد 53 شركة

| الشركة | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $I$    | 10  | 10  | 10  | 11  | 11  | 11  | 12  | 12  | 12  | 12  | 12  | 13  | 13  | 13  | 14  | 14  | 14  | 15  |
| $S$    | 100 | 101 | 103 | 105 | 106 | 106 | 108 | 109 | 111 | 111 | 112 | 113 | 114 | 114 | 116 | 117 | 118 | 120 |
| $R$    | 17  | 17  | 17  | 16  | 16  | 16  | 15  | 15  | 14  | 14  | 14  | 14  | 13  | 13  | 12  | 12  | 12  | 11  |
| الشركة | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  | 32  | 33  | 34  | 35  |     |
| $I$    | 15  | 15  | 15  | 16  | 16  | 16  | 17  | 17  | 17  | 17  | 18  | 18  | 19  | 19  | 19  | 20  | 20  |     |
| $S$    | 122 | 123 | 125 | 128 | 128 | 131 | 133 | 134 | 135 | 136 | 139 | 143 | 147 | 151 | 157 | 163 | 171 |     |
| $R$    | 11  | 11  | 11  | 10  | 10  | 10  | 10  | 9   | 9   | 9   | 8   | 8   | 8   | 8   | 8   | 7   | 7   |     |

(أ) باجراء انحدار  $I$  على  $S$  و  $R$  للعينة كلها من 35 شركة ، نحصل على

$$\hat{I} = -6.17 + 0.20S - 0.25R \quad R^2 = 0.98$$

(12.39)      (-2.67)

لاختبار اختلاف التباين ، نجرى انحدار  $I$  على  $S$  و  $R$  لعدد 14 مشاهدة الأولى ، ولعدد 14 مشاهدة الأخيرة ، مع حذف 7 مشاهدات وسطية ونحصل على

$$\hat{I} = -2.23 + 0.16S - 0.22R \quad R^2 = 0.94$$

(1.90)      (-0.81)      ESS<sub>1</sub> = 0.908

$$\hat{I} = 16.10 + 0.11S - 1.40R \quad R^2 = 0.96$$

(3.36)      (-3.35)      ESS<sub>2</sub> = 5.114

وحيث أن  $ESS_2/ESS_1 = 5.114/0.908 = 5.63$  تتجاوز  $F_{11,11} = 2.82$  عند مستوى معنوية 5% (أنظر ملحق ٧) ، فإننا نقبل فرض وجود اختلاف التباين .

(ب) بافتراض أن تباين الخطأ يتناسب مع  $S^2$  وباعادة تقدير الانحدار باستخدام المتغير المحول لتصحيح اختلاف التباين ، نحصل على

$$\frac{\hat{I}}{S} = \frac{0.21}{(12.34)} - 8.45(1/S) - \frac{0.18(R/S)}{(-2.98)} \quad R^2 = 0.93$$

$b_0 = 0.21$  هي الآن معامل الميل المرتبط بالمتغير  $S$  (بدلاً من 0.16 قبل التحويل) ، بينما  $b_2 = -0.18$  هي معامل الانحدار المرتبط بالمتغير  $R$  (بدلاً من 0.25 قبل التحويل) . ويبقى كل من معامل الميل ذا معنوية إحصائية عالية قبل وبعد التحويل ، وكذلك  $R^2$  . الثابت الجديد هو 8.45 — بدلاً من 6.17 .

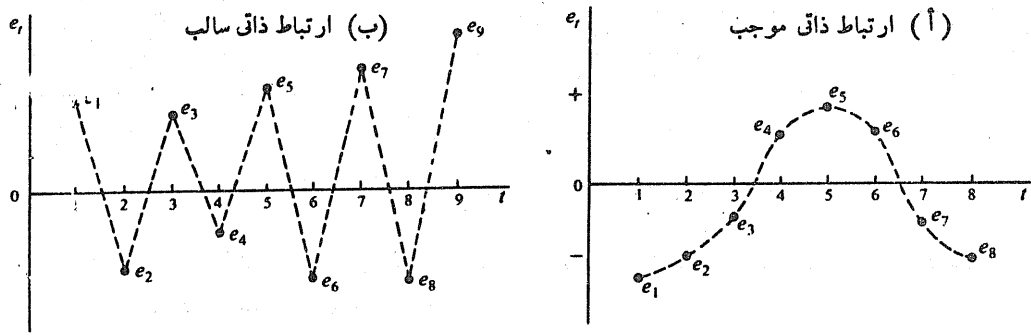
الارتباط الذاتي :

٨ - ٩ (أ) ماذا يقصد بالارتباط الذاتي ؟ (ب) ارسم شكلاً يوضح ارتباطاً ذاتياً من الدرجة الأولى ، موجياً ، وسالباً (ج) لماذا يعتبر الارتباط الذاتي مشكلة ؟

(أ) يشير الارتباط الذاتي أو الارتباط المتسلسل إلى الحالة التي يكون فيها حد الخطأ في فترة زمنية على علاقة مع حد الخطأ في أي فترة زمنية أخرى . إذا كان حد الخطأ في فترة زمنية مرتبطاً بحد الخطأ في الفترة الزمنية السابقة ، يكون هناك

ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى . ومعظم التطبيقات في الاقتصاد القياسي تتضمن ارتباطاً ذاتياً من الدرجة الأولى أكثر من الدرجة الثانية أو أكثر . وبالرغم من أنه من الممكن أن يكون هناك ارتباط ذاتي سالب ، فإن معظم السلاسل الزمنية الاقتصادية تظهر ارتباطاً ذاتياً موجباً . ويعني الارتباط الذاتي الموجب من الدرجة الأولى أن  $E_{u_t u_{t-1}} > 0$  وفي هذا خرق لغرض OLS الرابع (أنظر مسألة ٦ - ٤) . وهذا شائع في تحليل السلاسل الزمنية .

(ب) يوضح شكل ٩ - ٢ (أ) ارتباطاً ذاتياً موجباً من الدرجة الأولى ، بينما يوضح شكل ٩ - ٢ (ب) ارتباطاً ذاتياً سالباً من الدرجة الأولى . وعندما تكون لعدة بواق متتالية نفس الإشارة كما في شكل ٩ - ٢ (أ) ، يكون هناك ارتباط ذاتي موجب من الدرجة الأولى . ولكن عندما تغير البواق المتتالية إشاراتها كثيراً ، كما في شكل ٩ - ٢ (ب) يكون هناك ارتباط ذاتي سالب من الدرجة الأولى .



شكل ٩ - ٢

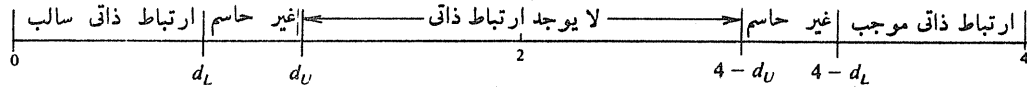
(ج) في وجود الارتباط الذاتي ، تظل تقديرات OLS غير متحيزة ومتسقة ، ولكن الخطأ المعياري لمعامل الانحدار المقدرة تكون متحيزة ، مؤدية إلى اختبارات إحصائية غير صحيحة ، وإلى فترات ثقة متحيزة . وعندما يكون الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى موجباً ، تكون الأخطاء المعيارية لمعامل الانحدار المقدرة متحيزة إلى أسفل ، ومن ثم يكون هناك مبالغة في الدقة وفي المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار المقدرة .

٩ - ٩ (أ) كيف يمكن اختبار وجود الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى الموجب أو السالب ؟ (ب) كيف يمكن تصحيح الارتباط الذاتي ؟

(أ) يمكن اختبار وجود الارتباط الذاتي بحساب إحصائية ديرين - واتسون ،  $d$  ، المعبر عنها بالمعادلة (٩ - ١) . وتعطي هذه الإحصائية بشكل روتيني كأحد نواتج معظم برامج الكمبيوتر مثل SPSS :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (٩ - ١)$$

(أنظر المسألة ٧ - ٢١) . وتتراوح القيمة المحسوبة  $d$  بين 0 و 4 ، ولا يكون هناك ارتباط ذاتي إذا كانت  $d$  قريبة من 2 . ويوضح شكل ٩ - ٣ قيم  $d$  التي تشير إلى وجود أو غياب ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى موجب أو سالب ، أو التي تجعل الاختبار غير حاسم . وعندما يظهر المتغير التابع المبطل كمتغير مفسر في الانحدار ، فإن  $d$  تكون متحيزة نحو 2 وتضعف قوتها في الكشف عن الارتباط الذاتي .



شكل ٩ - ٣

(ب) إن إحدى طرق تصحيح الارتباط الذاتي الموجب من الدرجة الأولى (النوع المتأخر) تتضمن أولاً إجراء انحدار  $Y$  على قيمتها المبطة لفترة واحدة ، وعلى متغيرات النموذج المفسرة ، وعلى المتغيرات المفسرة مبطة لفترة واحدة .

$$Y_t = b_0(1 - \rho) + \rho Y_{t-1} + b_1 X_t - b_1 \rho X_{t-1} + v_t \quad (٩ - ٢)$$

(و) تشتق المعادلة السابقة بضرب كل من نموذج OLS الأصلي المبطة لفترة زمنية واحدة في  $\rho$  ، وطرح الناتج من نموذج OLS الأصلي ، مع نقل الحد  $\rho Y_{t-1}$  من الجانب الأيسر إلى الجانب الأيمن من المعادلة ، ووضع  $(v_t = u_t - \rho u_{t-1})$  . وتتضمن الخطوة الثانية استخدام قيمة  $\rho$  المقدرة في معادلة (٩ - ٢) لتحويل كل متغيرات نموذج OLS الأصلي ، كما هو موضح في معادلة (٩ - ٣) ، ثم إعادة تقدير معادلة (٩ - ٣) :

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = b_0(1 - \hat{\rho}) + b_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + v_t \quad (٩ - ٣)$$

ويصبح حد الخطأ الجديد ،  $v_t$  في معادلة (٩ - ٣) خالياً من الارتباط الذاتي . ويعرف هذا الإجراء بطريقة ديربن على مرحلتين ويعتبر نموذجاً للمربعات الصغرى العامة . ولتجنب فقدان الملاحظة الأولى في عملية استخدام الفروق ، يستخدم  $Y_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$  و  $X_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$  للملاحظة الأولى المحولة لكل من  $Y$  و  $X$  ، على الترتيب . أما إذا كان الارتباط الذاتي راجعاً إلى حذف متغير مهم ، أو شكل دالي خاطئ ، أو تحديد غير سليم للنموذج ، فيجب التخلص من هذه المشاكل أولاً ، قبل تطبيق الإجراء السابق لتصحيح الارتباط الذاتي .

٩ - ١٠ يعطى جدول ٩ - ١٠ مستوى واردات الولايات المتحدة ،  $M$  و  $GNP$  (كليهما بالبيليون دولار) من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ (أ) أجر انحدار  $M$  على  $GNP$  واختبر بالنسبة لوجود الارتباط الذاتي عند مستوى معنوية 5% (ب) صحح النسبة للارتباط الذاتي إن وجد في (أ) .

جدول ٩ - ١٠ واردات الولايات المتحدة و  $GNP$  (بالبيليون دولار) من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩

| السنة | 1960  | 1961    | 1962    | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    |
|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $M$   | 23.2  | 23.1    | 25.2    | 26.4    | 28.4    | 32.0    | 37.7    | 40.6    | 47.7    | 52.9    |
| $GNP$ | 506.0 | 523.3   | 563.8   | 594.7   | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   |
| السنة | 1970  | 1971    | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| $M$   | 58.5  | 64.0    | 75.9    | 94.4    | 131.9   | 126.9   | 155.4   | 185.8   | 217.5   | 260.9   |
| $GNP$ | 982.4 | 1,063.4 | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ صفحة ٢٠٣ .

$$\hat{M}_t = -56.13 + 0.13 GNP_t \quad R^2 = 0.98 \quad (1)$$

$$(-10.32) \quad (28.92) \quad d = 0.65$$

وحيث أن  $d_L = 1.20 > d = 0.65$  عند مستوى معنوية 5% مع  $n = 20$  و  $k' = 1$  (من ملحق ٨) ، فهناك دليل على وجود ارتباط ذاتي موجب من الدرجة الأولى .

(ب) لتصحيح الارتباط الذاتي ، يتم إجراء الانحدار الآتي :

$$\hat{M}_t = -20.89 + 0.72M_{t-1} + 0.15GNP_t - 0.12GNP_{t-1} \quad R^2 = 0.99$$

(3.58) (1.36) (-0.89)

ثم ، باستخدام  $\hat{\rho} = 0.72$  (معامل  $M_{t-1}$  في معادلة الانحدار السابقة) ، نحول المتغيرات الأصلية كما سبق الإشارة في معادلة (٩-٣) . المتغيرات الأصلية ( $M$  و  $GNP$ ) والمتغيرات المحولة ( $M^*$  و  $GNP^*$ ) مطاة في جدول ٩-١١ .

$$M_{1960}^* = 23.2\sqrt{1 - 0.72^2} = 16.100 \quad \text{and} \quad Y_{1960}^* = 506.0\sqrt{1 - 0.72^2} = 351.151.$$

باجراء انحدار  $M^*$  على  $GNP^*$  ، نحصل على :

$$\hat{M}_t^* = -22.43 + 0.14GNP_t^* \quad R^2 = 0.93$$

(-5.73) (15.78)  $d = 2.57$

وحيث أنه الآن  $d_U = 1.47 > d = 2.57$  عند مستوى معنوية 5% مع  $n = 20$  و  $k' = 1$  (من ملحق ٨) ، فليس هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي . لاحظ أنه بالرغم من أن  $GNP_t^*$  يظل لها معنوية عالية ، فإن قيمة  $t$  بالنسبة لها أقل من قيمة  $t$  للمتغير  $GNP_t$  . بالإضافة ، أصبحت  $R^2 = 0.93$  الآن مقابل  $R^2 = 0.98$  قبل التصحيح بالنسبة للارتباط الذاتي .

جدول ٩-١١ الواردات الأمريكية و  $GNP$  في صورتها الأصلية والمحولة

| السنة | $M$   | $GNP$  | $M^*$   | $GNP^*$ |
|-------|-------|--------|---------|---------|
| 1960  | 23.2  | 506.0  | 16.100  | 351.151 |
| 1961  | 23.1  | 523.3  | 6.396   | 158.980 |
| 1962  | 25.2  | 563.8  | 8.568   | 187.024 |
| 1963  | 26.4  | 594.7  | 8.256   | 188.764 |
| 1964  | 28.4  | 635.7  | 9.392   | 207.516 |
| 1965  | 32.0  | 688.1  | 11.552  | 230.396 |
| 1966  | 37.7  | 753.0  | 14.660  | 257.568 |
| 1967  | 40.6  | 796.3  | 13.456  | 254.140 |
| 1968  | 47.7  | 868.5  | 18.468  | 295.164 |
| 1969  | 52.9  | 935.5  | 18.556  | 310.180 |
| 1970  | 58.5  | 982.4  | 20.412  | 308.840 |
| 1971  | 64.0  | 1063.4 | 21.880  | 356.072 |
| 1972  | 75.9  | 1171.1 | 29.820  | 405.452 |
| 1973  | 94.4  | 1306.6 | 39.752  | 463.408 |
| 1974  | 131.9 | 1412.9 | 63.932  | 472.148 |
| 1975  | 126.9 | 1528.8 | 31.932  | 511.512 |
| 1976  | 155.4 | 1702.2 | 64.032  | 601.464 |
| 1977  | 185.8 | 1899.5 | 73.912  | 673.916 |
| 1978  | 217.5 | 2127.6 | 83.724  | 759.960 |
| 1979  | 260.9 | 2368.5 | 104.300 | 836.628 |

٩-١١ يعطى جدول ٩-١٢ إجمال الاستثمار المحل الخاص ،  $GNP$  و  $GDP$  ، كليهما بالبلليون دولار ، والرقم القياسي لأسعار المستهلكين ،  $CPI$  للولايات المتحدة من ١٩٦٢ إلى ١٩٧٩ (أ) أجر انحدار  $GDP$  على  $GNP$  و  $CPI$  واختبر وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 5% . (ب) صحح بالنسبة للارتباط الذاتي إن وجد في (أ)

$$\widehat{GDP}_t = 125.44 + 0.37GNP_t - 2.93CPI_t \quad R^2 = 0.98$$

(5.47) (-3.12)  $d = 0.72$  (أ)

حيث  $d_L = 1.05 < d = 0.72$  عند مستوى ثقة 5% بدرجات حرية  $n = 18$  و  $k' = 2$  (من ملحق ٨) ، فهناك دليل على وجود ارتباط ذاتي .

جدول ٩-١٢ GDI و GNP و CPI (بالبليون دولار) في الولايات المتحدة ، ١٩٦٣ - ١٩٧٩

| السنة | 1962    | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    | 1970    |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| GDI   | 85.2    | 90.2    | 96.6    | 112.0   | 124.5   | 120.8   | 131.5   | 146.2   | 140.8   |
| GNP   | 563.8   | 594.7   | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   | 982.4   |
| CPI   | 90.6    | 91.7    | 92.9    | 94.5    | 97.2    | 100.0   | 104.2   | 109.8   | 116.3   |
| السنة | 1971    | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| GDI   | 160.0   | 188.3   | 220.0   | 214.6   | 190.9   | 243.0   | 303.3   | 351.5   | 386.2   |
| GNP   | 1,063.4 | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |
| CPI   | 121.3   | 125.3   | 133.1   | 147.7   | 161.2   | 170.5   | 181.5   | 195.4   | 217.4   |

المصدر التقرير الإقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة واشنتن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٠٣  
(ب) التصحيح لوجود ارتباط ذاتي ، فإننا نجري أولاً الانحدار التالي :

$$\widehat{GDI}_t = 47.56 + 0.70GDI_{t-1} + 0.68GNP_t - 0.60GNP_{t-1} + 3.08CPI_t - 2.11CPI_{t-1}$$

(3.12)                      (3.97)                      (-2.83)                      (-1.84)                      (1.17)

$R^2 = 0.99$

ومن ثم ، فباستخدام  $\hat{\rho} = 0.70$  (معامل  $GDI_{t-1}$  في الانحدار السابق) ، نحول كل المتغيرات الأصلية كما هو موضح في معادلة (٩-٣) . وتظهر المتغيرات الأصلية والمحولة (تميز الأخيرة بعلامة النجمة) في جدول ٩-١٣ .

$$GDI_{1962}^* = 85.2\sqrt{1 - 0.70^2} = 60.85$$

$$GNP_{1962}^* = 563.8\sqrt{1 - 0.70^2} = 402.63$$

$$CPI_{1962}^* = 90.6\sqrt{1 - 0.70^2} = 64.70$$

بإيجاد انحدار  $GDI_t^*$  على  $GNP_t^*$  و  $CPI_t^*$  نحصل على

$$\widehat{GDI}_t = 7.19 + 0.24GNP_t^* - 0.99CPI_t^*$$

(5.50)                      (-1.75)                       $R^2 = 0.88$                        $d = 1.54$

وحيث أنه الآن  $d_U = 1.53 < d = 1.54$  عند مستوى معنوية 5% مع  $n = 20$  و  $k' = 2$  (من ملحق ٨) ، فليس هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي . لاحظ أنه بالرغم من أن  $GNP_t^*$  تقلل عالية المعنوية ، إلا أن  $CPI_t^*$  لا تصبح معنوية . وكذلك فإن  $R^2$  منخفضة .

جدول ٩-١٣ GDI ، GNP و CPI في الصورة الأصلية والمحولة

| السنة | GDI   | GNP    | CPI   | GDI*   | GNP*   | CPI*  |
|-------|-------|--------|-------|--------|--------|-------|
| 1962  | 85.2  | 563.8  | 90.6  | 60.85  | 402.63 | 64.70 |
| 1963  | 90.2  | 594.7  | 91.7  | 30.56  | 200.04 | 28.28 |
| 1964  | 96.6  | 635.7  | 92.9  | 33.46  | 219.41 | 28.71 |
| 1965  | 112.0 | 688.1  | 94.5  | 44.38  | 243.11 | 29.47 |
| 1966  | 124.5 | 753.0  | 97.2  | 46.10  | 271.33 | 31.05 |
| 1967  | 120.8 | 796.3  | 100.0 | 33.65  | 269.70 | 31.96 |
| 1968  | 131.5 | 868.5  | 104.2 | 46.94  | 311.09 | 34.20 |
| 1969  | 146.2 | 935.5  | 109.8 | 54.15  | 327.55 | 36.86 |
| 1970  | 140.8 | 982.4  | 116.3 | 38.46  | 327.55 | 39.44 |
| 1971  | 160.0 | 1063.4 | 121.3 | 61.44  | 375.72 | 39.89 |
| 1972  | 188.3 | 1171.1 | 125.3 | 76.30  | 426.72 | 40.39 |
| 1973  | 220.0 | 1306.6 | 133.1 | 88.19  | 486.83 | 45.39 |
| 1974  | 214.6 | 1412.9 | 147.7 | 60.60  | 498.28 | 54.53 |
| 1975  | 190.9 | 1528.8 | 161.2 | 40.68  | 539.77 | 57.81 |
| 1976  | 243.0 | 1702.2 | 170.5 | 109.37 | 632.04 | 57.66 |
| 1977  | 303.3 | 1899.5 | 181.5 | 133.20 | 707.96 | 62.15 |
| 1978  | 351.5 | 2127.6 | 195.4 | 139.19 | 797.95 | 68.35 |
| 1979  | 386.2 | 2368.5 | 217.4 | 140.15 | 879.18 | 80.62 |

٩ - ١٢ يعطى جدول ٩ - ١٤ الإنفاق الاستهلاكي الشخصي ،  $C$  ، والدخل الشخصي المتاح  $Y$  ، كليهما بالبيون دولار ، للولايات المتحدة من ١٩٦٢ إلى ١٩٧٩ . (أ) أجر انحدار  $C_t$  على  $Y_t$  واختبر وجود ارتباط ذاتي . (ب) أجر تصحيحاً بسبب الارتباط الذاتي إن وجد في (أ) .

جدول ٩ - ١٤ الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح ( بالبيون دولار ) : الولايات المتحدة ، ١٩٦٢ - ١٩٧٩ :

| السنة | 1962  | 1963  | 1964  | 1965  | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    | 1970    |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| PCI   | 355.2 | 374.6 | 400.4 | 430.2 | 464.8   | 490.4   | 535.9   | 579.7   | 618.8   |
| DPI   | 383.9 | 402.8 | 437.0 | 472.2 | 510.4   | 544.5   | 588.1   | 630.4   | 685.9   |
| السنة | 1971  | 1972  | 1973  | 1974  | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| PCI   | 668.2 | 733.0 | 809.9 | 889.6 | 979.1   | 1,089.9 | 1,210.0 | 1,350.8 | 1,509.8 |
| DPI   | 742.8 | 801.3 | 901.7 | 984.6 | 1,086.7 | 1,184.5 | 1,305.1 | 1,458.4 | 1,623.2 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطبوعات ، واشنطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٢٩ .

$$\hat{C}_t = -11.40 + 0.93 Y_t \quad R^2 = 0.999 \quad (أ)$$

$$(-1.97) \quad (144.33) \quad d = 0.75$$

حيث أن  $d = 0.75$  ، فهناك دليل على وجود الارتباط الذاتي عند مستويات المعنوية 5% و 1%

(ب) لعمل تصحيح بسبب الارتباط الذاتي ، نجري أولاً الانحدار الآتي :

$$\hat{C}_t = -25.45 + 1.06 C_{t-1} + 0.21 Y_t - 0.16 Y_{t-1} \quad R^2 = 0.999$$

$$(5.82) \quad (1.15) \quad (-0.89)$$

حيث أن  $\hat{\rho} \approx 1$  (معامل  $C_{t-1}$  في المعادلة السابقة) ، فإننا نعيد تقدير الانحدار باستخدام الفروق الأولى للمتغيرات الأصلية (أي انحدار  $\Delta C_t$  على  $\Delta Y_t$ ) مع حذف المقطع ونحصل على

$$\Delta \hat{C}_t = 0.94 \Delta Y_t \quad R^2 = 0.96$$

$$(37.79) \quad d = 2.44$$

قيمة  $d$  الجديدة لا تشير إلى دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستويات المعنوية 1% أو 5% .

أخطاء في المتغيرات :

٩ - ١٣ (أ) ماذا يقصد بأخطاء في المتغيرات ؟ (ب) ما هي المشاكل التي تخلقها الأخطاء في المتغيرات ؟ (ج) هل هناك اختبارات لاكتشاف وجود أخطاء في المتغيرات ؟ (د) كيف يمكن تصحيح المشاكل التي يسببها وجود أخطاء في المتغيرات ؟

(أ) تشير أخطاء في المتغيرات إلى الحالة التي تتضمن فيها متغيرات النموذج أخطاء في القياس . ومن الممكن أن يكون هذا شائعاً جداً على ضوء الطريقة التي تجمع وتمد بها معظم البيانات .

(ب) أخطاء القياس في المتغير التابع تدخل في حد التشويش تاركة تقديرات معالم OLS غير متحيزة ( بالرغم من عدم كفاءتها من حيث أن تباينها أكبر من أصغر تباين ) . ولكن ، عندما تكون أخطاء القياس في المتغيرات المفسرة ، فإن هذا يسبب خرق فرض OLS الخامس الخاص باستقلال المتغيرات المستقلة أو المفسرة عن حد الخطأ ( أنظر المسألة ٦ - ٤ ) مما يؤدي إلى تقديرات معالم OLS متحيزة وغير متسقة . في حالة الانحدار البسيط ، تكون  $\hat{b}_1$  متحيزة إلى أدنى ، بينما  $\hat{b}_0$  متحيزة إلى أعلى .

(ج) ليس هناك اختبار رسمي للكشف عن وجود أخطاء في المتغيرات . ولكن يمكن أحياناً أن تعطى النظرية الاقتصادية أو المعرفة بالطريقة التي جمعت بها البيانات إشارة إلى مدى خطورة المشكلة .



(د) واحدة من طرق الحصول على تقديرات معالم OLS متسقة (ولكنها تظل متحيزة وغير كفوء) هي إحلال المتغير المفسر المتضمن أخطاء في القياس بمتغير آخر له ارتباط عال بهذا المتغير ولكنه مستقل عن حد الخطأ . وفي الواقع العملي ، قد يكون من الصعب العثور على متغير وسيط كهذا ، ولن يكون الإنسان متأكداً أنه سوف يكون مستقلاً عن حد الخطأ . والمتغير الوسيط الأكثر شيوعاً هو استخدام القيمة المبطة للمتغير المفسر محل التساؤل . كما يمكن تصحيح أخطاء القياس في المتغير المفسر فقط باستخدام المربعات الصغرى المعكوسة . ويتضمن هذا إيجاد انحدار  $X$  على  $Y$  . فتكون  $\hat{b}_0 = -\hat{b}'_0/\hat{b}'_1$  و  $\hat{b}_1 = 1/\hat{b}'_1$  حيث  $\hat{b}_0$  ،  $\hat{b}_1$  هي تقديرات متسقة للمقطع ومعلمة الميل لانحدار  $Y_i$  على  $X_i$  .

٩ - ١٤ يعطى جدول ٩ - ١٥ المخزون  $I$  ، والمبيعات الفعلية  $S$  ، وقيمة مفترضة للمتغير  $S'$  تشمل أخطاء في القياس  $S'$  ، كلها بالبيون دولار ، للصناعة التحويلية الأمريكية من ١٩٦٣ إلى ١٩٧٨ . من المفترض أن  $I$  و  $S$  خالية من أخطاء القياس . (أ) أجر انحدار  $I_i$  على  $S_i$  (ب) أجر انحدار  $I_i$  على  $S'_i$  (بافتراض أن  $S$  غير متاحة) . ما نوع التحيز الذي ينتج في التقديرات باستخدام  $S'$  بدلا من  $S$  ؟ (ج) استخدم متغيرات وسيطة للحصول على تقديرات معالم متسقة ، على فرض أن  $S_i$  ترتبط مع  $u_i$  . كيف تقارن تقديرات المعالم هذه مع تلك السابق الحصول عليها في (ب) ؟

جدول ٩ - ١٥ المخزون والمبيعات (بالبيون دولار) في الصناعة التحويلية الأمريكية ، ١٩٦٣ - ١٩٧٨ .

| Year | 1963  | 1964  | 1965  | 1966  | 1967  | 1968  | 1969  | 1970  |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $I$  | 60.0  | 63.4  | 68.2  | 78.0  | 84.7  | 90.6  | 98.2  | 101.7 |
| $S$  | 35.1  | 37.3  | 41.0  | 44.9  | 46.5  | 50.3  | 53.5  | 52.8  |
| $S'$ | 38.7  | 41.3  | 45.6  | 50.1  | 51.9  | 56.3  | 60.1  | 59.2  |
| Year | 1971  | 1972  | 1973  | 1974  | 1975  | 1976  | 1977  | 1978  |
| $I$  | 102.7 | 108.3 | 124.7 | 157.9 | 158.2 | 170.2 | 180.0 | 198.0 |
| $S$  | 55.9  | 63.0  | 73.0  | 84.8  | 86.6  | 98.8  | 110.8 | 124.7 |
| $S'$ | 62.8  | 71.0  | 82.7  | 96.4  | 98.5  | 112.6 | 126.5 | 142.7 |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة واشتغل ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٥٦ .

$$\hat{I}_i = 9.65 + 1.60S_i \quad R^2 = 0.978 \quad d = 0.74 \quad (1)$$

(2.10) (24.80)

لاحظ أن قيمة  $d$  المنخفضة تشير إلى وجود ارتباط ذاتي . وحيث أن الارتباط الذاتي لا ينتج عنه تقديرات متحيزة للمعالم وما يهنا هنا هو الخطأ في المتغيرات ، فإننا نمضي بـدون تصحيح بسبب الارتباط الذاتي .

$$\hat{I}_i = 12.43 + 1.38S'_i \quad R^2 = 0.978 \quad d = 0.74 \quad (ب)$$

(2.77) (24.79)

في وجود أخطاء في قياس قيمة المبيعات  $\hat{b}_0 > \hat{b}_0$  بينما  $\hat{b}_1 < \hat{b}_1$  .

(ج) باستخدام  $S'_{i-1}$  كمتغير وسيط بدلا من  $S_i$  (إذا كان من المعتقد أن  $S'_i$  ترتبط مع  $u_i$ ) ، نحصل على

$$\hat{I}_i = 8.28 + 1.58S'_{i-1} \quad R^2 = 0.975 \quad d = 1.49 \quad r_{S_i S'_{i-1}} = 0.993$$

(1.59) (22.66)

لاحظ أن تقديرات المعالم الجديدة أقرب إلى التقديرات الحقيقية عن تلك المقدرة في (ب) . إن تقديرات المعالم الجديدة هذه ما تزال متحيزة ، ولكنها الآن متسقة (أي أنها تقوّل إلى القيم الحقيقية للمعالم مع كبر حجم العينة) . يجب أيضاً ملاحظة أن قيمة  $d$  الجديدة تشير إلى عدم وجود ارتباط ذاتي . وطبعاً ، في الواقع العمل ليس معتاداً أن نعرف أي أخطاء في القياس قد تكون موجودة (وإلا كان من الممكن تصحيحها قبل إجراء الانحدار) . وأيضاً من الصعب أو من غير الممكن تحديد ما إذا كانت  $S'_i$  مرتبطة مع  $u_i$  .

٩ - ١٥ باستخدام بيانات جدول ٩ - ١٥ ، (أ) أجر انحدار  $S'_i$  على  $I_i$  للتغلب على الأخطاء في قياس  $S_i$  . (ب) كيف تقارن هذه النتائج مع تلك في المسألة ٩ - ١٤ ؟ (ج) ؟

(أ) حيث أن  $S_i$  فقط (أى المتغير المفسر) تتعرض لأخطاء القياس ، فإن المربعات الصغرى المعكوسة هي طريقة أخرى للحصول على تقديرات معامل متسقة . باجراء انحدار  $S'_i$  على  $I_i$  ، نحصل على

$$\hat{S}'_i = -7.17 + 0.71I_i \quad R^2 = 0.978 \\ (-2.03) \quad (24.79) \quad d = 0.74$$

$$\hat{b}_0 = -\frac{\hat{b}'_0}{\hat{b}'_1} = -\frac{(-7.17)}{0.71} = 10.10 \quad \text{و} \quad \hat{b}_1 = \frac{1}{\hat{b}'_1} = \frac{1}{0.71} = 1.41$$

حيث  $b_0$  و  $b_1$  تقديرات متسقة (ولكنها لا تزال متحيزة) لمعامل المقطع والميل لانحدار  $I_i$  على  $S_i$  .

(ب) أن استخدام المربعات الصغرى المعكوسة لا يعطى نتائج في نفس جودة التقديرات التي أعطتها طريقة المتغير الوسيط (انظر المسألة ٩ - ١٤ (ج) . ففي حالة المتغير الوسيط . كان تقدير معامل الميل أقرب للقيمة الحقيقية كما تم التخلص من الارتباط الذاتي . ولكن ، النتائج قد تختلف في حالات أخرى وفي جميع الأحوال ، فإننا في الواقع العمل كثير ما لا نعلم أى نوع من الأخطاء موجود ، وأى نوع من التعديل يناسبها ، وإلى أى حد تقترب المعامل المعادلة من قيم المعامل الحقيقية .

### مسائل اضافية

تعدد العلاقات الخطية :

٩ - ١٦ لماذا لا يمكن تقدير دالة الاستهلاك الآتية

$$C_t = b_0 + b_1 Y_{dt} + b_2 Y_{dt-1} + b_3 \Delta Y_{dt} + u_t$$

$$\text{حيث } \Delta Y_{dt} = Y_{dt} - Y_{dt-1} \text{ ؟}$$

الإجابة : لأن هناك تعدد خطي تام بين  $\Delta Y_{dt}$  من ناحية و  $Y_{dt}$  و  $Y_{dt-1}$  من ناحية أخرى . والنتيجة أن هناك ثلاث معادلات طبيعية مستقلة فقط . وأربع معاملات يجب تقديرها وبالتالي لا يكون هناك حل وحيد ممكن .

٩ - ١٧ يعطى جدول ٩ - ١٦ بيانات افتراضية عن الإنفاق الاستهلاكي  $C$  ، الدخل المتاح ،  $Y_d$  ، والثروة  $W$  ، كلها بالآلاف دولار ، لعينة من ١٥ أسرة . (أ) أجر انحدار  $C$  على  $Y_d$  و  $W$  ثم أوجد  $R^2$  و  $r_{Y_d W}$  (ب) أجر انحدار  $C$  على  $Y_d$  فقط (ج) أجر انحدار  $C$  على  $W$  فقط (د) ما هي النتائج التي تصل إليها مما سبق فيما يتعلق بالتعدد الخطي ؟

جدول ٩ - ١٦ الإنفاق الاستهلاكي ، الدخل المتاح ، والثروة لعدد ١٥ أسرة

| Family | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11  | 12 | 13  | 14 | 15 |
|--------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|----|
| $C$    | 32  | 11 | 15 | 17 | 16 | 13 | 18 | 20 | 14 | 17 | 41  | 17 | 33  | 20 | 18 |
| $Y_d$  | 36  | 12 | 16 | 18 | 17 | 14 | 20 | 23 | 15 | 18 | 50  | 19 | 37  | 22 | 19 |
| $W$    | 144 | 47 | 63 | 70 | 67 | 52 | 79 | 90 | 58 | 70 | 204 | 76 | 149 | 86 | 76 |

الإجابة :

$$\hat{C} = 1.54 + 1.41 Y_d - 0.15 W \quad R^2 = 0.994 \\ (1.94) \quad (-0.83) \quad \bar{R}^2 = 0.993 \quad r_{Y_d W} = 0.995 \quad (أ)$$

$$\hat{C} = 2.13 + 0.80 Y_d \quad R^2 = 0.994 \quad (ب) \\ (4.98) \quad (46.25)$$

$$\hat{C} = 2.92 + 0.19 W \quad R^2 = 0.992 \quad (ج) \\ (6.37) \quad (41.46)$$

(د) يوجد تعدد خطي مرتفع .

٩ - ١٨ كيف يمكن استخدام معلومات مسبقة بأن  $b_2 = 0.25b_1$  للتغلب على مشكلة التعدد الخطي في المسألة ٩ - ١٧؟ (ب) أعد تقدير الانحدار في المسألة ٩ - ١٧ باستخدام المعلومات المسبقة المشار إليها في (أ) للتغلب على مشكلة التعدد الخطي . (ج) ما هي قيمة  $\hat{b}_1$  ؟  $\hat{b}_2$  ؟

الإجابة : (أ) بتقدير  $C = b_0 + b_1Z$  ، حيث  $Z = Y_d + 0.25W$

$$\hat{C} = 2.53 + 0.39Z \quad R^2 = 0.993$$

(5.75) (44.10)

$$\hat{b}_1 = 0.39 \text{ and } \hat{b}_2 = 0.10 \quad (\text{ج})$$

٩ - ١٩ يعطى جدول ٩ - ١٧ إجمالى التكوين الرأسمالى الثابت  $Y_i$  ، والمبيعات  $X_i$  كليهما بالآلاف دولار لعدد 35 شركة في إحدى الصناعات . أجز انحدار  $Y_i$  على  $X_i$  (أ) لكل البيانات (ب) لعدد 14 مشاهدة الأولى فقط وسجل مجموع مربعات الخطأ ،  $ESS_1$  ، (ج) لعدد 14 مشاهدة الأخيرة فقط ، وسجل مجموع مربعات الخطأ ،  $ESS_2$  . (د) اعتبر وجود اختلاف التباين .

جدول ٩ - ١٧ إجمالى التكوين الرأسمالى الثابت والمبيعات لعدد 35 شركة

| إجمالى التكوين الرأسمالى الثابت |      |      |      |      |      |      | المربعات |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|------|----------|
| 30.2                            | 30.5 | 30.5 | 30.7 | 30.9 | 31.2 | 31.2 | 100      |
| 31.5                            | 31.5 | 31.9 | 32.3 | 32.8 | 33.4 | 33.4 | 150      |
| 35.1                            | 35.7 | 36.3 | 36.9 | 37.4 | 37.4 | 37.8 | 200      |
| 38.4                            | 39.1 | 40.2 | 40.8 | 42.1 | 42.9 | 43.2 | 250      |
| 44.3                            | 44.9 | 45.2 | 45.9 | 46.5 | 47.7 | 48.5 | 300      |

$$\hat{Y}_i = 21,637 + 0.079X_i \quad R^2 = 0.94$$

(28.50) (22.00)

$$\hat{Y}_i = 27,429 + 0.033X_i \quad R^2 = 0.66$$

(31.51) (4.85)  $ESS_1 = 4.897$

$$\hat{Y}_i = 15,029 + 0.104X_i \quad R^2 = 0.73$$

(2.99) (5.71)  $ESS_2 = 34.694$

(د) حيث أن  $ESS_2/ESS_1 = 7.08$  تتجاوز  $F_{11,11} = 2.82$  عند مستوى معنوية 5% ، فإن هناك اختلافاً في التباين .

٩ - ٢٠ بافترض أن تباين الخطأ يتناسب مع  $X_i^2$  في المسألة ٩ - ١٩ : (أ) صحح لاختلاف التباين ، (ب) ما هي القيمة الجديدة للمقطع ، وقيمة معلمة الميل الجديدة المرتبطة بالمتغير  $X_i$  ؟ كيف تقارن بالقيم المناظرة قبل التحويل ؟

$$\hat{Y}_i/X_i = 0.074 + 23,187(1/X_i) \quad R^2 = 0.98$$

(20.41) (42.16)

(ب) القيمة الجديدة للمقطع هي 23,187 (بدلاً من 21,637) ومعلمة الميل الجديدة الخاصة بالمتغير  $X_i$  هي الآن 0.074 (بدلاً من 0.079) .

٩ - ٢١ يعطى جدول ٩ - ١٨ مستوى إجمالى التكوين الرأسمالى الثابت  $Y$  ، والمبيعات  $X_1$  ، كليهما بالآلاف دولار ، ورقم قياسي للانفاجية  $X_2$  ، لعدد 25 شركة في إحدى الصناعات . من المتوقع أن  $Y$  سوف ترتبط مباشرة مع كل من  $X_1$  و  $X_2$  .

أجر انحدار  $Y$  على  $X_1$  و  $X_2$  (أ) لكل العينة ، (ب) لعدد 14 مشاهدة المقابلة لأصغر قيم  $X_2$  وسجل  $ESS_1$  و (ج) لعدد 14 مشاهدة المقابلة لأكبر قيم  $X_2$  وسجل  $ESS_2$  . (د) اختبر وجود اختلاف التباين .

$$\hat{Y} = 12,089 + 0.017X_1 + 1.608X_2 \quad R^2 = 0.99 \quad \text{(أ) الإجابة}$$

(2.53) (8.93)

$$\hat{Y} = 33,332 + 0.044X_1 - 0.784X_2 \quad R^2 = 0.95 \quad \text{(ب)}$$

(3.91) (-0.99)  $ESS_1 = 0.658$

$$\hat{Y} = 5,874 + 0.010X_1 + 2.115X_2 \quad R^2 = 0.99 \quad \text{(ج)}$$

(0.30) (2.56)  $ESS_2 = 2.126$

جدول ٩ - ١٨ إجمال التكوين الرأسمالي الثابت ، المبيعات ، والإنتاجية في 35 شركة

| الشركة | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $Y$    | 30.9 | 31.5 | 43.2 | 36.9 | 44.3 | 30.5 | 32.3 | 42.9 | 31.2 | 39.1 | 35.7 | 40.8 |
| $X_1$  | 135  | 150  | 300  | 225  | 310  | 105  | 170  | 285  | 145  | 250  | 205  | 275  |
| $X_2$  | 10.3 | 10.8 | 16.4 | 12.9 | 16.7 | 10.0 | 10.9 | 15.9 | 10.6 | 14.6 | 12.1 | 15.5 |
| الشركة | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   | 24   |
| $Y$    | 31.2 | 42.1 | 32.8 | 36.3 | 37.4 | 30.5 | 33.4 | 37.4 | 44.9 | 33.4 | 45.2 | 30.2 |
| $X_1$  | 140  | 280  | 180  | 215  | 235  | 110  | 190  | 230  | 315  | 195  | 320  | 100  |
| $X_2$  | 10.5 | 15.6 | 10.9 | 12.5 | 13.8 | 10.0 | 11.1 | 13.1 | 17.1 | 11.3 | 17.3 | 9.9  |
| الشركة | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   | 30   | 31   | 32   | 33   | 34   | 35   |      |
| $Y$    | 45.9 | 46.8 | 35.1 | 40.2 | 47.9 | 30.7 | 38.1 | 49.3 | 31.9 | 37.8 | 31.5 |      |
| $X_1$  | 330  | 345  | 200  | 260  | 350  | 120  | 250  | 355  | 165  | 245  | 150  |      |
| $X_2$  | 17.5 | 17.9 | 11.5 | 14.9 | 18.3 | 10.1 | 14.1 | 18.5 | 10.8 | 13.9 | 10.7 |      |

(د) حيث أن  $ESS_2/ESS_1 = 3.23$  تجاوز  $F_{11,11} = 2.82$  عند مستوى معنوية 5% ، فهناك اختلاف في التباين .

٩ - ٢٢ بافترض أن تباين الخطأ يتناسب مع  $X_2^2$  في المسألة ٩ - ٢١ (أ) صحح لاختلاف التباين . (ب) ما هي القيمة الجديدة للمقطع ومعاملات الميل للمتغيرات  $X_1$  و  $X_2$  ؟ كيف تقارن بالقيم السابقة قبل التحويل ؟

$$\hat{Y}/X_2 = 1.622 + 0.016(X_1/X_2) + 12,200(1/X_2) \quad R^2 = 0.94 \quad \text{(أ) الإجابة}$$

(10.53) (2.85)

(ب) قيمة المقطع الجديدة هي 12,000 (بدلاً من 12,089) ، بينما القيمة الجديدة لمعامل ميل  $X_1$  هي 0.016 (بدلاً من 0.017) وللمعامل ميل  $X_2$  هي 1.622 (بدلاً من 1.608) .

الارتباط الذاتي :

٩ - ٢٣ يعطى جدول ٩ - ١٩ إنفاق قطاع الأعمال على المصانع والأجهزة الجديدة للمرافق العامة  $Y$  ، ومستوى  $GNP$  و  $X_1$  ، كليهما بالبلليون دولار ، والرقم القياسي لأسعار السلع  $X_2$  للولايات المتحدة من ١٩٦٢ إلى ١٩٧٩ . (أ) أجر انحدار  $Y$  على  $X_1$  . هل هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستويات معنوية 5% و 1% ؟ (ب) أجر انحدار  $Y_t$  على  $X_{t-1}$  و  $X_{t-2}$  . ما هي قيمة  $p$  ؟ (ج) أجر انحدار  $Y_t^*$  على  $X_{t-1}^*$  للتصحيح بسبب الارتباط الذاتي ، حيث  $Y_t^* = Y_t - X_{t-1}$  و  $X_t^* = X_t - X_{t-1}$  . هل هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 1% ؟ عند مستوى معنوية 5% ؟

جدول ٩ - ١٩ انفاق قطاع الأعمال على المصانع والأجهزة الجديدة للمرافق العامة ، GNP (بالبيون دولار) ، والرقم القياسي لأسعار السلع : الولايات المتحدة ، ١٩٦٢ - ١٩٧٩ .

| السنة          | 1962    | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    | 1970    |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Y              | 4.9     | 5.0     | 5.5     | 6.3     | 7.4     | 8.7     | 10.2    | 11.6    | 13.1    |
| X <sub>1</sub> | 563.8   | 594.7   | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   | 982.4   |
| X <sub>2</sub> | 92.8    | 93.6    | 94.6    | 95.7    | 98.2    | 100.0   | 103.7   | 108.4   | 113.5   |
| السنة          | 1971    | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| Y              | 15.3    | 17.0    | 18.7    | 20.6    | 20.1    | 22.3    | 25.8    | 29.5    | 33.2    |
| X <sub>1</sub> | 1,063.4 | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |
| X <sub>2</sub> | 117.4   | 120.9   | 129.9   | 145.5   | 158.4   | 165.2   | 174.7   | 187.1   | 208.4   |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة واشنطن ، ١٩٨٠ صفحة ٢٥٥ ، صفحة ٢٦٢ .

$$\hat{Y}_t = -3.462 + 0.016X_{1t} \quad R^2 = 0.98 \quad \text{الإجابة : (أ)} \\ (-5.09) \quad (30.23) \quad d = 0.38$$

حيث أن  $d = 0.38$  ، فهناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند كل من مستويات المعنوية 5% و 1% .

$$\hat{Y}_t = -0.342 + 0.821Y_{t-1} + 0.016X_{1t} - 0.013X_{1t-1} \quad R^2 = 0.99 \quad \text{(ب)} \\ (4.77) \quad (1.33) \quad (-0.89) \quad \hat{\rho} \approx 0.82$$

$$\hat{Y}_t^* = -0.446 + 0.015X_{1t}^* \quad R^2 = 0.92 \quad \text{(ج)} \\ (-1.01) \quad (13.64) \quad d = 1.36$$

لا يوجد دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستوى المعنوية 1% ، ولكن الاختبار غير حاسم عند مستوى المعنوية 5% .

٩ - ٢٤ باستخدام بيانات جدول ٩ - ١٩ (أ) أجر انحدار  $Y_t$  على  $X_{1t}$  و  $X_{2t}$  . هل هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 5% و 1% ؟ (ب) إذا وجد دليل في (أ) على وجود ارتباط ذاتي ، اوجد قيمة  $\rho$  التي يجب استخدامها لتحويل المتغيرات لتصحيح الارتباط الذاتي (ج) إذا وجد دليل على وجود ارتباط ذاتي في (أ) ، أجر انحدار  $Y_t^*$  على  $X_{1t}^*$  و  $X_{2t}^*$  لتصحيح الارتباط الذاتي . هل هناك دليل على ارتباط باق عند مستوى معنوية 1% ؟ عند مستوى معنوية 5% ؟

$$\hat{Y}_t = 4.113 + 0.026X_{1t} - 0.152X_{2t} \quad R^2 = 0.99 \quad \text{الإجابة : (أ)} \\ (6.12) \quad (-2.39) \quad d = 0.62$$

هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 5% و 1% (ب)  $\rho = 0.62$  (ج)

$$\hat{Y}_t^* = 0.196 + 0.020X_{1t}^* - 0.073X_{2t}^* \quad R^2 = 0.97 \\ (10.95) \quad (-2.82) \quad d = 1.33$$

ليس هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 1% ، ولكن الاختبار غير حاسم عند مستوى معنوية 5% .

٩ - ٢٥ باستخدام بيانات جدول ٩ - ١٩ ، (أ) أجر انحدار  $\Delta Y_t$  على  $\Delta X_{1t}$  ، (ب) هل هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي عند مستوى معنوية 1% و 5% ؟ (ج) ماذا يبرر هذا التحويل للمتغيرات ؟ هل يظل هذا التحويل له ما يبرره إذا دخلت كل من  $X_{1t}$  و  $X_{2t}$  في الانحدار ؟

$$\Delta Y_t = 0.015\Delta X_{1t} \quad R^2 = 0.63 \quad \text{الإجابة : (أ)} \\ (10.86) \quad d = 1.55$$

(ب) ليس هناك دليل الآن على وجود ارتباط ذاتي عند مستويات معنوية 1% و 5%. ولكن هناك خطأ في تحديد النموذج لأن  $X_{2t}$  غير داخلة في الانحدار. (ج) هذا التحويل له ما يبرره فقط عندما يكون  $X_{1t}$  وحدها في الانحدار، لأن في هذه الحالة قيمة  $\rho$  قريبة من 1 ( $\hat{\rho} = 0.82$ ) (انظر المسألة ٩ - ٢٣ (ب)). وهذا التحويل مبرراته أقل عندما تدخل  $X_{1t}$  و  $X_{2t}$  في الانحدار لأنه عندئذ تكون  $\hat{\rho} = 0.62$  فقط (انظر المسألة ٩ - ٢٤ (ب)).

#### أخطاء في المتغيرات :

٩ - ٢٦ يطلى جدول ٩ - ٢٠ المخزون  $Y$ ، الشحنات الفعلية  $X$ ، وقيم افتراضية للمتغير  $X$  تتضمن أخطاء في القياس  $X'$ ، كلها بالبيون دولار، في صناعة السلع المعمرة الأمريكية من ١٩٦٣ إلى ١٩٧٨. من المفترض أن  $Y$  و  $X$  خالية من أخطاء القياس. (أ) أجر انحدار  $Y_t$  على  $X_t$  (ب) أجر انحدار  $Y_t$  على  $X'_t$  (بافتراض أن  $X$  غير متاحة). ما نوع التحيز الناتج في التقديرات باستخدام  $X'$  بدلا من  $X$ ؟ (ج) استخدم متغيراً بسيطاً للحصول على تقديرات معالم متسقة، على فرض أن  $X_t$  مرتبطة مع  $u_t$ . كيف تقارن تقديرات المعالم هذه مع تلك في (ب).

$$\hat{Y}_t = 3.01 + 2.03X_t \quad R^2 = 0.966 \quad \text{الإجابة : (أ)} \\ (0.78) \quad (19.88) \quad d = 0.78$$

$$\hat{Y}_t = 6.54 + 1.75X'_t \quad R^2 = 0.966 \quad \text{(ب)} \\ (1.78) \quad (19.90) \quad d = 0.79$$

جدول ٩ - ٢٠ المخزون والشحنات (بالبيون دولار) في صناعة السلع المعمرة الأمريكية ، ١٩٦٣ - ١٩٧٨ .

| السنة | 1963 | 1964 | 1965 | 1966  | 1967  | 1968  | 1969  | 1970  |
|-------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Y$   | 35.9 | 38.5 | 42.3 | 49.9  | 55.0  | 58.9  | 64.7  | 66.8  |
| $X$   | 18.3 | 19.6 | 22.2 | 24.6  | 25.3  | 27.7  | 29.5  | 28.2  |
| $X'$  | 19.2 | 20.7 | 23.8 | 26.5  | 27.3  | 30.1  | 32.2  | 30.7  |
| السنة | 1971 | 1972 | 1973 | 1974  | 1975  | 1976  | 1977  | 1978  |
| $Y$   | 66.3 | 70.3 | 81.4 | 101.9 | 101.8 | 109.1 | 115.6 | 129.2 |
| $X$   | 30.0 | 34.0 | 39.7 | 44.3  | 43.7  | 50.7  | 58.0  | 66.5  |
| $X'$  | 32.8 | 37.4 | 44.1 | 49.4  | 48.7  | 56.8  | 65.3  | 75.1  |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٥٧ .

في وجود خطأ في قياس قيمة الشحنات ،  $b_0 > b_0$  بينما  $b_1 < b_1$  (ج) باستخدام  $X'_{t-1}$  كتغير بسيط للمتغير  $X'_t$  ، نحصل على :

$$\hat{Y}_t = 2.55 + 2.04X'_{t-1} \quad R^2 = 0.980 \\ (0.81) \quad (25.11) \quad d = 1.68 \\ r_{X'_t X'_{t-1}} = 0.987$$

تقديرات المعالم الجديدة أقرب للمعالم الحقيقية من تلك السابق الحصول عليها في (ب) .

٩ - ٢٧ باستخدام بيانات جدول ٩ - ٢٠ ، (أ) أجز انحدار  $X'_i$  على  $Y_i$  للتغلب على أخطاء القياس في  $X_i$  . متى تكون هذه الطريقة مناسبة ؟ (اب) كيف تقارن النتائج في (أ) بتلك في مسألة ٩ - ٢٦ (ج) ؟  
الإجابة : (أ)

$$\begin{aligned} X'_i &= -2.29 + 0.55 Y_i & R^2 &= 0.966 \\ &(-1.03) \quad (19.90) & d &= 0.80 \end{aligned}$$

التقديرات المتسقة لمعامل انحدار  $Y_i$  على  $X'_i$  هي  $b_0 = 4.16$  و  $b_1 = 1.82$  وتكون المربعات الصغرى المكموسة مناسبة عندما يتعرض المتغير المفسر فقط لأخطاء القياس .

(ب) استخدام المربعات الصغرى المكموسة لا يعطى نتائج بنفس جودة النتائج الناجمة عن استخدام طريقة المتغير الوسيط (انظر المسألة ٩ - ٢٦ (ج) ) .

## الفصل العاشر

### طرق المعادلات الآتية

#### ١٠-١ نماذج المعادلات الآتية

عندما يكون المتغير التابع في معادلة ما متغيراً مفسراً في معادلة أخرى ، يكون لدينا نظام أو نموذج معادلات آتية . المتغيرات التابعة في نظام معادلات آتية تسمى أيضاً بالمتغيرات الداخلية . بينما تسمى المتغيرات التي تحددها عوامل خارج النموذج بالمتغيرات الخارجية . وهناك معادلة سلوكية أو هيكلية لكل متغير داخلي في النظام ( أنظر مثال ١ ) . واستخدام OLS لتقدير المعادلات الهيكلية يؤدي إلى تقديرات معالم متحيزة وغير متسقة . ويشار إلى هذا بتحيز المعادلات الآتية . وللحصول على تقديرات معالم متسقة ، يجب الحصول أولاً على معادلات الشكل المختزل للنموذج . وهذه المعادلات تعبر عن كل متغير داخلي في النظام كدالة فقط في المتغير الخارجي للنموذج ( أنظر مثال ٢ ) .

مثال ١ - المعادلتان الآتيتان تمثلان نموذجاً كلياً بسيطاً

$$\begin{aligned} M_t &= a_0 + a_1 Y_t + u_{1t} \\ Y_t &= b_0 + b_1 M_t + b_2 I_t + u_{2t} \end{aligned}$$

حيث  $M_t$  هي عرض النقود في الفترة  $t$  ،  $Y_t$  هي الدخل ،  $I_t$  هي الاستثمار . وحيث أن  $M$  تعتمد على  $Y$  في المعادلة الأولى وتعتمد  $Y$  على  $M$  ( وكذلك  $I$  ) في المعادلة الثانية ،  $M$  و  $Y$  تتحددان معاً ، فإن لدينا نموذج معادلات آتية . إن  $M$  و  $Y$  متغيران داخليان ، بينما  $I$  متغير خارجي أي يتحدد خارج النموذج . والتغير في  $u_{1t}$  يؤثر على  $M_t$  في المعادلة الأولى . وهذا بدوره يؤثر على  $Y_t$  في المعادلة الثانية . وكتيجة يكون  $Y$  و  $u_{1t}$  مترابطين ، مؤدياً إلى تقديرات OLS متحيزة وغير متسقة لمعادلة  $M$  ( و  $Y$  ) .

مثال ٢ - يمكن اشتقاق معادلة الشكل المختزل الأولى بالتمويض بالمعادلة الثانية في المعادلة الأولى وإعادة الترتيب .

$$\begin{aligned} M_t &= a_0 + a_1(b_0 + b_1 M_t + b_2 I_t + u_{2t}) + u_{1t} \\ M_t &= \frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_1 b_2}{1 - a_1 b_1} I_t + \frac{u_{1t} + a_1 u_{2t}}{1 - a_1 b_1} \end{aligned}$$

$$M_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + v_{1t} \quad \text{أو}$$

ويمكن اشتقاق معادلة الشكل المختزل الثانية بالتمويض بالمعادلة الأولى في المعادلة الثانية وإعادة الترتيب :

$$\begin{aligned} Y_t &= b_0 + b_1(a_0 + a_1 Y_t + u_{1t}) + b_2 I_t + u_{2t} \\ Y_t &= \frac{a_0 b_1 + b_0}{1 - a_1 b_1} + \frac{b_2}{1 - a_1 b_1} I_t + \frac{b_1 u_{1t} + u_{2t}}{1 - a_1 b_1} \end{aligned}$$

$$Y_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + v_{2t} \quad \text{أو}$$

#### ١٠-٢ التمييز

يشير التمييز إلى إمكانية حساب المعالم الهيكلية لنموذج المعادلات الآتية من معالم الشكل المختزل . وتكون معادلة ما في نظام مميزة بالفضبط إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة مساوياً لعدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً ١ .



ولكن ، تكون معادلة ما في نظام زائدة التمييز (أو ناقصة التمييز) إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة أكبر من (أو أصغر من) عدد المتغيرات الداخلية الداخلة في المعادلة 1 (انظر مثال ٣) . وبالرغم من أن هذا شرط ضروري وليس كافياً للتمييز ، فإنه عادة ما يعطى الإجابة الصحيحة (لنظر المسألة ١٠-٥) ويمكن حساب معاملات هيكلية وحيدة من معاملات الشكل المختزل فقط للمعادلة المميزة بالضبط (انظر مثال ٤) .

مثال ٣ - معادلة عرض النقود ،  $M$  في مثال ١ مميزة بالضبط لأنها تستبعد متغيراً خارجياً واحداً ،  $1$  ، وتتضمن متغيرين داخليين ،  $M$  و  $Y$  . ولكن معادلة الدخل  $Y$  ، ناقصة التمييز لأنها لا تستبعد أى متغيرات خارجية . وإذا تضمنت المعادلة الثانية هذه متغيراً خارجياً خارجياً إضافياً  $G$  (الإنفاق الحكومي) ، فإن المعادلة الأولى ، معادلة  $M$  ، تكون زائدة التمييز ، لأن عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة في هذه الحالة يزيد عن عدد المتغيرات الداخلية ناقصاً 1 .

مثال ٤ - يمكن حساب قيمة وحيدة للمعامل الهيكلية للمعادلة  $M$  المميزة بالضبط في مثال ١ من معالم الشكل المختزل في مثال ٢ كالآتي :

$$a_0 = \pi_0 - a_1 \pi_2 = \frac{a_0(1 - a_1 b_1)}{1 - a_1 b_1} \quad \text{و} \quad a_1 = \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\frac{a_1 b_2}{1 - a_1 b_1}}{\frac{b_2}{1 - a_1 b_1}}$$

### ٣-١٠ التقدير : المربعات الصغرى غير المباشرة

المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) هي طريقة لحساب قيمة المعالم الهيكلية للمعادلات المميزة بالضبط . وتتضمن ILS استخدام OLS لتقدير معادلات الشكل المختزل للنظام ثم استخدام المعاملات المقدرة لحساب المعاملات الهيكلية . ولكن ، ليس من السهل حساب الأخطاء المعيارية للمعامل الهيكلية ، كما لا يمكن استخدام ILS في حالات التمييز الزائد .

مثال ٥ - يعطى جدول ١٠-١ عرض النقود ( $M$  = العملة زائداً الودائع تحت الطلب) ،  $Y$  ،  $GNP$  ، إجمالي الاستثمار المحلي الخاص ،  $I$  ، ومشتريات الحكومة من السلع والخدمات  $G$  ، كلها بالبيون دولار ، للولايات المتحدة من ١٩٦٢ إلى ١٩٧٩ (سوف تستخدم  $G$  في مثال ٦) . معادلات الشكل المختزل المقدرة لمثال ٢ هي :

جدول ١٠-١ عرض النقود ،  $GNP$  ، الاستثمار والإنفاق الحكومي (ببلايين الدولارات) : الولايات المتحدة ، ١٩٦٢ ، ١٩٧٩ .

| السنة | 1962    | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    | 1970    |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $M$   | 150.9   | 156.5   | 163.7   | 171.4   | 175.8   | 187.4   | 202.5   | 209.0   | 219.7   |
| $Y$   | 563.8   | 594.7   | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   | 982.4   |
| $I$   | 85.2    | 90.2    | 96.6    | 112.0   | 124.5   | 120.8   | 131.5   | 146.2   | 140.8   |
| $G$   | 118.0   | 123.7   | 129.8   | 138.4   | 158.7   | 180.2   | 198.7   | 207.9   | 218.9   |
| السنة | 1971    | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| $M$   | 233.9   | 255.3   | 270.5   | 283.2   | 295.4   | 313.8   | 338.7   | 361.5   | 382.1   |
| $Y$   | 1,063.4 | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |
| $I$   | 160.0   | 188.3   | 220.0   | 214.6   | 190.9   | 243.0   | 303.3   | 351.5   | 386.2   |
| $G$   | 233.7   | 253.1   | 269.5   | 302.7   | 338.4   | 361.3   | 396.2   | 435.6   | 476.1   |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، مكتب الولايات المتحدة للطباعة واشتطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٧١ ، صفحة ٢٠٣ .

$$\hat{M}_t = 95.8602 + 0.8004I_t, \quad R^2 = 0.944$$

(9.72)      (16.48)

$$\hat{Y}_t = 75.7767 + 6.0608I_t, \quad R^2 = 0.970$$

(1.41)      (22.92)

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\pi}_1}{\hat{\pi}_3} = \frac{0.8004}{6.0608} = 0.1321$$

$$\hat{a}_0 = \hat{\pi}_0 - a_1\hat{\pi}_2 = 95.8602 - 0.1321(75.7767) = 85.8501$$

وعليه تكون معادلة  $M$  في مثال ١ المقدرة باستخدام ILS

$$\hat{M}_t = 85.8501 + 0.1321Y_t$$

ونفس المعادلة مقدرة ( خطأ ) باستخدام OLS هي

$$\hat{M}_t = 84.7943 + 0.1330Y_t, \quad R^2 = 0.986$$

(16.62)      (33.95)

#### ١٠- التقدير : المربعات الصغرى على مرحلتين

المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) هي طريقة لتقدير معالم هيكلية متسقة للمعادلات زائدة التمييز ( بالنسبة للمعادلات المميزة بالضبط ، تعطي 2SLS نفس نتائج ILS ولكنها تعطي أيضاً الأخطاء المعيارية للمعالم الهيكلية المقدرة ) . وتتضمن 2SLS إجراء انحدار كل متغير داخل على كل المتغيرات الخارجية في النظام ثم تستخدم القيم المتوقعة للمتغيرات الداخلية لتقدير المعادلات الهيكلية للنموذج .

مثال ٦ - إذا تضمنت المعادلة الثانية ، معادلة  $Y$  ، في مثال  $G$  ( الإنفاق الحكومي ) كتغير مفسر إضافي ، تصبح المعادلة الأولى ، معادلة  $M$  ، زائدة التمييز ( انظر مثال ٣ ) ويمكن تقديرها باستخدام 2 SLS . المرحلة الأولى هي

$$\hat{Y}_t = -27.1686 + 1.8481I_t + 3.4748G_t, \quad R^2 = 0.998$$

(-1.72)      (6.26)      (14.68)

المرحلة الثانية هي :

$$\hat{M}_t = 84.3989 + 0.1333Y_t, \quad R^2 = 0.989$$

(18.74)      (38.53)

$\hat{a}_1 = 0.1333$  هي تقدير متسق للمعلمة  $a_1$  .

#### مسائل محلولة

##### نماذج المعادلات الآتية :

- ١٠ - ١ ماذا يقصد بالآتي : ( أ ) نموذج أو نظام المعادلات الآتية ؟ ( ب ) المتغيرات الداخلية ؟ ( ج ) المتغيرات الخارجية ( د ) المعادلات الهيكلية ؟ ( هـ ) تخمين المعادلات الآتية ؟ ( و ) معادلات الشكل المختزل ؟
- ( أ ) يشير نموذج أو نظام المعادلات الآتية إلى الحالة التي يكون فيها متغير تابع في معادلة أو أكثر هو متغير مفسر في معادلة أخرى في النظام . أى أن قيم  $Y$  لا تتحدد فقط عن طريقة قيم  $X$  ، ولكن بعضاً من قيم  $X$  تتحدد بدورها عن طريق قيم  $Y$  بحيث أن قيم  $Y$  وقيم  $X$  تتحدد آنياً معاً .

(ب) المتغيرات الداخلية هي المتغيرات التابعة في نظام من المعادلات الآتية . وهذه هي المتغيرات التي يحددها النظام ، بالرغم من أنها تظهر أيضاً كتغيرات مفسرة في بعض معادلات النظام .

(ج) المتغيرات الخارجية هي تلك المتغيرات التي تتحدد خارج النموذج ، وتتضمن هذه أيضاً المتغيرات الداخلية المبطة ، حيث أن قيمها تكون معلومة فعلاً في أى فترة زمنية معينة . وأحياناً تسمى المتغيرات الخارجية والمتغيرات الداخلية المبطة بالمتغيرات المحددة سلفاً .

(د) المعادلات الهيكلية أو السلوكية تصف هيكل اقتصاد ما أو سلوك بعض الوكلاء الاقتصاديين مثل المستهلكين أو المنتجين . وهناك معادلة هيكلية واحدة لكل متغير داخل في النظام . وتسمى معاملات المعادلات الهيكلية بالمعالم الهيكلية وتبر عن الأثر المباشر لكل متغير مفسر على المتغير التابع .

(هـ) يشير تعيين المعادلات الآتية إلى التقدير الزائد أو التقدير الناقص للمعالم الهيكلية التي يتم الحصول عليها عند تطبيق OLS على المعادلات الهيكلية لنموذج المعادلات الآتية . وينتج هذا التحيز لأن هذه المتغيرات الداخلية في النظام والتي تظهر أيضاً كتغيرات مفسرة ترتبط مع حدود الخطأ ، وبالتالي تخرق الفرض الخامس من فروض OLS ( انظر المسألة ٦ - ٤ ) .

(و) معادلات الشكل المختزل يتم الحصول عليها بحل نظام المعادلات الهيكلية بحيث يعبر عن كل متغير داخل في النظام كدالة فقط في متغيرات خارجية أو المحددة سلفاً في النظام . وحيث أن المتغيرات الخارجية للنظام لا ترتبط مع حدود الخطأ ، فإن OLS تعطى تقديرات متسقة لمعالم الشكل المختزل . وتقريب هذه إجمالاً الآثار المباشرة وغير المباشرة للتغير في المتغيرات الخارجية على المتغيرات الداخلية ويمكن استخدامها للحصول على تقديرات معالم هيكلية متسقة .

١٠ - ٢ تمثل المعادلتان الهيكليتان التاليتان نموذج عرض - طلب بسيط :

$$\begin{aligned} Q_t &= a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + u_{1t}, & a_1 < 0 \text{ and } a_2 > 0 & : \text{الطلب} \\ Q_t &= b_0 + b_1 P_t + u_{2t}, & b_1 > 0 & : \text{العرض} \end{aligned}$$

حيث  $Q$  هي الكمية ،  $P$  هي السعر ،  $Y$  دخل المستهلك . من المفترض أن كل الكمية المعروضة تباع على نهاية العام ومن ثم فإن  $Q_t$  تمثل كلا من الكمية المباعة والمشتراة خلال العام  $t$  ( أ ) لماذا يعتبر هذا نموذج معادلات آتية ؟ (ب) ما هي المتغير الداخلية والمتغيرات الخارجية في النظام ؟ (ج) لماذا يؤدي استخدام OLS في تقدير معادلتى العرض والطلب تقديرات معالم متحيزة وغير متسقة ؟

(أ) يمثل نموذج العرض - الطلب المعطى نظام معادلات آتية للسوق لأن  $Q$  و  $P$  تتحددان معاً وبالتبادل . فإذا كان السعر أقل من سعر التوازن ، فإن الكمية المطلوبة تتجاوز الكمية المعروضة ، والعكس بالعكس . عند التوازن ، يقطع منحنى الطلب ( السالب الميل ) منحنى العرض ( الموجب الميل ) ويحددان معاً أو آتياً قيم  $Q$  و  $P$  ( التوازنية ) .

(ب) المتغيرات الداخلية للنموذج هي  $Q$  و  $P$  . هذه هي المتغيرات التي تتحدد داخل النموذج :  $Y$  هي المتغير الخارجى الوحيد في النموذج ( أى أنه حدد خارج النموذج ) .

(ج) حيث أن المتغير الداخلى  $P$  هو أيضاً متغير مفسر في كل من معادلتى العرض والطلب ، فإن  $P$  ترتبط مع  $u_{1t}$  في معادلة الطلب ومع  $u_{2t}$  في معادلة العرض . ويخرق هذا فرض OLS الخامس ، الذى يتطلب أن يكون المتغير

المفسر غير مرتبط مع حد الخطأ . وكنتيجة ، فإن تقدير معادلتى العرض والطلب باستخدام OLS يؤدي إلى تقديرات معالم ليس فقط متحيزة ولكن أيضاً غير متسقة ( أى أنها لا تؤول إلى المعالم الحقيقية مع زيادة حجم العينة ) .

١٠ - ٣ ( أ ) أوجد معادلات الشكل المختزل المناظرة للمعادلات الهيكلية في المسألة ١٠ - ٢ . ( ب ) لماذا تكون معادلات الشكل المختزل هذه مهمة ؟ ماذا تقيس معاملات الشكل المختزل في نموذج السوق هذا ؟

( أ ) لإيجاد معادلات الشكل المختزل ، يتم حل المعادلات الهيكلية في المسألة ١٠ - ٢ بالنسبة لكل من  $Q$  و  $P$  ( المتغيرات الداخلية ) كدالة في  $Y$  ( المتغير الخارجى ) فقط بتحويل معادلة المرض إلى دالة في  $P$  وبالتعويض في معادلة الطلب ، نحصل على :

$$P_t = \frac{1}{b_1} (Q_t - b_0 - u_{2t})$$

$$Q_t = a_0 + \frac{a_1}{b_1} (Q_t - b_0 - u_{2t}) + a_2 Y_t + u_{1t}$$

$$Q_t \left( \frac{b_1 - a_1}{b_1} \right) = \left( \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1} \right) + a_2 Y_t + \left( \frac{b_1 u_{1t} - a_1 u_{2t}}{b_1} \right)$$

$$Q_t = \left( \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} \right) + \left( \frac{b_1 a_2}{b_1 - a_1} \right) Y_t + \left( \frac{b_1 u_{1t} - a_1 u_{2t}}{b_1 - a_1} \right)$$

$$Q_t = \pi_0 + \pi_1 Y_t + v_{1t}$$

$$\pi_0 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} \quad \pi_1 = \frac{b_1 a_2}{b_1 - a_1} \quad v_{1t} = \frac{b_1 u_{1t} - a_1 u_{2t}}{b_1 - a_1} \quad \text{حيث}$$

بالتعويض بمعادلة الطلب في معادلة المرض كدالة  $P$  ، نحصل على :

$$P_t = \frac{1}{b_1} (a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + u_{1t} - b_0 - u_{2t})$$

$$P_t \left( \frac{b_1 - a_1}{b_1} \right) = \frac{1}{b_1} (a_0 + a_2 Y_t + u_{1t} - b_0 - u_{2t})$$

$$P_t = \left( \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \right) + \left( \frac{a_2}{b_1 - a_1} \right) Y_t + \left( \frac{u_{1t} - u_{2t}}{b_1 - a_1} \right)$$

$$P_t = \pi_2 + \pi_3 Y_t + v_{2t}$$

$$\pi_2 = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \quad \pi_3 = \frac{a_2}{b_1 - a_1} \quad v_{2t} = \frac{u_{1t} - u_{2t}}{b_1 - a_1} \quad \text{حيث}$$

( ب ) معادلات الشكل المختزل

$$Q_t = \pi_0 + \pi_1 Y_t + v_{1t}$$

$$P_t = \pi_2 + \pi_3 Y_t + v_{2t}$$

مهمة لأن  $Y_t$  غير مرتبطة مع  $v_{1t}$  ،  $v_{2t}$  ، وبالتالي يمكن الحصول على تقديرات متسقة لمعاملات الشكل المختزل ،  $\pi_0$  ،  $\pi_1$  ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$  بتطبيق OLS على معادلات الشكل المختزل . وتعطى  $\pi_1$  و  $\pi_3$  على التوالي مجموع التأثيرات المباشرة وغير المباشرة للتغير في  $Y$  على  $P$  و  $Q$  . إن التغير في  $Y$  يسبب انتقال منحى الطلب ، مما يؤثر على كل من  $P$  و  $Q$  التوازنية .

١٠ - ٤ معلومية نظام المعادلات الثلاث التالية ، ( أ ) اشرح لماذا لا يعتبر هذا نموذج معادلات آتية . ( ب ) هل يمكن استخدام OLS لتقدير كل معادلة في هذا النظام ؟ لماذا ؟

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= a_0 + a_1 X_t + u_{1t} \\ Y_{2t} &= b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2 X_t + u_{2t} \\ Y_{3t} &= c_0 + c_1 Y_{2t} + c_2 X_t + u_{3t} \end{aligned}$$

(أ) النظام السابق ليس آتياً لأنه بالرغم من أن  $Y_2$  دالة في  $Y_1$ ، فإن  $Y_1$  ليست دالة في  $Y_2$ . وبالمثل،  $Y_3$  دالة في  $Y_2$ ، ولكن  $Y_2$  ليست دالة في  $Y_3$ . وبالتالي، فإن خط السببية يجري في اتجاه واحد فقط وليس في اتجاهين. فإذا تم تقدير  $Y_1$  في المعادلة الأولى، فيمكن استخدام  $Y_1$  (بالإضافة إلى  $X$ ) لتقدير  $Y_2$  في المعادلة الثانية. وبالمثل متى تم تقدير  $Y_2$  في المعادلة الثانية، فيمكن استخدام  $Y_2$  (بالإضافة إلى  $X$ ) لتقدير  $Y_3$  في المعادلة الثالثة. وتسمى النماذج من هذا النوع بالنماذج المتواترة وليست آتية.

(ب) في المعادلة الأولى، المتغير الخارجي  $X$  غير مرتبط بحد الخطأ  $u_1$  وبالتالي فإن OLS تعطي تقديرات معالم غير متحيزة للمعادلة الأولى. في المعادلة الثانية،  $X$  و  $Y$  غير مرتبطتين مع  $u_2$  (أي أن  $Y_1$  مرتبطة مع  $u_1$  ولكن ليس مع  $u_2$ )، وبالتالي تعطي OLS تقديرات معالم غير متحيزة للمعادلة الثانية. وينطبق نفس الشيء على المعادلة الثالثة. أي أنه يمكن تقدير النماذج المتواترة بالتطبيق المتتابع لطريقة OLS.

التمييز :

١٠ - (أ) ماذا يقصد بالتمييز؟ (ب) متى تكون معادلة ما في نظام مميزة بالضبط؟ (ج) زائدة التمييز؟ (د) ناقصة التمييز؟ (هـ) هل هذه القواعد كافية للتمييز؟

(أ) يشير التمييز إلى إمكانية أو عدم إمكانية الحصول على المعالم الهيكلية لنظام معادلات آتية من معالم الشكل المختزل. ويمكن أن تكون معادلة ما في نظام مميزة بالضبط، أو زائدة التمييز، أو ناقصة التمييز. ويكون النظام ككل مميز بالضبط إذا كانت كل واحدة من معادلاته مميزة بالضبط.

(ب) تكون معادلة ما في نظام مميزة بالضبط إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة مساوياً لعدد المتغيرات الداخلية في المعادلة ناقصاً 1. في حالة المعادلة المميزة بالضبط، يمكن حساب قيمة وحيدة المعالم الهيكلية من معالم الشكل المختزل.

(ج) تكون معادلة ما في نظام زائدة التمييز إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة يتجاوز عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة ناقصاً 1. في حالة المعادلة زائدة التمييز، يمكن حساب أكثر من قيمة عديدة لبعض المعالم الهيكلية للمعادلة من معالم الشكل المختزل.

(د) تكون معادلة ما في نظام ناقصة التمييز أو غير مميزة إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة أصغر من عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة ناقصاً 1. وفي هذه الحالة لا يمكن حساب أى من المعالم الهيكلية من معالم الشكل المختزل.

(هـ) القواعد السابقة للتمييز (وتسمى شرط الترتيب) ضرورية وليست كافية. ولكن، حيث أن هذه القواعد تعطي النتائج الصحيحة في معظم الحالات، فإنها الشروط الوحيدة المستخدمة فعلاً هنا. الشرط الكافي للتمييز يمرر عنه شرط الرتبة، والذي ينص على أنه في نظام معادلات عددها  $G$  تكون معادلة معينة مميزة فقط إذا كان من الممكن الحصول على محدد واحد غير صفري درجته  $G - 1$ ، ذلك من معاملات المتغيرات المستبعدة من هذه المعادلة بالذات وإن كانت تدخل في المعادلات الأخرى في النموذج. وعندما يتوفر شرط الرتبة هذا، فإن شرط الترتيب يتوفر تلقائياً. ولكن العكس غير صحيح.

١٠ - ٦ بمعلومية نموذج العرض - الطلب التالى (أ) حدد ما إذا كان الطلب و / أو العرض ميزا بالضبط ، زائد التمييز ، أو ناقص التمييز .

$$\begin{aligned} Q_t &= a_0 + a_1 P_t + u_{1t} \quad a_1 < 0 & \text{الطلب :} \\ Q_t &= b_0 + b_1 P_t + u_{2t} \quad b_1 > 0 & \text{العرض :} \end{aligned}$$

(ب) ماذا يبين انحدار  $Q_t$  على  $P_t$  ؟

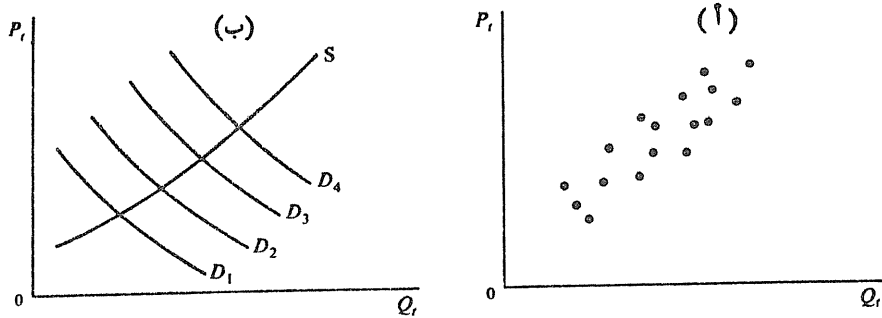
(أ) حيث أن نظام العرض - الطلب هذا لا يتضمن أى متغيرات خارجية ، فإن كلا من معادلتى العرض والطلب ناقصة التمييز . وفى هذه الحالة ، ليس هناك معادلات للشكل المختزل ، ولا يمكن حساب أى معاملات هيكلية . كل مشاهدة للسعر - الكمية تمثل كية التوازن المشتراة والمباعة عند السعر المعين وتناظر تقاطع منحنى العرض ومنحنى الطلب (المجهولين) .

(ب) لا يعطى انحدار  $Q_t$  على  $P_t$  منحنى طلب أو منحنى عرض ، وإنما هجين من العرض والطلب ، والذي يجب الإشارة إليه ببساطة كخط انحدار .

١٠ - ٧ بالإشارة إلى نموذج العرض - الطلب فى المسألة ١٠ - ٢ (أ) حدد ما إذا كانت دالة الطلب و / أو العرض مميزة بالضبط ، زائدة التمييز ، أو ناقص التمييز (ب) اعط تفسيراً بيانياً لإجابتك فى (أ) (ج) اشتق صيغة المعاملات الهيكلية من معادلات الشكل المختزل .

(أ) معادلة الطلب ناقصة التمييز لأنها لا تستبعد أى متغيرات خارجية . ولكن حيث أن هناك متغيراً خارجياً واحداً مستبعداً من معادلة العرض (أى ،  $Y$ ) ومتغيرين داخليين فى المعادلة (أى  $Q$  و  $P$ ) ، فإن معادلة العرض مميزة بالضبط .

(ب) التغيرات فى  $Y$  تؤدي إلى نقلات فى منحنى الطلب مما يحدد منحنى العرض . يوضح شكل ١٠ - ١ (أ) شكل انتشار افتراضى للنقاط الناتجة عن التغيرات فى  $Y$  وفى حدود الخطأ ، بينما يوضح شكل ١٠ - ١ (ب) منحنى العرض الناتج الذى يمكن أن يتولد .



شكل ١٠ - ١

(ج) يمكن حساب قيم وحيدة للمعاملات الهيكلية لمعادلة العرض (وهى المعادلة المميزة بالضبط) من معاملات الشكل المختزل فى المسألة ١٠ - ٣ كما يلى :

$$b_1 = \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\frac{b_1 a_2}{b_1 - a_1}}{\frac{a_2}{b_1 - a_1}}$$

$$b_0 = \pi_0 - b_1 \pi_2 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} - \frac{b_1 a_0 + b_0 b_1}{b_1 - a_1} = \frac{b_0(b_1 - a_1)}{b_1 - a_1}$$

ولا يمكن اشتقاق صيغة المعادلات الهيكلية لمعادلة الطلب من معاملات الشكل المختزل لأن دالة الطلب في هذا النموذج ناقصة التمييز .

١٠ - ٨ بالإشارة إلى نموذج الطلب - العرض المعطاة أدناه ، ( أ ) حدد ما إذا كانت دالة الطلب و / أو دالة العرض مميزة بالضبط ، زائدة التمييز ، أو ناقصة التمييز ( ب ) أو جد معادلات الشكل المختزل . ( ج ) اشتق صيغة المعالم الهيكلية .

$$\begin{aligned} Q_t &= a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + u_{1t}, & a_1 < 0, a_2 > 0 & \text{ : الطلب} \\ Q_t &= b_0 + b_1 P_t + b_2 T + u_{2t}, & b_1 > 0, b_2 \leq 0 & \text{ : العرض} \end{aligned}$$

حيث  $T$  = الاتجاه العام .

( أ ) معادلة العرض مميزة بالضبط ( كما في المسألة ١٠ - ٧ ) لأنها تستبعد متغيراً خارجياً واحداً  $Y$  ، وتتضمن متغيرين  $P$  و  $Q$  . معادلة الطلب أصبحت الآن أيضاً مميزة بالضبط لأنها تستبعد متغيراً خارجياً واحداً  $T$  ، وتتضمن متغيرين داخليين  $P$  و  $Q$  .

( ب ) يمكن الحصول على معادلات الشكل المختزل كما في المسألة ١٠ - ٣ ( أ ) . وهي

$$\begin{aligned} Q_t &= \left( \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} \right) + \left( \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1} \right) Y_t + \left( \frac{-a_1 b_2}{b_1 - a_1} \right) T + \left( \frac{b_1 u_{1t} - a_1 u_{2t}}{b_1 - a_1} \right) \\ P_t &= \left( \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \right) + \left( \frac{a_2}{b_1 - a_1} \right) Y_t + \left( \frac{-b_2}{b_1 - a_1} \right) T + \left( \frac{u_{1t} - u_{2t}}{b_1 - a_1} \right) \end{aligned} \quad \text{أو}$$

$$Q_t = \pi_0 + \pi_1 Y_t + \pi_2 T + v_{1t}, \quad \text{حيث}$$

$$P_t = \pi_3 + \pi_4 Y_t + \pi_5 T + v_{2t},$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} & \pi_1 &= \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1} & \pi_2 &= \frac{-a_1 b_2}{b_1 - a_1} & v_{1t} &= \frac{b_1 u_{1t} - a_1 u_{2t}}{b_1 - a_1} \\ \pi_3 &= \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} & \pi_4 &= \frac{a_2}{b_1 - a_1} & \pi_5 &= \frac{-b_2}{b_1 - a_1} & v_{2t} &= \frac{u_{1t} - u_{2t}}{b_1 - a_1} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5} \quad \text{and} \quad b_1 = \frac{\pi_1}{\pi_4} \quad ( ج )$$

$$a_2 = \pi_4(b_1 - a_1) = \pi_4 \left( \frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_5} \right) \quad \text{and} \quad b_2 = -\pi_5(b_1 - a_1) = \pi_5 \left( \frac{\pi_2}{\pi_5} - \frac{\pi_1}{\pi_4} \right)$$

$$a_0 = \pi_3(b_1 - a_1) + b_0 = \pi_3 \left( \frac{\pi_1}{\pi_4} - \frac{\pi_2}{\pi_5} \right) \quad \text{and} \quad b_0 = \pi_3(b_1 - a_1) + a_0 = \pi_3 \left( \frac{\pi_0}{\pi_3} - \frac{\pi_1}{\pi_4} \right)$$

١٠ - ٩ بالإشارة إلى نموذج العرض - الطلب المعطى من قبل (أ) حدد ما إذا كانت معادلة الطلب و / أو العرض مميزة بالضبط ، زائدة التمييز ، أو ناقصة التمييز . (ب) احسب معالم الميل الهيكلية .

$$\begin{aligned} Q_t &= a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + a_3 W_t + u_{1t} & \text{الطلب} \\ Q_t &= b_0 + b_1 P_t + u_{2t} & \text{العرض} \end{aligned}$$

حيث  $W_t$  هي الثروة والتوقع أن تكون  $a_3 > 0$  .

(أ) معادلة الطلب ناقصة التمييز لأنها لا تستبعد أى متغيرات خارجية . ولكن حيث أن هناك متغيرين خارجيين مستبعدين من معادلة العرض (أى ،  $Y$  و  $W$ ) ومتغيرين داخليين تتضمنهما المعادلة (أى ،  $Q$  و  $P$ ) ، فإن معادلة العرض زائدة التمييز .

(ب) لحساب معالم الميل الهيكلية ، يجب إيجاد معادلات الشكل المختزل . ويتم الحصول عليها كما فى المسألة ١٠ - ٧ (ج) وهى

$$\begin{aligned} Q_t &= \pi_0 + \pi_1 Y_t + \pi_2 W_t + v_{1t} \\ P_t &= \pi_3 + \pi_4 Y_t + \pi_5 W_t + v_{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} & \pi_1 &= \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1} & \pi_2 &= \frac{a_3 b_1}{b_1 - a_1} & \text{حيث} \\ \pi_3 &= \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} & \pi_4 &= \frac{a_2}{b_1 - a_1} & \pi_5 &= \frac{a_3}{b_1 - a_1} \end{aligned}$$

ويمكن حساب  $b_1$  من

$$\frac{\pi_1}{\pi_4} = b_1 \quad \text{or} \quad \frac{\pi_2}{\pi_5} = b_1$$

وهذان التقديران للمعلمة  $b_1$  سيكونان عادة مختلفين ، مما يعكس حقيقة أن معادلة العرض هى الآن زائدة التمييز . وكما فى المسألة ١٠ - ٧ (ج) ، لا يمكن حساب المعاملات الهيكلية لدالة الطلب من معاملات الشكل المختزل لأن دالة الطلب فى هذا النموذج ناقصة التمييز .

التقدير : المربعات الصغرى غير المباشرة :

١٠ - ١٠ (أ) متى يمكن استخدام المربعات الصغرى غير المباشرة ؟ (ب) ماذا تتضمن ؟ (ج) ما هى بعض نواحي القصور لاستخدام المربعات الصغرى غير المباشرة ؟

(أ) المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) هى طريقة لحساب قيم معالم هيكلية متسقة للمعادلات المميزة بالضبط فى نظام من المعادلات الآتية .

(ب) تتضمن ILS استخدام OLS لتقديرات الشكل المختزل للنظام ثم استخدام المعالم المقدرة للشكل المختزل لحساب تقديرات معالم هيكلية وحيدة ومتسقة ، كما سبق الإشارة فى المسائل ١٠ - ٧ (ج) ، ١٠ - ٨ (ج) ، و ١٠ - ٩ (ب) .



(ج) من عيوب استخدام ILS أنها لا تغطي الخطأ المعياري للمعالم الهيكلية المحسوبة ، وعملية حسابها معقدة إلى حد كبير (وخارج نطاق هذا الكتاب) . وعيب آخر لطريقة ILS أنه لا يمكن استخدامها لحساب تقديرات معالم هيكلية وحيدة ومتسقة من معاملات الشكل المختزل للمعادلات زائدة التمييز لنموذج المعادلات الآتية .

١٠ - ١١ يعطى جدول ٢ - ١٠ رقماً قياسياً لإنتاج المحاصيل  $Q$  ، أسعار المحاصيل  $P$  ، ومتوسط دخل الفرد المتاح  $Y$  ، بأسعار ١٩٧٢ ، في الولايات المتحدة ١٩٥٠ - ١٩٧٩ . افترض أنه بنهاية كل عام يباع كل المعروض أى أن  $Q_t$  تمثل كلا من الكمية المشتراة والمباعة في السنة  $t$  . قدر باستخدام OLS معادلات الشكل المختزل المعطاة في مسألة ١٠ - ٣ (أ) ، (ب) احسب المعالم الهيكلية للعرض من معاملات الشكل المختزل (ج) كيف تقارن هذه مع المعالم الهيكلية التي يحصل عليها بإجراء انحدار  $Q_t$  على  $P_t$  مباشرة ؟

جدول ١٠ - ٢ الرقم القياسى لإنتاج المحاصيل ، الأسعار ودخل الفرد المتاح بأسعار ١٩٧٢ : الولايات المتحدة ،

١٩٥٠ - ١٩٧٩

| السنة | 1950  | 1951  | 1952  | 1953  | 1954  | 1955  | 1956  | 1957  | 1958  | 1959  | 1960  | 1961  | 1962  | 1963  | 1964  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Q$   | 76    | 78    | 81    | 81    | 79    | 82    | 82    | 80    | 89    | 89    | 93    | 91    | 92    | 96    | 93    |
| $P$   | 103   | 118   | 119   | 107   | 108   | 103   | 104   | 100   | 99    | 98    | 99    | 101   | 103   | 107   | 106   |
| $Y$   | 2,386 | 2,408 | 2,434 | 2,491 | 2,476 | 2,517 | 2,643 | 2,650 | 2,636 | 2,696 | 2,697 | 2,725 | 2,796 | 2,849 | 3,009 |
| السنة | 1965  | 1966  | 1967  | 1968  | 1969  | 1970  | 1971  | 1972  | 1973  | 1974  | 1975  | 1976  | 1977  | 1978  | 1979  |
| $Q$   | 99    | 95    | 100   | 103   | 104   | 100   | 112   | 113   | 119   | 110   | 121   | 121   | 130   | 131   | 144   |
| $P$   | 103   | 106   | 100   | 100   | 97    | 106   | 108   | 114   | 175   | 224   | 201   | 197   | 192   | 204   | 223   |
| $Y$   | 3,152 | 3,274 | 3,371 | 3,464 | 3,515 | 3,619 | 3,714 | 3,837 | 4,062 | 3,973 | 4,025 | 4,144 | 4,285 | 4,449 | 4,509 |

المصدر : التقرير الاقتصادى للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ صفحة ٣١٠ ، ٣١٢ ، ٢١٢ .

(أ) معادلات الشكل المختزل المقدرة (من المسألة ١٠ - ٣ (أ) هي

$$\hat{Q}_t = 18.0313 + 0.0252 Y_t \quad R^2 = 0.94$$

(4.47) (20.60)

$$\hat{P}_t = -29.9304 + 0.0487 Y_t \quad R^2 = 0.60$$

(-1.21) (6.50)

$$\hat{b}_1 = \hat{\pi}_1 = \frac{0.0252}{0.0487} = 0.5175 \quad [\text{see Prob. 10.7(c)}] \quad (\text{ب})$$

$$\hat{b}_0 = \hat{\pi}_0 - \hat{b}_1 \hat{\pi}_2 = 18.0313 - 0.5174(-29.9304) = 33.5173$$

$\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  هي مقدرات متسقة للمعالم  $b_0$  و  $b_1$  على الترتيب ، والمعادلة الهيكلية الطلب (المقدرة باستخدام ILS) هي

$$\hat{Q}_t = 33.53 + 0.52 P_t$$

(ج) بإجراء انحدار  $Q_t$  على  $P_t$  مباشرة نحصل على :

$$\hat{Q}_t = 57.98 + 0.33 P_t \quad R^2 = 0.62$$

(8.92) (6.73)

قيمتي  $\hat{b}_0$  و  $\hat{b}_1$  التي تم الحصول عليها بإجراء انحدار  $\bar{Q}_t$  على  $P_t$  هي تقديرات متحيزة وغير متسقة للمعالم العرض .

١٠ - ١٢ بالإشارة إلى نموذج الطلب - العرض في المسألة ١٠ - ٨ وباستخدام بيانات جدول ١٠ - ٢ وقيم الاتجاه العام  $T = 1, 2, 3, \dots, 30$  ، (أ) احسب معالم هيكلية متسقة لمعادلة الطلب . (ب) كيف تقارن هذه المعالم الهيكلية التي يتم الحصول عليها بتقدير معادلة الطلب مباشرة باستخدام OLS ؟

(أ) حيث أن معادلة الطلب مميزة بالضبط (أنظر المسألة ١٠ - ٨) فإنه يمكننا استخدام ISL للحصول على قيم معالم هيكلية متسقة للطلب . معادلات الشكل المختزل المقدرة (من المسألة ١٠ - ٨) (ب) هي :

$$\hat{Q}_t = \frac{28.7649}{(2.35)} + \frac{0.0198 Y_t}{(3.34)} + \frac{0.4292 T}{(0.93)} \quad R^2 = 0.94$$

$$\hat{P}_t = \frac{-191.1760}{(-2.78)} + \frac{0.1296 Y_t}{(3.89)} - \frac{6.4475 T}{(-2.48)} \quad R^2 = 0.68$$

$$\pi_0 = 28.7649, \quad \pi_1 = 0.0198, \quad \pi_2 = 0.4292, \\ \pi_3 = -191.1760, \quad \pi_4 = 0.1296, \quad \pi_5 = -6.4475$$

حيث

باستخدام المعادلات المعطاة في المسألة ١٠ - ٨ (ج) ، نحصل على :

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_5} = \frac{0.4292}{-6.4475} = -0.0666$$

$$\hat{a}_2 = \hat{\pi}_4 \left( \frac{\hat{\pi}_1}{\hat{\pi}_4} - \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_5} \right) = 0.1296 \left( \frac{0.0198}{0.1296} - \frac{0.4292}{-6.4475} \right) = 0.0284$$

$$\hat{a}_0 = \hat{\pi}_3 \left( \frac{\hat{\pi}_0}{\hat{\pi}_3} + \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_5} \right) = -191.1760 \left( \frac{28.7649}{-191.1760} + \frac{0.4292}{6.4475} \right) = 16.0386$$

وعليه فإن معادلة الطلب المقدرة باستخدام ILS (والتي تظهر تقديرات معالم متسقة) هي :

$$\hat{Q}_t = 16.04 - 0.07 P_t + 0.03 Y_t$$

(ب) تقدير OLS لدالة الطلب هي :

$$\hat{Q}_t = \frac{19.12}{(4.65)} + \frac{0.04 P_t}{(1.19)} + \frac{0.02 Y_t}{(12.18)} \quad R^2 = 0.94$$

قيم  $\hat{a}_0$  ،  $\hat{a}_1$  و  $\hat{a}_2$  متحيزة وغير متسقة . والحقيقة ، أن  $\hat{a}_1$  تأخذ الإشارة الخطأ (ولكنها ليست معنوية إحصائياً) .

التقدير : المربعات الصغرى على مرحلتين :

١٠ - ١٣ (أ) متى يمكن استخدام 2SLS ؟ (ب) ماذا تتضمن ؟ (ج) ما هي مزايا 2SLS بالنسبة إلى ILS ؟

(أ) المربعات الصغرى على مرحلتين 2SLS هي طريقة لتقدير قيم معالم هيكلية متسقة للمعادلات المميزة بالضبط أو زائدة التمييز لنظام معادلات آتية وبالنسبة للمعادلات المميزة بالضبط ، تعطي 2SLS نفس نتيجة ILS .

(ب) يتضمن تقدير 2SLS تطبيق OLS على مرحلتين . في المرحلة الأولى ، يتم إجراء انحدار كل متغير داخلي على كل المتغيرات المحددة سلفاً في النظام . هذه الآن هي معادلات الشكل المختزل . في المرحلة الثانية ، تستخدم قيم المتغيرات الداخلية المقدرة بدلا من الفعلية لتقدير المعادلات الهيكلية للنموذج . ويتم الحصول على القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية بالتعويض بالقيم الفعلية للمتغيرات الخارجية في معادلات الشكل المختزل . القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية غير مرتبطة مع حدود الخطأ مؤدية بذلك إلى تقديرات 2SLS متسقة للمعالم الهيكلية .

(ج) من مزايا 2SLS على ILS أنه يمكن استخدام 2SLS للحصول على تقديرات معالم هيكلية متسقة للمعادلات زائدة التمييز كما بالنسبة للمعادلات المميزة بالضبط في نظام معادلات آتية . والميزة الهامة الثانية أن 2SLS (ولكن ليس ILS) تغطي الخطأ المعياري للمعالم الهيكلية المقدرة مباشرة . وحيث أن معظم النماذج المميزة هي في الواقع زائدة التمييز ، فإن 2SLS مفيدة جداً . وبالتالي ، تعتبر 2SLS أبسط ، وواحدة من أفضل طرق تقدير المعادلات الآتية وأكثرها شيوعاً .

١٠ - ١٤ بالنسبة لنموذج الطلب - العرض في المسألة ١٠ - ٨ وباستخدام بيانات جدول ١٠ - ٢ لتقدير معادلة الطلب ، (أ) بين نتائج المرحلة الأولى لتقدير 2SLS (ب) بين نتائج المرحلة الثانية لتقدير 2SLS . (ج) كيف تقارن هذه النتائج مع تقدير ILS لمعادلة الطلب السابق إيجادها في المسألة ١٠ - ١٢ (أ) ؟

(أ) نتائج المرحلة الأولى لتقدير 2SLS لمعادلة الطلب هي :

$$\hat{P}_t = 191.1760 + 0.1296 Y_t - 6.4475 T \quad R^2 = 0.68$$

(-2.78) (3.89) (-2.48)

(ب) نتائج المرحلة الثانية لتقدير 2SLS لمعادلة الطلب هي :

$$\hat{Q}_t = 16.04 - 0.07 P_t + 0.03 Y_t \quad R^2 = 0.94$$

(3.50) (-0.93) (7.69)

(ج) حيث أن معادلة الطلب في المسألة ١٠ - ٨ مميزة بالضبط ، فإن تقدير 2SLS يغطي نتائج تطابق تقدير ILS (أنظر المسألة ١٠ - ١٢ (أ) . ولكن باستخدام 2SLS (مقارنة مع ILS) ، فإننا نحصل أيضاً على الأخطاء المعيارية للمعالم الهيكلية المقدرة مباشرة . لاحظ أن  $P_t$  ليست ممنوعة إحصائياً ، مما يعكس حقيقة أن مشاهدات السعر - الكمية في أسواق المحاصيل أكثر ملاءمة لتقدير معادلة العرض العملية عن معادلة الطلب .

١٠ - ١٥ يتضمن جدول ١٠ - ٣ المتغير الإضافي الثروة ،  $W$  ، مقيساً هنا باجمالي الأصول المتداولة ، بالبلليون دولار بالإضافة إلى بيانات جدول ١٠ - ٢ للولايات المتحدة للسنوات ١٩٥٢ - ١٩٧٩ . بالنسبة لنموذج الطلب - العرض في المسألة ١٠ - ٩ ، قدر معادلة العرض باستخدام (أ) 2SLS ، (ب) OLS .

جدول ١٠ - ٣ الرقم القياسي لإنتاج المحاصيل ، الأسعار ، الدخل المتاح للفرد بأسماء ١٩٧٢ ، وإجمالي الأصول المتداولة : للولايات المتحدة ، ١٩٥٢ - ١٩٧٩ .

| السنة | 1952  | 1953    | 1954    | 1955    | 1956    | 1957    | 1958    | 1959    | 1960  | 1961  |
|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|-------|
| $Q$   | 81    | 81      | 79      | 82      | 82      | 80      | 89      | 89      | 93    | 91    |
| $P$   | 119   | 107     | 108     | 103     | 104     | 100     | 99      | 98      | 99    | 101   |
| $Y$   | 2,434 | 2,491   | 2,476   | 2,517   | 2,643   | 2,650   | 2,636   | 2,696   | 2,697 | 2,725 |
| $W$   | 269.1 | 284.6   | 295.3   | 314.8   | 325.4   | 338.0   | 354.4   | 373.3   | 386.8 | 410.7 |
| السنة | 1962  | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    | 1970  | 1971  |
| $Q$   | 92    | 96      | 93      | 99      | 95      | 100     | 103     | 104     | 100   | 112   |
| $P$   | 103   | 107     | 106     | 103     | 106     | 100     | 100     | 97      | 100   | 108   |
| $Y$   | 2,796 | 2,849   | 3,009   | 3,152   | 3,274   | 3,371   | 3,464   | 3,515   | 3,619 | 3,714 |
| $W$   | 442.1 | 479.3   | 515.5   | 559.6   | 587.3   | 638.3   | 696.8   | 722.7   | 769.8 | 854.9 |
| السنة | 1972  | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |       |       |
| $Q$   | 113   | 119     | 110     | 121     | 121     | 130     | 131     | 144     |       |       |
| $P$   | 114   | 175     | 224     | 201     | 197     | 192     | 204     | 223     |       |       |
| $Y$   | 3,837 | 4,062   | 3,973   | 4,025   | 4,144   | 4,285   | 4,449   | 4,509   |       |       |
| $W$   | 966.8 | 1,086.1 | 1,174.2 | 1,295.6 | 1,428.4 | 1,598.7 | 1,775.3 | 1,957.7 |       |       |

المصدر : التقرير الاقتصادي للرئيس ، ومكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ صفحة ٣١٠ ، ٣١٢ ، ٣٢٩ ، ٢٧٣ .

(أ) حيث أن معادلة العرض في المسألة ١٠ - ٩ زائدة التمييز ، فإن 2SLS تكون أسلوب تقدير ملائم للحصول على معالم هيكلية متسقة . المرحلة الأولى هي

$$\hat{P}_t = 170.90 - 0.04 Y_t + 0.14 W_t, \quad R^2 = 0.82$$

(3.80)    (-2.31)    (5.24)

المرحلة الثانية هي :

$$\hat{Q}_t = 49.69 + 0.40 \hat{P}_t, \quad R^2 = 0.60$$

(6.85)    (7.42)

تقدير OLS (غير الملائم) لمعادلة العرض هو :

$$\hat{Q}_t = 60.62 + 0.31 P_t, \quad R^2 = 0.64$$

(9.74)    (6.86)

تقديرات معالم العرض متسقة باستخدام 2SLS وغير متسقة باستخدام OLS . كلما ارتفعت  $R^2$  في المرحلة الأولى لتقدير 2SLS ، كلما اقتربت تقديرات معالم 2SLS و OLS .

مسائل إضافية

نماذج المعادلات الآتية :

١٠ - ١٦ تمثل المعادلتان التاليتان نموذج أجور - اسعار بسيط :

$$W_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 Q_t + u_{1t}$$

$$P_t = b_0 + b_1 W_t + u_{2t}$$

حيث  $W_t$  هو الأجور في الفترة  $t$  و  $P$  تمثل الأسعار و  $Q$  تمثل الإنتاجية . (أ) لماذا يعتبر هذا نموذج معادلات آتية ؟  
(ب) ما هي المتغيرات الداخلية والخارجية ؟ (ج) لماذا يعطى تقدير معادلات  $W$  و  $P$  باستخدام OLS تقديرات معالم متحيزة وغير متسقة ؟

الإجابة (أ) هذا النموذج ذو المعادلتين له طبيعة آتية لأن  $W$  دالة في  $P$  و  $P$  دالة في  $W$  ، وبالتالي فإن  $W$  و  $P$  تتحددان معاً . (ب) المتغيرات الداخلية هي  $W$  و  $P$  . المتغير الخارجى هو  $Q$  . (ج) تقدير دالة  $W$  باستخدام OLS يعطى تقديرات معالم متحيزة وغير متسقة لأن  $P$  ترتبط مع  $u_1$  . وبالمثل ، فإن تقدير المعادلة الثانية ، معادلة  $P$  باستخدام OLS يعطى تقديرات معالم متحيزة وغير متسقة لأن  $W$  مرتبطة مع  $u_2$  .

١٠ - ١٧ (أ) أوجد معادلات الشكل المختزل للنموذج في المسألة ١٠ - ١٦ . (ب) لماذا هي هامة ؟ (ج) ماذا تقيس معاملات الشكل المختزل في هذا النموذج الكلى ؟

الإجابة : (أ)

$$W_t = \frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_2}{1 - a_1 b_1} Q_t + \frac{u_{1t} + a_1 u_{2t}}{1 - a_1 b_1} \quad \text{أو} \quad W_t = \pi_0 + \pi_1 Q_t + v_{1t}$$

$$P_t = \frac{b_0 + a_0 b_1}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_2 b_1}{1 - a_1 b_1} Q_t + \frac{b_1 u_{1t} + u_{2t}}{1 - a_1 b_1} \quad \text{أو} \quad P_t = \pi_2 + \pi_3 Q_t + v_{2t}$$

(ب) معادلات الشكل المختزل مهمة لأنها تعبر عن كل متغير داخل في النموذج كدالة في المتغيرات الخارجية فقط ، وبالتالي تعطى OLS تقديرات معالم متسقة . (ج) تعطى معالم الشكل المختزل إجمالى التأثير المباشر وغير المباشر للمتغير فى أى متغير خارجى فى النموذج على كل متغير داخل فى النموذج .

١٠ - ١٨ (أ) ما نوع النموذج الآتى ؟ (ب) كيف يمكن تقدير معادلات هذا النموذج ؟

$$Y_{1t} = a_0 + a_1 X_{1t} + u_{1t}$$

$$Y_{2t} = b_0 + b_1 Y_{1t} + b_2 X_{2t} + u_{2t}$$

$$Y_{3t} = c_0 + c_1 Y_{1t} + c_2 Y_{2t} + c_3 X_{2t} + u_{3t}$$

الإجابة : (أ) النموذج متواتر (ب) يمكن تقدير معادلات النموذج بتطبيق OLS بالتتابع ، بدءاً بالمعادلة الأولى .

التمييز :

١٠ - ١٩ لو لم يشمل النموذج الكلى البسيط فى المسألة ١٠ - ١٦ المتغير  $Q_t$  ، (أ) هل تكون المعادلة الأولى ميزة بالضبط ، زائدة التمييز ، أو ناقصة التمييز ؟ (ب) ماذا عن المعادلة الثانية ؟

الإجابة : (أ) تكون المعادلة الأولى ناقصة التمييز . (ب) تكون المعادلة الثانية ناقصة التمييز أيضاً .

١٠ - ٢٠ بالنسبة للنموذج الكلي في المسألة ١٠-١٦ حدد (أ) ما إذا كانت المعادلة الأولى متميزة بالضغط ، زائدة التمييز ، أو ناقصة التمييز ؟ (ب) ماذا عن المعادلة الثانية ؟ (ج) ما هي قيم المعالم الهيكلية ؟

الإجابة : (أ) المعادلة الأولى ناقصة التمييز (ب) المعادلة الثانية مميزة بالضغط . (ج)  $b_1 = \pi_3 / \pi_1$  ،  $b_0 = \pi_2 - b_1 \pi_0$  ، لا يمكن حساب  $a_1$  و  $a_2$  من معاملات الشكل المختزل لأن معادلة  $W$  ناقصة التمييز .

١٠ - ٢١ لو احتوت المعادلة الثانية في النموذج الكلي في المسألة ١٠-١٦ على متغير إضافي  $Y$  (GNP) ، (أ) حدد ما إذا كانت معادلة  $W$  و / أو  $P$  مميزة بالضغط ، زائدة التمييز ، أو ناقصة التمييز (ب) أوجد معادلات الشكل المختزل . (ج) اشتق صيغ المعالم الهيكلية .

الإجابة : (أ) كلا من المعادلة الأولى ، معادلة  $W$  ، والمعادلة الثانية ، معادلة  $P$  ، أصبحت الآن مميزة بالضغط .

$$W_t = \frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_2}{1 - a_1 b_1} Q_t + \frac{a_1 b_2}{1 - a_1 b_1} Y_t + \frac{u_{1t} + a_1 u_{2t}}{1 - a_1 b_1} \quad (ب)$$

$$P_t = \frac{a_0 b_1 + b_0}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_2 b_1}{1 - a_1 b_1} Q_t + \frac{b_2}{1 - a_1 b_1} Y_t + \frac{b_1 u_{1t} + u_{2t}}{1 - a_1 b_1}$$

$$W_t = \pi_0 + \pi_1 Q_t + \pi_2 Y_t + v_{1t}$$

$$P_t = \pi_3 + \pi_4 Q_t + \pi_5 Y_t + v_{2t}$$

أو

$$a_1 = \frac{\pi_2}{\pi_5} \quad و \quad b_1 = \frac{\pi_4}{\pi_1} \quad (ج)$$

$$a_2 = \pi_2 \left( \frac{\pi_1}{\pi_2} - \frac{\pi_4}{\pi_5} \right) \quad و \quad b_2 = \pi_2 \left( \frac{\pi_5}{\pi_2} - \frac{\pi_4}{\pi_1} \right)$$

$$a_0 = \pi_3 \left( \frac{\pi_0}{\pi_3} - \frac{\pi_2}{\pi_5} \right) \quad و \quad b_0 = \pi_0 \left( \frac{\pi_3}{\pi_0} - \frac{\pi_4}{\pi_1} \right)$$

١٠ - ٢٢ لو تضمنت المعادلة الأولى في المسألة ١٠-١٦ المتغير الإضافي  $P_{t-1}$  (السعر مبطأ سنة واحدة) ، (أ) هل تصبح المعادلات مميزة بالضغط ، أو زائدة التمييز أو ناقصة التمييز ؟ (ب) ما قيمة معالم الميل الهيكلية ؟

الإجابة : (أ) المعادلة الأولى ، معادلة  $W$  ، ناقصة التمييز ، بينما المعادلة الثانية ، معادلة  $P$  ، وزائدة التمييز .

(ب)  $b_1 = \pi_4 / \pi_1$  أو  $\pi_5 / \pi_2$  ، مما يمسك حقيقة أن معادلة  $P$  أصبحت الآن زائدة التمييز ؛ لا يمكن حساب  $a_1$  ،  $a_2$  و  $a_3$  لأن معادلة  $W$  ناقصة التمييز .

التقدير : المربعات الصغرى غير المباشرة :

١٠ - ٢٣ يعطى جدول ١٠-٤ متوسط أجر الساعة الإجمالي في القطاع الخاص غير الزراعي  $W$  ، الرقم القياسي لأسعار المستهلكين  $P$  ، الإنتاج / ساعة في قطاع الأعمال غير الزراعي  $Q$  و  $Y$  ، في الولايات المتحدة من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ .

(أ) قدر معادلات الشكل المختزل في المسألة ١٠-١٧ (أ) . (ب) احسب المعاملات الهيكلية لمعادلة  $P$  من معاملات الشكل المختزل (ج) كيف تقارن هذه مع المعالم الهيكلية التي يمكن الحصول عليها بإجراء انحدار  $P$  على  $W$  مباشرة ؟

جدول ١٠ - ٤ : الأجور ، الرقم القياسي للأسعار ، الإنتاجية ، و GNP : الولايات المتحدة ، ١٩٦٠ - ١٩٧٩ .

| السنة | 1960  | 1961    | 1962    | 1963    | 1964    | 1965    | 1966    | 1967    | 1968    | 1969    |
|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| W     | 2.09  | 2.14    | 2.22    | 2.28    | 2.36    | 2.46    | 2.56    | 2.68    | 2.85    | 3.04    |
| P     | 88.7  | 89.6    | 90.6    | 91.7    | 92.9    | 94.5    | 97.2    | 100.0   | 104.2   | 109.8   |
| Q     | 80.9  | 83.0    | 86.6    | 89.6    | 92.8    | 95.9    | 98.4    | 100.0   | 103.2   | 102.9   |
| Y     | 506.0 | 523.3   | 563.8   | 594.7   | 635.7   | 688.1   | 753.0   | 796.3   | 868.5   | 935.5   |
| السنة | 1970  | 1971    | 1972    | 1973    | 1974    | 1975    | 1976    | 1977    | 1978    | 1979    |
| W     | 3.23  | 3.45    | 3.70    | 3.94    | 4.24    | 4.53    | 4.86    | 5.25    | 5.69    | 6.16    |
| P     | 116.3 | 121.3   | 125.3   | 133.1   | 147.7   | 161.2   | 170.5   | 181.5   | 195.4   | 217.4   |
| Q     | 103.0 | 106.2   | 110.1   | 112.0   | 108.5   | 110.5   | 114.4   | 116.2   | 116.8   | 115.5   |
| Y     | 982.4 | 1,063.4 | 1,171.1 | 1,306.6 | 1,412.9 | 1,528.8 | 1,702.2 | 1,899.5 | 2,127.6 | 2,368.5 |

المصدر : التقرير الإقتصادي للرئيس ، مكتب حكومة الولايات المتحدة للطباعة ، واشنطن ، ١٩٨٠ ، صفحة ٢٤٤ ،

٢٥٩ ، ٢٤٦ ، ٢٠٣ .

$$\hat{W}_t = -6.7961 + 0.1005 Q_t \quad R^2 = 0.80 \quad (\text{أ}) : \text{الإجابة}$$

(-5.56) (8.45)

$$\hat{P}_t = -178.8330 + 2.9834 Q_t \quad R^2 = 0.72$$

(-3.96) (6.80)

$$\hat{b}_0 = 17.9538 \quad \hat{b}_1 = 31.1175 \quad \text{OLS باستخدام (ج)} \quad \hat{b}_1 = 29.6856; \hat{b}_0 = 22.9133 \quad (\text{ب})$$

١٠ - ٢٤ : بالنسبة للنموذج في المسألة ١٠-٢١ ، (أ) قدر معادلات الشكل المختزل ، (ج) احسب المعاملات الهيكلية لمعادلة W من معادلات الشكل المختزل . (ج) كيف تقارن هذه مع المعاملات الهيكلية لمعادلة W التي يمكن الحصول عليها باستخدام OLS؟

$$\hat{W}_t = 0.5466 + 0.0050 Q_t + 0.0022 Y_t \quad R^2 = 0.997 \quad (\text{أ}) : \text{الإجابة}$$

(2.08) (1.57) (34.20)

$$\hat{P}_t = 92.5222 - 0.5473 Q_t + 0.0802 Y_t \quad R^2 = 0.996$$

(10.18) (-5.01) (36.49)

$$\hat{a}_0 = -1.9706, \hat{a}_1 = 0.0270 \quad \text{OLS باستخدام (ج)} \quad \hat{a}_2 = 0.0198 \quad \hat{a}_0 = -1.9570, \hat{a}_1 = 0.0271 \quad (\text{ب})$$

$$\hat{a}_2 = 0.0200 \quad \text{و}$$

١٠ - ٢٥ : بالنسبة للنموذج في المسألة ١٠-٢١ ، أكتب المعادلة الهيكلية لمعادلة P المقدرة باستخدام (أ) ILS ، (ب) OLS .

$$\hat{P}_t = 152.9570 - 110.5730 W_t + 0.3201 Y_t \quad (\text{أ}) : \text{الإجابة}$$

$$\hat{P}_t = 39.7567 + 8.0649 W_t + 0.0522 Y_t \quad R^2 = 0.991 \quad (\text{ب})$$

(3.37) (0.66) (1.89)

المربعات الصغرى على مرحلتين :

١٠ - ٢٦. بالنسبة للنموذج في المسألة ١٠ - ٢١ وباستخدام بيانات جدول ١٠ - ٤ لتقدير معادلة  $W$  ، (أ) بين نتائج المرحلة الأولى لتقدير 2SLS ، (ب) بين نتائج المرحلة الثانية لتقدير 2SLS (ج) كيف تقارن هذه النتائج مع تقدير ILS لمعادلة  $W$  السابق إيجادها في مسألة ١٠ - ٢٤ ؟

$$\begin{aligned} \hat{P}_t &= 95.5222 - 0.5473 Q_t + 0.0802 Y_t, & R^2 &= 0.996 \quad (\text{أ}) \text{ الإجابة} \\ & (10.18) \quad (-5.01) \quad (36.49) \\ \hat{W}_t &= -1.9570 + 0.0271 \hat{P}_t + 0.0198 Q_t, & R^2 &= 0.997 \quad (\text{ب}) \\ & (-9.47) \quad (34.20) \quad (7.11) \end{aligned}$$

(ج) تتطابق النتائج ، لكن مع تقدير 2SLS ، نحصل أيضاً على الأخطاء المعيارية . المعامل الهيكلية المقدرة باستخدام 2SLS و ILS متسقة

١٠ - ٢٧. بالنسبة للنموذج في المسألة ١٠ - ٢٢ وبيانات جدول ١٠ - ٤ ، قدر معادلة  $P$  باستخدام (أ) 2SLS ، (ب) OLS . (ج) هل تقديرات المعامل الهيكلية في (أ) و (ب) غير متحيزة ؟ متسقة ؟

$$\begin{aligned} \hat{P}_t &= 16.50 + 31.44 \hat{W}_t, & R^2 &= 0.988 \quad (\text{أ}) \text{ الإجابة} \\ & (5.28) \quad (37.89) \\ \hat{P}_t &= 16.59 + 31.42 W_t, & R^2 &= 0.990 \quad (\text{ب}) \\ & (5.89) \quad (41.93) \end{aligned}$$

(ج) تقديرات المعامل في (أ) و (ب) متحيزة ، ولكنها متسقة في (أ) وغير متسقة في (ب) .



## امتحان اقتصاد قياسي

- ١ - يملأ جدول (١) كمية المروض من سلعة ما ،  $Y$  ، عند أسعار مختلفة ،  $X$  ، مع بقاء الأشياء الأخرى ثابتة .  
 (أ) قدر معادلة الانحدار  $Y$  على  $X$  . (ب) اختبر المعنوية الإحصائية لتقديرات العالم عند مستوى معنوية 5% (ج) أوجد  $R^2$  وضع كل النتائج السابقة في شكل نمطى مختزل . (د) تنبأ بقيمة  $Y$  واحسب فترة ثقة أو تنبؤ 95% عند  $X = 10$

جدول (١) الكمية المروضة عند مختلف الأسعار

| $n$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $Y$ | 12 | 14 | 10 | 13 | 17 | 12 | 11 | 15 |
| $X$ | 5  | 11 | 7  | 8  | 11 | 7  | 6  | 9  |

- ٢ - افترض أنه باستخدام 24 مشاهدة سنوية عن الكميات المطلوبة بالكيلوجرام من سلعة ما سنوياً ،  $Y$  ، وسعرها بالدولارات ،  $X_1$  ، ودخول المستهلكين بالألف دولار ،  $X_2$  ، وسعر سلعة بديلة بالدولار ،  $X_3$  ، وتم الحصول على الانحدار المقدر التالى ، حيث الأرقام داخل الأقواس هي الأخطاء المعيارية :

$$\hat{Y} = 13 - 7X_1 + 2.4X_2 - 4X_3$$

(2)      (0.8)      (18)

- (١) حدد ما إذا كانت إشارات المعالم تؤكد ما هو متوقع طبقاً لنظرية الطلب .  
 (ب) هل معالم الميل المقدرة معنوية عند مستوى 5% ؟ (ج) أوجد  $R^2$  ، إذا كانت  $\sum y^2 = 40$  ،  $\sum yx_1 = 10$  ،  $\sum yx_2 = 45$  ،  
 (ج) تشير الحروف الصغيرة إلى الانحرافات عن المتوسطات ، (د) أوجد  $\bar{R}^2$  (هـ) هل  $R^2$  تختلف معنوياً عن الصفر عند مستوى 5% ؟ (و) أوجد الخطأ المعيارى للانحدار (ز) أوجد معاملات المرونة السعرية والدخلية للطلب عند المتوسطات إذا كان  $\bar{X}_2 = 16$  ،  $\bar{X}_1 = 8$  ،  $\bar{Y} = 32$  .

- ٣ - عندما يجرى انحدار مستوى إنفاق قطاع الأعمال على التجهيزات الجديدة للشركات غير الصناعية في الولايات المتحدة  $Y_t$  من ١٩٦٠ إلى ١٩٧٩ على  $GNP$  ،  $X_{1t}$  ، والرقم القياسى لأسعار المستهلكين ،  $X_{2t}$  ، يتم الحصول على النتائج التالية

$$\hat{Y}_t = 31.75 + 0.08X_{1t} - 0.58X_{2t}$$

(6.08)      (-3.08)       $R^2 = 0.98$   
 $d = 0.77$

- (أ) كيف يمكن ان تعرف ما إذا كان هناك ارتباط ذاتى ؟ ماذا يقصد بالارتباط الذاتى ؟ لماذا يمثل الارتباط الذاتى مشكلة ؟  
 (ب) كيف يمكن تقدير  $p$  ، معامل الارتباط الذاتى ؟ (ج) كيف يمكن استخدام قيمة  $p$  لتحويل المتغيرات لتصحيح الارتباط الذاتى ؟ كيف يمكن إيجاد القيمة الأولى للمتغيرات المحولة ؟ (د) هل هناك أى دليل على وجود ارتباط ذاتى باق من النتائج التالية التى تم الحصول عليها من إجراء الانحدار على المتغيرات المحولة (مشاراً إليها بنجمة) ؟

$$Y_t^* = 3.79 + 0.04X_{1t}^* - 0.05X_{2t}^*$$

(8.10)      (-0.72)       $R^2 = 0.96$   
 $d = 0.89$

ماذا يمكن ان يكون السبب في اى ارتباط ذاتى باق ؟ كيف يمكن تصحيح هذا ؟  
٤ - تمثل المعادلتان التاليتان نموذجاً كلياً بسيطاً :

$$R_t = a_0 + a_1 M_t + a_2 Y_t + u_{1t}$$

$$Y_t = b_0 + b_1 R_t + u_{2t}$$

حيث  $R$  معدل الفائدة ،  $M$  عرض النقود و  $Y$  الدخل ( أ ) لماذا يعتبر هذا نموذج معادلات آنية ؟ ماهى المتغيرات الداخلية والمتغيرات والمتغيرات الخارجية ؟ لماذا يعطى تقدير معادلات  $R$  و  $Y$  باستخدام OLS تقديرات معالم متحيزة وغير متسقة ؟

( ب ) أوجد الشكل المختزل للنموذج . ( ج ) هل هذا النموذج ناقص التمييز ، و زائد التمييز ، أو مميز تماماً ؟ لماذا ؟ ماهى قيم المعاملات الهيكلية ؟ ماهو أسلوب التقدير المناسب للنموذج ؟ لإشرح هذا الأسلوب . ( د ) لو أن المعادلة الأولى ، أو معادلة  $R$  تضمنت  $Y_{t-1}$  كتغير مفسر إضافي ، هل يعتبر هذا النموذج مميزاً ، زائد التمييز ، أو ناقص التمييز ؟ ماهى قيم معاملات الميل الهيكلية ؟ ماذا يعتبر أسلوباً مناسباً لتقدير النموذج ؟ لإشرح هذا الأسلوب .

الإجابات :

١ - ( أ ) أنظر جدول ( ٢ )

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{28}{34} \approx 0.82 \quad ( \text{ من الأعمدة السبعة الأولى في جدول ٢ } )$$

$$\hat{b}_0 = \bar{Y} - \hat{b}_1 \bar{X} = 13 - (0.82)(8) \approx 6.44$$

$$\hat{Y}_i = 6.44 + 0.82 X_i$$

جدول ( ٢ ) مسودة

| $n$     | $Y_i$                              | $X_i$                            | $y_i$          | $x_i$          | $x_i y_i$           | $x_i^2$           | $\hat{Y}_i$ | $e_i$          | $e_i^2$                | $X_i^2$            | $y_i^2$           |
|---------|------------------------------------|----------------------------------|----------------|----------------|---------------------|-------------------|-------------|----------------|------------------------|--------------------|-------------------|
| 1       | 12                                 | 5                                | -1             | -3             | 3                   | 9                 | 10.54       | 1.46           | 2.1316                 | 25                 | 1                 |
| 2       | 14                                 | 11                               | 1              | 3              | 3                   | 9                 | 15.46       | -1.46          | 2.1316                 | 121                | 1                 |
| 3       | 10                                 | 7                                | -3             | -1             | 3                   | 1                 | 12.18       | -2.18          | 4.7524                 | 49                 | 9                 |
| 4       | 13                                 | 8                                | 0              | 0              | 0                   | 0                 | 13.00       | 0.00           | 0.0000                 | 64                 | 0                 |
| 5       | 17                                 | 11                               | 4              | 3              | 12                  | 9                 | 15.46       | 1.54           | 2.3716                 | 121                | 16                |
| 6       | 12                                 | 7                                | -1             | -1             | 1                   | 1                 | 12.18       | -0.18          | 0.0324                 | 49                 | 1                 |
| 7       | 11                                 | 6                                | -2             | -2             | 4                   | 4                 | 11.36       | -0.36          | 0.1296                 | 36                 | 4                 |
| 8       | 15                                 | 9                                | 2              | 1              | 2                   | 1                 | 13.82       | 1.18           | 1.3924                 | 81                 | 4                 |
| $n = 8$ | $\sum Y_i = 104$<br>$\bar{Y} = 13$ | $\sum X_i = 64$<br>$\bar{X} = 8$ | $\sum y_i = 0$ | $\sum x_i = 0$ | $\sum x_i y_i = 28$ | $\sum x_i^2 = 34$ |             | $\sum e_i = 0$ | $\sum e_i^2 = 12.9416$ | $\sum X_i^2 = 546$ | $\sum y_i^2 = 36$ |

$$s_{\hat{b}_0}^2 = \frac{\sum e_i^2}{(n-k)} \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} = \frac{(12.9416)(546)}{(8-2)(8)(34)} \approx 4.33 \quad \Rightarrow \quad s_{\hat{b}_0} \approx 2.08 \quad (ب)$$

$$s_{b_1} = \frac{\sum e_i^2}{(n-k)\sum x_i^2} = \frac{12.9416}{(8-2)(34)} \approx 0.06 \quad \text{and} \quad s_{b_1} \approx 0.25$$

$$t_0 = \frac{\hat{b}_0}{s_{b_0}} = \frac{6.44}{2.08} \approx 3.10 \quad \text{وهي معنوية عند مستوى } 5\%$$

$$t_1 = \frac{\hat{b}_1}{s_{b_1}} = \frac{0.82}{0.25} \approx 3.28 \quad \text{وهي أيضاً معنوية عند مستوى } 5\%$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{12.9416}{36} \approx 0.6405, \text{ or } 64.05\% \quad (\text{ج})$$

$$\hat{Y}_i = \frac{6.44}{(3.10)} + \frac{0.82}{(3.28)} X_i \quad R^2 \approx 64.05$$

$$\hat{Y}_F = 6.44 + 0.82(10) = 14.64 \quad (\text{د})$$

$$s_F^2 = \frac{\sum e_i^2}{(n-2)} \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_F - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right] = \frac{12.9416}{6} \left[ 1 + \frac{1}{8} + \frac{(10-8)^2}{34} \right]$$

$$s_F^2 = 2.67 \quad \text{and} \quad s_F \approx 1.63$$

وبالتالي ، فإن فسترة الثقة أو التنبؤ 95% بالنسبة إلى  $Y_F$  تكون  $Y_F = 14.64 \pm 2.45(1.63)$  ، حيث  $10.65 \leq Y_F \leq 18.63$  عند درجات حرية  $df = 8 - 2 = 6$  فنكون واثقين 95% أن  $t_{0.952} = \pm 2.45$

٤ - (أ) من مسلمات نظرية طلب المستهلك أن الكمية المطلوبة من سلعة ما تتغير عكسياً مع سعر السلعة ولكن طردياً مع دخل المستهلك (إذا كانت السلعة عادية) ومع سعر السلع البديلة . وعليه فإن إشارات  $\hat{b}_1$  و  $\hat{b}_2$  تتفق مع ما تتوقعه نظرية الطلب ، بينما إشارة  $\hat{b}_3$  تخالفها .

$$t_1 = -7/2 = -3.5, \quad t_2 = 2.4/0.8 = 3, \quad \text{and} \quad t_3 = 4/18 \approx 0.22. \quad (\text{ب})$$

وبالتالي فإن  $\hat{b}_2$  و  $\hat{b}_1$  معنوية إحصائياً عند مستوى 5% ، بينما  $\hat{b}_3$  ليست كذلك .

$$R^2 = \frac{\hat{b}_1 \sum yx_1 + \hat{b}_2 \sum yx_2}{\sum y^2} = \frac{-7(10) + 2.4(45)}{40} = \frac{-70 + 108}{40} = 0.9500, \text{ or } 95\% \quad (\text{ج})$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-4} = 1 - (1 - 0.95) \frac{23}{20} = 1 - (0.05)(1.15) = 0.9425, \text{ or } 94.25\% \quad (\text{د})$$

(هـ) حيث أن

$$F_{3,20} = \frac{R^2/k - 1}{(1 - R^2)/n - k} = \frac{0.95/4 - 1}{(1 - 0.95)/24 - 4} = \frac{0.3167}{0.0025} = 126.68$$

فإن  $R^2$  تختلف معنوياً عن الصفر عند مستوى 5%

(و) حيث أن :

$$R^2 = 1 - (\sum e^2 / \sum y^2), \quad \sum e^2 = (1 - R^2) \sum y^2 = (1 - 0.95)(40) = 2.$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n - k}} = \sqrt{2/20} \approx 0.32 \quad \text{فيكون}$$

$$\eta_{x_1} = \hat{b}_1(\bar{X}_1/\bar{Y}) = -7(8/32) = -1.75. \quad \eta_{x_2} = \hat{b}_2(\bar{X}_2/\bar{Y}) = 2.4(16/32) = 1.2 \quad (ز)$$

٣ - (أ) تعطى القيمة المنخفضة جداً لإحصائية ديربن - واتسون ،  $d$  ، الدليل على وجود الارتباط الذاتي . يشير الارتباط الذاتي إلى الحالة التي يكون فيها حد الخطأ في فترة زمنية معينة مرتبطاً مع حد الخطأ في أى فترة أخرى . الشكل الأكثر شيوعاً للارتباط الذاتي في بيانات السلاسل الزمنية هو الارتباط الذاتي الموجب من الدرجة الأولى . في وجود الارتباط الذاتي ، تظل معام  $OLS$  غير متحيزة ومتسقة ، ولكن الأخطاء المعيارية لمعامل الانحدار المقدرة تكون متحيزة ، مما يؤدي إلى اختبارات إحصائية خاطئة وفترات ثقة متحيزة

(ب) يمكن الحصول على تقدير معام الارتباط الذاتي  $\rho$  ، من معام  $Y_{t-1}$  في الانحدار التالي :

$$\hat{Y}_t = \hat{b}_0 + \hat{\rho}Y_{t-1} + \hat{b}_1X_{1t} + \hat{b}_1\rho X_{1,t-1} + \hat{b}_2X_{2t} - \hat{b}_2\rho X_{2,t-1}$$

(ج) يمكن إيجاد المتغيرات المحولة لتصحيح الارتباط الذاتي كالتالي ( حيث تشير النجمة إلى المتغيرات المحولة ) :

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}, \quad X_{1t}^* = X_{1t} - \hat{\rho}X_{1,t-1}, \quad \text{and} \quad X_{2t}^* = X_{2t} - \hat{\rho}X_{2,t-1}$$

$$Y_1^* = Y_1\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} \quad X_{11}^* = X_{11}\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} \quad \text{and} \quad X_{21} = X_{21}\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$$

(د) حيث أن  $d$  تظل منخفضة جداً ، فإن الدليل على الارتباط الذاتي يبقى حتى بعد التعديل . في هذه الحالة ، من المحتمل أن يكون الارتباط الذاتي راجعاً إلى أن بعض المتغيرات المفسرة الهامة لم تدخل في الانحدار ، أو إلى شكل دالة غير ملائم ، أو بشكل أعم إلى تحديد متحيز للنموذج . وبالتالي ، فقبل تحويل المتغيرات في محاولة للتغلب على الارتباط الذاتي ، من المهم أن يتضمن الانحدار كل المتغيرات ، وأن يستخدم شكل الدالة الذي تقترحه نظرية الاستتار ، وبصفة عامة تجنب التحديد غير الصحيح للنموذج .

٤ - (أ) نموذج المعادلتين هذا آتى لأن  $R$  و  $Y$  تتحدان معاً . أى أن  $R = f(Y)$  و  $Y = f(R)$  . والمتغيرات الداخلية في النموذج هي  $R$  و  $Y$  . بينما  $M$  هي متغير خارجي أى يتحدد خارج النموذج . تقدير دالة  $R$  باستخدام  $OLS$  يعطى تقديرات متحيزة وغير متسقة لأن  $Y_t$  تكون مرتبطة مع  $x_{1t}$  . وبالمثل ، فإن تقدير المعادلة الثانية ، أى معادلة  $Y$  ، باستخدام  $OLS$  يعطى أيضاً تقديرات معام متحيزة وغير متسقة لأن  $R$  و  $x_2$  مرتبطان ببعضهما .

(ب) بالتمويض بقيمة  $Y$  المعطاة في المعادلة الثانية في المعادلة الأولى ، نحصل على :

$$\begin{aligned} R_t &= a_0 + a_1 M_t + a_2(b_0 + b_1 R_t + u_{2t}) + u_{1t} \\ R_t - a_2 b_1 R_t &= a_0 + a_2 b_0 + a_1 M_t + a_2 u_{2t} + u_{1t} \\ R_t &= \frac{a_0 + a_2 b_0}{1 - a_2 b_1} + \frac{a_1}{1 - a_2 b_1} M_t + \frac{a_2 u_{2t} + u_{1t}}{1 - a_2 b_1} \quad \text{or} \quad R_t = \pi_0 + \pi_1 M_t + v_{1t} \end{aligned}$$

بالتمويض بقيمة  $R_t$  المعطاة في المعادلة الأولى في المعادلة الثانية ، نحصل على :

$$\begin{aligned} Y_t &= b_0 + b_1(a_0 + a_1 M_t + a_2 Y_t + u_{1t}) + u_{2t} \\ Y_t - a_2 b_1 Y_t &= a_0 b_1 + b_0 + a_1 b_1 M_t + b_1 u_{1t} + u_{2t} \\ Y_t &= \frac{a_0 b_1 + b_0}{1 - a_2 b_1} + \frac{a_1 b_1}{1 - a_2 b_1} M_t + \frac{b_1 u_{1t} + u_{2t}}{1 - a_2 b_1} \quad \text{or} \quad Y_t = \pi_2 + \pi_3 M_t + v_{2t} \end{aligned}$$

(ج) حيث أن المعادلة الأولى ، أى معادلة  $R$  ، لا تستبعد أى متغير خارجي ، فإنها ناقصة التمييز . وحيث أن عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة الثانية ، أى معادلة  $Y$  ( وعددها 1 ، أى المتغير  $M$  ) يساوى عدد المتغيرات الداخلية ( وهي  $R$  و  $Y$  ) ناقصاً 1 ، فإن المعادلة الثانية ، أى معادلة  $Y$  ، مميزة بالضبط .  $b_1 = \pi_3/\pi_1$  و  $b_0 = \pi_2 - b_1 \pi_0$  . ولا يمكن حساب  $a_1$  و  $a_2$  لأن معادلة  $R$  ناقصة التمييز . وتعتبر المربعات الصغرى غير المباشرة ILS أسلوباً مناسباً لتقدير المعادلة المميزة تماماً  $Y$  . ويتضمن هذا تقدير OLS لمعادلة الشكل المختزل  $R_t$  ثم استخدام  $\hat{R}_t$  لتقدير المعادلة الهيكلية  $Y$  وعندما يتم ذلك تكون  $\hat{b}_1$  متسقة .

(د) إذا تضمنت المعادلة الأولى ، أو معادلة  $R$  المتغير الإضافي  $Y_{t-1}$  ، تظل المعادلة الأولى ناقصة التمييز ، ولكن المعادلة الثانية تصبح زائدة التمييز . ويمكن تقدير قيمتين للمعلمة  $b_1$  من معاملات الشكل المختزل ، ولكنه يكون من المستحيل حساب أى معامل ميل هيكل لمعادلة  $R$  غير المميزة . وتكون المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) أسلوباً ملائماً لتقدير معادلة  $Y$  زائدة التمييز . يتضمن هذا إيجاد انحدار  $R_t$  على  $M_t$  و  $Y_{t-1}$  أولاً ، ثم استخدام  $R_t$  لتقدير معادلة  $Y$  الهيكلية . وعندما يتم هذا تكون  $\hat{b}_1$  متسقة .

ملحق ١

## اضمارات ذي الحدين

| n | z | .01   | .05   | .10   | .15   | .20   | .25   | P | .30   | .35   | .40   | .45   | .50   |
|---|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | .9900 | .9950 | .9993 | .9990 | .9997 | .9999 |   | .9999 | .9997 | .9990 | .9950 | .9900 |
| 1 | 1 | .0100 | .0050 | .0007 | .0000 | .0000 | .0000 |   | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 2 | 0 | .9801 | .9825 | .9840 | .9845 | .9850 | .9853 |   | .9855 | .9857 | .9859 | .9860 | .9861 |
| 2 | 1 | .0198 | .0095 | .0050 | .0030 | .0020 | .0015 |   | .0010 | .0008 | .0005 | .0003 | .0001 |
| 2 | 2 | .0001 | .0025 | .0100 | .0225 | .0400 | .0625 |   | .0900 | .1225 | .1600 | .2025 | .2500 |
| 3 | 0 | .9703 | .9674 | .9630 | .9580 | .9520 | .9450 |   | .9370 | .9280 | .9180 | .9070 | .8950 |
| 3 | 1 | .0294 | .0324 | .0360 | .0390 | .0410 | .0425 |   | .0435 | .0440 | .0440 | .0435 | .0425 |
| 3 | 2 | .0003 | .0071 | .0270 | .0574 | .0860 | .1146 |   | .1416 | .1680 | .1910 | .2100 | .2250 |
| 3 | 3 | .0000 | .0001 | .0010 | .0034 | .0080 | .0156 |   | .0270 | .0429 | .0640 | .0911 | .1250 |
| 4 | 0 | .9606 | .9561 | .9510 | .9450 | .9380 | .9300 |   | .9210 | .9110 | .8990 | .8860 | .8720 |
| 4 | 1 | .0398 | .0439 | .0480 | .0510 | .0530 | .0545 |   | .0555 | .0560 | .0560 | .0555 | .0545 |
| 4 | 2 | .0006 | .0135 | .0486 | .0975 | .1536 | .2109 |   | .2646 | .3105 | .3456 | .3675 | .3750 |
| 4 | 3 | .0000 | .0005 | .0035 | .0115 | .0256 | .0469 |   | .0756 | .1115 | .1536 | .2005 | .2500 |
| 4 | 4 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 | .0016 | .0039 |   | .0081 | .0150 | .0256 | .0410 | .0625 |
| 5 | 0 | .9510 | .9438 | .9360 | .9280 | .9190 | .9090 |   | .8980 | .8860 | .8720 | .8570 | .8410 |
| 5 | 1 | .0480 | .0510 | .0540 | .0560 | .0570 | .0575 |   | .0575 | .0570 | .0560 | .0540 | .0510 |
| 5 | 2 | .0010 | .0214 | .0729 | .1382 | .2048 | .2637 |   | .3087 | .3364 | .3456 | .3369 | .3125 |
| 5 | 3 | .0000 | .0011 | .0081 | .0244 | .0512 | .0879 |   | .1323 | .1811 | .2304 | .2757 | .3125 |
| 5 | 4 | .0000 | .0000 | .0004 | .0022 | .0064 | .0146 |   | .0284 | .0488 | .0768 | .1128 | .1562 |
| 5 | 5 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0003 | .0010 |   | .0024 | .0053 | .0102 | .0185 | .0312 |
| 6 | 0 | .9415 | .9321 | .9210 | .9090 | .8960 | .8820 |   | .8670 | .8510 | .8340 | .8160 | .7970 |
| 6 | 1 | .0581 | .0678 | .0760 | .0820 | .0860 | .0880 |   | .0890 | .0890 | .0880 | .0860 | .0820 |
| 6 | 2 | .0014 | .0035 | .0094 | .0162 | .0248 | .0340 |   | .0437 | .0524 | .0600 | .0660 | .0700 |
| 6 | 3 | .0000 | .0021 | .0146 | .0415 | .0819 | .1318 |   | .1852 | .2355 | .2760 | .3032 | .3125 |
| 6 | 4 | .0000 | .0001 | .0012 | .0055 | .0154 | .0330 |   | .0595 | .0951 | .1382 | .1861 | .2344 |
| 6 | 5 | .0000 | .0000 | .0001 | .0004 | .0015 | .0044 |   | .0102 | .0205 | .0369 | .0609 | .0938 |
| 7 | 0 | .9321 | .9210 | .9090 | .8960 | .8820 | .8670 |   | .8510 | .8340 | .8160 | .7970 | .7770 |
| 7 | 1 | .0679 | .0760 | .0820 | .0860 | .0880 | .0890 |   | .0890 | .0890 | .0880 | .0860 | .0820 |
| 7 | 2 | .0020 | .0046 | .0124 | .0209 | .0275 | .0315 |   | .0377 | .0437 | .0488 | .0524 | .0545 |
| 7 | 3 | .0000 | .0036 | .0120 | .0230 | .0367 | .0524 |   | .0690 | .0860 | .1020 | .1170 | .1250 |
| 7 | 4 | .0000 | .0002 | .0026 | .0109 | .0287 | .0577 |   | .0972 | .1442 | .1935 | .2388 | .2734 |
| 7 | 5 | .0000 | .0000 | .0002 | .0012 | .0043 | .0115 |   | .0250 | .0466 | .0774 | .1172 | .1641 |
| 8 | 0 | .9227 | .9100 | .8960 | .8820 | .8670 | .8510 |   | .8340 | .8160 | .7970 | .7770 | .7560 |
| 8 | 1 | .0773 | .0820 | .0860 | .0880 | .0890 | .0890 |   | .0890 | .0890 | .0880 | .0860 | .0820 |
| 8 | 2 | .0026 | .0051 | .0148 | .0236 | .0367 | .0524 |   | .0690 | .0860 | .1020 | .1170 | .1250 |
| 8 | 3 | .0001 | .0054 | .0131 | .0239 | .0376 | .0545 |   | .0720 | .0900 | .1080 | .1250 | .1350 |
| 8 | 4 | .0000 | .0004 | .0046 | .0185 | .0459 | .0865 |   | .1361 | .1875 | .2322 | .2827 | .3234 |
| 9 | 0 | .9135 | .9000 | .8860 | .8720 | .8570 | .8410 |   | .8240 | .8060 | .7870 | .7670 | .7460 |
| 9 | 1 | .0860 | .0900 | .0940 | .0960 | .0970 | .0970 |   | .0970 | .0970 | .0960 | .0940 | .0900 |
| 9 | 2 | .0034 | .0069 | .0172 | .0297 | .0430 | .0570 |   | .0710 | .0850 | .1000 | .1150 | .1250 |

| n  | z | .01   | .05   | .10   | .15   | .20   | .25   | P | .30   | .35   | .40   | .45   | .50   |
|----|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 9  | 3 | .0001 | .0077 | .0446 | .1069 | .1762 | .2336 |   | .2868 | .3360 | .3810 | .4210 | .4560 |
| 9  | 4 | .0000 | .0006 | .0074 | .0283 | .0661 | .1168 |   | .1715 | .2194 | .2606 | .2940 | .3200 |
| 10 | 0 | .9044 | .8987 | .8919 | .8840 | .8750 | .8650 |   | .8540 | .8420 | .8290 | .8150 | .7990 |
| 10 | 1 | .0914 | .0915 | .0914 | .0912 | .0909 | .0905 |   | .0900 | .0895 | .0890 | .0885 | .0880 |
| 10 | 2 | .0042 | .0046 | .0046 | .0046 | .0046 | .0046 |   | .0046 | .0046 | .0046 | .0046 | .0046 |
| 10 | 3 | .0001 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 |   | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 |
| 10 | 4 | .0000 | .0010 | .0112 | .0401 | .0881 | .1460 |   | .2001 | .2377 | .2608 | .2734 | .2800 |
| 10 | 5 | .0000 | .0001 | .0015 | .0085 | .0264 | .0584 |   | .1029 | .1536 | .2007 | .2340 | .2561 |
| 10 | 6 | .0000 | .0000 | .0001 | .0012 | .0055 | .0162 |   | .0368 | .0689 | .1115 | .1596 | .2051 |
| 10 | 7 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0008 | .0031 |   | .0090 | .0212 | .0425 | .0746 | .1172 |
| 10 | 8 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |   | .0004 | .0014 | .0043 | .0105 | .0209 |
| 10 | 9 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |   | .0001 | .0005 | .0016 | .0042 | .0098 |
| 11 | 0 | .8953 | .8887 | .8819 | .8750 | .8670 | .8580 |   | .8480 | .8370 | .8250 | .8120 | .7970 |
| 11 | 1 | .0965 | .0965 | .0965 | .0965 | .0965 | .0965 |   | .0965 | .0965 | .0965 | .0965 | .0965 |
| 11 | 2 | .0050 | .0057 | .0057 | .0057 | .0057 | .0057 |   | .0057 | .0057 | .0057 | .0057 | .0057 |
| 11 | 3 | .0002 | .0037 | .0131 | .0315 | .0581 | .0920 |   | .1224 | .1536 | .1840 | .2120 | .2360 |
| 11 | 4 | .0000 | .0014 | .0158 | .0536 | .1107 | .1721 |   | .2201 | .2428 | .2560 | .2600 | .2611 |
| 11 | 5 | .0000 | .0001 | .0025 | .0132 | .0388 | .0803 |   | .1321 | .1830 | .2207 | .2360 | .2256 |
| 11 | 6 | .0000 | .0000 | .0003 | .0023 | .0097 | .0268 |   | .0566 | .0985 | .1471 | .1931 | .2256 |
| 11 | 7 | .0000 | .0000 | .0000 | .0003 | .0017 | .0064 |   | .0173 | .0379 | .0701 | .1128 | .1611 |
| 11 | 8 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0002 | .0011 |   | .0037 | .0102 | .0234 | .0462 | .0806 |
| 11 | 9 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |   | .0005 | .0018 | .0052 | .0126 | .0269 |
| 12 | 0 | .8864 | .8784 | .8700 | .8610 | .8510 | .8400 |   | .8280 | .8150 | .8010 | .7860 | .7690 |
| 12 | 1 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 |   | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 |
| 12 | 2 | .0060 | .0068 | .0068 | .0068 | .0068 | .0068 |   | .0068 | .0068 | .0068 | .0068 | .0068 |
| 12 | 3 | .0002 | .0013 | .0052 | .0170 | .0367 | .0620 |   | .1020 | .1440 | .1870 | .2250 | .2560 |
| 12 | 4 | .0000 | .0021 | .0213 | .0683 | .1329 | .1936 |   | .2311 | .2367 | .2128 | .1700 | .1206 |
| 12 | 5 | .0000 | .0002 | .0038 | .0193 | .0532 | .1032 |   | .1585 | .2039 | .2270 | .2225 | .1934 |
| 12 | 6 | .0000 | .0000 | .0005 | .0040 | .0155 | .0401 |   | .0792 | .1261 | .1766 | .2124 | .2256 |
| 12 | 7 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |   | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 12 | 8 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |   | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 12 | 9 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |   | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 13 | 0 | .8775 | .8700 | .8610 | .8510 | .8400 | .8280 |   | .8150 | .8010 | .7860 | .7690 | .7500 |
| 13 | 1 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 |   | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 | .0974 |
| 13 | 2 | .0070 | .0070 | .0070 | .0070 | .0070 | .0070 |   | .0070 | .0070 | .0070 | .0070 | .0070 |
| 13 | 3 | .0003 | .0014 | .0057 | .0190 | .0367 | .0620 |   | .1020 | .1440 | .1870 | .2250 | .2560 |
| 13 | 4 | .0000 | .0028 | .0277 | .0838 | .1535 | .2087 |   | .2337 | .2222 | .1845 | .1350 | .0873 |

مثال :  $P(X = 3, n = 5, P = 0.30) = 0.1323$

## ( ملحق ١ )

## احتمالات ذى الحدين

ملحق ١

٢٥٥

| n  | x  | .01   | .05   | .10   | .15   | .20   | .25   | P     | .30   | .35   | .40   | .45   | .50   |
|----|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 13 | 0  | .0000 | .0003 | .0055 | .0265 | .0891 | .1258 | 1.803 | 2.154 | 2.214 | 1.989 | 1.571 |       |
| 5  | 1  | .0000 | .0000 | .0003 | .0063 | .0230 | .0856 | 1.030 | 1.546 | 1.968 | 2.169 | 2.086 |       |
| 6  | 2  | .0000 | .0000 | .0001 | .0011 | .0058 | .0185 | .0442 | .0833 | 1.312 | 1.775 | 2.095 |       |
| 7  | 3  | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0011 | .0047 | .0142 | .0326 | .0656 | 1.089 | 1.571 |       |
| 8  | 4  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0008 | .0034 | .0101 | .0243 | .0495 | .0873 |       |
| 9  | 5  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 | .0022 | .0065 | .0162 | .0349 |       |
| 10 | 6  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0003 | .0012 | .0035 | .0095 |       |
| 11 | 7  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 | .0016 |       |
| 12 | 8  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |       |
| 13 | 9  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |
| 14 | 0  | .8687 | .4877 | .2288 | .1028 | .0440 | .0178 | .0068 | .0024 | .0008 | .0002 | .0001 |       |
| 1  | 1  | .1229 | .3583 | .2539 | .1539 | .0832 | .0497 | .0181 | .0073 | .0027 | .0009 | .0003 |       |
| 2  | 2  | .0081 | .1229 | .2570 | .2912 | .2501 | .1802 | .1134 | .0634 | .0317 | .0141 | .0066 |       |
| 3  | 3  | .0003 | .0259 | .1142 | .2066 | .2501 | .2402 | .1943 | .1366 | .0845 | .0462 | .0222 |       |
| 4  | 4  | .0000 | .0037 | .0349 | .0898 | .1720 | .2202 | .2280 | .2022 | .1549 | .1040 | .0611 |       |
| 5  | 5  | .0000 | .0004 | .0078 | .0252 | .0860 | .1488 | .1963 | .2178 | .2066 | .1701 | .1222 |       |
| 6  | 6  | .0000 | .0000 | .0013 | .0093 | .0322 | .0734 | .1262 | .1759 | .2066 | .2088 | 1.833 |       |
| 7  | 7  | .0000 | .0000 | .0002 | .0019 | .0092 | .0280 | .0618 | .1082 | .1574 | 1.952 | 2.095 |       |
| 8  | 8  | .0000 | .0000 | .0000 | .0003 | .0020 | .0082 | .0232 | .0510 | .0918 | 1.388 | 1.833 |       |
| 9  | 9  | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0003 | .0018 | .0065 | .0183 | .0408 | .0762 | 1.222 |       |
| 10 | 10 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0003 | .0014 | .0045 | .0135 | .0312 | .0611 |       |
| 11 | 11 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0002 | .0010 | .0033 | .0093 | .0222 |       |
| 12 | 12 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 | .0019 | .0056 | .0095 |       |
| 13 | 13 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0002 | .0009 |       |
| 14 | 14 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |       |
| 15 | 0  | .8601 | .4633 | .2059 | .0874 | .0352 | .0134 | .0047 | .0016 | .0005 | .0001 | .0000 |       |
| 1  | 1  | .1303 | .3658 | .3432 | .2312 | .1319 | .0668 | .0305 | .0126 | .0047 | .0016 | .0005 |       |
| 2  | 2  | .0092 | .1348 | .2669 | .2856 | .2309 | 1.559 | .0916 | .0476 | .0219 | .0090 | .0032 |       |
| 3  | 3  | .0004 | .0307 | .1285 | .2189 | .2501 | .2282 | .1700 | .1110 | .0634 | .0318 | .0139 |       |
| 4  | 4  | .0000 | .0049 | .0428 | .1156 | .1876 | .2252 | .2186 | .1792 | .1268 | .0780 | .0417 |       |
| 5  | 5  | .0000 | .0006 | .0105 | .0449 | .1032 | .1651 | .2061 | .2123 | .1859 | .1404 | .0916 |       |
| 6  | 6  | .0000 | .0000 | .0019 | .0132 | .0430 | .0917 | .1472 | .1906 | .2066 | .1914 | .1527 |       |
| 7  | 7  | .0000 | .0000 | .0003 | .0030 | .0138 | .0383 | .0811 | .1319 | .1771 | .2013 | 1.964 |       |
| 8  | 8  | .0000 | .0000 | .0000 | .0005 | .0035 | .0131 | .0348 | .0710 | .1181 | .1647 | 1.964 |       |
| 9  | 9  | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0007 | .0034 | .0116 | .0298 | .0612 | .1048 | 1.527 |       |
| 10 | 10 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0007 | .0030 | .0096 | .0245 | .0515 | .0916 |       |
| 11 | 11 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0006 | .0024 | .0074 | .0191 | .0417 |       |
| 12 | 12 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0004 | .0016 | .0052 | .0139 |       |
| 13 | 13 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0003 | .0010 | .0035 |       |
| 14 | 14 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 |       |
| 15 | 15 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |       |
| 16 | 0  | .8515 | .4401 | .1853 | .0743 | .0281 | .0100 | .0033 | .0010 | .0003 | .0001 | .0000 |       |
| 1  | 1  | .1376 | .3706 | .3294 | .2097 | .1126 | .0535 | .0228 | .0087 | .0030 | .0008 | .0002 |       |
| 2  | 2  | .0104 | .1463 | .2745 | .2775 | .2111 | .1338 | .0732 | .0353 | .0150 | .0066 | .0018 |       |
| 3  | 3  | .0005 | .0389 | .1423 | .2288 | .2463 | .2079 | .1455 | .0886 | .0468 | .0215 | .0085 |       |
| 4  | 4  | .0000 | .0061 | .0514 | .1311 | .2001 | .2262 | .2040 | .1553 | .1014 | .0572 | .0278 |       |
| 5  | 5  | .0000 | .0008 | .0137 | .0565 | .1201 | .1802 | .2089 | .2008 | .1623 | .1123 | .0687 |       |
| 6  | 6  | .0000 | .0001 | .0028 | .0160 | .0550 | .1101 | .1849 | .1982 | .1583 | .1094 | .1222 |       |
| 17 | 0  | .8429 | .4181 | .1658 | .0631 | .0225 | .0075 | .0023 | .0007 | .0002 | .0000 | .0000 |       |
| 1  | 1  | .1447 | .3741 | .3150 | .1893 | .0957 | .0426 | .0169 | .0060 | .0019 | .0005 | .0001 |       |
| 2  | 2  | .0117 | .1575 | .2800 | .2673 | .1914 | .1135 | .0581 | .0260 | .0102 | .0035 | .0010 |       |
| 3  | 3  | .0006 | .0415 | .1556 | .2359 | .2393 | .1893 | .1245 | .0701 | .0341 | .0144 | .0052 |       |
| 4  | 4  | .0000 | .0076 | .0605 | .1457 | .2093 | .2209 | .1868 | .1320 | .0796 | .0411 | .0182 |       |
| 5  | 5  | .0000 | .0010 | .0175 | .0668 | .1361 | .1914 | .2081 | .1849 | .1379 | .0875 | .0472 |       |
| 6  | 6  | .0000 | .0001 | .0039 | .0236 | .0680 | .1276 | .1784 | .1991 | .1839 | .1432 | .0944 |       |
| 7  | 7  | .0000 | .0000 | .0007 | .0065 | .0267 | .0668 | .1201 | .1585 | .1927 | .1841 | 1.484 |       |
| 8  | 8  | .0000 | .0000 | .0001 | .0014 | .0084 | .0279 | .0644 | .1134 | .1606 | 1.883 | 1.855 |       |
| 9  | 9  | .0000 | .0000 | .0000 | .0003 | .0021 | .0093 | .0276 | .0611 | .1070 | 1.540 | 1.855 |       |
| 10 | 10 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0004 | .0025 | .0095 | .0263 | .0571 | 1.098 | 1.484 |       |
| 11 | 11 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 | .0026 | .0090 | .0242 | .0525 | .0944 |
| 12 | 12 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0006 | .0024 | .0081 | .0215 | .0472 |
| 13 | 13 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 | .0021 | .0068 |
| 14 | 14 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0004 | .0016 |
| 15 | 15 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |
| 16 | 16 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 17 | 17 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 18 | 18 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 19 | 19 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 20 | 20 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 21 | 21 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 22 | 22 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 23 | 23 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 24 | 24 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 25 | 25 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 26 | 26 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 27 | 27 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 28 | 28 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 29 | 29 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 30 | 30 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 31 | 31 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 32 | 32 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 33 | 33 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 34 | 34 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 35 | 35 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 36 | 36 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 37 | 37 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 38 | 38 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 39 | 39 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 40 | 40 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 41 | 41 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 42 | 42 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 43 | 43 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 44 | 44 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 45 | 45 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 46 | 46 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 47 | 47 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 48 | 48 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 49 | 49 | .0000 | .0000 | .000  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

## احتمالات ذی الحدين

[illegible]

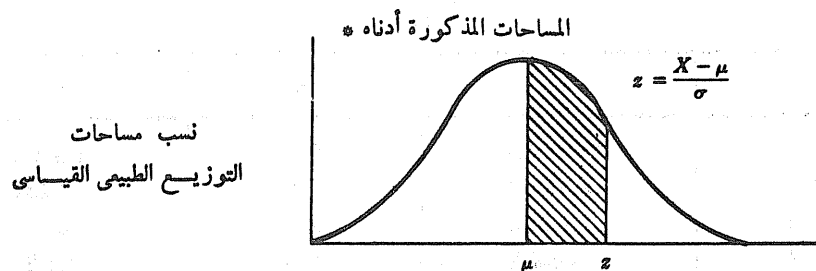


## ملحق ٢

قيم  $e^{-\lambda}$ 

| $\lambda$ | $e^{-\lambda}$ | $\lambda$ | $e^{-\lambda}$ |
|-----------|----------------|-----------|----------------|
| 0.0       | 1.00000        | 2.5       | .08208         |
| 0.1       | .90484         | 2.6       | .07427         |
| 0.2       | .81873         | 2.7       | .06721         |
| 0.3       | .74082         | 2.8       | .06081         |
| 0.4       | .67032         | 2.9       | .05502         |
| 0.5       | .60653         | 3.0       | .04979         |
| 0.6       | .54881         | 3.2       | .04076         |
| 0.7       | .49659         | 3.4       | .03337         |
| 0.8       | .44933         | 3.6       | .02732         |
| 0.9       | .40657         | 3.8       | .02237         |
| 1.0       | .36788         | 4.0       | .01832         |
| 1.1       | .33287         | 4.2       | .01500         |
| 1.2       | .30119         | 4.4       | .01228         |
| 1.3       | .27253         | 4.6       | .01005         |
| 1.4       | .24660         | 4.8       | .00823         |
| 1.5       | .22313         | 5.0       | .00674         |
| 1.6       | .20190         | 5.5       | .00409         |
| 1.7       | .18268         | 6.0       | .00248         |
| 1.8       | .16530         | 6.5       | .00150         |
| 1.9       | .14957         | 7.0       | .00091         |
| 2.0       | .13534         | 7.5       | .00055         |
| 2.1       | .12246         | 8.0       | .00034         |
| 2.2       | .00180         | 8.5       | .00020         |
| 2.3       | .10026         | 9.0       | .00012         |
| 2.4       | .09072         | 10.0      | .00005         |

## ملحق ٣



| z   | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2518 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2612 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4014 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4983 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3.5 | .4997 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 4.0 | .4999 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

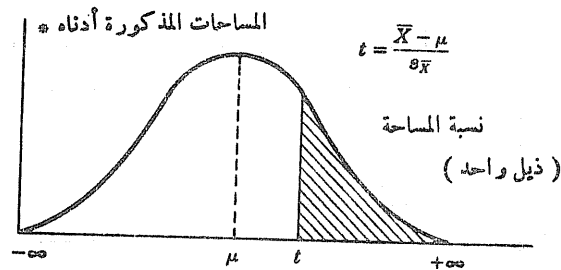
مثال \* : عند  $z = 1.96$  ، المساحة المظلة 0.4750 من إجمال المساحة 1.0000 .

## ملحق ٤

## جدول الأرقام العشوائية

|       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 10097 | 85017 | 84532 | 13618 | 23157 | 86952 | 02438 | 76520 | 91499 | 38631 | 79430 | 62421 | 97959 | 67422 | 69992 | 68479 |
| 37542 | 16719 | 82789 | 69041 | 05545 | 44109 | 05403 | 64894 | 80336 | 49172 | 16332 | 44670 | 35089 | 17691 | 89246 | 26940 |
| 08422 | 65842 | 27672 | 82186 | 14871 | 22115 | 86529 | 19646 | 44104 | 89232 | 57327 | 34679 | 62235 | 79655 | 81336 | 85157 |
| 99019 | 76875 | 20684 | 39187 | 38976 | 94324 | 43204 | 09376 | 12550 | 02844 | 15026 | 32439 | 58537 | 48274 | 81330 | 11100 |
| 12807 | 93640 | 39160 | 41453 | 97312 | 41548 | 93137 | 80157 | 63606 | 40387 | 65406 | 37920 | 08709 | 60623 | 2237  | 16505 |
| 66065 | 99478 | 70086 | 71265 | 11742 | 18226 | 29004 | 34072 | 61196 | 80240 | 44177 | 51171 | 08723 | 39323 | 05798 | 26457 |
| 31060 | 65119 | 26486 | 47353 | 43361 | 99438 | 42753 | 45571 | 15474 | 44910 | 99321 | 72173 | 56239 | 04595 | 10836 | 95270 |
| 85269 | 70322 | 21592 | 48233 | 93806 | 32584 | 21828 | 02051 | 94557 | 33663 | 86347 | 00926 | 44915 | 34823 | 51770 | 67897 |
| 63573 | 58133 | 41278 | 11697 | 49540 | 61777 | 67954 | 05325 | 42481 | 86430 | 19102 | 37420 | 41976 | 76559 | 24358 | 97344 |
| 73796 | 44655 | 81255 | 31133 | 36788 | 60452 | 38537 | 03529 | 23523 | 31379 | 68688 | 81675 | 15694 | 43438 | 36879 | 73208 |
| 98520 | 02295 | 13487 | 98662 | 07092 | 44673 | 61303 | 14905 | 04493 | 98086 | 32533 | 17767 | 14523 | 52494 | 24826 | 75246 |
| 11805 | 85035 | 54881 | 35587 | 43310 | 48897 | 48493 | 39808 | 00549 | 33185 | 04805 | 05431 | 94598 | 97654 | 16232 | 64051 |
| 83452 | 01197 | 86935 | 28021 | 61570 | 23350 | 65710 | 08288 | 35963 | 80951 | 68953 | 99634 | 81949 | 15307 | 00406 | 26898 |
| 88685 | 97907 | 19078 | 40646 | 31352 | 48625 | 44369 | 86507 | 59808 | 79752 | 02529 | 40200 | 73742 | 08391 | 49140 | 45427 |
| 99594 | 63268 | 96905 | 28797 | 57048 | 46359 | 74294 | 87517 | 46058 | 18633 | 99970 | 67348 | 49329 | 95236 | 32537 | 01390 |
| 65481 | 52841 | 59684 | 67411 | 09243 | 56092 | 84369 | 17468 | 32179 | 74029 | 74717 | 17674 | 90446 | 00597 | 45240 | 87379 |
| 80124 | 53722 | 71399 | 10916 | 07959 | 21225 | 13018 | 17727 | 69234 | 54178 | 10805 | 35635 | 45266 | 61406 | 41941 | 20117 |
| 74350 | 11434 | 51908 | 62171 | 93732 | 26958 | 02400 | 77402 | 19565 | 11664 | 77602 | 99817 | 28573 | 41430 | 96382 | 01758 |
| 69916 | 62375 | 99292 | 21177 | 72721 | 66995 | 07289 | 66252 | 45155 | 48324 | 32135 | 26803 | 16213 | 14938 | 71961 | 19476 |
| 09893 | 28337 | 20923 | 87929 | 61020 | 62841 | 31374 | 14225 | 94864 | 69074 | 45753 | 20505 | 78317 | 31984 | 98145 | 36168 |

## ملحق ٥



| df | 0.10  | 0.05  | 0.025  | 0.01   | 0.005  |
|----|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1  | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2  | 1.886 | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  |
| 3  | 1.638 | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  |
| 4  | 1.533 | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  |
| 5  | 1.476 | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  |
| 6  | 1.440 | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  |
| 7  | 1.415 | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  |
| 8  | 1.397 | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  |
| 9  | 1.383 | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120  | 2.583  | 2.921  |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110  | 2.567  | 2.898  |

| df  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.01  | 0.005 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 18  | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19  | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20  | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21  | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22  | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23  | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24  | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25  | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26  | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27  | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28  | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29  | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30  | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40  | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60  | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 120 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| ∞   | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

مثال ٥ : بالنسبة للمساحة المظلة والتي تمثل 0.05 من المساحة الكلية 1.10 قيمة t بدرجات حرية 10 هي 1.812

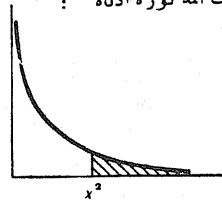
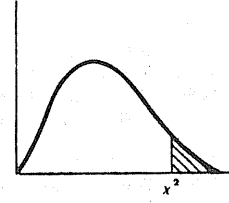
المصدر : من جدول ٣

Fisher and Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th ed., 1974, Published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh).

بتصريح من المؤلفين والناشرين

## ملحق ٦

المساحات المذكورة أدناه \* :

عند  $df = 1, 2$ عند  $df \geq 3$ 

| df  | نسب مساحة توزيع كاي - تربيع |         |         |         |        |       |       |       |       |       |       |
|-----|-----------------------------|---------|---------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | 0.995                       | 0.990   | 0.975   | 0.950   | 0.900  | 0.500 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
| 1   | 0.00004                     | 0.00016 | 0.00098 | 0.00393 | 0.0158 | 0.455 | 2.71  | 3.84  | 5.02  | 6.63  | 7.88  |
| 2   | 0.0100                      | 0.0201  | 0.0506  | 0.103   | 0.211  | 1.386 | 4.61  | 5.99  | 7.38  | 9.21  | 10.60 |
| 3   | 0.072                       | 0.115   | 0.216   | 0.352   | 0.584  | 2.366 | 6.25  | 7.81  | 9.35  | 11.34 | 12.84 |
| 4   | 0.207                       | 0.297   | 0.484   | 0.711   | 1.064  | 3.357 | 7.78  | 9.49  | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5   | 0.412                       | 0.554   | 0.831   | 1.145   | 1.61   | 4.251 | 9.24  | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6   | 0.676                       | 0.872   | 1.24    | 1.64    | 2.20   | 5.35  | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7   | 0.989                       | 1.24    | 1.69    | 2.17    | 2.83   | 6.35  | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8   | 1.34                        | 1.65    | 2.18    | 2.73    | 3.49   | 7.34  | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 |
| 9   | 1.73                        | 2.09    | 2.70    | 3.33    | 4.17   | 8.34  | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10  | 2.16                        | 2.56    | 3.25    | 3.94    | 4.87   | 9.34  | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11  | 2.60                        | 3.05    | 3.82    | 4.57    | 5.58   | 10.34 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.73 | 26.76 |
| 12  | 3.07                        | 3.57    | 4.40    | 5.23    | 6.30   | 11.34 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13  | 3.57                        | 4.11    | 5.01    | 5.89    | 7.04   | 12.34 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14  | 4.07                        | 4.66    | 5.63    | 6.57    | 7.79   | 13.34 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15  | 4.60                        | 5.23    | 6.26    | 7.26    | 8.55   | 14.34 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16  | 5.14                        | 5.81    | 6.91    | 7.96    | 9.31   | 15.34 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17  | 5.70                        | 6.41    | 7.56    | 8.67    | 10.09  | 16.34 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18  | 6.26                        | 7.01    | 8.23    | 9.39    | 10.86  | 17.34 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19  | 6.84                        | 7.63    | 8.91    | 10.12   | 11.65  | 18.34 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20  | 7.43                        | 8.26    | 9.59    | 10.85   | 12.44  | 19.34 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21  | 8.03                        | 8.90    | 10.28   | 11.59   | 13.24  | 20.34 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22  | 8.64                        | 9.54    | 10.98   | 12.34   | 14.04  | 21.34 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23  | 9.26                        | 10.20   | 11.69   | 13.09   | 14.85  | 22.34 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24  | 9.89                        | 10.86   | 12.40   | 13.85   | 15.66  | 23.34 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25  | 10.52                       | 11.52   | 13.12   | 14.61   | 16.47  | 24.34 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26  | 11.16                       | 12.20   | 13.84   | 15.38   | 17.29  | 25.34 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27  | 11.81                       | 12.83   | 14.57   | 16.15   | 18.11  | 26.34 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 |
| 28  | 12.46                       | 13.56   | 15.31   | 16.93   | 18.94  | 27.34 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29  | 13.12                       | 14.26   | 16.05   | 17.71   | 19.77  | 28.34 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30  | 13.79                       | 14.95   | 16.79   | 18.49   | 20.60  | 29.34 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40  | 20.71                       | 22.16   | 24.43   | 26.51   | 29.05  | 39.34 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 50  | 27.99                       | 29.71   | 32.36   | 34.76   | 37.69  | 49.33 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |
| 60  | 35.53                       | 37.43   | 40.48   | 43.19   | 46.46  | 59.33 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 70  | 43.28                       | 45.44   | 48.76   | 51.74   | 55.33  | 69.33 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.4 | 104.2 |
| 80  | 51.17                       | 53.54   | 57.17   | 60.39   | 64.28  | 79.33 | 98.58 | 101.9 | 106.6 | 112.3 | 116.3 |
| 90  | 59.20                       | 61.75   | 65.65   | 69.13   | 73.29  | 89.33 | 107.6 | 113.1 | 118.1 | 124.1 | 128.3 |
| 100 | 67.33                       | 70.06   | 74.22   | 77.93   | 82.36  | 99.33 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 |

مثال \* : بالنسبة للمساحة المظلة والتي تمثل 0.05 من المساحة الكلية 1.0 تحت دالة كثافة الاحتمال ، قيمة  $X^2$  هي 18.31 عند درجات

حرية 10 df

المصدر : من جدول ٤

Fisher and Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th ed. 1974, published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh).

بتصريح من المؤلفين والناشرين

فيم F باحالات 5% و 1%

المقام

|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 14    | 16    | 20    | 24    | 30    | 40    | 50    | 75    | 100   | 200   | 500   | ∞     |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 161   | 200   | 216   | 225   | 230   | 234   | 237   | 239   | 241   | 242   | 243   | 244   | 245   | 246   | 248   | 249   | 250   | 251   | 252   | 253   | 253   | 254   | 254   | 254   |
| 2  | 4.052 | 4.999 | 5.403 | 5.625 | 5.764 | 5.859 | 5.928 | 5.981 | 6.022 | 6.056 | 6.082 | 6.106 | 6.122 | 6.139 | 6.208 | 6.234 | 6.261 | 6.286 | 6.302 | 6.323 | 6.334 | 6.352 | 6.361 | 6.366 |
| 3  | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.36 | 19.37 | 19.38 | 19.39 | 19.40 | 19.41 | 19.42 | 19.43 | 19.44 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.49 | 19.50 | 19.50 |
| 4  | 98.49 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.38 | 99.40 | 99.41 | 99.42 | 99.43 | 99.44 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.48 | 99.48 | 99.49 | 99.49 | 99.50 | 99.50 | 99.50 |
| 5  | 10.13 | 9.55  | 9.28  | 9.12  | 9.01  | 8.94  | 8.88  | 8.84  | 8.81  | 8.78  | 8.76  | 8.74  | 8.71  | 8.69  | 8.66  | 8.64  | 8.62  | 8.60  | 8.58  | 8.57  | 8.56  | 8.54  | 8.54  | 8.53  |
| 6  | 34.12 | 30.32 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.34 | 27.23 | 27.13 | 27.05 | 26.92 | 26.83 | 26.69 | 26.60 | 26.50 | 26.41 | 26.35 | 26.27 | 26.18 | 26.14 | 26.12 | 26.12 |
| 7  | 7.71  | 6.94  | 6.59  | 6.39  | 6.26  | 6.16  | 6.09  | 6.04  | 6.00  | 5.96  | 5.93  | 5.91  | 5.87  | 5.84  | 5.80  | 5.77  | 5.74  | 5.71  | 5.70  | 5.68  | 5.66  | 5.65  | 5.64  | 5.63  |
| 8  | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.54 | 14.45 | 14.37 | 14.24 | 14.15 | 14.02 | 13.93 | 13.83 | 13.74 | 13.69 | 13.61 | 13.57 | 13.52 | 13.48 | 13.46 |
| 9  | 6.61  | 5.79  | 5.41  | 5.19  | 5.05  | 4.95  | 4.88  | 4.82  | 4.78  | 4.74  | 4.70  | 4.68  | 4.64  | 4.60  | 4.56  | 4.53  | 4.50  | 4.46  | 4.44  | 4.42  | 4.40  | 4.38  | 4.37  | 4.36  |
| 10 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.45 | 10.29 | 10.15 | 10.05 | 9.96  | 9.89  | 9.77  | 9.68  | 9.55  | 9.47  | 9.38  | 9.29  | 9.24  | 9.17  | 9.13  | 9.07  | 9.04  | 9.02  |
| 11 | 5.99  | 5.14  | 4.76  | 4.53  | 4.39  | 4.28  | 4.21  | 4.15  | 4.10  | 4.06  | 4.03  | 4.00  | 3.96  | 3.92  | 3.87  | 3.84  | 3.81  | 3.77  | 3.75  | 3.72  | 3.71  | 3.69  | 3.68  | 3.67  |
| 12 | 13.74 | 10.92 | 9.78  | 9.15  | 8.75  | 8.47  | 8.26  | 8.10  | 7.98  | 7.87  | 7.79  | 7.72  | 7.60  | 7.52  | 7.39  | 7.31  | 7.23  | 7.14  | 7.09  | 7.02  | 6.99  | 6.94  | 6.90  | 6.88  |
| 13 | 5.59  | 4.74  | 4.34  | 4.12  | 3.97  | 3.87  | 3.79  | 3.73  | 3.68  | 3.63  | 3.60  | 3.57  | 3.52  | 3.49  | 3.4   | 3.41  | 3.38  | 3.34  | 3.32  | 3.29  | 3.28  | 3.25  | 3.24  | 3.23  |
| 14 | 12.25 | 9.55  | 8.45  | 7.85  | 7.46  | 7.19  | 7.00  | 6.84  | 6.71  | 6.62  | 6.54  | 6.47  | 6.35  | 6.27  | 6.15  | 6.07  | 5.98  | 5.90  | 5.85  | 5.78  | 5.75  | 5.70  | 5.67  | 5.65  |
| 15 | 5.32  | 4.46  | 4.07  | 3.84  | 3.69  | 3.58  | 3.50  | 3.44  | 3.39  | 3.34  | 3.31  | 3.28  | 3.23  | 3.20  | 3.15  | 3.12  | 3.08  | 3.05  | 3.03  | 3.00  | 2.98  | 2.96  | 2.94  | 2.93  |
| 16 | 11.26 | 8.65  | 7.59  | 7.01  | 6.63  | 6.37  | 6.19  | 6.03  | 5.91  | 5.82  | 5.74  | 5.67  | 5.55  | 5.48  | 5.36  | 5.28  | 5.20  | 5.11  | 5.06  | 5.00  | 4.96  | 4.91  | 4.88  | 4.86  |
| 17 | 5.12  | 4.26  | 3.86  | 3.63  | 3.48  | 3.37  | 3.29  | 3.23  | 3.18  | 3.13  | 3.10  | 3.07  | 3.02  | 2.98  | 2.93  | 2.90  | 2.86  | 2.82  | 2.80  | 2.77  | 2.76  | 2.73  | 2.72  | 2.71  |
| 18 | 10.56 | 8.02  | 6.99  | 6.42  | 6.06  | 5.80  | 5.62  | 5.47  | 5.35  | 5.26  | 5.18  | 5.11  | 5.00  | 4.92  | 4.80  | 4.73  | 4.64  | 4.56  | 4.51  | 4.45  | 4.41  | 4.36  | 4.33  | 4.31  |
| 19 | 4.96  | 4.10  | 3.71  | 3.48  | 3.33  | 3.22  | 3.14  | 3.07  | 3.02  | 2.97  | 2.94  | 2.91  | 2.86  | 2.82  | 2.77  | 2.74  | 2.70  | 2.67  | 2.64  | 2.61  | 2.59  | 2.56  | 2.55  | 2.54  |
| 20 | 10.04 | 7.56  | 6.55  | 5.99  | 5.64  | 5.39  | 5.21  | 5.06  | 4.96  | 4.85  | 4.78  | 4.71  | 4.60  | 4.52  | 4.41  | 4.33  | 4.25  | 4.17  | 4.12  | 4.05  | 4.01  | 3.96  | 3.93  | 3.91  |
| 21 | 4.84  | 3.98  | 3.59  | 3.36  | 3.20  | 3.09  | 3.01  | 2.95  | 2.90  | 2.86  | 2.82  | 2.79  | 2.74  | 2.70  | 2.65  | 2.61  | 2.57  | 2.53  | 2.50  | 2.47  | 2.45  | 2.42  | 2.41  | 2.40  |
| 22 | 9.65  | 7.20  | 6.22  | 5.67  | 5.32  | 5.07  | 4.88  | 4.74  | 4.63  | 4.54  | 4.46  | 4.40  | 4.29  | 4.21  | 4.10  | 4.02  | 3.94  | 3.86  | 3.80  | 3.74  | 3.70  | 3.66  | 3.62  | 3.60  |
| 23 | 4.75  | 3.88  | 3.49  | 3.26  | 3.11  | 3.00  | 2.92  | 2.85  | 2.80  | 2.76  | 2.72  | 2.69  | 2.64  | 2.60  | 2.54  | 2.50  | 2.46  | 2.42  | 2.40  | 2.36  | 2.35  | 2.32  | 2.31  | 2.30  |
| 24 | 9.33  | 6.93  | 5.95  | 5.41  | 5.06  | 4.82  | 4.65  | 4.50  | 4.39  | 4.30  | 4.22  | 4.16  | 4.05  | 3.98  | 3.86  | 3.78  | 3.70  | 3.61  | 3.56  | 3.49  | 3.46  | 3.41  | 3.38  | 3.36  |
| 25 | 4.67  | 3.80  | 3.41  | 3.18  | 3.02  | 2.92  | 2.84  | 2.77  | 2.72  | 2.67  | 2.63  | 2.60  | 2.55  | 2.51  | 2.46  | 2.42  | 2.38  | 2.34  | 2.32  | 2.28  | 2.26  | 2.24  | 2.22  | 2.21  |
| 26 | 9.07  | 6.70  | 5.74  | 5.20  | 4.86  | 4.62  | 4.44  | 4.30  | 4.19  | 4.10  | 4.02  | 3.96  | 3.85  | 3.78  | 3.67  | 3.59  | 3.51  | 3.43  | 3.34  | 3.27  | 3.21  | 3.16  | 3.13  | 3.16  |
| 27 | 4.60  | 3.74  | 3.34  | 3.11  | 2.96  | 2.85  | 2.77  | 2.70  | 2.65  | 2.60  | 2.56  | 2.53  | 2.48  | 2.44  | 2.39  | 2.35  | 2.31  | 2.27  | 2.24  | 2.21  | 2.19  | 2.16  | 2.14  | 2.13  |
| 28 | 8.86  | 6.51  | 5.56  | 5.03  | 4.69  | 4.46  | 4.28  | 4.14  | 4.03  | 3.94  | 3.86  | 3.80  | 3.70  | 3.62  | 3.51  | 3.43  | 3.34  | 3.26  | 3.21  | 3.14  | 3.11  | 3.06  | 3.02  | 3.00  |
| 29 | 4.54  | 3.68  | 3.29  | 3.06  | 2.90  | 2.79  | 2.70  | 2.64  | 2.59  | 2.55  | 2.51  | 2.48  | 2.43  | 2.39  | 2.33  | 2.29  | 2.25  | 2.21  | 2.18  | 2.15  | 2.12  | 2.09  | 2.07  | 2.07  |
| 30 | 8.53  | 6.23  | 5.29  | 4.77  | 4.44  | 4.20  | 4.03  | 3.89  | 3.78  | 3.69  | 3.61  | 3.55  | 3.45  | 3.37  | 3.25  | 3.18  | 3.10  | 3.01  | 2.96  | 2.88  | 2.86  | 2.80  | 2.77  | 2.75  |
| 31 | 4.45  | 3.59  | 3.20  | 2.96  | 2.81  | 2.70  | 2.62  | 2.55  | 2.50  | 2.45  | 2.41  | 2.38  | 2.33  | 2.29  | 2.23  | 2.19  | 2.15  | 2.11  | 2.08  | 2.04  | 2.02  | 1.99  | 1.97  | 1.96  |
| 32 | 8.40  | 6.11  | 5.18  | 4.67  | 4.34  | 4.10  | 3.93  | 3.79  | 3.68  | 3.59  | 3.52  | 3.45  | 3.35  | 3.27  | 3.16  | 3.08  | 3.00  | 2.92  | 2.86  | 2.79  | 2.76  | 2.70  | 2.67  | 2.65  |
| 33 | 4.41  | 3.55  | 3.16  | 2.93  | 2.77  | 2.66  | 2.58  | 2.51  | 2.46  | 2.41  | 2.37  | 2.34  | 2.29  | 2.25  | 2.19  | 2.15  | 2.11  | 2.07  | 2.04  | 2.00  | 1.98  | 1.95  | 1.93  | 1.92  |
| 34 | 8.28  | 6.01  | 5.09  | 4.58  | 4.25  | 4.01  | 3.85  | 3.71  | 3.60  | 3.51  | 3.44  | 3.37  | 3.27  | 3.19  | 3.07  | 3.00  | 2.91  | 2.83  | 2.78  | 2.71  | 2.68  | 2.62  | 2.59  | 2.57  |

(بائع)

## (محتوى)

F

البيانات

|    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 14   | 16   | 20   | 24   | 30   | 40   | 50   | 75   | 100  | 200  | 500  | ∞    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.55 | 2.48 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.26 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.02 | 2.00 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.90 | 1.88 |
| 20 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.36 | 3.30 | 3.19 | 3.12 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.70 | 2.63 | 2.60 | 2.54 | 2.51 | 2.49 |
| 21 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.52 | 2.45 | 2.40 | 2.35 | 2.31 | 2.28 | 2.23 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.96 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.84 |
| 22 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.71 | 3.56 | 3.45 | 3.37 | 3.30 | 3.23 | 3.13 | 3.05 | 2.94 | 2.86 | 2.77 | 2.69 | 2.63 | 2.56 | 2.53 | 2.47 | 2.44 | 2.42 |
| 23 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.25 | 2.20 | 2.15 | 2.09 | 2.05 | 2.00 | 1.96 | 1.93 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.82 | 1.81 |
| 24 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.65 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.24 | 3.17 | 3.07 | 2.99 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.63 | 2.58 | 2.51 | 2.47 | 2.42 | 2.38 | 2.36 |
| 25 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.47 | 2.40 | 2.35 | 2.30 | 2.26 | 2.23 | 2.18 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.91 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.80 | 1.78 |
| 26 | 7.94 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.18 | 3.12 | 3.02 | 2.94 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.37 | 2.33 | 2.31 |
| 27 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.45 | 2.38 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.14 | 2.10 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.88 | 1.84 | 1.82 | 1.79 | 1.77 | 1.76 |
| 28 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.14 | 3.07 | 2.97 | 2.89 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.53 | 2.48 | 2.41 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.26 |
| 29 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.43 | 2.36 | 2.30 | 2.26 | 2.22 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.82 | 1.80 | 1.76 | 1.74 | 1.73 |
| 30 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.25 | 3.17 | 3.09 | 3.03 | 2.93 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.44 | 2.36 | 2.33 | 2.27 | 2.23 | 2.21 |
| 31 | 4.24 | 3.38 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.41 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.06 | 2.00 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.84 | 1.80 | 1.77 | 1.74 | 1.72 | 1.71 |
| 32 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.86 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 2.99 | 2.89 | 2.81 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.40 | 2.32 | 2.29 | 2.23 | 2.19 | 2.17 |
| 33 | 4.22 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.15 | 2.10 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.78 | 1.76 | 1.72 | 1.70 | 1.69 |
| 34 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.17 | 3.09 | 3.02 | 2.96 | 2.86 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.50 | 2.41 | 2.36 | 2.28 | 2.25 | 2.19 | 2.15 | 2.13 |
| 35 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.30 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.13 | 2.08 | 2.03 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.67 |
| 36 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.52 | 3.35 | 3.23 | 3.11 | 3.03 | 2.95 | 2.89 | 2.83 | 2.74 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.33 | 2.25 | 2.22 | 2.16 | 2.12 | 2.10 |
| 37 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.44 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.06 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.71 | 1.68 | 1.65 |
| 38 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.87 | 2.77 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.32 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 |
| 39 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.54 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.77 | 1.73 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.64 |
| 40 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.06 | 2.98 | 2.90 | 2.84 | 2.74 | 2.66 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.24 | 2.16 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 2.01 |
| 41 | 4.15 | 3.30 | 2.90 | 2.67 | 2.51 | 2.40 | 2.32 | 2.25 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 | 2.02 | 1.97 | 1.91 | 1.86 | 1.82 | 1.76 | 1.74 | 1.69 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.59 |
| 42 | 7.50 | 5.34 | 4.46 | 3.97 | 3.66 | 3.42 | 3.25 | 3.12 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.80 | 2.70 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.34 | 2.25 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.96 |
| 43 | 4.13 | 3.28 | 2.88 | 2.65 | 2.49 | 2.38 | 2.30 | 2.23 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.00 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.59 | 1.57 |
| 44 | 7.44 | 5.29 | 4.42 | 3.93 | 3.61 | 3.38 | 3.21 | 3.08 | 2.97 | 2.89 | 2.82 | 2.76 | 2.66 | 2.58 | 2.47 | 2.38 | 2.30 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 |
| 45 | 4.11 | 3.26 | 2.86 | 2.63 | 2.48 | 2.36 | 2.28 | 2.21 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.87 | 1.82 | 1.78 | 1.72 | 1.69 | 1.65 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.55 |
| 46 | 7.39 | 5.25 | 4.38 | 3.89 | 3.58 | 3.35 | 3.18 | 3.04 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.72 | 2.62 | 2.54 | 2.43 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.12 | 2.04 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 |
| 47 | 4.10 | 3.25 | 2.85 | 2.62 | 2.46 | 2.35 | 2.26 | 2.19 | 2.14 | 2.09 | 2.05 | 2.02 | 1.96 | 1.92 | 1.85 | 1.80 | 1.76 | 1.71 | 1.67 | 1.63 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.53 |
| 48 | 7.35 | 5.21 | 4.34 | 3.86 | 3.54 | 3.32 | 3.15 | 3.02 | 2.91 | 2.82 | 2.75 | 2.69 | 2.59 | 2.51 | 2.40 | 2.32 | 2.24 | 2.14 | 2.08 | 2.00 | 1.97 | 1.90 | 1.86 | 1.84 |
| 49 | 4.07 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.07 | 2.04 | 2.00 | 1.95 | 1.90 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.61 | 1.59 | 1.55 | 1.53 | 1.51 |
| 50 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.88 | 2.80 | 2.73 | 2.66 | 2.56 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.05 | 1.97 | 1.94 | 1.88 | 1.84 | 1.81 |

(تتابع)

F-قيم

الجدول df

|      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 14   | 16   | 20   | 24   | 30   | 40   | 50   | 75   | 100  | 200  | 500  | ∞    |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 42   | 4.07 | 3.22 | 2.83 | 2.59 | 2.44 | 2.32 | 2.24 | 2.17 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.82 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.49 |
| 44   | 4.06 | 3.21 | 2.82 | 2.58 | 2.43 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.81 | 1.76 | 1.72 | 1.66 | 1.63 | 1.58 | 1.56 | 1.52 | 1.50 | 1.48 |
| 46   | 4.05 | 3.20 | 2.81 | 2.57 | 2.42 | 2.30 | 2.22 | 2.14 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.97 | 1.91 | 1.87 | 1.80 | 1.75 | 1.71 | 1.65 | 1.62 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.46 |
| 48   | 4.04 | 3.19 | 2.80 | 2.56 | 2.41 | 2.30 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.03 | 2.00 | 1.99 | 1.96 | 1.90 | 1.86 | 1.79 | 1.74 | 1.70 | 1.64 | 1.61 | 1.56 | 1.53 | 1.50 | 1.47 |
| 50   | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.96 | 1.89 | 1.85 | 1.78 | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.60 | 1.55 | 1.52 | 1.48 | 1.44 |
| 55   | 4.02 | 3.17 | 2.78 | 2.54 | 2.38 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.05 | 2.00 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.83 | 1.76 | 1.72 | 1.67 | 1.61 | 1.58 | 1.52 | 1.50 | 1.46 | 1.43 | 1.41 |
| 60   | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.52 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.86 | 1.81 | 1.73 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.54 | 1.49 | 1.46 | 1.42 | 1.39 | 1.37 |
| 65   | 3.99 | 3.14 | 2.75 | 2.51 | 2.36 | 2.24 | 2.15 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.73 | 1.67 | 1.62 | 1.56 | 1.53 | 1.47 | 1.45 | 1.40 | 1.37 | 1.35 |
| 70   | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.72 | 1.67 | 1.62 | 1.56 | 1.53 | 1.47 | 1.45 | 1.40 | 1.37 | 1.35 |
| 80   | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.48 | 2.33 | 2.21 | 2.12 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.91 | 1.88 | 1.82 | 1.77 | 1.70 | 1.65 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.45 | 1.42 | 1.38 | 1.35 | 1.32 |
| 100  | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.30 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.79 | 1.75 | 1.68 | 1.63 | 1.57 | 1.51 | 1.48 | 1.42 | 1.39 | 1.34 | 1.30 | 1.28 |
| 125  | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.44 | 2.29 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.95 | 1.90 | 1.86 | 1.83 | 1.77 | 1.72 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.45 | 1.39 | 1.36 | 1.31 | 1.27 | 1.25 |
| 150  | 3.91 | 3.06 | 2.67 | 2.43 | 2.27 | 2.16 | 2.07 | 2.00 | 1.94 | 1.89 | 1.85 | 1.82 | 1.76 | 1.71 | 1.64 | 1.59 | 1.54 | 1.47 | 1.44 | 1.37 | 1.34 | 1.29 | 1.25 | 1.22 |
| 200  | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.41 | 2.26 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.80 | 1.74 | 1.69 | 1.62 | 1.57 | 1.52 | 1.45 | 1.42 | 1.35 | 1.32 | 1.26 | 1.22 | 1.19 |
| 400  | 3.86 | 3.02 | 2.62 | 2.39 | 2.23 | 2.12 | 2.03 | 1.96 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.78 | 1.72 | 1.67 | 1.60 | 1.54 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.32 | 1.28 | 1.22 | 1.16 | 1.13 |
| 1000 | 3.85 | 3.00 | 2.61 | 2.38 | 2.22 | 2.10 | 2.02 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.70 | 1.65 | 1.58 | 1.53 | 1.47 | 1.41 | 1.36 | 1.30 | 1.26 | 1.19 | 1.13 | 1.08 |
| ∞    | 3.84 | 2.99 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.09 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.79 | 1.75 | 1.69 | 1.64 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.40 | 1.35 | 1.28 | 1.24 | 1.17 | 1.11 | 1.00 |

المصدر : طبع بتصریح من Statistical Methods. 6th ed., by George W. Snedecor and William G. Cochran. (c) 1967, by

the Iowa State University Press, Ames, Iowa.

## ملحق ٨

| Significance Points of $d_L$ and $d_U$ : 5% |          |       |          |       |          |       |          |       |          | Significance Points of $d_L$ and $d_U$ : 1% |     |          |       |          |       |          |       |          |       |          |       |
|---------------------------------------------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|---------------------------------------------|-----|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| $n$                                         | $K' = 1$ |       | $K' = 2$ |       | $K' = 3$ |       | $K' = 4$ |       | $K' = 5$ |                                             | $n$ | $K' = 1$ |       | $K' = 2$ |       | $K' = 3$ |       | $K' = 4$ |       | $K' = 5$ |       |
|                                             | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$                                       |     | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ | $d_L$    | $d_U$ |
| 15                                          | 1.08     | 1.36  | 0.95     | 1.54  | 0.82     | 1.75  | 0.69     | 1.97  | 0.56     | 2.21                                        | 15  | 0.81     | 1.07  | 0.70     | 1.25  | 0.59     | 1.46  | 0.49     | 1.70  | 0.39     | 1.96  |
| 16                                          | 1.10     | 1.37  | 0.98     | 1.54  | 0.86     | 1.73  | 0.74     | 1.93  | 0.62     | 2.15                                        | 16  | 0.84     | 1.09  | 0.74     | 1.25  | 0.63     | 1.44  | 0.53     | 1.66  | 0.44     | 1.90  |
| 17                                          | 1.13     | 1.38  | 1.02     | 1.54  | 0.90     | 1.71  | 0.78     | 1.90  | 0.67     | 2.10                                        | 17  | 0.87     | 1.10  | 0.77     | 1.25  | 0.67     | 1.43  | 0.57     | 1.63  | 0.48     | 1.85  |
| 18                                          | 1.16     | 1.39  | 1.05     | 1.53  | 0.93     | 1.69  | 0.82     | 1.87  | 0.71     | 2.06                                        | 18  | 0.90     | 1.12  | 0.80     | 1.26  | 0.71     | 1.42  | 0.61     | 1.60  | 0.52     | 1.80  |
| 19                                          | 1.18     | 1.40  | 1.08     | 1.53  | 0.97     | 1.68  | 0.86     | 1.85  | 0.75     | 2.02                                        | 19  | 0.93     | 1.13  | 0.83     | 1.26  | 0.74     | 1.41  | 0.65     | 1.58  | 0.56     | 1.77  |
| 20                                          | 1.20     | 1.41  | 1.10     | 1.54  | 1.00     | 1.68  | 0.90     | 1.83  | 0.79     | 1.99                                        | 20  | 0.95     | 1.15  | 0.86     | 1.27  | 0.77     | 1.41  | 0.68     | 1.57  | 0.60     | 1.74  |
| 21                                          | 1.22     | 1.42  | 1.13     | 1.54  | 1.03     | 1.67  | 0.93     | 1.81  | 0.83     | 1.96                                        | 21  | 0.97     | 1.16  | 0.89     | 1.27  | 0.80     | 1.41  | 0.72     | 1.55  | 0.63     | 1.71  |
| 22                                          | 1.24     | 1.43  | 1.15     | 1.54  | 1.05     | 1.66  | 0.96     | 1.80  | 0.86     | 1.94                                        | 22  | 1.00     | 1.19  | 0.91     | 1.28  | 0.83     | 1.40  | 0.75     | 1.54  | 0.66     | 1.69  |
| 23                                          | 1.26     | 1.44  | 1.17     | 1.54  | 1.08     | 1.66  | 0.99     | 1.79  | 0.90     | 1.92                                        | 23  | 1.02     | 1.19  | 0.94     | 1.29  | 0.86     | 1.40  | 0.77     | 1.53  | 0.70     | 1.67  |
| 24                                          | 1.27     | 1.45  | 1.19     | 1.55  | 1.10     | 1.66  | 1.01     | 1.78  | 0.93     | 1.90                                        | 24  | 1.04     | 1.20  | 0.96     | 1.30  | 0.88     | 1.41  | 0.80     | 1.53  | 0.72     | 1.66  |
| 25                                          | 1.29     | 1.45  | 1.21     | 1.55  | 1.12     | 1.66  | 1.04     | 1.77  | 0.95     | 1.89                                        | 25  | 1.05     | 1.21  | 0.98     | 1.30  | 0.90     | 1.41  | 0.83     | 1.52  | 0.75     | 1.65  |
| 26                                          | 1.30     | 1.46  | 1.22     | 1.55  | 1.14     | 1.65  | 1.06     | 1.76  | 0.98     | 1.88                                        | 26  | 1.07     | 1.22  | 1.00     | 1.31  | 0.93     | 1.41  | 0.85     | 1.52  | 0.78     | 1.64  |
| 27                                          | 1.32     | 1.47  | 1.24     | 1.56  | 1.16     | 1.65  | 1.08     | 1.76  | 1.01     | 1.86                                        | 27  | 1.09     | 1.23  | 1.02     | 1.32  | 0.95     | 1.41  | 0.88     | 1.51  | 0.81     | 1.63  |
| 28                                          | 1.33     | 1.48  | 1.26     | 1.56  | 1.18     | 1.65  | 1.10     | 1.75  | 1.03     | 1.85                                        | 28  | 1.10     | 1.24  | 1.04     | 1.32  | 0.97     | 1.41  | 0.90     | 1.51  | 0.83     | 1.62  |
| 29                                          | 1.34     | 1.48  | 1.27     | 1.56  | 1.20     | 1.65  | 1.12     | 1.74  | 1.05     | 1.84                                        | 29  | 1.12     | 1.25  | 1.05     | 1.33  | 0.99     | 1.42  | 0.92     | 1.51  | 0.85     | 1.61  |
| 30                                          | 1.35     | 1.49  | 1.28     | 1.57  | 1.21     | 1.65  | 1.14     | 1.74  | 1.07     | 1.83                                        | 30  | 1.13     | 1.26  | 1.07     | 1.34  | 1.01     | 1.42  | 0.94     | 1.51  | 0.88     | 1.61  |
| 31                                          | 1.36     | 1.50  | 1.30     | 1.57  | 1.23     | 1.65  | 1.16     | 1.74  | 1.09     | 1.83                                        | 31  | 1.15     | 1.27  | 1.08     | 1.34  | 1.02     | 1.42  | 0.96     | 1.51  | 0.90     | 1.60  |
| 32                                          | 1.37     | 1.50  | 1.31     | 1.57  | 1.24     | 1.65  | 1.18     | 1.73  | 1.11     | 1.82                                        | 32  | 1.16     | 1.28  | 1.10     | 1.35  | 1.04     | 1.43  | 0.98     | 1.51  | 0.92     | 1.60  |
| 33                                          | 1.38     | 1.51  | 1.32     | 1.58  | 1.26     | 1.65  | 1.19     | 1.73  | 1.13     | 1.81                                        | 33  | 1.17     | 1.29  | 1.11     | 1.36  | 1.05     | 1.43  | 1.00     | 1.51  | 0.94     | 1.59  |
| 34                                          | 1.39     | 1.51  | 1.33     | 1.58  | 1.27     | 1.65  | 1.21     | 1.73  | 1.15     | 1.81                                        | 34  | 1.18     | 1.30  | 1.13     | 1.36  | 1.07     | 1.43  | 1.01     | 1.51  | 0.95     | 1.59  |
| 35                                          | 1.40     | 1.52  | 1.34     | 1.58  | 1.28     | 1.65  | 1.22     | 1.73  | 1.16     | 1.80                                        | 35  | 1.19     | 1.31  | 1.14     | 1.37  | 1.08     | 1.44  | 1.03     | 1.51  | 0.97     | 1.59  |
| 36                                          | 1.41     | 1.52  | 1.35     | 1.59  | 1.29     | 1.65  | 1.24     | 1.73  | 1.18     | 1.80                                        | 36  | 1.21     | 1.32  | 1.15     | 1.38  | 1.10     | 1.44  | 1.04     | 1.51  | 0.99     | 1.59  |
| 37                                          | 1.42     | 1.53  | 1.36     | 1.59  | 1.31     | 1.66  | 1.25     | 1.72  | 1.19     | 1.80                                        | 37  | 1.22     | 1.32  | 1.16     | 1.38  | 1.11     | 1.45  | 1.06     | 1.51  | 1.00     | 1.59  |
| 38                                          | 1.43     | 1.54  | 1.37     | 1.59  | 1.32     | 1.66  | 1.26     | 1.72  | 1.21     | 1.79                                        | 38  | 1.23     | 1.33  | 1.18     | 1.39  | 1.12     | 1.45  | 1.07     | 1.52  | 1.02     | 1.58  |
| 39                                          | 1.43     | 1.54  | 1.38     | 1.60  | 1.33     | 1.66  | 1.27     | 1.72  | 1.22     | 1.79                                        | 39  | 1.24     | 1.34  | 1.19     | 1.39  | 1.14     | 1.45  | 1.09     | 1.52  | 1.03     | 1.58  |
| 40                                          | 1.44     | 1.54  | 1.39     | 1.60  | 1.34     | 1.66  | 1.29     | 1.72  | 1.23     | 1.79                                        | 40  | 1.25     | 1.34  | 1.20     | 1.40  | 1.15     | 1.46  | 1.10     | 1.52  | 1.05     | 1.58  |
| 45                                          | 1.48     | 1.57  | 1.43     | 1.62  | 1.38     | 1.67  | 1.34     | 1.72  | 1.29     | 1.78                                        | 45  | 1.29     | 1.38  | 1.24     | 1.42  | 1.20     | 1.48  | 1.16     | 1.53  | 1.11     | 1.58  |
| 50                                          | 1.50     | 1.59  | 1.46     | 1.63  | 1.42     | 1.67  | 1.38     | 1.72  | 1.34     | 1.77                                        | 50  | 1.32     | 1.40  | 1.28     | 1.45  | 1.24     | 1.49  | 1.20     | 1.54  | 1.16     | 1.59  |
| 55                                          | 1.53     | 1.60  | 1.49     | 1.64  | 1.45     | 1.68  | 1.41     | 1.72  | 1.38     | 1.77                                        | 55  | 1.36     | 1.43  | 1.32     | 1.47  | 1.28     | 1.51  | 1.25     | 1.55  | 1.21     | 1.59  |
| 60                                          | 1.55     | 1.62  | 1.51     | 1.65  | 1.48     | 1.69  | 1.44     | 1.73  | 1.41     | 1.77                                        | 60  | 1.38     | 1.45  | 1.35     | 1.48  | 1.32     | 1.52  | 1.28     | 1.56  | 1.25     | 1.60  |
| 65                                          | 1.57     | 1.63  | 1.54     | 1.66  | 1.50     | 1.70  | 1.47     | 1.73  | 1.44     | 1.77                                        | 65  | 1.41     | 1.47  | 1.38     | 1.50  | 1.35     | 1.53  | 1.31     | 1.57  | 1.28     | 1.61  |
| 70                                          | 1.58     | 1.64  | 1.55     | 1.67  | 1.52     | 1.70  | 1.49     | 1.74  | 1.46     | 1.77                                        | 70  | 1.43     | 1.49  | 1.40     | 1.52  | 1.37     | 1.55  | 1.34     | 1.58  | 1.31     | 1.61  |
| 75                                          | 1.60     | 1.65  | 1.57     | 1.68  | 1.54     | 1.71  | 1.51     | 1.74  | 1.49     | 1.77                                        | 75  | 1.45     | 1.50  | 1.42     | 1.53  | 1.39     | 1.56  | 1.37     | 1.59  | 1.34     | 1.62  |
| 80                                          | 1.61     | 1.66  | 1.59     | 1.69  | 1.56     | 1.72  | 1.53     | 1.74  | 1.51     | 1.77                                        | 80  | 1.47     | 1.52  | 1.44     | 1.54  | 1.42     | 1.57  | 1.39     | 1.60  | 1.36     | 1.62  |
| 85                                          | 1.62     | 1.67  | 1.60     | 1.70  | 1.57     | 1.72  | 1.55     | 1.75  | 1.52     | 1.77                                        | 85  | 1.48     | 1.53  | 1.46     | 1.55  | 1.43     | 1.58  | 1.41     | 1.60  | 1.39     | 1.63  |
| 90                                          | 1.63     | 1.68  | 1.61     | 1.70  | 1.59     | 1.73  | 1.57     | 1.75  | 1.54     | 1.78                                        | 90  | 1.50     | 1.54  | 1.47     | 1.56  | 1.45     | 1.59  | 1.43     | 1.61  | 1.41     | 1.64  |
| 95                                          | 1.64     | 1.69  | 1.62     | 1.71  | 1.60     | 1.73  | 1.58     | 1.75  | 1.56     | 1.78                                        | 95  | 1.51     | 1.55  | 1.49     | 1.57  | 1.47     | 1.60  | 1.45     | 1.62  | 1.42     | 1.64  |
| 100                                         | 1.65     | 1.69  | 1.63     | 1.72  | 1.61     | 1.74  | 1.59     | 1.76  | 1.57     | 1.78                                        | 100 | 1.52     | 1.56  | 1.50     | 1.58  | 1.48     | 1.60  | 1.46     | 1.63  | 1.44     | 1.65  |

ملحوظة:  $K' =$  عدد التقديرات المفسرة باستثناء الحد العاشر

المصدر: J. Durbin and G.S. Waston "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression" *Biometrika*, vol. 38, 1951 pp. 159-77

طبع بتصريح من المؤلف وجلس إدارة *Biometrika*



## المصطلحات العلمية ( عربي – انجليزي )

( أ )

|                                        |                                         |
|----------------------------------------|-----------------------------------------|
| Consistency                            | اتساق                                   |
| Probability                            | احتمال                                  |
| Empirical probability                  | الاحتمال التجريبي                       |
| Personalistic (subjective) probability | احتمال شخصي                             |
| Conditional probability                | الاحتمال الشرطي                         |
| Nonoccurrence probability              | احتمال عدم الحدوث                       |
| A priori (classical) probability       | الاحتمال المسبق ( الكلاسيكي أو النظري ) |
| Joint probability                      | احتمال مشترك                            |
| Mutually exclusive events              | أحداث متنافية                           |
| Inferential statistics                 | إحصاء استدلال                           |
| Descriptive statistics                 | إحصاء وصف                               |
| Statistic                              | إحصائية                                 |
| Hypothesis testing                     | اختبارات الفروض                         |
| Heteroscedasticity                     | اختلاف التباين                          |
| Autocorrelation (serial correlation)   | الارتباط الذاتي                         |
| Rank correlation                       | ارتباط الرتب                            |
| Serial correlation                     | ارتباط متسلسل ( ارتباط ذاتي )           |
| BLUE (Best Linear Unbiased Estimators) | أفضل مقدرات خطية غير متحيزة             |
| Econometrics                           | اقتصاد قياسي                            |
| Skewness                               | التواء                                  |
| Standard deviation                     | الانحراف المعياري                       |

( ب )

|                       |                                        |
|-----------------------|----------------------------------------|
| Residuals             | البواقي                                |
| Unexplained residuals | البواقي غير المفسرة                    |
| Ungrouped data        | بيانات غير مبهمة                       |
| Grouped data          | بيانات مبهمة                           |
| Cross-sectional data  | بيانات مقطعية ( كميات ميزانية الأسرة ) |

## (ت)

|                          |                       |
|--------------------------|-----------------------|
| Permutations             | التباديل              |
| Variance                 | تباين                 |
| Regression analysis      | تحليل الانحدار        |
| Analysis of variance     | تحليل التباين         |
| Time-series analysis     | تحليل السلاسل الزمنية |
| Bias                     | تحيز                  |
| Coding                   | الترميز               |
| Dispersion               | تشتت                  |
| Relative dispersion      | التشتت النسبي         |
| Disturbance              | تشويش                 |
| Multicollinearity        | تعدد العلاقات الخطية  |
| Explained variation      | التغير المفسر، المشرح |
| Kurtosis                 | تفرطح                 |
| Estimate, Estimator      | تقدير                 |
| Point estimate           | التقدير بنقطة         |
| Unbiased estimate        | تقدير غير متحيز       |
| Cumulative frequency     | تكرار متجمع           |
| Relative frequency       | التكرار النسبي        |
| Symmetry                 | التماثل               |
| Forecasting              | التنبؤ                |
| Combinations             | التوافيق              |
| Probability distribution | التوزيع الاحتمالي     |
| Exponential distribution | توزيع أسي             |
| Poisson distribution     | توزيع بواسون          |
| Frequency distribution   | توزيع تكراري          |
| Binomial distribution    | توزيع ذي الحدين       |
| Normal distribution      | توزيع طبيعي           |
| Discrete distribution    | توزيع منفصل           |

## (ج)

|                   |               |
|-------------------|---------------|
| Contingency table | جدول الاقتران |
| Goodness of fit   | جودة التوفيق  |

## (ح)

|            |          |
|------------|----------|
| Error term | حد الخطأ |
|------------|----------|

|                                                                                   |       |                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------|
| Type I Error<br>Type II Error                                                     | ( خ ) | خطأ من النوع الأول<br>خطأ من النوع الثاني                                       |
| Density function<br>Polynomial function<br>Semilog function<br>Degrees of freedom | ( د ) | دالة كثافة الاحتمال<br>دالة كثيرة الحدود<br>دالة نصف لوغاريتمية<br>درجات الحرية |
| Quartile                                                                          | ( ر ) | ربيع                                                                            |
| Scatter diagram<br>Reduced form                                                   | ( ش ) | شكل الانتشار<br>الشكل المختزل                                                   |
| Asymptotic unbiasedness<br>Stochastic<br>Deciles<br>Statistics<br>Sample          | ( ع ) | عدم تحيز في المدى البعيد<br>عشوائي ( احتمالي )<br>عشيرات<br>علم الإحصاء<br>عينة |
| Nonlinear                                                                         | ( غ ) | غير خطي                                                                         |
| Confidence interval<br>Alternative hypothesis<br>Null hypothesis<br>Sample space  | ( ف ) | فترة ثقة<br>الفرض البديل<br>الفرض العدمي<br>فضاء العينة                         |
| Expected value                                                                    | ( ق ) | القيمة المتوقعة                                                                 |

(٢)

|                                   |                              |
|-----------------------------------|------------------------------|
| Variable                          | متغير                        |
| Dependent variable                | متغير تابع                   |
| Endogenous variable               | متغير داخلي                  |
| Exogenous variable                | متغير خارجي                  |
| Dummy variable                    | متغير صوري                   |
| Random variable                   | متغير عشوائي                 |
| Qualitative variable              | متغير كمي                    |
| Lagged variable                   | متغير مبطاً                  |
| Independent variable              | متغير مستقل                  |
| Explanatory variable              | متغير مفسر                   |
| Instrumental variable             | متغير وسيط                   |
| Weighted mean                     | متغير مرجح                   |
| Population                        | المجتمع                      |
| Infinite population               | مجتمع غير محدود              |
| Finite population                 | مجتمع محدود                  |
| Leptokurtic                       | مدبب                         |
| Histogram                         | المدرج التكراري              |
| Range                             | المدى                        |
| Interquartile range               | المدى الربيعي                |
| Ordinary Least Squares (OLS)      | المربعات الصغرى العادية      |
| Indirect Least Squares (ILS)      | المربعات الصغرى غير المباشرة |
| Price elasticity                  | المرونة السعرية              |
| Confidence level                  | مستوى ثقة                    |
| Frequency polygon                 | مضلع تكراري                  |
| Simultaneous-equations            | معادلات آنية                 |
| Behavioral (structural) equations | معادلات سلوكية (هيكلية)      |
| Variation coefficient             | معامل الاختلاف               |
| Correlation coefficient           | معامل الارتباط               |
| Partial correlation coefficient   | معامل الارتباط الجزئي        |
| Determination coefficient         | معامل التحديد                |
| Adjusted R <sup>2</sup>           | معامل التحديد المعدل         |
| Coefficients                      | المعاملات                    |
| Structural coefficients           | معاملات هيكلية               |
| Sampling                          | معاينة                       |
| Stratified sampling               | معاينة طبقية                 |
| Random sampling                   | معاينة عشوائية               |

|                                     |                         |
|-------------------------------------|-------------------------|
| Cluster sampling                    | معاينة عنقودية          |
| Systematic sampling                 | معاينة منتظمة           |
| Peramter                            | معلمة ( وجميعها معالم ) |
| Platykurtic                         | مفرطح                   |
| Estimater                           | مقدر                    |
| Operating Characteristic (OC) curve | منحنى توصيف العمليات    |
| Ogive                               | المنحنى المتجمع         |
| Critical region                     | المنطقة الحرجة          |
| Rejection region                    | منطقة الرفض             |
| Acceptance region                   | منطقة القبول            |
| Percentiles                         | الامئينسات              |

( ن )

|                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| Central tendency                 | النزعة المركزية            |
| Quartile deviation               | نصف المدى الربيعي          |
| Chebyshev's theorem (inequality) | نظرية ( متباينة ) تشيبيشيف |
| Set theory                       | نظرية المجموعات            |
| Central limit theorem            | نظرية النهاية المركزية     |
| Distributed lag model            | نموذج إبطاء موزع           |
| Harmonic mean                    | الوسط التوافقي             |
| Geometric mean                   | الوسط الهندسي              |

## المصطلحات العلمية ( انجليزى – عربى )

### ( A )

|                                      |                                        |
|--------------------------------------|----------------------------------------|
| A priori (classical) probability     | الاحتمال المسبق ( الكلاسيكى ) ، النظرى |
| Acceptance region                    | منطقة القبول                           |
| Adjusted $R^2$                       | معامل التحديد المعدل                   |
| Alternative hypothesis               | الفرض البديل                           |
| Analysis of variance                 | تحليل التباين                          |
| Asymptotic unbiasedness              | عدم تحيز فى المدى البعيد               |
| Autocorrelation (serial correlation) | الارتباط الذاتى                        |

### ( B )

|                                        |                             |
|----------------------------------------|-----------------------------|
| Behavioral (structural) equations      | معادلات سلوكية ( هيكلية )   |
| Bias                                   | تحيز                        |
| Binomial distribution                  | توزيع ذى الحدين             |
| BLUE (best Linear Unbiased Estimators) | أفضل مقدرات خطية غير متحيزة |

### ( C )

|                                  |                                          |
|----------------------------------|------------------------------------------|
| Central limit theorem            | نظرية النهاية المركزية                   |
| Central tendency                 | الزعة المركزية                           |
| Chebyshev's theorem (inequality) | نظرية ( متباينة ) تشيبيشيف               |
| Cluster sampling                 | معينة عنقودية                            |
| Coding                           | ترميز                                    |
| Coefficients                     | معاملات                                  |
| Combinations                     | توافيق                                   |
| Conditional probability          | احتمال شرطى                              |
| Confidence interval              | فترة ثقة                                 |
| Confidence level                 | مستوى ثقة                                |
| Consistency                      | اتساق                                    |
| Contingency table                | جدول اقتران                              |
| Correlation coefficient          | معامل ارتباط                             |
| Critical region                  | منطقة حرجية                              |
| Cross-sectional data             | بيانات مقطعية ( كبيانات ميزانية الأسرة ) |
| Cumulative frequency             | تكرار متجمع                              |

## ( D )

|                           |                     |
|---------------------------|---------------------|
| Deciles                   | عشيرات              |
| Degrees of freedom        | درجات الحرية        |
| Density function          | دالة كثافة الاحتمال |
| Dependent variable        | متغير تابع          |
| Descriptive statistics    | إحصاء وصفي          |
| Determination coefficient | معامل التحديد       |
| Discrete distribution     | توزيع منفصل         |
| Dispersion                | تشتت                |
| Distributed lag models    | نماذج إبطاء موزعة   |
| Disturbance               | تشويش ، خطأ         |
| Dummy variable            | متغير صوري          |

## ( E )

|                             |                         |
|-----------------------------|-------------------------|
| Econometrics                | اقتصاد قياسي            |
| Empirical probability       | الاحتمال التجريبي       |
| Endogeneous variable        | متغير داخلي             |
| Error term                  | حد الخطأ                |
| Estimate, Estimation        | تقدير                   |
| Estimator                   | مقدر                    |
| Exactly identified equation | معادلة مميزة بالضبط     |
| Exogeneous variable         | متغير خارجي             |
| Expected value              | القيمة المتوقعة         |
| Explained variation         | التفسير المفسر ، المشرح |
| Explanatory variable        | متغير مفسر              |
| Exponential distribution    | توزيع أسّي              |

## ( F )

|                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| Finitie population          | مجتمع محدود                  |
| First-order autocorrelation | ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى |
| Forecasting                 | التنبؤ                       |
| Frequency distribution      | توزيع تكراري                 |
| Frequency polygon           | مضلع تكراري                  |

## ( G )

|                 |               |
|-----------------|---------------|
| Geometric mean  | الوسط الهندسي |
| Goodness of fit | جودة التوفيق  |
| Gouped data     | بيانات مبوبة  |

## ( H )

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| Harmonic mean      | الوسط التوافقي  |
| Heteroscedasticity | اختلاف التباين  |
| Histogram          | المدرج التكراري |
| Hypothesis testing | اختبارات الفروض |

## ( I )

|                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| Identification               | تمييز                        |
| Independent variable         | متغير مستقل                  |
| Indirect Least Squares (ILS) | المربعات الصغرى غير المباشرة |
| Inferential statistics       | إحصاء استدلال                |
| Infinite population          | مجتمع غير محدود              |
| Instrumental variable        | متغير وسيط                   |
| Interquartile range          | المدى الربيعي                |

## ( J )

|                   |              |
|-------------------|--------------|
| Joint probability | احتمال مشترك |
|-------------------|--------------|

## ( K )

|          |       |
|----------|-------|
| Kurtosis | تفرطح |
|----------|-------|

## ( L )

|                 |            |
|-----------------|------------|
| Lagged variable | متغير مبطأ |
| Leptokurtic     | مدبب       |

## ( M )

|                           |                  |
|---------------------------|------------------|
| Multicollinearity         | تعدد علاقات خطية |
| Mutually exclusive events | أحداث متنافية    |

## ( N )

|                           |                   |
|---------------------------|-------------------|
| Nonlinear                 | غير خطي           |
| Nonoccurrence probability | احتمال عدم الحدوث |
| Normal distribution       | توزيع طبيعي       |
| Null hypothesis           | فرض عدى           |

## ( O )

|                                     |                         |
|-------------------------------------|-------------------------|
| Ogive                               | المنحنى المتجمع         |
| Operating Characteristic (OC) curve | منحنى توصيف العمليات    |
| Order condition                     | شرط الترتيب             |
| Ordinary Least Squares (OLS)        | المربعات الصغرى العادية |
| Overidentified equation             | معادلة زائدة التمييز    |



## ( P )

|                                         |                       |
|-----------------------------------------|-----------------------|
| Parameter                               | معلمة                 |
| Partial correlation coefficient         | معامل الارتباط الجزئي |
| Percentiles                             | المئينات              |
| Permutations                            | التباديل              |
| Personalistic ( subjective) probability | احتمال شخصي ( ذاتي )  |
| Platykurtic                             | مفرطح                 |
| Point estimate                          | التقدير بنقطة         |
| Poisson distribution                    | توزيع بواسون          |
| Polynomial function                     | دالة كثيرة الحدود     |
| Population                              | المجتمع               |
| Price elasticity                        | المرونة السعرية       |
| Probability                             | الاحتمال              |
| Probability distribution                | التوزيع الاحتمالي     |

## ( Q )

|                      |                   |
|----------------------|-------------------|
| Qualitative variable | متغير كمي         |
| Quartile             | رابع              |
| Quartile deviation   | نصف المدى الربيعي |

## ( R )

|                     |                |
|---------------------|----------------|
| Random Sampling     | معاينة عشوائية |
| Random variable     | متغير عشوائي   |
| Range               | مدى            |
| Rank condition      | شرط الرتبة     |
| Rank correlation    | ارتباط الرتب   |
| Recursive model     | نموذج متواتر   |
| Reduced form        | الشكل المختزل  |
| Regression analysis | تحليل الانحدار |
| Rejection region    | منطقة الرفض    |
| Relative dispersion | تشتت نسبي      |
| Relative frequency  | تكرار نسبي     |
| Residuals           | بواقي          |

## ( S )

|              |             |
|--------------|-------------|
| Sample       | عينة        |
| Sample space | فضاء العينة |

|                                   |                           |
|-----------------------------------|---------------------------|
| Sampling                          | معاينة                    |
| Scatter diagram                   | شكل الانتشار              |
| Semilog function                  | دالة نصف لوغاريتمية       |
| Serial correlation                | ارتباط متسلسل             |
| Set theory                        | نظرية المجموعات           |
| Significance level                | مستوى المعنوية            |
| Simultaneous-equations            | معادلات آنية              |
| Skewness                          | التواء                    |
| Specification of Model            | تحديد النموذج             |
| Standard deviation                | انحراف معياري             |
| Statistic                         | إحصائية                   |
| Statistics                        | علم الإحصاء               |
| Stochastic                        | عشوائي ( احتمالي )        |
| Stratified sampling               | معاينة طبقية              |
| Structural coefficients           | معاملات هيكلية            |
| Structural (behavioral) equations | معادلات هيكلية ( سلوكية ) |
| Symmetry                          | تماثل                     |
| Systematic sampling               | معاينة منتظمة             |

## ( T )

|                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| Time-series analysis | تحليل السلاسل الزمنية |
| Type I Error         | خطأ من النوع الأول    |
| Type II Error        | خطأ من النوع الثاني   |

## ( U )

|                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| Unbiased estimate        | تقدير غير متحيز      |
| Underidentified equation | معادلة ناقصة التمييز |
| Unexplained residual     | بواقي غير مفسرة      |
| Ungrouped data           | بيانات غير مبوبة     |

## ( V )

|                           |                |
|---------------------------|----------------|
| Variable                  | متغير          |
| Variance                  | تباين          |
| Variation, coefficient of | معامل الاختلاف |
| Weighted mean             | متوسط مرجح     |

## الفهرس الابجدي

- الاتساق ١٦٠  
إجمالي مجموع المربعات (TSS)  
في اختبار الفروض ١٠٥ ، ١٢٣ - ١٢٨  
في تحليل الانحدار البسيط ١٤٢ ، ١٥٥  
في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٨  
الاحتمال ٧ ، ٤٢ - ٧٤  
للأحداث المتعددة ٤٣-٤٥ ، ٥١-٥٨ ، ٧١-٧٥  
للحدث المنفرد ٤٢-٤٣ ، ٤٨-٥١ ، ٧٠-٧٢  
الاحتمال التجريبي ( أنظر التوزيع الاحتمالي النسبي )  
الاحتمال الشخصي ٤٩  
الاحتمال الشرطي ٤٤ ، ٥٥  
احتمال عدم الحدوث ٤٢  
الاحتمال المسبق ( الكلاسيكي ) ، النظري ٤٣ ، ٤٨-٥١ ، ٥٨  
إحتمال مشترك ٤٤-٤٥ ، ٥١ - ٥٤ ، ٦٣  
الأحداث المتعددة ٤٣-٤٥ ، ٥١-٥٨ ، ٧١-٧٣  
الأحداث المنفردة ٤٢-٤٣ ، ٤٨-٥١ ، ٧٠-٧٢  
الأحداث المنفصلة ( المتنافية الحدوث ) ٤٣-٤٥ ، ٥١ -  
٥٤ ، ٦٣  
أحسن مقدرات خطية غير متحيزة :  
في تحليل الانحدار البسيط ١٤٣ ، ١٤٤ ، ١٥٨-١٦٠  
في تحليل الانحدار المتعدد ١٧٢  
أحسن مقدرات غير متحيزة ١٤٣ ، ١٥٨-١٦٠  
الإحصاء ٧ ، ٨ ، ٨٣  
والاقتصاد القياسي ٧ ، ٩-١٢ ، ١٣-١٤  
طبيعته ٧ - ١٠ ، ١٤  
إحصاء استدلال ٧ - ١٠  
( أنظر أيضاً التقدير ، اختبارات الفروض )  
الإحصاء الوصفي ٧ - ١٠ ، ١٥ - ٤١  
التوزيعات الاحتمالية في ١٥ - ١٦ ، ٢٠ - ٢٤ ، ٣٦ -  
٤٠ ، ٣٩  
إحصائية ٧٦ ، ٧٨  
إحصائية ديربين - واتسون ١٨٦ ، ٢١١ ، ٢٢٠ ، ٢٦٤  
اختلاف جولد - فيلد - كوانت لاختلاف التباين ٢١٧  
اختبار الطرف الأيسر ٩٢ ، ١٠١ ، ١١٠ ، ١١٤
- اختبار الطرف الأيمن ٩٣ ، ١٠٠-١٠٢ ، ١٠٩ ،  
١١٦ - ١١٧ ، ١٢٤  
اختبار من الطرفين ١٠٠-١٠٢ ، ١٠٨ ، ١١٣ ، ١١٥ ،  
١٥٤ ، ١٧٥  
اختبار الفروض ٩٤ ، ٩٩ - ١٣٧  
اختبار كاي - تربيع لجودة التوفيق والاستقلال في  
١٠٢-١٥٥ ، ١١٦-١٢١ ، ١٣١ ، ١٣٢  
تحليل التباين في ١٠٤-١٠٦ ، ١٢١-١٢٨ ، ١٣٢ -  
١٣٣  
تعريفه ٧ ، ٨ ، ٨١ ، ٩٩ ، ١٠٦-١٠٧ ، ١٢٩  
للفرق بين متوسطين أو نسبتي ١٠١-١٠٣ ، ١١٣-١١٧  
١٢٢ ، ١٣٠  
عن المتوسط أو النسبة في المجتمع ٩٩-١٠١ ، ١٠٧-١١٣  
١٢٩ - ١٣٠  
المعنوية الإجمالية للانحدار في ١٧٨  
( أنظر أيضاً تحليل الانحدار المتعدد ، تحليل الانحدار  
البسيط  
اختبارات جداول الاقتران ١٠٣ ، ١٠٤  
اختلاف التباين ٢١١ ، ٢١٦ - ٢١٩  
أخطاء القياس ٢٢٤ - ٢٢٦  
أخطاء المتغيرات ٢١٣ ، ٢٢٤ - ٢٢٦ ، ٢٣٠-٢٣١  
الارتباط الخطي الطردي ١٤٢ ، ١٥٦  
الارتباط الذاتي ( الارتباط المتسلسل ) :  
وأخطاء المتغيرات ٢٢٥  
كشكلة في تحليل الانحدار ٢١١-٢١٢ ، ٢١٩-٢٢٤ ،  
٢٢٨ - ٢٣٠  
الارتباط العكسي ١٤٢ ، ١٥٦ ، ١٧٩  
أساليب العد ٤٤ ، ٥٦ - ٥٨  
الاستدلال الإحصائي ٧ ، ٩ ، ٧٦ ، ٨١ ، ٩٥  
أطوال الفئات :  
في الإحصاء الوصفي ١٥ ، ١٧ ، ٢٢ - ٢٥ ، ٢٨  
في اختبار الفروض ١١٩  
اقتصاد قياسي :  
الإحصاء و ٧ - ١٢ ، ١٣ - ١٤

- المنهج ٧ ، ٨ ، ١١ - ١٤  
 الالتواء ، معامل ( معامل بيرسون للالتواء ) ٢١-٢٢ ،  
 ٣٦-٣٩  
 توزيع ذي الحدين و ٤٥ ، ٦٠ ، ٦٢  
 في شكل التوزيع ٢١ - ٢٢  
 إمتحان إحصاء ١٣٤ - ١٣٧  
 إمتحان اقتصاد قياسي ٢٤٩ - ٢٥٣  
 الانحدار المرجح ٢١٦ - ٢١٨  
 الانحراف المتوسط ١٩ - ٢٠ ، ٣١ ، ٣٢  
 الانحراف المعياري ( الخطأ ) ١٩-٣٢ ، ٣٢-٣٦  
 الاحتمال ٧٠  
 في اختبار الفروض ١٠٠-١٠٣ ، ١٠٨-١١١ ،  
 ١١٣-١١٧  
 الارتباط الذاتي و ٢١١  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٥٢  
 في تحليل الانحدار المتعدد ١٧٤  
 في التقدير ٧٦-٧٨ ، ٨٢-٨٣ ، ٨٦-٩٥  
 للتقديرات ٨٩ ، ١٤٥ ، ١٦٧  
 في التوزيع الاحتمالي المتصل ٦٤ - ٦٨  
 في توزيع بواسون ٦٢  
 في توزيع ذي الحدين ٤٥ ، ٤٧ ، ٥٩ ، ٦٠  
 توزيع المعاينة للوسط ٧٦ ، ٧٧  
 للقيم المبطة ٢٠٣  
 المربعات الصغرى غير المباشرة ٢٣٣ ، ٢٤٥  
 الانحرافات الرأسية ١٤٧  
 بيانات السلاسل الزمنية ١٢  
 بيانات غير مبوبة ١٧ - ٢١ ، ٢٥ - ٣٦  
 بيانات مبوبة ١٧ - ٢٠ ، ٢٤ - ٣٧ ، ٥٨  
 البيانات المجمعة ١٧ - ٢١ ، ٢٤ - ٣٧ ، ٥٧ - ٥٩  
 بيانات مقطعية ١٢ ، ٢١٧  
 التباديل ٥٦ - ٥٨  
 التباين ٣٢ - ٣٦  
 أحسن تقدير غير متحيز أو كفو ١٤٣  
 اختلاك التباين وحد الخطأ للتباين ٢١١ ، ٢١٥-٢٢٠  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٤٥ ، ١٥٢ ، ١٥٩  
 في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٧-١٦٩ ، ١٧٣-١٨٥  
 تحليل التباين ١٠٤-١٠٦ ، ١٢١-١٢٨ ، ١٣٢-١٣٣  
 تعريفه ١٨ - ٢٠  
 للتوزيع الاحتمالي المتصل ٦٤  
 في توزيع بواسون ٤٦ ، ٤٩  
 توزيع ذي الحدين و ٥٧ ، ٥٩  
 الثابت ، حد الخطأ في تحليل الانحدار البسيط ١٣٢  
 جداول تحليل التباين ١٢٣ ، ١٢٤ ، ١٢٧ ، ١٢٨  
 خطأ التنبؤ ١٩٢ ، ٢٠٤ - ٢٠٥  
 كجموع متوسط مربعات الخطأ زائداً مربع تحيز المقدّر ١٥٩  
 تباين خطأ التنبؤ ١٩٢ ، ٢٠٤ - ٢٠٥  
 تباين العينة ١٢٢ - ١٢٤  
 تحديد النموذج ٨  
 تحليل الانحدار ٧ ، ٩ - ١١ ، ١٣٨ - ٢٣٠  
 اختلاف التباين كشكلة في ٢١١ ، ٢١٥-٢٢٠  
 أخطاء المتغيرات كشكلة في ٢١٣ ، ٢٢٤-٢٢٦  
 ٢٢٩-٢٣١  
 الارتباط الذاتي كشكلة في ٢١١-٢١٢ ، ٢١٩-٢٢٤  
 ٢٢٨-٢٣٠  
 الازدواج الخطي كشكلة في ٢١٠ ، ٢١٣ - ٢١٦ ،  
 ٢٢٦-٢٢٨  
 التنبؤ ١٩١-١٩٣ ، ٢٠٣-٢٠٥ ، ٢٠٩  
 شكل الدالة في ١٨٩ ، ١٩٢-١٩٦ ، ٢٠٥-٢٠٧  
 المتغيرات الصورية في ١٨٩-١٩١ ، ١٩٦-٢٠٠ ،  
 ٢٠٦-٢٠٨  
 نماذج الإبطاء الموزعة في ١٩٠-١٩٢ ، ١٩٩-٢٠٤  
 ٢٠٨-٢٠٩  
 تحليل الانحدار البسيط ١٠ ، ١٣٨ - ١٦٤  
 تحليل الانحدار غير الخطي ١٤٣  
 تحليل الانحدار المتعدد على مراحل ١٠ ، ١٤٤ ، ١٦٥-١٨٨  
 تحليل التباين في اتجاه واحد ١٠٦  
 تحليل السلاسل الزمنية ١٤٥ ، ٢١١ ، ٢٢٠  
 التحليل المقطعي ١٤٥  
 التحيز ١٤٣ ، ١٥٨ ، ١٥٩ ، ٢٣٢ ، ٢٣٤ - ٢٣٦  
 تحيز المعادلات الآتية ٢٣٢ ، ٢٣٤ ، ٢٣٥  
 الترميز ٢٨ ، ٣٤  
 التشتت ١٨ - ٢٠ ، ٣٠ - ٣٦ ، ٣٩ - ٤١  
 التشتت المطلق ٣٦  
 التشتت النسبي ٣٦  
 تصحيح الاستمرار ١٠٤  
 التصميم العشوائي التام ١٢٤

- نموذج كوكبك المطبأ والتقديرات المتحيزة ٢٠١  
 التكرارات المتوقعة ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١١٦ - ١٢١  
 التكرارات المشاهدة ١٠٢ ، ١٠٤ ، ١١٦ - ١١٩  
 التفاضل :  
 للتوزيع ٢٠  
 لتوزيع ٩٢  
 لتوزيع ذى الحدين ٤٥ ، ٤٧ ، ٦١ ، ٦٢  
 للتوزيع الطبيعى ٤٧  
 للتوزيع الطبيعى للتوزيع الاحتمالى المتصل ٦٤ - ٦٧  
 التمييز ٢٣٢ - ٢٣٣ ، ٢٣٧ - ٢٤٠ ، ٢٤٥ - ٢٤٧  
 التنبؤ ١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٣٨ ، ١٦٥ ، ١٩٢ - ١٩٣  
 ٢٠٤ ، ٢٠٥ ، ٢٠٩  
 التنبؤ المشروط ٢٠٤ - ٢٠٥  
 التنبؤ والإسقاط ٢٠٤ ، ٢٠٥  
 التوافق ٥٧  
 توزيع :  
 فى تحليل الانحدار البسيط ١٥٤  
 النزعة المركزية للتوزيع ١٧  
 التوزيع الاحتمالى ٤٥ ، ٤٧ ، ٥٧ ، ٦٤  
 توزيع بواسون كتوزيع احتمالى ٤٦ ، ٦٢ - ٦٤ ، ٧٣  
 توزيع ذى الحدين كتوزيع احتمالى منفصل ٤٥ - ٤٧ ،  
 ٥٧ - ٦٢ ، ٧٣  
 التوزيع الطبيعى كتوزيع احتمالى متصل ٤٧ - ٤٨ ،  
 ٦٤ - ٧١ ، ٧٤  
 التوزيع الاحتمالى المتصل ٤٧ - ٤٨ ، ٦٤ - ٧١ ، ٧٤  
 التوزيع الأسى ٤٨ ، ٦٩ - ٧١  
 توزيع بواسون ٦٤ - ٦٦ ، ٦٨ - ٨٢ ، ٧٣ ، ٧٥  
 توزيع :  
 فى اختبار الفروض ١٠٠ ، ١٠٢ ، ١١٠ ، ١١٧ ، ١١٨  
 فى تحليل الانحدار البسيط ١٤٠ ، ١٥٤  
 فى التقدير ٩٢ ، ٩٤  
 فى التنبؤ ١٩٢ ، ٢٠٤  
 فترات الثقة للمتوسط باستخدام ٧٣ - ٨١ ، ٩٢ - ٩٥ ،  
 ٩٧ - ٩٨  
 نسب المساحة للتوزيع ( الجدول ) ٢٥٩  
 التوزيع التكرارى المتجمع ١٥ ، ٢٤  
 توزيع التكرار النسبى ( الاحتمال التجريبي ) ١٥ ، ٤٩ - ٥١  
 الاحتمال أو النظرى ٥٨
- تعدد العلاقات الخطية ٢١٠ ، ٢١٣ - ٢١٥ ، ٢٢٦ - ٢٢٨  
 التغير المفسر ( مجموع مربعات الانحدار ) ١٢٣ - ١٢٨ ،  
 ١٤٠ ، ١٤٢ ، ١٥٥ ، ١٦٨  
 التفرطح ٢١ - ٢٣ ، ٣٧ - ٣٨  
 التقدير ٧ ، ٨ ، ٧٦ - ٩٨  
 باستخدام التوزيع الطبيعى ٧٨ - ٨٠ ، ٨٦ - ٩١ ،  
 ٩٧ - ٩٨  
 ( أنظر أيضاً التنبؤ )  
 التقدير بفترة ثقة ٧٨ ، ٨٦ - ٨٩  
 التقدير بنقطة ٧٨ - ٧٩ ، ٨٦  
 توزيع المعاينة للمتوسط ٧٦ - ٧٨ ، ٨٢ - ٨٧ ، ٩٥  
 فترات الثقة للمتوسط باستخدام توزيع ٨٠ - ٨١ ،  
 ٩٢ - ٩٥ ، ٩٧ - ٩٨  
 المربعات الصغرى على مرحلتين فى ٢٣٤ ، ٢٤٢ - ٢٤٤ ،  
 ٢٤٨  
 المربعات الصغرى غير المباشرة ٢٣٣ - ٢٣٤ ، ٢٤٥ -  
 ٢٤٣ ، ٢٤٦ - ٢٤٨  
 المعاينة ٧٦ ، ٨١ - ٨٢ ، ٩٤ - ٩٥  
 تقدير المعالم :  
 اختبار تقدير المعالم فى تحليل الانحدار البسيط ١٤٠ - ١٤٢ ،  
 ١٥١ - ١٥٦ ، ١٦٤  
 فى تحليل الانحدار المتعدد ١٦٥ ، ١٦٨ ، ١٧٢ - ١٧٥ ،  
 ١٨٦ ،  
 التقديرات :  
 فى الإحصاء الوصفى ٣٢ ، ٣٤  
 أخطاء فى التقديرات ٧٣ ، ١٤٠ ، ١٦٧  
 فى تحليل الانحدار البسيط ١٣٩ ، ١٤٠  
 تعريفها ٨٦  
 تقديرات غير متحيزة :  
 لاختبارات الفروض ١١٥  
 لتباين خطأ التنبؤ ٢٠٣ - ٢٠٤  
 فى التنبؤ ١٩٢ ، ٢٠٤  
 فى تحليل الانحدار البسيط ١٥٢ ، ١٥٨  
 فى تحليل الانحدار المتعدد ١٦٧ ، ١٧٣  
 لشكل الدالة ١٦٤  
 تقديرات متحيزة ١٥٩ ، ١٦٠ ، ١٩١  
 اختلاف التباين والتقديرات المتحيزة ٢١١  
 والأخطاء فى المتغيرات ٢٢٥

- التوزيع الاحتمالي مبرأ عن ٥٨  
التوزيعات التكرارية ٧، ١٥-١٦، ٢٠-٢٥، ٣٦-٣٩، ٤١، ١١٨  
التوزيع ذو الحدين ٦٨  
في اختبار الفروض ١٠١، ١٠٢-١٠٤، ١١٠٤، ١١٨  
في التقدير ٨٠، ٨٩  
كتوزيع احتمالي منفصل ٤٥-٤٧، ٥٧-٦٢، ٧٣  
التوزيع الطبيعي وتوزيع ذي الحدين ٦٢-٦٥  
التوزيع ذو المسوالين ٢٧  
التوزيع السالب الالتواء ٢١، ٣٧  
التوزيع المتصل ٤٧-٤٨، ٦٤-٧١، ٧٤  
توزيع المعاينة التجريبي للمتوسط ٨٤  
توزيع المعاينة للمتوسط ٧٦  
في اختبار الفروض ٩٩، ١٠٨  
التجريبي ٨٤  
في التقدير ٧٦-٧٨، ٨١-٨٧، ٩٩  
النظري ٨١-٨٦، ٨٨، ٩٢، ٩٦  
توزيع المعاينة للمقدرات غير المتحيزة ١٥٨، ١٥٩  
توزيع المعاينة للمقدرات المتحيزة ١٥٨  
توزيع المعاينة للمقدرات المتسقة ١٦٥  
التوزيع الموجب الالتواء ٢١-٢٢  
توزيع خط انحدار ١٣٨، ١٣٩، ١٤٦  
جدول احتمالات ذي الحدين ٢٥٤-٢٥٦  
جدول الأرقام العشوائية ٢٥٩  
جدول تحليل التباين ١٢٣، ١٢٤، ١٢٧، ١٢٨  
جدول تحليل التباين باتجاهين ١٢٧، ١٢٨  
جدول  $F$  ٢٦١-٢٦٣  
جدول  $\chi^2$  - تربيع ٢٦٥  
جمع البيانات ٨  
جودة التوفيق :  
في اختبار الفروض ١٢١  
اختبار كاي - تربيع للاستقلال و ١٠٢، ١٥٥، ١٥٥  
في تحليل الانحدار البسيط ١٤٢-١٤٣، ١٥٥-١٥٩، ١٦٤  
حجم العينة :  
في اختبار الفروض ٩٩
- في التقدير ٨٦-٩٣  
حد الخطأ ( الحد المشوائي ) ٧، ٩-١٣  
أخطاء التنبؤ و ٢٠٤  
وأخطاء المتغيرات ٢٢٥  
الارتباط الذاتي و ٢١١، ٢١٩-٢٢٤  
تباين حد الخطأ واختلاف التباين ٢١١، ٢١٦-٢١٩  
( أنظر أيضاً الانحراف المعياري )  
في تحليل الانحدار البسيط ١٣٨، ١٤٢، ١٤٤، ١٤٤  
١٤٨، ١٥٢  
في تحليل الانحدار المتعدد ١٧٣  
والمتغير التابع الكيفي ١٩٩  
في النماذج المتتابعة ٢٣٧  
في نموذج الإبطاء الموزع ١٩٩  
حدود الثقة ٨٧  
حدود الفئات ٢٤  
خطأ من النوع الأول ٩٩، ١٠٦-١٠٧، ١١٢، ١٢٩  
خطأ من النوع الثاني ٩٩، ١٠٦-١٠٧، ١١٢، ١٢٩  
دالة إنتاج كوب - دوجلاس ١٩٣، ٢١٤، ٢١٥  
دالة الطلب ١١-١٣  
دالة كثافة الاحتمال ( أنظر التوزيع الاحتمالي )  
الدالة كثرة الحدود ١٨٩، ١٩٣  
الدالة نصف اللوغاريتمية ١٨٩، ١٩٣  
الدخل والسعر ١٨٥-١٨٤  
درجات الحرية :  
في اختبار الفروض ١٠٠-١٠١، ١٥٥، ١٥٦، ١٥٦  
١١٥، ١٢٣-١٢٩  
اختلاف التباين و ٢١١، ٢١٧، ٢١٨  
في تحليل الانحدار البسيط ١٤٥، ١٥٤  
في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٨-١٦٩، ١٧٦-١٧٩  
في التقدير ٨٠-٨١، ٩٣  
في التنبؤ ١٩٢، ٢٠٤  
في المتغيرات الصورية ١٩٦  
في نماذج الإبطاء الموزعة ١٩٩  
درجة الاعتقاد ٤٩  
الدوال غير الخطية ١٨٩  
الربيعات ٢٩  
الرياضة ٧، ١٥، ١٣  
شرط الدرجة ٢٣٧

- شرط الرتبة ٢٣٧  
شكل الانتشار ١٣٨ ، ١٤٤  
الشكل التابعى ( الشجرة ) ٥٤  
شكل الدالة ١٨٩ ، ١٩٢ - ١٩٦ ، ٢٠٥ - ٢٠٧  
شكل فن ٤٢ ، ٤٣ ، ٥٢  
صافى العلاقة الخطية الطردية ١٧٩  
طرق المعادلات الآتية ٧ ، ٩ - ١١ ، ٢٣٢ - ٢٤٨  
التمييز ٢٣٢ - ٢٣٣ ، ٢٤٠ - ٢٤٦ ، ٢٤٦ - ٢٤٥  
المربعات الصغرى غير المباشرة و ٢٣٣ - ٢٣٤ ،  
٢٤٠ - ٢٤٣ ، ٢٤٦ - ٢٤٨  
طريقة ديربين على مرحلتين ٢٢١  
عدم تميز فى المدى البعيد ١٦٠  
العزم الثالث ٢٢ ، ٧٠  
العزم الرابع ٢٢  
العشيرات ٢٩  
العلاقة الخطية ١٦٥  
علم الإحصاء ٧ ، ٨ ، ٩٥  
والاقتصاد القياسى ٧ ، ١٠ - ١٢ ، ١٣ - ١٤  
طبيعته ٧ - ٩ ، ١٤  
العينات ٧ ، ٩ ، ٨١ ، ١٠٤  
فى التقدير ٧٦ ، ٨١ - ٨١ ، ٩٥ - ٩٦  
المثلة ٧ - ٩ ، ٧٦ ، ٨١  
عينة ممثلة ٧ - ٩ ، ٧٦ ، ٨١  
غياب التحيز ١٥٨ ، ١٥٩  
فترات الثقة :  
الارتباط الذاتى و - ٢١١ ، ٢١٩  
فى تحليل الانحدار البسيط ١٤٠ ، ١٥٥  
فى تحليل الانحدار المتعدد ١٧٣ - ١٧٥  
فى التنبؤ ١٩٢ - ١٩٣ ، ٢٠٤ - ٢٠٥  
للمتوسط باستخدام توزيع و ٨٠ - ٨١ ، ٩٢ - ٩٥ ،  
٩٧ - ٩٨  
والمقدر الكفى ٧٨ - ٨٠ ، ٨٧ ، ٩١ ، ٩٣ - ٩٥  
فضاء العينة ٥٤  
الفرض البديل :  
فى اختبار الفروض ٩٩ ، ١٠٤ ، ١٠٨ ، ١١٢ - ١١٣ ،  
١١٧  
فى تحليل الانحدار البسيط ١٥٤  
فى تحليل الانحدار المتعدد ١٧٨ - ١٧٩
- الفرض العدى :  
فى اختبار الفروض ٩٩ ، ١٠٣ ، ١٠٤ ، ١٠٨ - ١٢١  
١٢٤ ، ١٢٧ ، ١٢٨  
فى تحليل الانحدار البسيط ١٥٤  
فى تحليل الانحدار المتعدد ١٧٨ ، ١٧٩  
قاعدة الضرب :  
للأحداث غير المستقلة ٤٤ ، ٥١ - ٥٧  
للأحداث المستقلة ٤٢ - ٤٧ ، ٥١ ، ٥٣ ، ٥٥  
القيمة المتوقعة :  
لتوزيع الاحتمال المتصل ٥٤  
لتوزيع بواسون ٦٢ ، ٦٩  
فى توزيع ذى الحدين ٥٧  
لحد الخطأ فى تحليل الانحدار البسيط ١٣٨  
متغير مستقل مزدوج ٢١٤  
المتغيرات التابعة ٧ ، ٩ - ١٣ ، ٥١ ، ٥٥  
والأخطاء فى المتغيرات ٢٢٤ - ٢٢٦  
الارتباط الذاتى و ٢٢٠ - ٢٢٤  
فى تحليل الانحدار البسيط ١٣٨ ، ١٤٤ ( أنظر أيضاً  
تحليل الانحدار البسيط )  
( أنظر أيضاً طرق المعادلات الآتية )  
فى تحليل الانحدار المتعدد ١٦٥ ( أنظر أيضاً تحليل الانحدار  
المتعدد )  
فى التنبؤ ٢٠٤ ( أنظر التنبؤ أيضاً )  
قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة ٤٤ ، ٥١ - ٥٧  
الكيفية ١٩٠ ، ١٩٩  
المتغير الداخلى كمتغير تابع ٢٣٢ - ٢٣٥  
فى نموذج الإبطاء الموزع ١٩٩  
المتغيرات الداخلية ٢٣٢ - ٢٣٥  
المتغيرات الخارجية ٢٣٢ - ٢٣٤  
المتغيرات الصورية ١٨٩ - ١٩٠ ، ١٧٦ - ٢٠٠ ،  
٢٠٦ - ٢٠٧  
المتغيرات العشوائية :  
فى توزيع ذى الحدين ٥٨ ، ٦٠ - ٦١  
المستمرة ٤٥ ، ٤٧ ، ٥٨ ، ٦٤  
المنفصلة ٤٥ ، ٥٨  
متغيرات مبطأة ٢١٣ ، ٢٢٠ ، ٢٣٥ ( أنظر أيضاً طرق  
المعادلات الآتية )  
المتغيرات المتصلة ٤٥ ، ٥٨ ، ٦٤ ، ٦٩

- متغيرات محددة ٢٣٥
- متغيرات وسيطة ٢١٣ ، ٢٢٥
- متغيرات مستقلة ( مفسرة ) ٧ ، ١١ ، ١٢ ، ٥١
- المتوسط ( الوسط الحسابي ) ١٨ ، ٨٣
- متوسط الصف ١٢٤ - ١٢٧
- متوسط العامود ( العينة ) ١٠٥ ، ١٢٢ - ١٢٨
- المتوسط الكبير ١٢٢ ، ١٢٤ - ١٢٥
- متوسط المجتمع ٢٥
- في اختبار الفروض ٩٩ - ١٠٢ ، ١٠٧ - ١١٣ ، ١٢٢ ، ١٢٣
- في التقدير ٧٨ - ٨١ ، ٨٤ ، ٨٦ - ٩٥
- متوسط مرات التجاح ٦٣
- متوسط مربعات الخطأ :
- في اختبار الفروض ١٠٥ ، ١٢٣ - ١٢٧
- في تحليل الانحدار البسيط ١٤٤ ، ١٥٩ - ١٦٠
- متوسط مرجع ١٨ ، ٢٨
- المتوسطات ١٧ ، ١٨
- في الإحصاء الوصفي ٢٥ - ٢٢ ، ٢٤ - ٢٩ ، ٣٦
- اختبار الفروض للفرق بين نسبتي أو الفرق بين متوسطين
- ١٠١ - ١٠٣ ، ١١٣ - ١١٧ ، ١٢٢ ، ١٣٠
- في تحليل الانحدار البسيط ١٥٢ - ١٥٣
- وتحليل التباين ١٠٤
- لتوزيع بواسون ٤٦ ، ٦٣
- في توزيع ذي الحدين ٤٥ ، ٥٧
- في التوزيع الطبيعي ٤٧ ، ٤٨
- لتوزيع الطبيعي للتوزيعات الاحتمالية المتصلة ٦٤ - ٦٦ ، ٦٨
- لحد الخطأ في تحليل الانحدار البسيط ١٣٨
- فترات الثقة للمتوسط باستخدام توزيع ٨٠ - ٨١ ، ٩٢ - ٩٥ ، ٩٧ - ٩٨
- المجتمع ٧ - ٩
- تعريفه ٨١
- غير المبوب ١٧ - ٢٠ ، ٢٥ - ٣٥
- المبوب ١٧ - ٢٠ ، ٢٤ - ٣٦ ، ٥٨ ، ٥٩
- مجمع غير محدود ٨١ ، ٨٢
- مجمع محدود ٨٢
- مجموع الانحرافات ١٤٦
- مجموع الانحرافات المطلقة ١٤٧
- مجموع المربعات (SSA) ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٢٣ - ١٢٧
- مجموع مربعات الانحدار (RSS) ١٢٣ - ١٢٧ ، ١٤٢ ، ١٥٥ ، ١٦٢
- مجموع مربعات الانحرافات ١٤٧
- مجموع مربعات الخطأ (ESS) ١٢٣ - ١٢٧
- اختلاف التباين ٢١١ ، ٢١٦ ، ٢١٨ ، ٢١٩
- في تحليل الانحدار البسيط ١٤٢ ، ١٥٦
- المدرج التكراري ٧ ، ١٥ ، ٢٢ ، ٢٤
- المسدى ١٩ ، ٣٠
- في تحليل الانحدار البسيط
- المعاملات في تحليل الانحدار المتعدد ١٧٩
- المسدى الربيعي ١٩ ، ٣٠
- المربعات الصغرى العادية (OLS) ١٣٨ - ١٤٥ ، ١٤٥ - ١٥٢
- ١٥٩ ، ١٦٣ - ١٦٤ ، ١٩١
- اختلاف التباين و ٢١١ ، ٢١٦
- أخطاء المتغيرات و ٢١٣ ، ٢٢٤
- الارتباط الذاتي و ٢١٩ ، ٢٢٠
- الازدواج الخطي و ٢١٠ ، ٢١٤
- في تحليل الانحدار المتعدد ١٧٠ - ١٧٨
- التنبؤ و ٢٠٥
- الدالة غير الخطية و ١٨٩
- شكل الدالة و ١٩٢ ، ١٩٥
- طريقة المعادلات الآتية و ٢٣٢ ، ٢٣٧ - ٢٣٨ ، ٢٤٣
- ٢٤٥
- المتغير التابع الكيفي و ١٩٩
- المربعات الصغرى غير المباشرة و ٢٣٣ ، ٢٣٤
- نموذج الإبطاء الموزع و ١٩٩ - ٢٠١
- نموذج أمون المبطأ و ٢٠٢
- المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) ٢٣٤ ، ٢٤٧ -
- ٢٤٤ ، ٢٤٨
- المربعات الصغرى غير المباشرة ٢٣٣ - ٢٣٤ ، ٢٤٥ - ٢٤٣
- ٢٤٦ - ٢٤٨
- المرونة الداخلية ١٥١ - ١٥٢ ، ١٨١ ، ١٨٣ - ١٨٤ ، ١٩٠
- ١٩٣ ،
- المرونة السعرية ١٨١ ، ١٨٣ - ١٨٤ ، ١٩٠ ، ١٩٣ ، ١٩٤
- مستوى ثقة :
- في اختبار الفروض ٩٩ ، ١٠١ ، ١٠٦ - ١٠٩
- في التقدير ٢٠ ، ٨٦ - ٩٠ ، ٩٣ - ٩٥
- في التنبؤ ٢٠٤



- مستوى المعنوية :  
 في اختبار الفروض ٩٩ - ١٢٢  
 اختلاف التباين و ٢١٩  
 في الارتباط الذاتي ٢١١ ، ٢٢١-٢٢٤  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٤٢ ، ١٥٤ - ١٥٦  
 في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٨-١٦٩ ، ١٧٥ ، ١٧٧-١٧٩  
 ١٧٩  
 مضلع تكرارى ٧ ، ١٥ ، ٢٢ - ٢٥  
 المعادلات الآتية ( الطرق ، النماذج ، النظم ) ٧ ، ٩-١١ ،  
 ٢٣٢-٢٤٨  
 التقييز و ٢٣٢-٢٣٣ ، ٢٣٧-٢٤٠ ، ٢٤٥-٢٤٦  
 المربعات الصغرى غير المباشرة و ٢٣٣-٢٣٤ ، ٢٤٠-٢٤٥  
 ٢٤٣ ، ٢٤٦-٢٤٨  
 معادلات سلوكية ( هيكلية ) ٢٣٢ - ٢٣٦  
 معادلات الشكل المختزل ٢٣٢ - ٢٣٦ ، ٢٤٠-٢٤١  
 المعادلات الطبيعية ١٣٩  
 معادلات الطلب المقدرة ١٢  
 المعادلة العشوائية ٧ ، ١١ ، ١٣ - ١٤  
 المعادلة غير المميزة ٢٣٣ ، ٢٣٧ ، ٢٣٩  
 المعادلة المقلوبة ١٨٩ ، ١٩٣  
 المعالم ٧ ، ١١ - ١٤ ، ٩٥  
 الإحصائيات و ١٨ ( أنظر أيضاً المعالم المعينة )  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٤٥  
 تقديرها ٧٧  
 معالم الشكل المختزل ٢٣٨  
 معالم المجتمع :  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٥٩  
 شكل الدالة و ١٩٢  
 المعالم المقسورة :  
 في تحليل الانحدار المتعدد ١٧٩ - ١٨٠  
 شكل الدالة و ١٩٢  
 المعالم الهيكلية ٢٣٣ - ٢٣٥ ، ٢٣٨ - ٢٤٣  
 معامل الاختلاف ٢٠ ، ٣٦ - ٣٧  
 معامل الارتباط :  
 الازدواج الخطي و ٢١٤ - ٢١٥  
 البسيط ، في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٩ - ١٧٠  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٤٢ ، ١٥٥-١٥٦ ، ١٥٨  
 الجزئى ، في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٩-١٧٠ ،  
 ١٧٨ - ١٨٠ ، ١٨٧  
 الرتب ١٤٢ ، ١٥٧ - ١٥٩  
 المعاملات ١١ - ١٤  
 معامل ارتباط الرتب ( سبيرمان ) ١٤٢ ، ١٥٧ ، ١٥٨  
 معامل التحديد :  
 والارتباط الذاتي ٢٢٢  
 الازدواج الخطي و ٢١٠ ، ٢١٤  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٤٢ ، ١٥٥-١٥٨  
 في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٨-١٦٩ ، ١٧٥-١٧٩  
 ١٨٧  
 معامل التحديد المتعدد المعدل ١٦٨ ، ١٧٦-١٧٨ ، ٢١٤-٢١٥  
 ٢١٥  
 معامل التصحيح النهائى ٧٧ ، ٨٣ ، ٨٧  
 المعاملات ١١-١٤ ( أنظر أيضاً المعاملات المحددة )  
 معاملات الارتباط الجزئى ١٦٥ ، ١٦٩-١٧٠ ، ١٧٢ ، ١٧٨  
 ١٨٠ ، ١٨٧  
 معاملات الشكل المختزل ٢٣٥ - ٢٤٠  
 معاينة طبقية ٦٧  
 المعاينة العشوائية :  
 لاختبار الفروض ٧٦ ، ٩٩-١٠٢ ، ١٠٦-١١٠  
 البسيطة ، تعريفها ٨١ ، ٨٢  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٥٧ ، ١٥٨  
 للتقدير ٧٦-٧٩ ، ٨٠-٩١ ، ٩٣-٩٥  
 وتوزيع المعاينة للمتوسط ٧٦  
 معاينة عنقودية ٨١  
 معاينة منتظمة ٨١ - ٨٢  
 معايير إحصائية ١٣  
 معايير الاقتصاد القياسى ١٣  
 المعايير النظرية المسبقة ١٣  
 معكوس المربعات الصغرى ٢٢٥  
 المقدرات :  
 في تحليل الانحدار البسيط ١٥١  
 في تحليل الانحدار المتعدد ١٦٥ ( أنظر أيضاً الأنواع  
 المعينة للتقديرات والمقدرات )  
 تعريفها ٨٧  
 مقدرات غير الخطية ١٥٩  
 مقدرات غير متحيزة ١٥٨ ، ١٥٩  
 في التقدير ٨٦ ، ٨٩



ملاحظات

ملاحظات