

Chapitre X

INTÉGRALE INDÉFINIE

§ 1. Primitive et intégrale indéfinie

Nous avons étudié, au chapitre III, le problème suivant : étant donnée une fonction $F(x)$, trouver sa dérivée, c'est-à-dire la fonction $f(x) = F'(x)$.

Dans ce chapitre, nous considérerons le problème inverse : étant donnée une fonction $f(x)$, trouver une fonction $F(x)$ telle que sa dérivée soit égale à $f(x)$, c'est-à-dire

$$F'(x) = f(x).$$

Définition 1. On dit que la fonction $F(x)$ est une *primitive* de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ si en tout point de ce segment on a l'égalité $F'(x) = f(x)$.

Exemple. Trouver une primitive de la fonction $f(x) = x^2$.

On vérifie immédiatement, d'après la définition, que la primitive cherchée est $F(x) = \frac{x^3}{3}$. En effet, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

On remarque aisément que si la fonction $f(x)$ admet une primitive, cette dernière n'est pas unique. Ainsi, dans l'exemple précédent, nous aurions pu prendre pour primitives les fonctions suivantes : $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ ou plus généralement $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (où C est une constante arbitraire). En effet,

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

D'autre part, on peut démontrer qu'une primitive quelconque de la fonction x^2 est nécessairement de la forme $\frac{x^3}{3} + C$. Cela résulte du théorème suivant.

Théorème. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$, leur différence est une constante.

Démonstration. Nous avons, en vertu de la définition de la primitive :

$$\left. \begin{aligned} F_1'(x) &= f(x), \\ F_2'(x) &= f(x), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

pour tout x du segment $[a, b]$.

Posons

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Nous pouvons donc écrire en vertu de l'égalité (4) :

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ou

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0,$$

pour tous les x appartenant au segment $[a, b]$. Mais il vient de l'égalité $\varphi'(x) = 0$ que $\varphi(x)$ est une constante.

En effet, appliquons le théorème de Lagrange (voir § 2, ch. IV) à la fonction $\varphi(x)$ qui est continue et dérivable sur le segment $[a, b]$.

En vertu du théorème de Lagrange, pour tout x arbitraire du segment $[a, b]$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a) \varphi'(\xi),$$

où $a < \xi < x$.

Mais puisque $\varphi'(\xi) = 0$, alors

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

ou

$$\varphi(x) = \varphi(a). \quad (3)$$

Ainsi, la fonction $\varphi(x)$ conserve, en tout point du segment $[a, b]$, la valeur $\varphi(a)$. Elle est donc constante sur le segment $[a, b]$. Désignons la constante $\varphi(a)$ par C . Il vient alors des égalités (2) et (3) :

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Il résulte de ce théorème que si nous connaissons une primitive quelconque $F(x)$ de la fonction $f(x)$, toute autre primitive de cette fonction sera de la forme $F(x) + C$, où C est une constante.

Définition 2. On appelle *intégrale indéfinie* de la fonction $f(x)$ et on note $\int f(x) dx$ toute expression de la forme $F(x) + C$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$. Ainsi, par définition,

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

si

$$F'(x) = f(x).$$

De plus, $f(x)$ est appelée *fonction sous le signe somme* ou *fonction à intégrer*; $f(x) dx$ *expression sous le signe somme* et le signe $\int$ *signe d'intégration* ou *signe « somme »*.

Ainsi, l'intégrale indéfinie représente une famille de fonctions $y = F(x) + C$.

Géométriquement, on peut considérer l'intégrale indéfinie comme un ensemble (une famille) de courbes telles que l'on passe de l'une à l'autre en effectuant une translation dans le sens positif ou négatif de l'axe Oy .

Une question se pose naturellement: toute fonction $f(x)$ possède-t-elle une primitive (et, par conséquent, une intégrale indéfinie)? La réponse est négative, mais toutefois remarquons, sans le démontrer, que toute fonction $f(x)$ continue sur le segment $[a, b]$ possède une primitive (et, par conséquent, une intégrale indéfinie).

Le présent chapitre est consacré à l'exposé des différentes méthodes permettant de déterminer la primitive (et, par conséquent, l'intégrale indéfinie) pour certaines classes de fonctions élémentaires.

Le processus qui permet de trouver la primitive d'une fonction $f(x)$ est appelé *intégration* de la fonction $f(x)$.

Faisons la remarque suivante: à l'encontre de la dérivée qui pour une fonction élémentaire est toujours une fonction élémentaire, la primitive d'une fonction élémentaire peut ne pas s'exprimer à l'aide d'un nombre fini de fonctions élémentaires. Nous reviendrons d'ailleurs à cette question à la fin de ce chapitre.

Il vient de la définition 2 que

1. La dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à la fonction à intégrer, c'est-à-dire si $F'(x) = f(x)$, alors

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x). \quad (4)$$

Cette égalité exprime que la dérivée d'une primitive quelconque est égale à la fonction à intégrer.

2. La différentielle d'une intégrale indéfinie est égale à l'expression sous le signe somme

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx. \quad (5)$$

Cela découle de la formule (4).

3. L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une certaine fonction est égale à la somme de cette fonction et d'une constante arbitraire

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Il est facile de vérifier cette égalité par dérivation (la différentielle de chaque membre de l'égalité est égale à $dF(x)$).

§ 2. Table d'intégrales

Avant d'entreprendre l'exposé des différentes méthodes d'intégration, nous donnerons une liste des primitives de certaines fonctions élémentaires.

Cette table peut être obtenue directement à partir de la définition 2, § 1, ch. X et de la table des dérivées (§ 15, ch. III). (Il est facile de justifier tous les détails du tableau par dérivation; c'est-à-dire on peut vérifier que la dérivée du second membre est égale à la fonction à intégrer.)

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \quad (\text{Ici et dans les formules suivantes } C \text{ désigne une constante arbitraire.})$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \text{Log} |x| + C.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C.$$

$$7. \int \text{tg} x dx = -\text{Log} |\cos x| + C.$$

$$8. \int \text{ctg} x dx = \text{Log} |\sin x| + C.$$

$$9. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\text{Log} a} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg} x + C.$$

$$11'. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg} \frac{x}{a} + C$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \text{Log} \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin} x + C.$$

$$13'. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Log} |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

R e m a r q u e. Dans la table des dérivées (§ 15, ch. III) les formules correspondant aux formules 7, 8, 11', 12, 13' et 14 manquent. Il est toutefois facile de les justifier par dérivation.

Dans le cas de la formule 7, nous avons :

$$(-\text{Log} |\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \text{tg } x,$$

par conséquent, $\int \text{tg } x \, dx = -\text{Log} |\cos x| + C$.

Dans le cas de la formule 8,

$$(\text{Log} |\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{ctg } x,$$

par conséquent, $\int \text{ctg } x \, dx = \text{Log} |\sin x| + C$.

Dans le cas de la formule 12,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \text{Log} \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} [\text{Log} |a+x| - \text{Log} |a-x|]' = \\ &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] = \frac{1}{a^2 - x^2}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \text{Log} \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

Remarquons que cette dernière formule découle également des résultats généraux du § 9, ch. X.

Dans le cas de la formule 14,

$$\begin{aligned} (\text{Log} |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' &= \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Log} |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Cette formule découle également des résultats généraux du § 10.

On pourrait justifier d'une manière analogue les formules 11' et 13'. Remarquons, toutefois, qu'elles sont une conséquence immédiate des formules 11 et 13 que nous établirons plus loin (voir § 4, exemples 3 et 4).

§ 3. Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie

T h é o r è m e 1. *L'intégrale indéfinie de la somme algébrique de deux ou plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique de leurs intégrales*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (1)$$

Dérivons les deux membres de cette égalité. En vertu de l'égalité (4) du paragraphe précédent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} (\int [f_1(x) + f_2(x)] dx)' &= f_1(x) + f_2(x), \\ (\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx)' &= \\ &= (\int f_1(x) dx)' + (\int f_2(x) dx)' = f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée du premier membre de l'égalité (1) est égale à la dérivée du second membre, c'est-à-dire la dérivée d'une primitive quelconque du second membre est égale à la dérivée d'une fonction arbitraire figurant à droite. Il en résulte, en vertu du théorème du § 1, ch. X, que toute fonction du premier membre de l'égalité (1) ne diffère de toute fonction du second membre que par une constante. C'est dans ce sens que l'égalité (1) doit être comprise.

T h é o r è m e 2. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe somme, c'est-à-dire si $a = \text{const}$, alors*

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (2)$$

On justifie cette égalité en dérivant les deux membres :

$$\begin{aligned} (\int af(x) dx)' &= af(x), \\ (a \int f(x) dx)' &= a (\int f(x) dx)' = af(x). \end{aligned}$$

Les dérivées de ces deux membres sont égales ; par conséquent, la différence des fonctions figurant à gauche et à droite est constante. L'égalité (2) doit être comprise dans ce sens.

Au cours du calcul des intégrales indéfinies, il est parfois utile de se rappeler les règles suivantes :

I. Si

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

alors

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C. \quad (3)$$

En effet, en dérivant les deux membres de l'égalité (3), nous avons :

$$(\int f(ax) dx)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax) \right)' = \frac{1}{a} (F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax) a = F'(ax) = f(ax).$$

Les dérivées de ces deux membres sont égales, c.q.f.d.

II. Si

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

alors

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C. \quad (4)$$

III. Si

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

alors

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (5)$$

On démontre également les égalités (4) et (5) en dérivant les deux membres.

Exemple 1.

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 3 \sin x + 5 \sqrt{x}) dx &= \int 2x^3 dx - \\ &- \int 3 \sin x dx + \int 5 \sqrt{x} dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \right) dx &= 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{5}{4}} dx = 3 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + \\ &+ C = \frac{9}{2} \sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \text{Log} |x+3| + C.$$

Exemple 4.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C.$$

Exemple 5.

$$\int \sin (2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos (2x-6) + C.$$

§ 4. Intégration par changement de variable

Soit à calculer l'intégrale

$$\int f(x) dx;$$

bien que nous ne sachions pas calculer directement la primitive de la fonction $f(x)$, nous savons qu'elle existe.

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable

$$x = \varphi(t), \quad (1)$$

où $\varphi(t)$ est une fonction continue, ainsi que sa dérivée, et admet une fonction inverse. Alors $dx = \varphi'(t) dt$; démontrons que dans ce cas l'égalité

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (2)$$

est satisfaite.

On sous-entend ici que la variable t sera remplacée après intégration du second membre par son expression en fonction de x tirée de (1).

Pour justifier l'égalité (2) en ce sens, il suffit de montrer que les deux quantités considérées dont chacune n'est définie qu'à une constante arbitraire près ont la même dérivée par rapport à x . La dérivée du premier membre est

$$(\int f(x) dx)'_x = f(x).$$

Nous dérivons le second membre par rapport à x en tenant compte que t est une fonction de x . Il vient de l'égalité (1) que $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ et, en vertu de la règle de dérivation des fonctions inverses,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Nous avons, par conséquent :

$$\begin{aligned} (\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt)'_x &= (\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt)' \frac{dt}{dx} = \\ &= f[\varphi(t)] \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x). \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport à x des deux membres de l'égalité (2) sont donc égales, c.q.f.d.

La fonction $x = \varphi(t)$ doit être choisie de manière que l'on sache calculer l'intégrale indéfinie figurant à droite de l'égalité (2).

R e m a r q u e. Il est parfois préférable de choisir le changement de variable sous la forme $t = \psi(x)$ au lieu de $x = \varphi(t)$. Montrons-le sur un exemple. Proposons-nous de calculer une intégrale de la forme

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)}.$$

Il est ici commode de poser

$$\psi(x) = t,$$

alors

$$\psi'(x) dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \text{Log}|t| + C = \text{Log}|\psi(x)| + C.$$

Donnons, comme application de ce qui précède, quelques exemples d'intégration par changement de variable.

E x e m p l e 1. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = ?$ Effectuons le changement de variable $t = \sin x$; alors $dt = \cos x dx$ et, par conséquent, $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C.$

E x e m p l e 2. $\int \frac{x dx}{1+x^2} = ?$ Posons $t = 1+x^2$; alors $dt = 2x dx$ et $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \text{Log } t + C = \frac{1}{2} \text{Log}(1+x^2) + C.$

E x e m p l e 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Posons $t = \frac{x}{a}$; alors $dx = a dt$, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctg t + C = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$

E x e m p l e 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Posons $t = \frac{x}{a}$;

alors $dx = a dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

(nous supposons ici que $a > 0$).

On démontre dans les exemples 3 et 4 les formules 11' et 13' de la table d'intégrales (voir plus haut, § 2).

E x e m p l e 5. $\int (\text{Log } x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Posons $t = \text{Log } x$; alors $dt = \frac{dx}{x}$; $\int (\text{Log } x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\text{Log } x)^4 + C.$

E x e m p l e 6. $\int \frac{x dx}{1-x^4} = ?$ Posons $t = x^2$; alors $dt = 2x dx$, $\int \frac{x dx}{1-x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C.$

La méthode d'intégration par changement de variable est l'une des méthodes les plus importantes de calcul des intégrales indéfinies. Même quand nous employons une autre méthode, il arrive très souvent que l'on doit effectuer un changement de variable pendant les calculs intermédiaires. Le succès de l'intégration dépend fréquemment de notre habileté à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs. C'est pourquoi l'étude des méthodes d'intégration se ramène à la détermination du changement de variable à effectuer pour intégrer une fonction donnée. Le présent chapitre est consacré en grande partie à la résolution de cette tâche.

§ 5. Intégration de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$

I. Considérons l'intégrale

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Transformons tout d'abord le dénominateur en le mettant sous la forme d'une somme ou d'une différence de carrés

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2 \right], \end{aligned}$$

où on a posé

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

On prendra le signe plus ou le signe moins suivant que le signe du premier membre de la relation précédente est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont complexes ou réelles.

L'intégrale I_1 peut donc être mise sous la forme

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]}.$$

Effectuons un changement de variable en posant

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Nous avons alors

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

C'est justement les intégrales 11' et 12 de la table

Exemple 4. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}.$$

Solution.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $x+2=t$, $dx=dt$. Après substitution dans I , nous retrouvons une intégrale de la table d'intégrales

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \arctg \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

Remplaçons t par son expression en fonction de x , nous avons en définitive:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Considérons une intégrale d'un type plus général

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx.$$

Mettons la fonction à intégrer sous la forme suivante

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx.$$

Cette intégrale peut être mise sous la forme d'une somme de deux intégrales et, en sortant les facteurs constants de sous le signe somme, nous avons:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

La seconde intégrale est justement I_1 que nous savons calculer. Effectuons un changement de variable dans la première intégrale en posant

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b) dx = dt.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \text{Log}|t| + C = \text{Log}|ax^2+bx+c| + C.$$

Nous avons donc en définitive:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \text{Log}|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Exemple 2. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx.$$

Utilisons le procédé que nous venons d'indiquer :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2}\right)}{x^2-2x-5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5} + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2} \text{Log}|x^2-2x-5| + \\ &+ 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \frac{1}{2} \text{Log}|x^2-2x-5| + 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \text{Log} \left| \frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} \right| + C. \end{aligned}$$

III. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

A l'aide du changement de variable indiqué au point I de ce paragraphe, on ramène cette intégrale suivant le signe de a soit à une intégrale du type

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}},$$

dans le cas où $a > 0$, soit à une intégrale du type

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}},$$

dans le cas où $a < 0$; ces deux intégrales figurent dans la table d'intégrales (voir les formules 13' et 14).

IV. L'intégrale

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

peut être calculée à l'aide de transformations analogues à celles considérées au point II :

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

Effectuons dans la première intégrale un changement de variable, en posant

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b) dx = dt,$$

nous avons :

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

La seconde intégrale a déjà été calculée au point III.

Exemple 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \\ &= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \operatorname{Log}|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}| + C = \\ &= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \operatorname{Log}|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C. \end{aligned}$$

§ 6. Intégration par parties

Si u et v désignent deux fonctions dérivables de x , on sait que la différentielle du produit uv est :

$$d(uv) = u dv + v du.$$

En intégrant, on trouve :

$$uv = \int u dv + \int v du$$

ou

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (4)$$

C'est ce que l'on appelle la *formule d'intégration par parties*. On utilise généralement cette formule pour l'intégration des expressions pouvant être mises sous forme de produit de deux facteurs u et dv , tels que la recherche de la fonction v à partir de sa différentielle dv et le calcul de l'intégrale $\int v du$ constituent un problème plus simple que le calcul direct de l'intégrale $\int u dv$. L'habileté requise pour effectuer un choix judicieux des deux facteurs u et dv nécessite une certaine expérience que l'on acquiert par la résolution des exercices. Nous indiquerons sur des exemples comment il faut procéder en pareil cas.

Exemple 1. Soit à calculer $\int x \sin x dx$. Posons

$$u = x, \quad dv = \sin x dx;$$

alors

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Par conséquent,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Remarque. Quand nous déterminons v à partir de sa différentielle dv , nous pouvons prendre une constante arbitraire, puisqu'elle ne figure pas dans le résultat final (ce qui est facile de vérifier en remplaçant dans l'égalité (4) v par $v + C$). C'est pourquoi il est préférable de choisir cette constante égale à zéro.

La méthode d'intégration par parties s'emploie fréquemment. Par exemple, on peut calculer à l'aide de cette méthode les intégrales de la forme

$$\begin{aligned} \int x^k \sin ax dx, \quad \int x^k \cos ax dx, \\ \int x^k e^{ax} dx, \quad \int x^k \operatorname{Log} x dx, \end{aligned}$$

ainsi que d'autres intégrales dans lesquelles entrent les fonctions trigonométriques inverses.

Exemple 2. Soit à calculer $\int \arctg x dx$. Posons $u = \arctg x$, $dv = dx$; alors $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Par conséquent,

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \operatorname{Log}|1+x^2| + C.$$

Exemple 3. Soit à calculer $\int x^2 e^x dx$. Posons $u = x^2$, $dv = e^x dx$; alors $du = 2x dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Appliquons de nouveau à cette dernière intégrale la méthode d'intégration par parties, en posant :

$$u_1 = x, \quad du_1 = dx, \\ dv_1 = e^x dx, \quad v_1 = e^x.$$

Alors

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Nous avons en définitive :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Exemple 4. Soit à calculer $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx$. Posons $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x dx$; alors

$$du = (2x + 7) dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7) \frac{\sin 2x}{2} dx.$$

Appliquons la méthode d'intégration par parties à cette dernière intégrale en posant $u_1 = \frac{2x + 7}{2}$, $dv_1 = \sin 2x dx$; alors

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 7}{2} \sin 2x dx &= \frac{2x + 7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \\ &= -\frac{(2x + 7) \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

D'où en définitive :

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Exemple 5. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

Multiplions et divisons la fonction à intégrer par $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Appliquons à cette intégrale la méthode d'intégration par parties, en posant

$$u = x, \quad du = dx, \\ dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

alors

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

En substituant ce résultat dans l'expression que nous avons obtenue plus haut pour l'intégrale recherchée, nous trouvons

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

En effectuant certaines transformations élémentaires évidentes, nous avons en définitive :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Exemple 6. Calculer les intégrales

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx \text{ et } I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx.$$

En appliquant la méthode d'intégration par parties à la première intégrale, on a :

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx, \\ dv = \cos bx dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx,$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

Appliquons de nouveau la méthode d'intégration par parties à cette dernière intégrale :

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx, \\ dv = \sin bx dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Substituons l'expression obtenue dans l'égalité précédente, nous avons :

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Nous déduisons I_1 de cette égalité :

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) + C \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right),$$

d'où

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

On trouve de même :

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

§ 7. Fractions rationnelles.

Fractions rationnelles élémentaires et leur intégration

Comme nous allons le voir, ce ne sont pas toutes les fonctions élémentaires qui s'intègrent à l'aide de fonctions élémentaires. C'est pourquoi il est très important de définir les classes de fonctions dont les intégrales peuvent être exprimées à l'aide de fonctions élé-

mentaires. Parmi ces classes, la plus simple est celle des fonctions rationnelles.

Toute fonction rationnelle peut être mise sous forme de fraction rationnelle, c'est-à-dire sous forme de quotient de deux polynômes :

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que ces polynômes n'ont pas de racines communes.

Si le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on dit alors que la fraction est *régulière*, dans le cas contraire on dit qu'elle est *irrégulière*.

Si la fraction est irrégulière, en divisant le numérateur par le dénominateur (suivant la règle de division des polynômes), on peut représenter la fraction initiale comme la somme d'un polynôme et d'une fraction régulière :

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)},$$

où $M(x)$ est un polynôme et $\frac{F(x)}{f(x)}$ une fraction régulière.

Exemple 1. Soit

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

une fraction rationnelle irrégulière.

Divisons le numérateur par le dénominateur (suivant la règle de division des polynômes), nous avons :

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

L'intégration des polynômes ne présentant aucune difficulté, notre tâche consiste donc à intégrer les fractions rationnelles *régulières*.

Définition. Les fractions rationnelles régulières du type :

I. $\frac{A}{x-a},$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k est un nombre entier positif ≥ 2),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (les racines du dénominateur sont complexes,

c'est-à-dire $\frac{p^2}{4} - q < 0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k est un entier positif ≥ 2 ; les racines du déno-

minateur sont complexes),

sont appelées respectivement *éléments simples des types I, II, III et IV*. Nous démontrerons au paragraphe 8 que toute fraction rationnelle peut être mise sous forme de la somme d'éléments simples. Pour cette raison, nous considérerons d'abord les intégrales des éléments simples.

L'intégration des éléments simples des types I, II et III ne présente pas de grandes difficultés, c'est pourquoi nous les intégrons sans donner d'explications détaillées :

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \operatorname{Log} |x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx =$
 $= A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2} \operatorname{Log} |x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \times$$

$$\times \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \operatorname{Log} |x^2+px+q| +$$

$$+ \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \quad (\text{voir § 5}).$$

L'intégration des éléments simples du type IV est liée à des calculs plus compliqués. Soit à calculer une intégrale :

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx.$

Effectuons les transformations :

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}. \end{aligned}$$

La première intégrale peut être calculée par un changement de variable en posant $x^2+px+q = t$; $(2x+p) dx = dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Appelons I_k la seconde intégrale et mettons-la sous la forme

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

où l'on a posé

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(par hypothèse, les racines du dénominateur sont complexes et, par conséquent, $q - \frac{p^2}{4} > 0$).

Procédons ensuite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2+m^2) - t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Transformons cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} &= \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

En intégrant par parties, nous trouvons :

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right].$$

Substituant cette expression dans l'égalité (1), nous avons :

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \\ &+ \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

L'intégrale qui figure dans le second membre est du même type que I_k à cette différence que le degré du dénominateur de la fonction à intégrer est inférieur d'une unité ($k-1$); nous avons donc exprimé I_k en fonction de I_{k-1} .

En appliquant successivement ce procédé, on arrive à l'intégrale connue :

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

En remplaçant ensuite t et m par leurs expressions correspondantes en fonction de x , on obtient l'expression de l'intégrale IV en fonction de x , A , B , p , q .

Exemple 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}. \end{aligned}$$

Posons dans cette dernière intégrale $x+1=t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2) - t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(il est inutile d'ajouter une constante arbitraire; nous l'écrirons dans l'expression définitive). Par conséquent,

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$$

Nous avons en définitive :

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Démontrons que toute fraction rationnelle régulière peut être mise, et cela d'une seule manière, sous la forme d'une somme d'éléments simples.

Soit

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

une fraction rationnelle régulière.

Nous supposons que les coefficients des polynômes qui la composent sont réels et qu'en outre la fraction est irréductible (c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de racines communes).

Théorème 1. Soit $x = a$ une racine multiple d'ordre k du dénominateur, c'est-à-dire $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, où $f_1(a) \neq 0$ (voir § 6, ch. VII); la fraction régulière $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut alors se décomposer en une somme de deux fractions régulières de la manière suivante :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \quad (1)$$

où le coefficient A est différent de zéro et $F_1(x)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du dénominateur $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Démonstration. Écrivons l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \quad (2)$$

(celle-ci a lieu quel que soit A) et déterminons A de sorte que le polynôme $F(x) - Af_1(x)$ soit divisible par $x-a$. En vertu du théo-

rème de Bézout, il faut et il suffit que l'égalité

$$F(a) - Af_1(a) = 0$$

soit vérifiée. Comme $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, on peut déterminer A d'une manière univoque à partir de cette égalité avec

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Pour un tel A nous avons :

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

où $F_1(x)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Simplifions la fraction dans la formule (2) en divisant le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$. Nous trouvons alors l'égalité cherchée (4).

Corollaire. On peut appliquer un raisonnement analogue à la fraction rationnelle régulière

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

qui entre dans la composition de l'égalité (4). Ainsi, si le dénominateur de la fraction a une racine multiple $x = a$ d'ordre k , on peut écrire :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

où $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ est une fraction régulière irréductible. On peut appliquer le théorème que nous venons de démontrer à cette nouvelle fraction si $f_1(x)$ a d'autres racines réelles.

Étudions maintenant le cas où le dénominateur a des racines complexes. Rappelons tout d'abord que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux (voir § 8, ch. VII).

Dans la décomposition du polynôme en facteurs réels, à chaque couple de racines conjuguées correspond une expression de la forme $x^2 + px + q$; si les racines complexes conjuguées sont multiples d'ordre μ , l'expression correspondante sera $(x^2 + px + q)^\mu$.

Théorème 2. Si $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$, où le polynôme $\varphi_1(x)$ n'est pas divisible par $x^2 + px + q$, la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut être représentée par la somme de deux fractions

régulières de la manière suivante

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)}, \quad (3)$$

où $\Phi_1(x)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du polynôme $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)$.

Démonstration. Écrivons l'identité

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)} = \\ &= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)}, \end{aligned} \quad (4)$$

qui a lieu quels que soient M et N . Déterminons M et N de sorte que le polynôme $F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x)$ soit divisible par $x^2 + px + q$. Pour cela il faut et il suffit que l'équation

$$F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x) = 0$$

ait les mêmes racines $\alpha \pm i\beta$ que le polynôme $x^2 + px + q$. Par conséquent,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N] \Phi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ou

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\Phi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Mais $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\Phi_1(\alpha + i\beta)}$ est un nombre complexe, bien déterminé, que l'on peut mettre sous la forme $K + iL$, où K et L sont des nombres réels. Ainsi,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

d'où

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L$$

ou

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

Si l'on choisit les coefficients M et N de cette manière, le polynôme $F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x)$ aura pour racine $\alpha + i\beta$ et, par conséquent, la racine conjuguée $\alpha - i\beta$. Ainsi, ce polynôme se divise exactement par $x - (\alpha + i\beta)$ et $x - (\alpha - i\beta)$, et, par conséquent, par leur produit, c'est-à-dire par $x^2 + px + q$. En désignant le quotient de cette division par $\Phi_1(x)$, nous trouvons:

$$F(x) - (Mx + N) \Phi_1(x) = (x^2 + px + q) \Phi_1(x).$$

En simplifiant par $x^2 + px + q$ la dernière fraction de l'égalité (4), nous en déduisons l'égalité (3), et il est clair que $\Phi_1(x)$ est un polynôme de degré inférieur à celui du dénominateur, c.q.f.d.

En appliquant les théorèmes 1 et 2 à la fraction régulière $\frac{F(x)}{f(x)}$, on détermine tous les éléments simples correspondant aux racines du dénominateur $f(x)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Si

$$f(x) = (x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\mu \dots \dots (x^2 + lx + s)^\nu,$$

la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut être décomposée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x - a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x - a} + \\ &\dots + \frac{B}{(x - b)^\beta} + \frac{B_1}{(x - b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x - b} + \\ &\dots + \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \\ &\dots + \frac{M_{\mu-1}x + N_{\mu-1}}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{Px + Q}{(x^2 + lx + s)^\nu} + \\ &\dots + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + lx + s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_{\nu-1}x + Q_{\nu-1}}{x^2 + lx + s}. \end{aligned} \quad (5)$$

On peut déterminer les coefficients $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ en tenant compte des considérations suivantes. L'égalité (5) est une identité, par conséquent, si nous réduisons ces fractions au même dénominateur, nous aurons aux numérateurs à droite et à gauche des polynômes identiquement égaux. En égalant les coefficients des mêmes puissances de x , nous trouvons un système d'équations pour déterminer les coefficients inconnus $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$. Cette méthode de recherche des coefficients est appelée *méthode des coefficients indéterminés*.

Nous pouvons également déterminer ces coefficients en tenant compte de la remarque suivante: les polynômes que l'on obtient à droite et à gauche de l'égalité après réduction des fractions au même dénominateur doivent être identiquement égaux, par conséquent, les valeurs de ces polynômes sont égales quelle que soit la valeur de x . En donnant à x certaines valeurs concrètes, nous obtenons les équations nécessaires pour déterminer les coefficients.

Ainsi, nous avons démontré que toute fraction rationnelle régulière peut être mise sous la forme d'une somme d'éléments simples.

Exemple. Soit à décomposer la fraction $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ en éléments simples. En vertu de la formule (5) nous avons :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Mettons les fractions au dénominateur commun et égalons les numérateurs. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= A(x-2) + A_1(x+1) + A_2(x+1)^2 + B(x+1)^3 \quad (6) \\ \text{ou} \quad x^2 + 2 &= (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 3B)x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + \\ &\quad + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B). \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de x^3, x^2, x^1, x^0 , nous trouvons un système d'équations pour déterminer les coefficients :

$$\begin{aligned} 0 &= A_2 + B, \\ 1 &= A_1 + 3B, \\ 0 &= A - A_1 - 3A_2 + 3B, \\ 2 &= -2A - 2A_1 - 2A_2 + B. \end{aligned}$$

La résolution de ce système donne :

$$A = -1; \quad A_1 = \frac{1}{3}; \quad A_2 = -\frac{2}{9}; \quad B = \frac{2}{9}.$$

On aurait pu également déterminer certains coefficients à partir des équations que l'on obtient de l'égalité (6) qui est une identité en x , en donnant à la variable x certaines valeurs particulières.

Ainsi, posons $x = -1$, nous trouvons $3 = -3A$ ou $A = -1$; posons $x = 2$, nous trouvons $6 = 27B$; $B = \frac{2}{9}$. Si nous ajoutons à ces deux équations deux autres obtenues en égalant les coefficients de mêmes puissances de x , nous aurons quatre équations à quatre inconnues pour déterminer les coefficients. Nous avons en définitive la décomposition :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. Intégration des fractions rationnelles

Soit à calculer l'intégrale de la fraction rationnelle $\frac{Q(x)}{f(x)}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx.$$

Si la fraction donnée est irrégulière, nous la mettons sous la forme d'une somme d'un polynôme $M(x)$ et d'une fraction ration-

nelle régulière $\frac{F(x)}{f(x)}$ (voir § 7). Nous mettons ensuite la fraction

$\frac{F(x)}{f(x)}$ sous la forme d'une somme d'éléments simples (voir (5), § 8). Ainsi, l'intégration d'une fraction rationnelle arbitraire se ramène à l'intégration d'un polynôme et de plusieurs éléments simples.

Nous avons vu au § 8 que ces éléments simples étaient définis par les racines du dénominateur $f(x)$. Les différents cas sont possibles.

1^{er} cas. Les racines du dénominateur sont réelles et différentes, c'est-à-dire

$$f(x) = (x-a)(x-b) \dots (x-d).$$

Dans ce cas, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ se décompose en éléments simples du premier type :

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d},$$

et alors

$$\begin{aligned} \int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = \\ &= A \log|x-a| + B \log|x-b| + \dots \\ &\quad \dots + D \log|x-d| + C. \end{aligned}$$

2^e cas. Les racines du dénominateur sont toutes réelles, mais certaines sont multiples :

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-d)^\delta.$$

Dans ce cas, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ peut être décomposée en éléments simples des types I et II.

Exemple 1 (voir exemple au § 8, ch. X).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx &= -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \\ &\quad + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \log|x+1| + \\ &\quad + \frac{2}{9} \log|x-2| + C = -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \log \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

III^e cas. Le dénominateur a des racines complexes simples (c'est-à-dire différentes):

$$f(x) = (x^2 + px + q) \dots (x^2 + lx + s)(x - a)^\alpha \dots (x - d)^\delta.$$

Dans ce cas, la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ se décompose en éléments simples des types I, II, III.

Exemple 2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

Décomposons la fraction qui figure sous le signe d'intégration en éléments simples (voir (5), § 8, ch. X)

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}.$$

Par conséquent,

$$x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1).$$

Posons $x = 1$, nous trouvons: $1 = 2C$, $C = \frac{1}{2}$;

posons $x = 0$, nous trouvons: $0 = -B + C$, $B = \frac{1}{2}$.

En égalant les coefficients de x^2 , nous avons $0 = A + C$, d'où $A = -\frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} = \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{Log} |x^2 + 1| + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{Log} |x - 1| + C. \end{aligned}$$

IV^e cas. Le dénominateur comporte également des racines complexes multiples:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu (x - a)^\alpha \dots (x - d)^\delta.$$

Dans ce cas, les éléments simples du type IV entrent aussi dans la décomposition de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Exemple 3. Soit à calculer l'intégrale

$$-\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \, dx.$$

Solution. Décomposons la fraction en éléments simples:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 3} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{E}{x + 1},$$

d'où

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 &= (Ax + B)(x + 1) + \\ &+ (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2. \end{aligned}$$

En combinant les deux méthodes données pour la détermination des coefficients, nous trouvons:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1.$$

On a ainsi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \, dx &= \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \, dx + \\ &+ \int \frac{dx}{x + 1} = -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \operatorname{Log} |x + 1| + C. \end{aligned}$$

Nous avons calculé dans l'exemple 2, § 7, ch. X la première intégrale du second membre. La deuxième intégrale peut être calculée immédiatement.

Il ressort de l'étude effectuée que l'intégrale d'une fonction rationnelle quelconque peut être exprimée par des fonctions élémentaires en nombre fini:

- 1) par des logarithmes si les éléments simples sont du type I;
- 2) par des fonctions rationnelles si les éléments simples sont du type II;
- 3) par des logarithmes et des arcs tangents si les éléments simples sont du type III;
- 4) par des fonctions rationnelles et des arcs tangents si les éléments simples sont du type IV.

§ 10. Intégration des fonctions irrationnelles

Il n'est pas toujours possible d'exprimer l'intégrale d'une fonction irrationnelle quelconque à l'aide de fonctions élémentaires. Nous allons étudier, dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants, les fonctions irrationnelles dont les intégrales peuvent être ramenées par des changements de variable appropriés à celles de fonctions rationnelles que nous savons intégrer.

I. Considérons l'intégrale $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) \, dx$, où R est une fonction rationnelle de ses arguments *).

*) Le symbole $R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s})$ indique que l'on effectue uniquement des opérations rationnelles sur les quantités $x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}$.

Les symboles $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \dots\right), R(x, \sqrt[n]{ax^2+bx+c}), R(\sin x, \cos x)$, etc., que nous emploierons par la suite, doivent être interprétés de la même façon. Par exemple, $R(\sin x, \cos x)$ indique que l'on effectue des opérations rationnelles sur $\sin x$ et $\cos x$.

Soit k le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Effectuons la substitution

$$x = t^h, \quad dx = h t^{h-1} dt.$$

Chaque puissance fractionnaire de x peut alors être exprimée par une puissance entière de t , et, par conséquent, la fonction à intégrer se transforme en une fonction rationnelle de t .

Exemple 1. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1}.$$

Solution. Le dénominateur commun des fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ est 4. Posons, par conséquent, $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$; alors

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^{\frac{8}{3}} + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^{\frac{8}{3}} + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^{\frac{8}{3}} + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^{\frac{8}{3}} + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \log | t^3 + 1 | + C = \\ &= \frac{4}{3} [x^{\frac{3}{4}} - \log | x^{\frac{3}{4}} + 1 |] + C. \end{aligned}$$

II. Considérons maintenant les intégrales du type

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx.$$

En effectuant le changement de variable

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^h,$$

on ramène cette intégrale à celle d'une fonction rationnelle où k désigne le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Exemple 2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Solution. Posons $x+4=t^2$, $x=t^2-4$, $dx=2t dt$; alors

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4} \right) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= 2t + 2 \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2 \sqrt{x+4} + 2 \log \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

§ 11. Intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Considérons l'intégrale

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, \quad (1)$$

où $a \neq 0$.

Cette intégrale peut être ramenée à celle d'une fonction rationnelle par les substitutions de variables d'Euler.

1. *Première substitution d'Euler*. Si $a > 0$, on pose:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{ax} + t.$$

Prenons, pour fixer les idées, le signe plus devant $\sqrt{a}$. Alors

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2,$$

d'où x est défini comme une fonction rationnelle de t :

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}$$

(dx est aussi une fonction rationnelle de t), par conséquent,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{ax} + t = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} + t,$$

c'est-à-dire que $\sqrt{ax^2+bx+c}$ est ramenée à une fonction rationnelle de t .

Puisque $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x et dx s'expriment par des fonctions rationnelles de t , l'intégrale (1) est donc ramenée à celle d'une fonction rationnelle de t .

Exemple 1. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

Solution. Puisque ici $a=1 > 0$, nous posons $\sqrt{x^2+c} = -x+t$; alors

$$x^2+c = x^2-2xt+t^2,$$

d'où

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = -x + t = -\frac{t^2 - c}{2t} + t = -\frac{t^2 + c}{2t} dt,$$

En revenant à l'intégrale initiale, nous avons :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} &= \int \frac{\frac{t^2 + c}{2t} dt}{\frac{t^2 + c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \text{Log} |t| + C_1 = \\ &= \text{Log} |x + \sqrt{x^2 + c}| + C_1 \end{aligned}$$

(voir la formule 14 de la table d'intégrales).

2. *Deuxième substitution d'Euler.* Si $c > 0$, nous posons :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c};$$

alors

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt \sqrt{c} + c$$

(nous avons pris, pour fixer les idées, le signe plus devant la racine), d'où x est défini comme une fonction rationnelle de t :

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}.$$

Puisque dx et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ s'expriment également par des fonctions rationnelles de t , alors en substituant les valeurs de x , $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ et de dx en fonction de t dans l'intégrale $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ on ramène cette dernière à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t .

Exemple 2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx.$$

Solution. Posons $\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1$; alors

$$1 + x + x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1; \quad x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}; \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2};$$

$$1 - \sqrt{1 + x + x^2} = -\frac{2t^2 + t}{1 - t^2}.$$

Substituant les expressions ainsi obtenues dans l'intégrale que nous désirons calculer, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx &= \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1 - t^2)^2 (1 - t^2) (2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1) (1 - t^2)^2} dt = \\ &= + 2 \int \frac{t^2}{1 - t^2} dt = -2t + \text{Log} \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C = \\ &= -\frac{2(\sqrt{1 + x + x^2} - 1)}{x} + \text{Log} \left| \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x - \sqrt{1 + x + x^2} + 1} \right| + C \\ &= -\frac{2(\sqrt{1 + x + x^2} - 1)}{x} + \text{Log} |2x + 2\sqrt{1 + x + x^2} + 1| + C. \end{aligned}$$

3. *Troisième substitution d'Euler.* Soient α et β les racines réelles du trinôme $ax^2 + bx + c$. Posons :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha) t.$$

Comme $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, il vient :

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha) t,$$

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 t^2,$$

$$a(x - \beta) = (x - \alpha) t^2;$$

x s'exprime alors par une fonction rationnelle de t :

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Etant donné que dx et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sont également des fonctions rationnelles de t , l'intégrale considérée se ramène, par conséquent, à celle d'une fonction rationnelle de t .

Remarque 1. Le changement de variable indiqué dans la troisième substitution peut être appliqué non seulement quand $a < 0$, mais aussi quand $a > 0$ si seulement le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles.

Exemple 3. Soit à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

Solution. Comme $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, posons

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t;$$

alors

$$(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2, \quad x - 1 = (x + 4)t^2,$$

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \left[\frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} + 4 \right] t = \frac{5t}{1 - t^2}.$$

Revenons à l'intégrale considérée, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} &= \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = \\ &= \text{Log} \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \text{Log} \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}} \right| + C = \\ &= \text{Log} \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + C.\end{aligned}$$

R e m a r q u e 2. Remarquons que les substitutions de variables d'Euler indiquées aux cas 1 et 3 suffisent pour que l'intégrale (1) soit ramenée à celle d'une fonction rationnelle. En effet, considérons le trinôme $ax^2 + bx + c$. Si $b^2 - 4ac > 0$, les racines du trinôme sont réelles, et nous sommes donc en présence du cas 3. Si $b^2 - 4ac \leq 0$, nous avons dans ce cas

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

et, par conséquent, le signe du trinôme coïncide avec celui de a . Pour que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ soit réel, il faut que le trinôme soit positif et, partant, que $a > 0$. Nous sommes donc en présence du premier cas.

§ 12. Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques

Nous n'avons étudié jusqu'ici que les intégrales des fonctions algébriques (rationnelles ou irrationnelles).

Dans ce paragraphe nous considérerons l'intégration de certaines classes de fonctions non algébriques, et, en premier lieu, celle des fonctions trigonométriques. Soit une intégrale de la forme

$$\int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (1)$$

Montrons que cette intégrale peut toujours être ramenée à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable

$$\text{tg} \frac{x}{2} = t. \quad (2)$$

Exprimons $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\text{tg} \frac{x}{2}$ et, partant, en fonction de t :

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{2 \text{tg} \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

En outre,

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Nous pouvons donc exprimer $\sin x$, $\cos x$ et dx par des fonctions rationnelles de t . Une fonction composée de fonctions rationnelles étant une fonction rationnelle, en substituant les expressions ainsi obtenues dans l'intégrale (1), nous la ramenons à une intégrale d'une fonction rationnelle:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \left[\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right] \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Exemple 1. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

En vertu des formules précédentes, nous pouvons écrire :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{\frac{1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = \text{Log} |t| + C = \text{Log} \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Le changement de variable considéré résout le problème de l'intégration de toute expression de la forme $R(\cos x, \sin x)$. C'est pourquoi il est parfois appelé « changement de variable universel pour l'intégration des expressions trigonométriques ». En réalité ce changement de variable conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable de ne pas utiliser ce changement de variable, mais d'avoir recours à d'autres méthodes menant plus rapidement au but.

1) Si l'intégrale est de la forme $\int R(\sin x) \cos x \, dx$, le changement de variable $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$ nous conduit à une intégrale de la forme $\int R(t) \, dt$.

2) Si l'intégrale est de la forme $\int R(\cos x) \sin x \, dx$, elle peut être ramenée à une intégrale d'une fonction rationnelle par le changement de variable $\cos x = t$, $\sin x \, dx = -dt$.

3) Si la fonction à intégrer ne dépend que de $\operatorname{tg} x$, en effectuant le changement de variable $\operatorname{tg} x = t$, $x = \arctg t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, nous ramenons son intégrale à l'intégrale d'une fonction rationnelle :

$$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Si la fonction à intégrer est de la forme $R(\sin x, \cos x)$, où $\sin x$ et $\cos x$ ne figurent qu'aux puissances paires, nous employons le changement de variable :

$$\operatorname{tg} x = t, \quad (2')$$

car $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ peuvent être exprimés par des expressions rationnelles de $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Après avoir effectué ce changement de variable, nous obtenons l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Exemple 2. Calculer l'intégrale

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx.$$

Solution. Cette intégrale se ramène aisément à une intégrale de la forme $\int R(\cos x) \sin x \, dx$. En effet,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x \, dx}{2 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \cos x} \sin x \, dx.$$

Effectuons le changement de variable $\cos x = z$. Alors $\sin x \, dx = -dz$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx &= \int \frac{1 - z^2}{2 + z} (-dz) = \int \frac{z^2 - 1}{z + 2} \, dz = \int \left(z - 2 + \frac{3}{z + 2} \right) dz = \\ &= \frac{z^2}{2} - 2z + 3 \operatorname{Log}(z + 2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \operatorname{Log}(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

Exemple 3. Calculer $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$. Effectuons le changement de variable $\operatorname{tg} x = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} &= \int \frac{dt}{\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

5) Considérons maintenant une intégrale du type $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, où $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cos^n x \, dx$ (où m et n sont des nombres entiers). Il faut ici considérer trois cas.

a) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, où l'un au moins des nombres m et n est impair. Supposons pour fixer les idées que n est impair. Posons $n = 2p + 1$ et transformons l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2p+1} x \, dx &= \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x \, dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable

$$\sin x = t, \quad \cos x \, dx = dt.$$

Substituons ces expressions dans l'intégrale considérée, nous trouvons :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int t^m (1 - t^2)^p \, dt.$$

C'est l'intégrale d'une fonction rationnelle de t .

Exemple 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x \, dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x \, dx}{\sin^4 x}.$$

Posons $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx &= \int \frac{(1 - t^2) \, dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = \\ &= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

b) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, où m et n sont des nombres pairs non négatifs.

Posons $m = 2p$, $n = 2q$. Écrivons les formules trigonométriques bien connues :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x. \quad (3)$$

En substituant ces expressions dans l'intégrale considérée, on obtient :

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \times \\ \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

En effectuant les opérations indiquées, on obtient un développement suivant les puissances paires et impaires de $\cos 2x$. Les termes contenant des puissances impaires peuvent être intégrés comme nous l'avons indiqué dans le cas a). En ce qui concerne les termes contenant des puissances paires, nous appliquons successivement la formule (3) afin d'abaisser le degré de ces puissances. En procédant de cette manière, on arrive finalement à des termes de la forme $\int \cos kx \, dx$ que l'on intègre facilement.

Exemple 5.

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ = \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.$$

c) Si les deux exposants sont pairs et si l'un d'eux au moins est négatif, la méthode indiquée dans le cas b) est sans effet. Il faut alors poser $\operatorname{tg} x = t$ (ou $\operatorname{cotg} x = t$).

Exemple 6.

$$\int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 dx.$$

Posons $\operatorname{tg} x = t$; alors $x = \arctg t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, et nous avons :

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{t^2 (1+t^2)^2}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2 (1+t^2)}{1+t^2} dt = \\ = \int \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) Considérons enfin les intégrales suivantes :

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \sin nx \, dx.$$

On peut les calculer en utilisant les formules *) suivantes ($m \neq n$) :

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x], \\ \sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x], \\ \sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

En substituant et en intégrant, on trouve :

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \\ = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \\ = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Les deux autres intégrales se calculent d'une manière analogue.

Exemple 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

§ 13. Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide de transformations trigonométriques

Revenons à l'intégrale considérée au § 14, ch. X

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (1)$$

où $a \neq 0$ et $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ (dans le cas où $a = 0$ l'intégrale est de la

forme II § 10, quand $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ l'expression $ax^2 + bx + c =$

$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$, et nous avons affaire à une fonction rationnelle, si $a > 0$; si $a < 0$ la fonction $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ n'est pas définie pour aucune valeur de x). Nous allons montrer comment cette intégrale

*) On peut établir aisément ces formules comme suit : $\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx$, $\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx$. En ajoutant membre à membre et en divisant par deux, on obtient la première des trois formules. De même, en retranchant membre à membre puis en divisant par deux, on obtient la troisième formule. La deuxième formule peut être établie de la même manière en écrivant les développements de $\sin(m+n)x$ et de $\sin(m-n)x$ puis en sommant les expressions correspondantes.

peut être ramenée à une intégrale de la forme

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z) dz \quad (2)$$

étudiée au paragraphe précédent.

Transformons le trinôme figurant sous le signe de la racine :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Posons

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Alors

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)}.$$

Étudions séparément les divers cas possibles.

1. Soit $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Posons $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. Nous

aurons alors dans ce cas :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}.$$

2. Soit $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Alors

$$a = m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = -n^2.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}.$$

3. Soit $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Alors

$$a = -m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = n^2.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2 t^2}.$$

4. Soit $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Dans ce cas, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ est une quantité complexe quel que soit x .

L'intégrale (1) peut donc être ramenée à une intégrale de l'un des types suivants :

$$\text{I. } \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt. \quad (3.1)$$

$$\text{II. } \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt. \quad (3.2)$$

$$\text{III. } \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt. \quad (3.3)$$

Il est évident que l'intégrale (3.1) se ramène à une intégrale de la forme (2) si l'on effectue le changement de variable

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z.$$

L'intégrale (3.2) se ramène à une intégrale de la forme (2) si l'on pose

$$t = \frac{n}{m} \sec z.$$

L'intégrale (3.3) se ramène à une intégrale de la forme (2) si l'on pose

$$t = \frac{n}{m} \sin t.$$

Exemple. Calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Solution. Cette intégrale est du type III. Posons $x = a \sin z$; alors

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} &= \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\cos z} + C = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

§ 14. Fonctions dont les intégrales ne peuvent être exprimées par des fonctions élémentaires

Nous avons indiqué au § 4, ch. X (sans donner de démonstration) que toute fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b) a dans cet intervalle une primitive, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Cependant, toute primitive,

*) $\sqrt{1 - \sin^2 z} = |\cos z|$, nous nous arrêtons, pour fixer les idées, sur un seul cas : $|\cos z| = \cos z$.

même si elle existe, ne s'exprime pas par des combinaisons en nombre fini de fonctions élémentaires.

Telles sont, par exemple, les primitives exprimées par les intégrales

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$$

ainsi que bien d'autres encore.

Dans tous ces cas, la primitive qui ne peut être exprimée par des combinaisons en nombre fini de fonctions élémentaires représente évidemment une fonction d'une nature nouvelle.



Fig. 208

Fig. 209

Par exemple, celle des primitives

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C,$$

qui s'annule pour $x = 0$, est appelée *fonction de Laplace* et est désignée par la notation $\Phi(x)$. Ainsi,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt + C_1,$$

si

$$\Phi(0) = 0.$$

Cette fonction est très bien étudiée. Il existe des tables détaillées donnant les valeurs de cette fonction pour diverses valeurs de x . Nous verrons au § 24, ch. XVI comment cela peut être réalisé. Les graphiques de la fonction $y = e^{-x^2}$ et de la fonction de Laplace $y = \Phi(x)$ sont représentés sur les figures 208 et 209. De même, celle des primitives

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx + C \quad (k < 1),$$

qui s'annule pour $x = 0$, est appelée « intégrale elliptique » et est désignée par la notation $E(x)$,

$$E(x) = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx + C_2,$$

si

$$E(0) = 0.$$

Il existe également des tables détaillées donnant la valeur de cette fonction pour diverses valeurs de x .

Exercices

I. Calculer les intégrales :

1. $\int x^5 dx$. Rép. $\frac{x^6}{6} + C$.
2. $\int (x + \sqrt{x}) dx$. Rép. $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.
3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$. Rép. $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$.
4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}}$. Rép. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$.
5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$. Rép. $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. Rép. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.
7. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$. Rép. $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x} + C$.

Intégration par changement de variable :

8. $\int e^{5x} dx$. Rép. $\frac{1}{5}e^{5x} + C$.
9. $\int \cos 5x dx$. Rép. $\frac{\sin 5x}{5} + C$.
10. $\int \sin ax dx$. Rép. $-\frac{\cos ax}{a} + C$.
11. $\int \frac{\operatorname{Log} x}{x} dx$. Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{Log}^2 x + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. Rép. $-\frac{\cotg 3x}{3} + C$.
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. Rép. $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7} + C$.
14. $\int \frac{dx}{3x-7}$. Rép. $\frac{1}{3} \operatorname{Log} |3x-7| + C$.
15. $\int \frac{dx}{1-x}$. Rép. $-\operatorname{Log} |1-x| + C$.
16. $\int \frac{dx}{5-2x}$. Rép. $-\frac{1}{2} \operatorname{Log} |5-2x| + C$.
17. $\int \operatorname{tg} 2x dx$. Rép. $-\frac{1}{2} \operatorname{Log} |\cos 2x| + C$.

18. $\int \cot g(5x-7) dx$. Rép. $\frac{1}{5} \log |\sin(5x-7)| + C$.
19. $\int \frac{dy}{\cot g 3y}$. Rép. $-\frac{1}{3} \log |\cos 3y| + C$.
20. $\int \cot g \frac{x}{3} dx$. Rép. $3 \log \left| \sin \frac{x}{3} \right| + C$.
21. $\int \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec^2 \varphi d\varphi$. Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + C$.
22. $\int (\cot g e^x) e^x dx$. Rép. $\log |\sin e^x| + C$.
23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \cot g \frac{S}{4} \right) dS$. Rép. $-\frac{1}{4} \log |\cos 4S| - 4 \log \left| \sin \frac{S}{4} \right| + C$.
24. $\int \sin^2 x \cos x dx$. Rép. $\frac{\sin^3 x}{3} + C$.
25. $\int \cos^3 x \sin x dx$. Rép. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.
26. $\int \sqrt{x^2+1} x dx$. Rép. $\frac{1}{3} \sqrt{x^2+1}^3 + C$.
27. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. Rép. $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C$.
28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$. Rép. $\frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C$.
29. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$. Rép. $-\frac{1}{\sin x} + C$. 30. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$. Rép. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$.
31. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$. 32. $\int \frac{\cot g x}{\sin^2 x} dx$. Rép. $-\frac{\cot g^2 x}{2} + C$.
33. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$. Rép. $2 \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$.
34. $\int \frac{\log(x+1)}{x+1} dx$. Rép. $\frac{\log^2(x+1)}{2} + C$.
35. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}$. Rép. $\sqrt{2 \sin x + 1} + C$.
36. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos 2x)^3}$. Rép. $\frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C$.
37. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$. Rép. $2 \sqrt{1 + \sin^2 x} + C$.
38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx$. Rép. $\frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{tg} x + 1)^3} + C$.
39. $\int \frac{\cos 2x dx}{(2 + 3 \sin 2x)^3}$. Rép. $-\frac{1}{12(2 + 3 \sin 2x)^2} + C$.
40. $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C$.

41. $\int \frac{\log^2 x dx}{x}$. Rép. $\frac{\log^3 x}{3} + C$.
42. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Rép. $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$.
43. $\int \frac{\arcsin \operatorname{tg} x dx}{1+x^2}$. Rép. $\frac{\arcsin \operatorname{tg}^2 x}{2} + C$.
44. $\int \frac{\arcsin \cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Rép. $-\frac{\arcsin \cos^3 x}{3} + C$.
45. $\int \frac{\arcsin \cot g x}{1+x^2} dx$. Rép. $-\frac{\arcsin \cot g^2 x}{2} + C$.
46. $\int \frac{x dx}{x^2+1}$. Rép. $\frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$.
47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$. Rép. $\frac{1}{2} \log(x^2+2x+3) + C$.
48. $\int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 3}$. Rép. $\frac{1}{2} \log(2 \sin x + 3) + C$.
49. $\int \frac{dx}{x \log x}$. Rép. $\log |\log x| + C$.
50. $\int 2x(x^2+1)^4 dx$. Rép. $\frac{(x^2+1)^5}{5} + C$.
51. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.
52. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arcsin \operatorname{tg} x}$. Rép. $\log |\arcsin \operatorname{tg} x| + C$.
53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}$. Rép. $\frac{1}{3} \log |3 \operatorname{tg} x + 1| + C$.
54. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.
55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$. Rép. $\log |\arcsin x| + C$.
56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3 \sin 2x} dx$. Rép. $\frac{1}{6} \log |2+3 \sin 2x| + C$.
57. $\int \cos(\log x) \frac{dx}{x}$. Rép. $\sin(\log x) + C$.
58. $\int \cos(a+bx) dx$. Rép. $\frac{1}{b} \sin(a+bx) + C$.
59. $\int e^{2x} dx$. Rép. $\frac{1}{2} e^{2x} + C$. 60. $\int e^{\frac{x}{3}} dx$. Rép. $3e^{\frac{x}{3}} + C$.
61. $\int e^{\sin x} \cos x dx$. Rép. $e^{\sin x} + C$. 62. $\int a^{x^2} x dx$. Rép. $\frac{a^{x^2}}{2 \log a} + C$.
63. $\int e^{\sqrt{x}} dx$. Rép. $a e^{\frac{x}{a}} + C$. 64. $\int (e^{2x})^2 dx$. Rép. $\frac{1}{4} e^{4x} + C$.

65. $\int 3^x e^x dx$. Rép. $\frac{3^x e^x}{\log 3 + 1} + C$. 66. $\int e^{-3x} dx$. Rép. $-\frac{1}{3} e^{-3x} + C$.
67. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$. Rép. $\frac{1}{5} \left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\log a} + C \right)$.
68. $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) dx$. Rép. $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$.
69. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$. Rép. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x}{\log a - \log b} - 2x + C$.
70. $\int \frac{x dx}{3 + 4e^x}$. Rép. $\frac{1}{4} \log(3 + 4e^x) + C$.
71. $\int \frac{e^{2x} dx}{2 + e^{2x}}$. Rép. $\frac{1}{2} \log(2 + e^{2x}) + C$.
72. $\int \frac{dx}{1 + 2x^2}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x) + C$.
73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$.
74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$. Rép. $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C$.
75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. Rép. $\arcsin \frac{x}{3} + C$. 76. $\int \frac{dx}{4 + x^2}$. Rép. $\frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C$.
77. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$. Rép. $\frac{1}{6} \arctg \frac{3x}{2} + C$.
78. $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$. Rép. $\frac{1}{12} \log \left| \frac{2 + 3x}{2 - 3x} \right| + C$.
79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$. Rép. $\log |x + \sqrt{x^2 + 9}| + C$.
80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}$. Rép. $\frac{1}{b} \log |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}| + C$.
81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$. Rép. $\frac{1}{a} \log |ax + \sqrt{b^2 + a^2 x^2}| + C$.
82. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - c^2}$. Rép. $\frac{1}{2ac} \log \left| \frac{ax - c}{ax + c} \right| + C$.
83. $\int \frac{x^2 dx}{5 - x^6}$. Rép. $\frac{1}{6 \sqrt{5}} \log \left| \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} \right| + C$.
84. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$. Rép. $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$.
85. $\int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$. Rép. $\frac{1}{2a^2} \arctg \frac{x^2}{a^2} + C$.
86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$. Rép. $\arcsin e^x + C$.

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} x + C$.
88. $\int \frac{\cos x dx}{a^2 + \sin^2 x}$. Rép. $\frac{1}{a} \arctg \left(\frac{\sin x}{a} \right) + C$.
89. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \log^2 x}}$. Rép. $\arcsin(\log x) + C$.
90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$. Rép. $-\frac{1}{2} (\arccos x)^2 + \sqrt{1 - x^2} + C$.
91. $\int \frac{x - \arctg x}{1 + x^2} dx$. Rép. $\frac{1}{2} \log(1 + x^2) - \frac{1}{2} (\arctg x)^2 + C$.
92. $\int \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx$. Rép. $\frac{2}{3} \sqrt{1 + \log x}^3 + C$.
93. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Rép. $\frac{4}{3} \sqrt{1 + \sqrt{x}}^3 + C$.
94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$. Rép. $4 \sqrt{1 + \sqrt{x}} + C$.
95. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$. Rép. $\arctg e^x + C$. 96. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. Rép. $3 \sqrt[3]{\sin x} + C$.
97. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 x} \sin 2x} dx$. Rép. $-\frac{2}{9} \sqrt{1 + 3 \cos^2 x}^3 + C$.
98. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$. Rép. $-2 \sqrt{1 + \cos^2 x} + C$.
99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. Rép. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C$.
100. $\int \frac{\sqrt[3]{\lg^2 x}}{\cos^2 x} dx$. Rép. $\frac{3}{5} \sqrt[3]{\lg^5 x} + C$.
101. $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{6}} \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \tg x \right) + C$.
- Intégrales du type $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$:
102. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$. Rép. $\frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + C$.
103. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{11}} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C$.
104. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} \right| + C$.
105. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$. Rép. $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$.
106. $\int \frac{dz}{2z^2 - 2z + 1}$. Rép. $\arctg(2z - 1) + C$.

107. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C$.
108. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11}$. Rép. $\operatorname{Log} |3x^2-7x+11| + C$.
109. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$. Rép. $\frac{3}{10} \operatorname{Log}(5x^2-3x+2) - \frac{11}{5\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C$.
110. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$. Rép. $\frac{3}{2} \operatorname{Log}(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.
111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx$. Rép. $\frac{2}{3} \operatorname{Log}(3x-1) + \frac{1}{2} \operatorname{Log}(2x+1) + C$.
112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx$. Rép. $\frac{1}{5} \operatorname{Log}(5x^2-x+2) - \frac{8}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C$.
113. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx$. Rép. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{Log} |2x^2-x+1| +$
 $+ \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C$.
114. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$. Rép. $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{7}} + C$.
- Intégrales du type $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}} dx$:
115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C$.
116. $\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. Rép. $\operatorname{Log} \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C$.
117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. Rép. $\operatorname{Log} |S+a+\sqrt{2aS+S^2}| + C$.
118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsin} \frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C$.
119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} |6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}| + C$.
120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. Rép. $\operatorname{arcsin} \frac{2x+3}{\sqrt{17}} + C$.
121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Log} |10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}| + C$.
122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+C}} dx$. Rép. $2\sqrt{ax^2+bx+C} + C$.
123. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Rép. $\frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \operatorname{Log} |2x+1+$
 $+ \sqrt{4x^2+4x+3}| + C$.

124. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. Rép. $-\frac{1}{11} \sqrt{3+66x-11x^2} + C$.
125. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. Rép. $-\frac{1}{4} \sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4} \operatorname{arcsin} \frac{2x-1}{2} + C$.
126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx$. Rép. $\frac{3}{2} \sqrt{2x^2-x} + \frac{23}{4\sqrt{2}} \operatorname{Log}(4x-1) +$
 $+ \frac{1}{\sqrt{8(2x^2-x)}} + C$.
- II. Intégration par parties:
127. $\int xe^x dx$. Rép. $e^x(x-1) + C$.
128. $\int x \operatorname{Log} x dx$. Rép. $\frac{1}{2} x^2 \left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{2} \right) + C$.
129. $\int x \sin x dx$. Rép. $\sin x - x \cos x + C$.
130. $\int \operatorname{Log} x dx$. Rép. $x(\operatorname{Log} x - 1) + C$.
131. $\int \operatorname{arcsin} x dx$. Rép. $x \operatorname{arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$.
132. $\int \operatorname{Log}(1-x) dx$. Rép. $-x - (1-x) \operatorname{Log}(1-x) + C$.
133. $\int x^n \operatorname{Log} x dx$. Rép. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\operatorname{Log} x - \frac{1}{n+1} \right) + C$.
134. $\int x \operatorname{arctg} x dx$. Rép. $\frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arctg} x - x] + C$.
135. $\int x \operatorname{arcsin} x dx$. Rép. $\frac{1}{4} [(2x^2-1) \operatorname{arcsin} x + x \sqrt{1-x^2}] + C$.
136. $\int \operatorname{Log}(x^2+1) dx$. Rép. $x \operatorname{Log}(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$.
137. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$. Rép. $(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.
138. $\int \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. Rép. $2\sqrt{x} \operatorname{arcsin} \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$.
139. $\int \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$. Rép. $x \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$.
140. $\int x \cos^2 x dx$. Rép. $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$.
141. $\int \frac{x \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Rép. $x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsin} x + C$.
142. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} dx$. Rép. $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + C$.
143. $\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} dx$. Rép. $\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C$.
144. $\int \frac{\operatorname{arcsin} x}{x^2} dx$. Rép. $\operatorname{Log} \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{1}{x} \operatorname{arcsin} x + C$.

$$145. \int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \text{ Rép. } x \log|x + \sqrt{1+x^2}| - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$146. \int \arcsin x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Rép. } \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C.$$

Dans les exemples suivants introduire des variables trigonométriques :

$$147. \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} dx. \text{ Rép. } -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$148. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx. \text{ Rép. } 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4} x^3 \sqrt{4-x^2} + C.$$

$$149. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}. \text{ Rép. } -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

$$150. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx. \text{ Rép. } \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.$$

$$151. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}. \text{ Rép. } \frac{x}{a^2} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

Intégration des fractions rationnelles :

$$152. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx. \text{ Rép. } \log \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + C.$$

$$153. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}. \text{ Rép. } \frac{1}{8} \log \frac{(x+3)^8}{(x+5)^5(x+1)} + C.$$

$$154. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx. \text{ Rép. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \log \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C.$$

$$155. \int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)^2(x+2)}. \text{ Rép. } \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \log \frac{(x-1)}{(x+1)^3} + \frac{16}{3} \log(x+2) + C.$$

$$156. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}. \text{ Rép. } \frac{1}{x-1} + \log \frac{x-2}{x-1} + C.$$

$$157. \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx. \text{ Rép. } \frac{3}{x-2} + \log \frac{(x-2)^2}{x^2} + C.$$

$$158. \int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx. \text{ Rép. } \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \log \frac{x^2}{(x+1)^2} + C.$$

$$159. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}. \text{ Rép. } -\frac{5x+12}{x^2+6x+8} + \log \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 + C.$$

$$160. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}. \text{ Rép. } \log \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

$$161. \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx. \text{ Rép. } \log \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C.$$

$$162. \int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx. \text{ Rép. } \log \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$163. \int \frac{dx}{x^3+1}. \text{ Rép. } \frac{1}{6} \log \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$164. \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}. \text{ Rép. } \log \frac{x^2+4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C.$$

$$165. \int \frac{4 dx}{x^4+1}. \text{ Rép. } \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

$$166. \int \frac{x^5}{x^3-1} dx. \text{ Rép. } \frac{1}{3} [x^3 + \log(x^3-1)] + C.$$

$$167. \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx. \text{ Rép. } \frac{2-x}{4(x^2+2)} + \log(x^2+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$168. \int \frac{(4x^2-8x) dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}. \text{ Rép. } \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + \log \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \arctg x + C.$$

$$169. \int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}. \text{ Rép. } \log \frac{x-1}{x} - \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} + C.$$

Intégration des fonctions irrationnelles :

$$170. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}} dx. \text{ Rép. } \frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \log(\sqrt[4]{x^3}+1)] + C.$$

$$171. \int \frac{\sqrt{x^3-\sqrt[3]{x}}}{6\sqrt[4]{x}} dx. \text{ Rép. } \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C.$$

$$172. \int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}} dx. \text{ Rép. } -\frac{6}{\sqrt[6]{x}} + \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + 2 \log x - 2\sqrt[4]{x} \log(\sqrt[12]{x}+1) + C.$$

$$173. \int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}} dx. \text{ Rép. } \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} + 4\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 9 \log(\sqrt[6]{x}+1) + \frac{3}{2} \log(\sqrt[6]{x^2}+1) + 3 \arctg \sqrt[6]{x} + C.$$

$$174. \int \sqrt{\frac{1-x dx}{1+x x^2}}. \text{ Rép. } \log \left| \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} \right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

$$175. \int \sqrt{\frac{1-x dx}{1+x x}}. \text{ Rép. } 2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \log \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + C.$$

$$176. \int \frac{\sqrt[7]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[7]{x^8} + \sqrt[4]{x^{15}}} dx.$$

$$\text{Rép. } 14 \left[\frac{1}{2} \sqrt[14]{x} - \frac{1}{2} \sqrt[7]{x} + \frac{1}{3} \sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4} \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5} \sqrt[14]{x^5} \right] + C.$$

$$177. \int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx.$$

$$\text{Rép. } \sqrt{3x^2-7x-6} + \frac{14}{2\sqrt{3}} \log \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2} \right) + C.$$

Intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$:

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. Rép. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C$.
179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. Rép. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C$.
180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. Rép. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C$.
181. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$. Rép. $\sqrt{x^2+2x} + \operatorname{Log} |x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C$.
182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. Rép. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C$.
183. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$. Rép. $\frac{1}{2} [(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)] + C$.
184. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. Rép. $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} |x+\sqrt{x^2-1}| + C$.
185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. Rép. $\operatorname{Log} \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C$.
186. $\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx$. Rép. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C$.
187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$. Rép. $\operatorname{Log} \left| \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} \right| + C$.
188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2} dx$. Rép. $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \operatorname{Log} |x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C$.
- Intégration des fonctions trigonométriques :
189. $\int \sin^3 x dx$. Rép. $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$.
190. $\int \sin^5 x dx$. Rép. $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C$.
191. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$. Rép. $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$.
192. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. Rép. $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3} \operatorname{cosec}^3 x + C$.
193. $\int \cos^2 x dx$. Rép. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.
194. $\int \sin^4 x dx$. Rép. $\frac{3}{8} x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.
195. $\int \cos^6 x dx$. Rép. $\frac{1}{16} \left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x \right) + C$.
196. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$. Rép. $\frac{1}{428} \left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + C$.

197. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{Log} |\cos x| + C$.
198. $\int \operatorname{cotg}^5 x dx$. Rép. $-\frac{1}{4} \operatorname{cotg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{Log} |\sin x| + C$.
199. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx$. Rép. $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - \operatorname{Log} |\sin x| + C$.
200. $\int \sec^8 x dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$.
201. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x dx$. Rép. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$.
202. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Rép. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$.
203. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$. Rép. $C - \operatorname{cosec} x$.
204. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. Rép. $\frac{3}{5} (\cos^{\frac{5}{3}} x) + 3 (\cos^{\frac{1}{3}} x) + C$.
205. $\int \sin x \sin 3x dx$. Rép. $-\frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.
206. $\int \cos 4x \cos 7x dx$. Rép. $\frac{\sin 11x}{22} + \frac{\sin 3x}{6} + C$.
207. $\int \cos 2x \sin 4x dx$. Rép. $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.
208. $\int \sin \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x dx$. Rép. $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{1}{2} x + C$.
209. $\int \frac{dx}{4-5 \sin x}$. Rép. $\frac{1}{3} \operatorname{Log} \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C$.
210. $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$. Rép. $\frac{1}{2} \arcsin \operatorname{tg} \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.
211. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$. Rép. $\frac{2}{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + C$.
212. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$. Rép. $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.
213. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. Rép. $\arcsin \operatorname{tg} (2 \sin^2 x - 1) + C$.
214. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$. Rép. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + C$.
215. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$. Rép. $-\frac{1}{2} \left[\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C$.
216. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$. Rép. $\sqrt{2} \arcsin \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$.

Chapitre XI

INTÉGRALE DÉFINIE

§ 1. Position du problème.

Sommes intégrales inférieure et supérieure

Un puissant moyen d'investigation en mathématiques, en physique, en mécanique, ainsi que dans d'autres disciplines est fourni par l'intégrale définie, une des notions fondamentales de l'analyse. Le calcul des aires délimitées par des courbes, des arcs, des volumes, du travail, de la vitesse, du chemin, des moments d'inertie, etc., se ramène au calcul d'une intégrale définie.

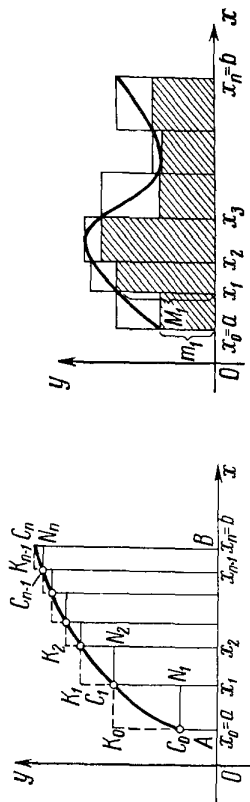


Fig. 210

Soit $y = f(x)$ une fonction continue donnée sur le segment $[a, b]$ (fig. 210 et 211). Soient m et M respectivement sa plus petite et sa plus grande valeur sur ce segment. Partageons le segment $[a, b]$ en n parties par les points

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

avec

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

et posons

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1; x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Désignons la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$

sur le segment $[x_0, x_1]$ par m_1 et M_1 ,

sur le segment $[x_1, x_2]$ par m_2 et M_2 ,

.....

sur le segment $[x_{n-1}, x_n]$ par m_n et M_n .

Formons les sommes

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (4)$$

$$\bar{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (2)$$

La somme s_n est appelée *somme intégrale inférieure* et $\bar{s}_n$ *somme intégrale supérieure*.

Lorsque $f(x) \geq 0$, la somme intégrale inférieure a pour valeur numérique l'aire de la figure en escalier « inscrite » $AC_0N_1C_1N_2 \dots C_{n-1}N_nBA$ et la somme intégrale supérieure l'aire de la figure en escalier « circonscrite » $AK_0C_1K_1 \dots C_{n-1}K_nC_nBA$.

Indiquons quelques propriétés des sommes intégrales inférieures et supérieures.

a) Etant donné que $m_i \leq M_i$ quel que soit i ($i = 1, 2, \dots, n$), on a, en vertu des formules (1) et (2):

$$\underline{s}_n \leq \bar{s}_n \quad (3)$$

(l'égalité correspondant à $f(x) = \text{const}$).

b) Etant donné que

$$m_1 \geq m, m_2 \geq m, \dots, m_n \geq m,$$

où m est la plus petite valeur de $f(x)$ sur $[a, b]$, on a

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \dots + m \Delta x_n = m (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m (b - a).$$

Ainsi,

$$\underline{s}_n \geq m (b - a). \quad (4)$$

c) Etant donné que

$$M_1 \leq M, M_2 \leq M, \dots, M_n \leq M,$$

où M est la plus grande valeur de $f(x)$ sur $[a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \bar{s}_n &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \dots \\ &\quad + M \Delta x_n = M (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots \\ &\quad + \dots + \Delta x_n) = M (b - a). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\bar{s}_n \leq M (b - a). \quad (5)$$

Réunissant les deux inégalités obtenues, on a:

$$m (b - a) \leq \underline{s}_n \leq \bar{s}_n \leq M (b - a). \quad (6)$$

Lorsque $f(x) \geq 0$, la double inégalité obtenue admet une interprétation géométrique simple (fig. 242), étant donné que les pro-

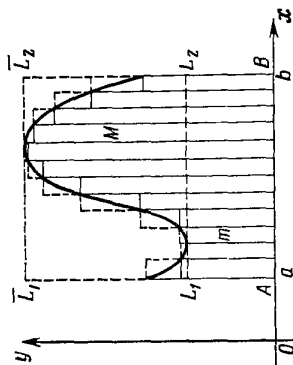


Fig. 242

duits $m(b-a)$ et $M(b-a)$ représentent respectivement les valeurs numériques des aires du rectangle « inscrit » AL_1L_2B et du rectangle « circonscrit » AL_1L_2B .

§ 2. Intégrale définie. Théorème d'existence de l'intégrale définie

Continuons l'examen de la question du paragraphe précédent. Prenons un point sur chaque segment $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

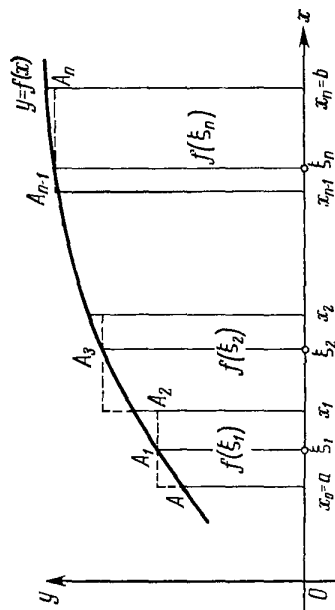


Fig. 243

que nous désignerons respectivement par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (fig. 243), $x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < \xi_n < x_n$. Soient $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ les valeurs de la fonction en ces points. Formons la somme

$$s_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (4)$$

qu'on appelle *somme intégrale* pour la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$. Étant donné que, quel que soit ξ_i sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$,

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

et que $\Delta x_i > 0$, on en déduit

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i,$$

par conséquent,

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

ou

$$s_n \leq s_n \leq s_n. \quad (2)$$

L'interprétation géométrique de cette dernière inégalité est que, pour $f(x) \geq 0$, la figure ayant s_n pour aire est délimitée par une courbe comprise entre les courbes en escalier « inscrite » et « circonscrite ».

La somme s_n dépend du mode de découpage du segment $[a, b]$ en segments $[x_{i-1}, x_i]$ et du choix des points ξ_i sur ces segments.

Désignons maintenant par $\max [x_{i-1}, x_i]$ la longueur du plus grand des segments $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Considérons divers découpages du segment $[a, b]$ en segments partiels $[x_{i-1}, x_i]$ tels que $\max [x_{i-1}, x_i] \rightarrow 0$. Il est évident que le nombre n de segments d'un tel découpage tend vers l'infini. On peut former pour chaque découpage, en choisissant les valeurs correspondantes ξ_i , la somme intégrale

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (3)$$

Considérons une certaine suite de partitions, pour lesquelles $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, et $n \rightarrow \infty$. Pour chaque partition nous choisissons les valeurs ξ_i . Supposons que cette suite de sommes intégrales s_n^* tende vers une certaine limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} s_n^* = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = s. \quad (4)$$

Nous pouvons maintenant formuler la définition suivante.

Définition 1. Si pour toutes partitions du segment $[a, b]$ telles que $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ et pour tout choix des points ξ_i dans les segments $[x_{i-1}, x_i]$ la somme intégrale

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (5)$$

*) Dans le cas donné, la somme est une grandeur variable ordonnée.

tend vers une même limite s , cette limite est appelée *intégrale définie* de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et notée

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ainsi par définition

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

Le nombre a est la *borne* (ou la *limite*) *inférieure* de l'intégrale et b la *borne* (ou la *limite*) *supérieure*. Le segment $[a, b]$ est le *segment d'intégration*, x la *variable d'intégration*.

Définition 2. Si la limite (6) existe pour la fonction $f(x)$, cette fonction est dite *intégrable* sur le segment $[a, b]$.

Notons que la somme intégrale inférieure $\underline{s}_n$ et la somme intégrale supérieure $\bar{s}_n$ sont des cas particuliers de la somme intégrale (5), de sorte que si $f(x)$ est intégrable, les sommes intégrale inférieure et supérieure tendent vers une même limite s , de sorte que nous pouvons écrire en vertu de l'égalité (6) :

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (7)$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (7')$$

Si l'on construit le graphique de la fonction sous le signe somme (le signe d'intégration) $y = f(x)$, lorsque $f(x) \geq 0$, l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

est numériquement égale à l'aire du trapèze curviligne formé par la courbe $y = f(x)$, les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe Ox (fig. 214).

Par conséquent, on calculera l'aire du trapèze curviligne formé par la courbe $y = f(x)$, les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe Ox au moyen de l'intégrale

$$Q = \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

Démontrons l'important théorème suivant.

Théorème 1. Si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle est intégrable sur ce segment.

Démonstration. Partitionnons de nouveau le segment $[a, b]$ ($a < b$) en segments $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Formons les sommes intégrales inférieure et supérieure :

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (9)$$

$$\bar{s}_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (10)$$

Etablissons maintenant quelques propriétés des sommes intégrales inférieures et supérieures.

Propriété 1. Quand on augmente le nombre des segments figurant dans la partition du segment $[a, b]$ en ajoutant de nouveaux points de division, la somme intégrale inférieure ne peut qu'augmenter, et la somme intégrale supérieure ne peut que diminuer.

Démonstration. Supposons que le segment $[a, b]$ soit partitionné en n' segments en ajoutant de nouveaux points ($n' > n$). Si un segment quelconque $[x_{k-1}, x_k]$ sera partitionné en plusieurs segments, par exemple en p_k segments, alors dans la nouvelle somme intégrale inférieure $\underline{s}_{n'}$ au segment $[x_{k-1}, x_k]$ correspondra une somme de p_k termes, que nous noterons $\bar{s}_{p_k}^*$. Dans la somme $\underline{s}_n$ à ce segment correspond un seul terme $m_k (x_k - x_{k-1})$. Or pour la somme $\bar{s}_{p_k}^*$ et la grandeur $m_k (x_k - x_{k-1})$ on a une inégalité analogue à l'inégalité (4) § 1. Nous pouvons écrire :

$$\bar{s}_{p_k}^* \geq m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Ecrivant les inégalités correspondantes pour chaque segment et sommant les termes à gauche et à droite nous obtenons :

$$\underline{s}_{n'} \geq \underline{s}_n \quad (n' > n). \quad (11)$$

La propriété 1 est démontrée.

Propriété 2. La somme intégrale inférieure (9) et la somme intégrale supérieure (10) tendent, quand le nombre des segments augmente indéfiniment du fait de l'adjonction de nouveaux points de division, vers certaines limites $\underline{s}$ et $\bar{s}$.

Démonstration. Nous pouvons écrire à l'appui de l'inégalité (6) § 1 :

$$\underline{s}_n \leq M (b - a),$$

autrement dit $\underline{s}_n$ est bornée pour tous les n . En vertu de la propriété 1 $\underline{s}_n$ est monotone croissante quand n croît. Par conséquent en vertu du théorème 7 sur les limites (cf. § 5 ch. II) cette grandeur

variable possède une limite: désignons-la par $\underline{s}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}_n = \underline{s}. \quad (12)$$

On établit de même, que $\bar{s}_n$ est bornée supérieurement et monotone décroissante. Par conséquent, $\bar{s}_n$ possède une limite, que nous désignerons par $\bar{s}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \bar{s}.$$

Propriété 3. Si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment fermé $[a, b]$, alors les limites $\underline{s}$ et $\bar{s}$ définies dans la propriété 2 sont égales, à condition que $\max \Delta x_i \rightarrow 0$.

Désignons cette limite commune par s :

$$\underline{s} = \bar{s} = s. \quad (13)$$

Démonstration. Considérons la différence des sommes intégrales supérieure et inférieure:

$$\begin{aligned} \bar{s}_n - \underline{s}_n &= (M_1 - m_1) \Delta x_1 + (M_2 - m_2) \Delta x_2 + \dots \\ &\dots + (M_i - m_i) \Delta x_i + \dots + (M_n - m_n) \Delta x_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Désignons par ε_n la plus grande des différences $(M_i - m_i)$ pour n'importe quelle partition

$$\varepsilon_n = \max (M_i - m_i)$$

On peut démontrer (mais nous ne nous y arrêtons pas), que si la fonction $f(x)$ est continue sur un segment fermé, alors pour toute partition du segment $[a, b]$ $\varepsilon_n \rightarrow 0$, si seulement $\max \Delta x_i \rightarrow 0$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \varepsilon_n = 0 \quad (15)$$

La propriété d'une fonction continue sur un segment fermé qu'elle prime l'égalité (15) est appelée la *continuité uniforme* de la fonction.

Nous utiliserons ainsi le théorème: Une fonction continue sur un intervalle fermé est uniformément continue sur cet intervalle.

Revenons à l'égalité (14). Remplaçons chaque différence $(M_i - m_i)$ dans le second membre par la grandeur non inférieure ε_n . Nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} \bar{s}_n - \underline{s}_n &\leq \varepsilon_n \Delta x_1 + \varepsilon_n \Delta x_2 + \dots + \varepsilon_n \Delta x_n = \\ &= \varepsilon_n (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = \varepsilon_n (b - a). \end{aligned}$$

Passant à la limite quand $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) nous obtenons:

$$\begin{aligned} \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\bar{s}_n - \underline{s}_n) &\leq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \varepsilon_n (b - a) = \\ &= (b - a) \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \varepsilon_n = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

c'est-à-dire

$$\lim \bar{s}_n = \lim \underline{s}_n = s \quad (17)$$

ou

$$\underline{s} = \bar{s} = s, \text{ c.q.f.d.}$$

Propriété 4. Soient $\bar{s}_{n_1}$ et $\bar{s}_{n_2}$ les sommes intégrales inférieure et supérieure correspondant aux partitions du segment $[a, b]$ respectivement en n_1 et en n_2 segments. On a alors l'inégalité

$$\bar{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2} \quad (18)$$

pour tous n_1 et n_2 .

Démonstration. Considérons la partition du segment $[a, b]$ en $n_3 = n_1 + n_2$ segments, où les points de division sont les points de division de la première et de la seconde partition.

Nous avons alors en vertu de l'inégalité (3) § 1:

$$\bar{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_2}. \quad (19)$$

Nous avons en vertu de la propriété 1:

$$\bar{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_3}, \quad (20)$$

$$\bar{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_2}. \quad (21)$$

Utilisant les relations (20) et (21) nous pouvons élargir l'inégalité (19)

$$\bar{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_3} \leq \bar{s}_{n_2} \leq \bar{s}_{n_2}$$

ou

$$\bar{s}_{n_1} \leq \bar{s}_{n_2}$$

c.q.f.d.

Propriété 5. Si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$, alors pour n'importe quelle suite de partitions du segment $[a, b]$ en segments $[x_{i-1}, x_i]$, réalisée non nécessairement en ajoutant de nouveaux points de division, si seulement $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ la somme intégrale inférieure $\bar{s}_n$ et la somme intégrale supérieure $\bar{s}_n$ tendent vers la limite s définie dans la propriété 3.

Démonstration. Considérons la suite des partitions de la suite des sommes intégrales supérieures $\bar{s}_n$, définies dans la propriété 2. Pour toutes valeurs de n et m (en vertu de l'inégalité (18))

nous pouvons écrire :

$$\underline{s}_m^* \leq \underline{s}_n.$$

Passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, nous aurons en vertu de (15)

$$\underline{s}_m^* \leq s.$$

Nous démontrerons de même que $s \leq \underline{s}_m^*$.

Ainsi,

$$\underline{s}_m^* \leq s \leq \underline{s}_m^*,$$

ou

$$s - \underline{s}_m^* \geq 0, \quad \underline{s}_m^* - s \geq 0. \quad (22)$$

Considérons la limite de la différence

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\underline{s}_m^* - \underline{s}_m^*).$$

Comme la fonction $f(x)$ est continue sur le segment fermé $[a, b]$, démontrons (de même que nous l'avons fait pour établir la propriété 3) que (cf. égalité (16))

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\underline{s}_m^* - \underline{s}_m^*) = 0.$$

Ecrivons ainsi cette dernière relation

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [(\underline{s}_m^* - s) + (s - \underline{s}_m^*)] = 0.$$

En vertu de (22) chacune des différences figurant entre crochets est non négative. Par conséquent,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (\underline{s}_m^* - s) = 0, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} (s - \underline{s}_m^*) = 0.$$

Et nous obtenons en définitive

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \underline{s}_m^* = s, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \underline{s}_m^* = s, \quad (23)$$

c.q.f.d.

On peut maintenant démontrer et énoncer le théorème. Soit $f(x)$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Considérons une suite arbitraire de sommes intégrales

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

telle que $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, ξ_i est un point arbitraire du segment $[x_{i-1}, x_i]$.

Considérons pour la suite donnée de partitions les suites correspondantes des sommes intégrales inférieures et supérieures $\underline{s}_n$ et

$\underline{s}_n$. Pour chaque partition on aura les relations (2)

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \bar{s}_n.$$

Passant à la limite pour $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ et utilisant les égalités (23) et le théorème 4 § 5, ch. II, nous obtenons :

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} s_n = s,$$

où s est la limite définie dans la propriété 3.

Cette limite, comme nous l'avons dit plus haut, est appelée intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$. Ainsi, si la fonction $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$, alors

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (24)$$

Notons que parmi les fonctions discontinues il existe aussi bien des fonctions intégrables que des fonctions non intégrables.

Remarque 1. Notons que l'intégrale définie dépend seulement de la fonction $y = f(x)$ et des bornes d'intégration, mais non de la variable d'intégration, qu'il est loisible de désigner par n'importe quelle lettre. On pourra donc, sans changer la valeur de l'intégrale définie, remplacer la lettre x par n'importe quelle autre lettre :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 2. Lorsque nous avons introduit la notion d'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$, nous avons supposé $a < b$. Si $b < a$, on prendra par définition

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (25)$$

Ainsi,

$$\int_0^1 x^2 dx = - \int_1^0 x^2 dx.$$

Remarque 3. Enfin, si $a = b$, on posera par définition :
t i o n pour toute fonction $f(x)$

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (26)$$

Ceci est naturel du point de vue géométrique. En effet, la longueur de la base du trapèze curviligne est nulle, et donc son aire aussi.

Exemple 1. Calculer l'intégrale

$$\int_a^b kx \, dx \quad (b > a).$$

Solution. Géométriquement, le problème revient à calculer l'aire Q du trapèze formé par les droites $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 215). La fonction $y = kx$ sous le signe somme est continue. Par conséquent, il nous est permis dans le calcul de l'intégrale définie, comme on l'a noté plus haut, de découper le segment $[a, b]$ arbitrairement et de choisir des ξ_k intermédiaires arbitraires. Le résultat du calcul ne dépend pas du procédé de construction de la somme intégrale, pourvu que le plus grand des segments partiels tende vers zéro.

Partageons le segment $[a, b]$ en n parties égales.

La longueur Δx de chaque segment est $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, qu'on appelle « pas » de la division. Les

abscisses des points de division sont :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \\ x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_n = a + n\Delta x.$$

Prenons pour points ξ_k les extrémités gauches de chaque segment

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = a + \Delta x, \quad \xi_3 = a + 2\Delta x, \dots, \\ \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$

Formons la somme intégrale (1). On déduit de $f(\xi_k) = k\xi_k$

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \dots + k\xi_n\Delta x = \\ &= ka\Delta x + [k(a + \Delta x)]\Delta x + \dots + \{k[a + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{a + (a + \Delta x) + (a + 2\Delta x) + \dots + [a + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \dots + (n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na + [1 + 2 + \dots + (n-1)]\Delta x\}\Delta x, \end{aligned}$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Etant donné que

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(la somme d'une progression arithmétique),

$$s_n = k \left[na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} = k \left[a + \frac{n-1}{n} \frac{b-a}{2} \right] (b-a).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = k \left[a + \frac{b-a}{2} \right] (b-a) = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_a^b kx \, dx = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Le calcul de l'aire $ABba$ (fig. 215) en géométrie élémentaire est trivial. Le résultat est le même.

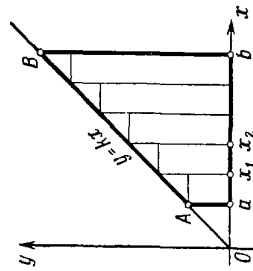


Fig. 215

Exemple 2. Calculer $\int_0^b x^2 \, dx$.

Solution. L'intégrale donnée est égale à l'aire Q du trapèze curviligne formé par la parabole $y = x^2$, les droites $x = b$ et $y = 0$ (fig. 216). Découpons le segment $[0, b]$ en n parties égales par les points :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \dots, x_n = b = n\Delta x, \\ \Delta x = \frac{b}{n}.$$

Prenons pour ξ_i les extrémités droites des segments.

Formons la somme intégrale :

$$\begin{aligned} s_n &= x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \dots + x_n^2\Delta x = \\ &= [(\Delta x)^2\Delta x + (2\Delta x)^2\Delta x + \dots + (n\Delta x)^2\Delta x] = \\ &= (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]. \end{aligned}$$

Comme on sait

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donc

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = \int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}.$$

Fig. 216

Exemple 3. Calculer $\int_a^b m \, dx$ ($m = \text{const}$).

Solution.

$$\begin{aligned} \int_a^b m \, dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \\ &= m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a). \end{aligned}$$

Ici $\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ est la somme des longueurs des segments partiels constituant le segment $[a, b]$. Quel que soit le découpage, cette somme est égale à la longueur du segment $b-a$.

Exemple 4. Calculer $\int_a^b e^x \, dx$.

Solution. Divisons de nouveau le segment $[a, b]$ en n parties égales :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \dots, x_n = a + n\Delta x; \\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Prenons pour points ξ_i les extrémités gauches. Formons la somme intégrale :

$$\begin{aligned} s_n &= e^a \Delta x + e^{a+\Delta x} \Delta x + \dots + e^{a+(n-1)\Delta x} \Delta x = \\ &= e^a (1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}) \Delta x. \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est une progression géométrique de raison $e^{\Delta x}$ et de premier terme 1, donc,

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

On a ensuite :

$$n\Delta x = b - a; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$$

(D'après la règle de L'Hospital, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1$.) Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

R e m a r q u e 4. Les exemples traités montrent que le calcul des intégrales définies en tant que limites de sommes intégrales est sujet à des difficultés considérables. Même quand les fonctions à intégrer sont très simples (kx , x^2 , e^x), ce procédé exige des calculs fastidieux. Les calculs deviennent inextricables quand il s'agit de fonctions plus compliquées. Il est donc naturel de chercher une méthode pratique de calcul des intégrales définies. Cette méthode, due à Newton et à Leibniz, utilise le lien profond entre l'intégration et la dérivation. Les paragraphes suivants du présent chapitre ont pour objet l'exposé des fondements de cette méthode.

§ 3. Propriétés fondamentales de l'intégrale définie

P r o p r i é t é 1. On peut sortir un facteur constant de sous le signe somme : si $A = \text{const.}$,

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

D é m o n s t r a t i o n.

$$\begin{aligned} \int_a^b A f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= A \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = A \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

P r o p r i é t é 2. L'intégrale définie de la somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales des fonctions. Ainsi, dans le cas de deux fonctions

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad (2)$$

D é m o n s t r a t i o n.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)] \Delta x_i = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i \right] = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

La démonstration est valable pour un nombre arbitraire de fonctions.

Les propriétés 1 et 2, démontrées pour les cas $a < b$, subsistent pour $a \geq b$.

Cependant, la propriété suivante n'a lieu que pour $a < b$:

P r o p r i é t é 3. Si sur le segment $[a, b]$, ($a < b$), les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ satisfont à la condition $f(x) \leq \varphi(x)$, on a

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (3)$$

D é m o n s t r a t i o n. Considérons la différence

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx = \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)] \Delta x_i. \end{aligned}$$

On a $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i \geq 0$. Donc, chacun des termes est positif ou nul, il en est de même de la somme et de sa limite :

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)] dx \geq 0$$

ou

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

d'où l'on déduit l'inégalité (3).

Si $f(x) > 0$ et $\varphi(x) > 0$, la fig. 217 donne une illustration géométrique de cette propriété. Il résulte de $\varphi(x) \geq f(x)$ que l'aire du trapèze curviligne aA_1B_1b n'est pas supérieure à celle du trapèze aA_2B_2b .

Propriété 4. m et M étant respectivement la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et $a \leq b$, on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (4)$$

Démonstration. On a par hypothèse $m \leq f(x) \leq M$.

On déduit de la propriété (3) :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx. \quad (4')$$

Or,

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a)$$

(voir exemple 3, § 2, ch. XI). Substituant ces expressions dans l'inégalité (4'), on obtient l'inégalité (4).

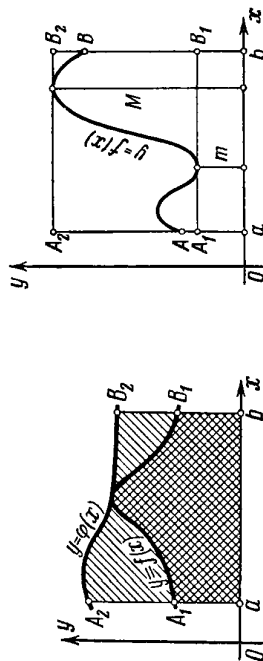


Fig. 217

Lorsque $f(x) \geq 0$, cette condition est illustrée géométriquement par la fig. 218 : l'aire du trapèze curviligne $aABb$ est comprise entre les aires des rectangles aA_1B_1b et aA_2B_2b .

Propriété 5 (Théorème de la moyenne). La fonction $f(x)$ étant continue sur le segment $[a, b]$, il existe sur ce segment un point ξ tel que l'on a :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi). \quad (5)$$

Démonstration. Soit, pour fixer les idées, $a < b$. Si m et M sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ sur $[a, b]$, on a, en vertu de la formule (4),

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

D'où

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu, \quad \text{où } m \leq \mu \leq M.$$

$f(x)$ étant continue, elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M . On aura donc pour une certaine valeur ξ ($a \leq \xi \leq b$) $\mu = f(\xi)$, soit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Propriété 6. a, b, c étant trois nombres arbitraires, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (6)$$

pourvu que ces trois intégrales existent.

Démonstration. Supposons d'abord que $a < c < b$ et formons la somme intégrale pour la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$.

Étant donné que la limite des sommes intégrales ne dépend pas du mode de découpage de $[a, b]$, nous découperons $[a, b]$ en segments partiels de sorte que c soit un point de division. Décomposons ensuite la somme intégrale $\sum_a^b$, correspondant au segment $[a, b]$, en deux sommes $\sum_a^c$ et $\sum_c^b$ correspondant respectivement aux segments $[a, c]$ et $[c, b]$. On a dans ces conditions

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Passant à la limite quand $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, on obtient la relation (6).

Si $a < b < c$, on peut écrire, en vertu de ce qui précède :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

ou

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx;$$

mais, en vertu de la formule (4) du § 2 :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

par conséquent

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

On démontre d'une manière analogue cette propriété pour un agencement quelconque des points a , b et c .

La fig. 219 illustre la propriété 6 dans le cas où $f(x) > 0$ et $a < c < b$: l'aire du trapèze $aABb$ est la somme des aires des trapèzes $aACc$ et $cCBb$.

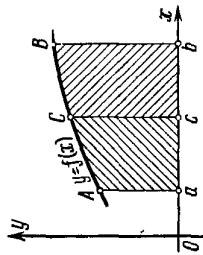


Fig. 219

§ 4. Calcul de l'intégrale définie. Formule de Newton-Leibniz

Dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

fixons la borne inférieure a et faisons varier la borne supérieure b . La valeur de l'intégrale variera en conséquence, c'est-à-dire que l'intégrale sera une fonction de sa borne supérieure.

Désignons la borne supérieure par x pour revenir à des notations familières et, pour éviter toute confusion, désignons la variable d'intégration par t . (La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la désignation de la variable d'intégration.) On a l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$. a étant constant, cette intégrale est une fonction de sa borne supérieure x . Soit $\Phi(x)$ cette fonction :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

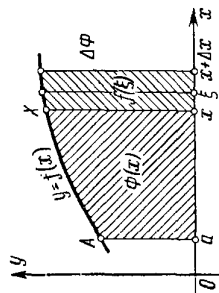


Fig. 220

Si la fonction $f(t)$ est non négative, $\Phi(x)$ est numériquement égale à l'aire du trapèze $aAXx$ (fig. 220). Il est évident que cette aire varie avec x .

Trouvons la dérivée de $\Phi(x)$ par rapport à x , c'est-à-dire la dérivée de l'intégrale (1) par rapport à sa borne supérieure.

Théorème 1. $f(x)$ étant une fonction continue et si l'on pose

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

En d'autres termes, la dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est égale à la fonction sous le signe somme dans laquelle la variable d'intégration a été remplacée par la valeur de la borne supérieure (sous la condition que la fonction sous le signe somme soit continue).

Démonstration. Donnons à la variable x un accroissement arbitraire Δx positif ou négatif; on a (compte tenu de la propriété 6 de l'intégrale définie) :

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

L'accroissement de la fonction $\Phi(x)$ est égal à

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt, \end{aligned}$$

soit

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Appliquons à cette dernière intégrale le théorème de la moyenne (propriété 5)

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

où ξ est compris entre x et $x + \Delta x$.

Formons le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Par conséquent,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi).$$

Mais comme $\xi \rightarrow x$ quand $\Delta x \rightarrow 0$, on a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi),$$

et comme $f(x)$ est continue

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

On a donc $\Phi'(x) = f(x)$ et le théorème est démontré.

Ce théorème admet une illustration géométrique simple (fig. 220) : l'accroissement $\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x$ est égal à l'aire du trapèze curviligne de base Δx et la dérivée $\Phi'(x) = f(x)$ est égale à la longueur du segment xX .

R e m a r q u e. Il résulte notamment du théorème démontré que toute fonction continue admet une primitive. En effet, si la fonction $f(t)$ est continue sur le segment $[a, x]$, comme il a été indiqué au § 2, chap. XI, l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ existe, c'est-à-dire qu'il existe la fonction

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

qui est, comme on l'a démontré ci-dessus, une primitive de $f(x)$.

T h é o r è m e 2. $F(x)$ étant une primitive de la fonction continue $f(x)$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Cette formule est appelée la formule de Newton-Leibniz *).

D é m o n s t r a t i o n. Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$. D'après le théorème 1, la fonction $\int_a^x f(t) dt$ est aussi une primitive de $f(x)$. Or, deux primitives arbitraires d'une fonction donnée se distinguent par une constante C^* . On peut écrire, par conséquent,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C^*. \quad (3)$$

C^* étant adéquatement choisi, cette égalité est vraie pour tous les x , c'est donc une identité. Pour déterminer la constante C^* , posons dans cette identité $x = a$; alors

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C^*,$$

ou

$$0 = F(a) + C^*,$$

donc

$$C^* = -F(a).$$

*) Notons que cette appellation de la formule (2) est conventionnelle, car ni Newton ni Leibniz n'ont donné explicitement cette formule. Mais il est important de souligner que ce sont précisément Leibniz et Newton qui, les premiers, ont établi le lien entre l'intégration et la dérivation ayant permis d'énoncer une règle de calcul des intégrales définies.

Par conséquent,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Posant $x = b$, on obtient la formule de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

ou, en revenant à la variable d'intégration x ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Notons que la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F , car toutes les primitives se distinguent les unes des autres par une constante qui disparaît dans la soustraction. Introduisant la notation *)

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b,$$

on peut mettre la formule (2) sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

La formule de Newton-Leibniz fournit un moyen de calcul pratique des intégrales définies quand on connaît une primitive de la fonction à intégrer. C'est la découverte de cette formule qui a conféré à l'intégrale définie la portée qu'elle a aujourd'hui en mathématiques. Bien qu'un processus analogue au calcul de l'intégrale définie en tant que limite d'une somme intégrale fût déjà connu dans l'Antiquité (Archimède), les applications de cette méthode étaient limitées toutefois aux cas les plus simples où la limite de la somme intégrale pouvait être calculée directement. La formule de Newton-Leibniz a considérablement étendu le domaine d'application de l'intégrale définie, les mathématiques ayant reçu une méthode générale permettant de résoudre différents problèmes particuliers, et il en est résulté un élargissement considérable de la sphère des applications de l'intégrale définie en technique, en mécanique, en astronomie, etc.

*) On utilise les deux transcriptions équivalentes

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

et

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Nous utiliserons par la suite indifféremment l'une ou l'autre transcription.

Exemple 1.

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Exemple 2

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Exemple 3.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

Exemple 4.

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a.$$

Exemple 5.

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Exemple 6.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

§ 5. Changement de variable dans une intégrale définie

Théorème. Soit donnée l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx,$$

où $f(x)$ est continue sur le segment $[a, b]$.Introduisons la nouvelle variable t par la formule

$$x = \varphi(t).$$

Si

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,2) $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ sont continues sur le segment $[\alpha, \beta]$,3) $f[\varphi(t)]$ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Démonstration. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, on peut écrire les égalités suivantes:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C \quad (3)$$

dont on vérifie la légitimité en dérivant les deux membres par rapport à t . (Elle résulte aussi de la formule (2), § 4, chap. X.) On

dérivé de l'égalité (2):

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

et de l'égalité (3):

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Les seconds membres de ces égalités sont égaux et, par conséquent, les premiers le sont aussi, c.q.f.d.

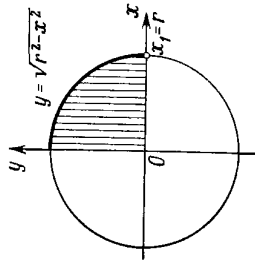


Fig. 221

Remarque. Dans le calcul de l'intégrale définie par application de la formule (1) nous ne revenons pas à l'ancienne variable. Les valeurs numériques des deux intégrales de l'égalité (1) sont égales.

Exemple. Calculer l'intégrale

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Solution. Faisons le changement de variable:

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt.$$

Déterminons les nouvelles limites:

$$x = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

$$x = r \quad \text{pour} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

Géométriquement, nous avons calculé l'aire du quart de cercle $x^2 + y^2 = r^2$ (fig. 221).

§ 6. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de x dérivables. On a

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Intégrons les deux membres de cette identité de a à b , on obtient :

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx. \quad (1)$$

Étant donné que $\int (uv)' dx = uv + C$, on a $\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$; on peut donc écrire l'égalité (1) sous la forme

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv,$$

ou, en définitive,

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Ex e m p l e. Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \underbrace{d \cos x}_{du} \\ &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Avec les notations choisies, on peut recopier la dernière égalité sous la forme

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

d'où l'on trouve :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (2)$$

On trouve de même :

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

et donc

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot I_{n-4}.$$

En continuant ainsi, on arrive jusqu'à I_0 ou I_1 , selon la parité de n . Examinons les deux cas :

1) n est pair, $n=2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0.$$

2) n est impair, $n=2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1,$$

mais

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

donc,

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

De ces deux formules résulte la formule de Wallis, qui exprime $\frac{\pi}{2}$ sous forme de produit infini.

En effet, on déduit de ces deux dernières formules en divisant membre à membre :

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \quad (3)$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

On a quel que soit x dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x.$$

Intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$I_{2m-1} > I_{2m} > I_{2m+1},$$

d'où

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geq 1. \quad (4)$$

Il résulte de l'égalité (2)

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

On déduit de l'inégalité (4) :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Passant à la limite dans (3), on obtient la *formule de Wallis* :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

On peut recopier cette formule sous la forme :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \right).$$

§ 7. Intégrales impropres

1. Intégrales avec des bornes infinies.
Soit $f(x)$ une fonction définie et continue pour tous les x tels que

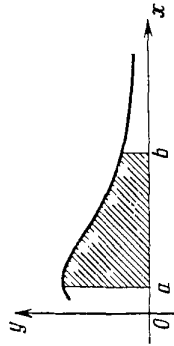


Fig. 222

$a \leq x < +\infty$. Considérons l'intégrale

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Cette intégrale a un sens pour tout $b > a$. Quand b varie, l'intégrale varie, elle est une fonction continue de b (voir § 4, ch. XI). Étudions le comportement de cette intégrale lorsque $b \rightarrow +\infty$ (fig. 222).

Définition. Lorsque la limite suivante

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

existe, et cette limite est appelée *intégrale impropre* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, +\infty]$, on la représente par

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

On a, par définition,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

On dit encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existe ou converge *). Si

$\int_a^b f(x) dx$ n'a pas de limite finie lorsque $b \rightarrow +\infty$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ n'existe pas ou diverge.

Il est facile de voir quel est le sens géométrique de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ lorsque $f(x) \geq 0$: si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente

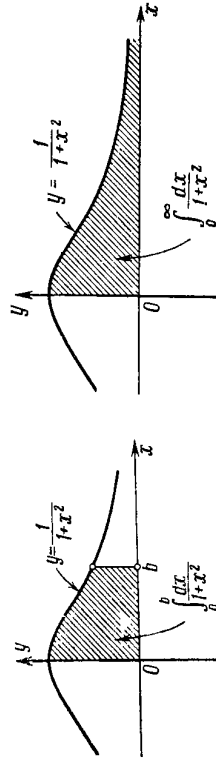


Fig. 223

Fig. 224

l'aire du domaine délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $x = b$, il est naturel de dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ exprime l'aire du domaine infini compris entre les courbes $y = f(x)$, $x = a$ et l'axe des x .

On définit d'une manière analogue les intégrales dans d'autres intervalles infinis :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^a f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

*) On l'appelle aussi parfois *intégrale impropre*.

Cette dernière égalité doit être comprise comme suit : si chacune des intégrales du second membre existe, on dira que l'intégrale du premier membre existe (converge).

Exemple 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (voir fig. 223 et 224).

Solution. On a, par définition,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan x \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale considérée exprime l'aire du domaine infini hachuré sur la fig. 224.

Exemple 2. Discuter les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge ou diverge (fig. 225).

Solution. Etant donné que (pour $\alpha \neq 1$)

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} [b^{1-\alpha} - 1],$$

on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

Par conséquent,

$$\text{si } \alpha > 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \text{l'intégrale converge ;}$$

$$\text{si } \alpha < 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty, \quad \text{l'intégrale diverge.}$$

$$\text{Lorsque } \alpha = 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \log x \Big|_1^{+\infty} = \infty, \quad \text{l'intégrale diverge.}$$

Exemple 3. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solution.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

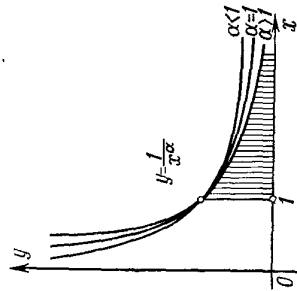


Fig. 225

La seconde intégrale est égale à $\frac{\pi}{2}$ (voir exemple 1). Calculons la première intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[\arctan x \right]_{\alpha}^0 = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan \alpha) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Dans beaucoup de cas, il suffit d'établir que l'intégrale donnée converge ou diverge et d'évaluer sa valeur. Il est utile de se reporter à cet effet aux théorèmes suivants que nous nous bornerons d'énoncer et dont nous montrerons les applications sur des exemples.

Théorème 1. Si, quel que soit x ($x \geq a$), on a l'inégalité

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

et si $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge aussi et

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Exemple 4. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Solution. Remarquons que pour $1 \leq x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}.$$

Ensuite,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Donc,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

converge et est inférieure à l'unité.

Théorème 2. Si, quel que soit x ($x \geq a$), on a l'inégalité $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ et si $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ diverge, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge aussi.

Exemple 5. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx.$$

On remarque que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty.$$

Par conséquent, l'intégrale donnée diverge.

Les deux théorèmes précédents concernaient des intégrales à domaines d'intégration infinis, la fonction sous le signe somme étant non négative. Lorsqu'on intègre dans un domaine infini une fonction $f(x)$ à signe variable, on a le théorème suivant.

Théorème 3. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, il en est de même de $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

On dit alors que cette dernière intégrale est *absolument convergente*.

Exemple 6. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

Solution. Ici, la fonction à intégrer est à signe variable. On a

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|. \quad \text{Mais} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ converge. Il en résulte la convergence de l'intégrale donnée.

2. **Intégrale d'une fonction discontinue.** Soit $f(x)$ une fonction définie et continue lorsque $a \leq x < c$, la fonction n'étant pas définie au point $x = c$, ou bien encore ayant une discontinuité. On ne peut définir alors $\int_a^c f(x) dx$ comme limite de sommes intégrales, $f(x)$ n'étant pas continue sur le segment $[a, c]$ et cette limite pouvant ne pas exister.

On définit comme suit l'intégrale $\int_a^c f(x) dx$ d'une fonction $f(x)$ discontinue au point c :

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx.$$

Cette intégrale est dite *convergente* lorsque la limite du second membre existe, et *divergente* dans le cas contraire.

Si la fonction $f(x)$ a une discontinuité à l'extrémité gauche du segment $[a, c]$ (c'est-à-dire pour $x = a$), on pose, par définition,

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx.$$

Si $f(x)$ a une discontinuité en un point $x = x_0$ à l'intérieur du segment $[a, c]$, on pose

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx,$$

lorsque les deux intégrales du second membre existent.

Exemple 7. Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Solution.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b \rightarrow 1-0} 2\sqrt{1-x} \Big|_0^b = \\ &= -\lim_{b \rightarrow 1-0} 2[\sqrt{1-b}-1] = 2 \end{aligned}$$

Exemple 8. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solution. La fonction sous le signe somme ayant une discontinuité au point $x=0$, on décomposera l'intégrale en deux :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon_2} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculons chaque limite séparément :

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon_1}^1 = -\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty.$$

Par conséquent, l'intégrale diverge dans l'intervalle $[-1, 0]$:

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$

Donc, l'intégrale diverge également dans l'intervalle $[0, 1]$.

On voit que l'intégrale donnée diverge sur le segment $[-1, 1]$. Si l'on avait intégré en omettant la discontinuité au point $x=0$, on aurait obtenu un résultat erroné. En effet,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2,$$

ce qui est évidemment faux (fig. 226).

Remarque. Si la fonction $f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ possède sur ce segment des discontinuités en nombre fini aux points $a_1, a_2, \dots, a_n$, on définit l'intégrale de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ comme suit:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

si chacune des intégrales de droite converge.

Si l'une quelconque de ces intégrales diverge, alors $\int_a^b f(x) dx$ est dite divergente.

Pour déterminer la convergence des intégrales des fonctions discontinues et évaluer leurs valeurs, il est souvent possible d'utiliser des théorèmes analogues aux théorèmes sur les intégrales avec des bornes infinies.

Théorème 1'. Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont discontinues au point c du segment $[a, c]$, si l'on a en chaque point de ce segment l'inégalité

$$\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$$

et si $\int_a^c \varphi(x) dx$ converge, il en est de même de $\int_a^c f(x) dx$.

Théorème 2'. Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont discontinues au point c du segment $[a, c]$, si l'on a en chaque point de ce segment

$$f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$$

et si $\int_a^c \varphi(x) dx$ diverge, il en est de même de $\int_a^c f(x) dx$.

Théorème 3'. Si la fonction $f(x)$ est de signe variable sur le segment $[a, c]$, si elle est discontinue seulement au point c et si l'intégrale

grale $\int_a^c |f(x)| dx$ de la valeur absolue de cette fonction converge, il en est de même de $\int_a^c f(x) dx$.

Souvent on prend $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$ comme fonction de comparaison.

Il est facile de voir que $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^\alpha} dx$ converge pour $\alpha < 1$, diverge pour $\alpha \geq 1$.

Ceci concerne également les intégrales $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$.

Exemple 9. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$ converge-t-elle?

Solution. La fonction à intégrer est discontinue à l'extrémité gauche du segment $[0, 1]$. On obtient, en la comparant à la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ existe. Il en résulte que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$, l'intégrale de la fonction donnée, qui est plus petite, existe aussi.

§ 8. Calcul approché des intégrales définies

Nous avons indiqué à la fin du chapitre X que la primitive d'une fonction continue arbitraire peut ne pas s'exprimer au moyen de fonctions élémentaires. Le calcul des intégrales définies par application de la formule de Newton-Leibniz est alors difficile et on a recouru à diverses méthodes de calcul approché. Nous allons exposer maintenant plusieurs méthodes d'intégration approchée, en partant de la notion d'intégrale définie comme limite d'une somme.

1. Formule des rectangles. Soit donnée sur le segment $[a, b]$ une fonction continue $y = f(x)$. On se propose de calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Découpons le segment $[a, b]$ par les points $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ en n parties égales de longueur Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Désignons ensuite par $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ les valeurs de la fonction aux points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, soit :

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad \dots; \quad y_n = f(x_n).$$

Formons les sommes

$$y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x,$$

$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x.$$

Chacune de ces sommes est une somme intégrale pour la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ et, par conséquent, représente approximativement l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (1')$$

Ce sont les *formules des rectangles*. Il résulte de la fig. 227 que si $f(x)$ est une fonction positive croissante, la formule (1) représente l'aire

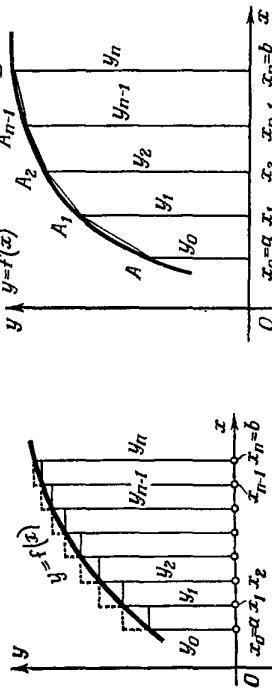


Fig. 227

des rectangles se trouvant sous la courbe $y = f(x)$ et (1') l'aire des rectangles empiétant sur la courbe.

L'erreur commise en calculant l'intégrale selon la formule des rectangles est d'autant plus petite que n est plus grand (c'est-à-dire que les segments partiels $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ sont plus petits).

II. *Formule des trapèzes*. Il est naturel d'espérer une valeur plus exacte de l'intégrale définie si l'on remplace la courbe donnée $y = f(x)$ non par une courbe en escalier, comme pour la formule des rectangles, mais par une ligne brisée inscrite (fig. 228). On prend alors au lieu de l'aire du trapèze curviligne

$aABb$ la somme des aires de trapèzes rectangles dont les cordes $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ figurent parmi les côtés. Les aires de ces trapèzes étant successivement $\frac{y_0+y_1}{2} \Delta x, \frac{y_1+y_2}{2} \Delta x$, etc., on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \left(\frac{y_0+y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1+y_2}{2} \Delta x + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \Delta x \right), \end{aligned}$$

ou

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (2)$$

C'est la formule des trapèzes.

Le nombre n est pris arbitrairement. Plus n est grand et plus les segments partiels $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ sont petits, plus précise est l'approximation fournie par l'expression du second membre de l'égalité approchée (2).

III. *Formule des paraboles* (formule de Simpson). Partageons le segment $[a, b]$ en un nombre pair $n = 2m$ de parties égales. Remplaçons l'aire du trapèze curviligne correspondant aux deux premiers segments $[x_0, x_1]$ et $[x_1, x_2]$ et délimité supérieurement par la courbe donnée $y = f(x)$ par celle d'un trapèze curviligne semblable délimité par une parabole du second degré passant par les trois points :

$$M(x_0, y_0); \quad M_1(x_1, y_1); \quad M_2(x_2, y_2),$$

et dont l'axe est parallèle à l'axe Oy (fig. 229). Nous appellerons un tel trapèze un trapèze *parabolique*.

L'équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe Oy s'écrit

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

On détermine les coefficients A, B, C univoquement de la condition que la parabole passe par les trois points donnés. On construit des paraboles analogues pour les autres paires de segments. La somme des aires des trapèzes paraboliques fournira une valeur approchée de l'intégrale.

Calculons d'abord l'aire d'un trapèze parabolique.

Tchébychev a posé le problème inverse : se donner non pas les abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$, mais les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ et déterminer les abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On prend les coefficients C_i de manière que la formule (3) soit la plus simple possible pour les calculs. Il en est évidemment ainsi quand tous les C_i sont égaux :

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n.$$

Désignant la valeur commune des coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ par C_n , la formule (3) devient

$$\int_a^b f(x) dx \approx C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]. \quad (5)$$

La formule (5) représente, en général, une égalité *approchée*, mais si $f(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à $n-1$, on a alors une égalité *exacte*. C'est cette circonstance qui permet de déterminer les quantités $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Afin d'obtenir une formule qui convienne à tout intervalle d'intégration, ramenons le segment d'intégration $[a, b]$ au segment $[-1, 1]$. Posons à cet effet

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t;$$

on aura alors $x = a$ pour $t = -1$ et $x = b$ pour $t = 1$.

Par conséquent,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt,$$

où l'on a désigné par $\varphi(t)$ la fonction de t sous le signe somme. Par conséquent, l'intégration d'une fonction $f(x)$ donnée sur un segment $[a, b]$ peut toujours être ramenée à l'intégration d'une autre fonction $\varphi(x)$ sur le segment $[-1, 1]$.

Ainsi, le problème revient à choisir les nombres $C_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la formule

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (6)$$

de manière que cette formule soit exacte pour toute fonction $f(x)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}. \quad (7)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) dx = \\ &= \begin{cases} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}\right) & \text{si } n \text{ est impair;} \\ 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-2}}{n-1}\right) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

Par ailleurs, compte tenu de (7), la somme du second membre de l'égalité (6) est égale à

$$\begin{aligned} C_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots \\ + \dots + x_n^2) + \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})]. \quad (9) \end{aligned}$$

Egalant les expressions (8) et (9), on obtient une égalité qui doit être vraie quels que soient $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$:

$$\begin{aligned} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \dots\right) &= \\ &= C_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \\ &\quad + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \dots \\ &\quad + \dots + a_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})]. \end{aligned}$$

Egalons les coefficients de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ dans les deux membres:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= C_n n & \text{ou } C_n &= \frac{2}{n}; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0; \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{2}{3C_n} = \frac{n}{3}; \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= 0; \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{2}{5C_n} = \frac{n}{5}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

On déduit les abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$ de ces $n-1$ dernières équations. Ces solutions ont été trouvées par Tchébychev pour diverses

valeurs de n . Nous donnons ci-dessous les solutions qu'il a trouvées lorsque le nombre de points de division n est égal à 3, 4, 5, 6, 7, 9 :

Nombre d'ordonnées n	Coefficients C_n	Valeurs des abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,941589$ $x_2 = -x_8 = 0,604019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,467906$ $x_5 = 0$

Par conséquent, on effectuera le calcul approché de l'intégrale sur le segment $[-1, 1]$ en appliquant la formule suivante de Tchébychev :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

où n est choisi dans le groupe 3, 4, 5, 6, 7, 9 et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont représentés dans le tableau. On ne peut prendre pour n le nombre 8 ou des nombres supérieurs à 9; le système d'équations (10) donne alors des racines complexes.

Lorsque les bornes d'intégration de l'intégrale donnée sont a et b , la formule de Tchébychev devient

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)],$$

où $X_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), et les x_i ont les

valeurs données dans le tableau.

Donnons un exemple de calcul par application de la formule de Tchébychev.

Exemple. Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ($= \text{Log } 2$).

Solution. Ramenons par un changement de variable le segment d'intégration au segment $[-1, 1]$:

$$x = \frac{1+t}{2} + \frac{2-1}{2} t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{2}.$$

Et

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}$$

Calculons cette dernière intégrale avec $n=3$, en appliquant la formule de Tchébychev

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{2}{3} [f(0,707107) + f(0) + f(-0,707107)].$$

Etant donné que

$$f(0,707107) = \frac{1}{3+0,707107} = \frac{1}{3,707107} = 0,269752,$$

$$f(0) = \frac{1}{3+0} = 0,333333,$$

$$f(-0,707107) = \frac{1}{3-0,707107} = \frac{1}{2,292893} = 0,436130,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t} &= \frac{2}{3} (0,269752 + 0,333333 + 0,436130) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1,039215 = 0,692810 \approx 0,693. \end{aligned}$$

Comparant ce résultat aux résultats fournis par les formules des rectangles, des trapèzes et de Simpson (voir l'exemple du paragraphe précédent), on remarque que le résultat obtenu par application de la formule de Tchébychev (avec trois points de division) est plus précis que le résultat obtenu par application de la formule des trapèzes (avec neuf points de division).

Indiquons que la théorie du calcul approché des intégrales a été développée dans les travaux de A. Krylov (1863-1945).

§ 10. Intégrales dépendant d'un paramètre.

Fonction gamma

Dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Soit l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx \quad (1)$$

dans laquelle la fonction sous le signe somme dépend d'un certain paramètre α . Si le paramètre α varie, la valeur de l'intégrale variera aussi. Il en résulte que l'intégrale définie est fonction de α ; on pourra donc la désigner par $I(\alpha)$.

1. Supposons que $f(x, \alpha)$ et $f'_\alpha(x, \alpha)$ soient des fonctions continues lorsque

$$c \leq \alpha \leq d \text{ et } a \leq x \leq b. \quad (2)$$

Trouvons la dérivée de l'intégrale par rapport à α :

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha).$$

Remarquons à cet effet que

$$\begin{aligned} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \frac{1}{\Delta\alpha} \left[\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx \right] = \\ &= \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} dx. \end{aligned}$$

Appliquons la formule des accroissements finis de Lagrange à la fonction sous le signe somme; on obtient:

$$\frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta\alpha),$$

où $0 < \theta < 1$.

Etant donné que $f'_\alpha(x, \alpha)$ est continue dans le domaine fermé (2), on a

$$f'_\alpha(x, \alpha + \theta \Delta\alpha) = f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon,$$

où la quantité ε , dépendant de $x, \alpha, \Delta\alpha$, tend vers zéro lorsque $\Delta\alpha \rightarrow 0$.

De sorte que

$$\begin{aligned} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \int_a^b [f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon] dx = \\ &= \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx + \int_a^b \varepsilon dx. \end{aligned}$$

Passant à la limite, en faisant $\Delta\alpha \rightarrow 0$, on obtient *):

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx$$

ou

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha) dx \right]_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

C'est la formule de Leibniz.

2. Supposons à présent que les bornes d'intégration a et b dans (1) soient des fonctions de α :

$$I(\alpha) = \Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx. \quad (1')$$

$\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$ est une fonction composée de α , par l'intermédiaire de a et b . Pour trouver la dérivée de $I(\alpha)$, appliquons la règle de dérivation des fonctions composées (voir § 10, ch. VIII)

$$I'(\alpha) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} \frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{db}{d\alpha}. \quad (3)$$

En vertu du théorème de dérivation d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure variable (voir formule (1), § 4), on obtient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, \alpha) dx = f[b(\alpha), \alpha],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, \alpha) dx = - \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, \alpha) dx = -f[a(\alpha), \alpha].$$

Enfin, pour calculer $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ utilisons la formule de Leibniz établie ci-dessus:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx.$$

*) La fonction sous le signe somme dans l'intégrale $\int_a^b \varepsilon dx$ tend vers zéro lorsque $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Du fait que la fonction sous le signe somme tend en chaque point vers zéro, il ne découle pas forcément que l'intégrale tende aussi vers zéro. Cependant, dans le cas donné $\int_a^b \varepsilon dx$ tend vers zéro lorsque $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Nous l'admettrons sans démonstration.

On obtient en substituant dans la formule (3) les expressions obtenues des dérivées :

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + f[b(\alpha), \alpha] \frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha] \frac{da}{d\alpha}. \quad (4)$$

La formule de Leibniz permet de calculer certaines intégrales définies.

Exemple 1. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Solution. Remarquons d'abord qu'on ne peut calculer directement cette intégrale, étant donné que la primitive de la fonction $e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ ne s'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires. Pour calculer cette intégrale, on la considérera comme fonction du paramètre α :

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

On calcule alors sa dérivée par rapport à α en appliquant la formule de Leibniz *) :

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} \right]' dx = \int_0^\infty e^{-x} \cos \alpha x dx.$$

Mais cette dernière intégrale se calcule aisément au moyen des fonctions élémentaires ; on obtient $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Par conséquent,

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}. \quad (5)$$

On trouve $I(\alpha)$, en intégrant l'identité trouvée :

$$I(\alpha) = \arctg \alpha + C.$$

Reste à déterminer C . Remarquons à cet effet que

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^\infty 0 dx = 0.$$

Par ailleurs, $\arctg 0 = 0$.

Substituant $\alpha = 0$ dans l'égalité (5), on trouve :

$$I(0) = \arctg 0 + C,$$

donc $C = 0$. On a donc pour toute valeur de α l'égalité suivante

$$I(\alpha) = \arctg \alpha,$$

*) On a établi la formule de Leibniz en supposant que les bornes d'intégration a et b étaient finies. Toutefois, la formule de Leibniz convient dans le cas présent, bien qu'une des bornes d'intégration soit infinie.

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \arctg \alpha.$$

Exemple 2. Fonction gamma.
Considérons l'intégrale dépendant du paramètre α

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (6)$$

Montrons que cette intégrale impropre existe (converge) pour $\alpha > 0$. Mettons-la sous forme de la somme

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

La première intégrale du second membre converge, car

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

La seconde intégrale converge aussi. En effet, soit n un nombre entier tel que $n > \alpha - 1$. Il est alors évident que

$$0 < \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_1^\infty x^n e^{-x} dx < \infty.$$

Cette dernière intégrale se calcule par intégration par parties en tenant compte du fait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (7)$$

pour tout n entier positif. Ainsi l'intégrale (6) définit une certaine fonction α . Elle est appelée *fonction gamma* et notée $\Gamma(\alpha)$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (8)$$

Cette fonction est fréquemment utilisée dans les applications des mathématiques. Trouvons la valeur de $\Gamma(\alpha)$ pour α entier. Pour $\alpha = 1$ nous avons

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1. \quad (9)$$

Supposons que $\alpha > 1$ est un entier. Intégrons par parties :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^\infty + (\alpha-1) \int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

ou, compte tenu de (7),

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1). \quad (10)$$

En vertu de (10) et (9) nous trouvons pour $\alpha = n$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (11)$$

§ 14. Intégration d'une fonction complexe de la variable réelle

Nous avons défini au § 4 ch. VII la fonction complexe $\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$ de la variable réelle x et sa dérivée $\tilde{f}'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

D é f i n i t i o n. La fonction $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ est appelée la *primitive de la fonction complexe de la variable réelle* $\tilde{f}(x)$, si

$$\tilde{F}'(x) = \tilde{f}(x), \quad (1)$$

c'est-à-dire si

$$U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x). \quad (2)$$

Il découle de l'égalité (2) que $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$, autrement dit $U(x)$ est la primitive de $u(x)$ et $V(x)$ la primitive de $v(x)$.

Il découle de la définition et de cette remarque que si $\tilde{F}(x) = U(x) + iV(x)$ est la primitive de la fonction $\tilde{f}(x)$, alors toute primitive de $\tilde{f}(x)$ est de la forme $\tilde{F}(x) + C$, où C est une constante complexe arbitraire. Nous appellerons l'expression $\tilde{F}(x) + C$ l'*intégrale indéfinie de la fonction complexe de la variable réelle* et nous écrivons

$$\int \tilde{f}(x) dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx = \tilde{F}(x) + C. \quad (3)$$

L'*intégrale définie* de la fonction complexe de la variable réelle $\tilde{f}(x) = u(x) + iv(x)$ sera définie ainsi :

$$\int_a^b \tilde{f}(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx. \quad (4)$$

Cette définition ne contredit pas, mais est entièrement conforme à la définition de l'intégrale définie en tant que limite d'une somme.

Exercices

1. Calculer les intégrales définies suivantes, en les considérant comme des limites de sommes intégrales s_n

$$\int_a^b x^2 dx.$$

I n d i c a t i o n. Découper le segment $[a, b]$ en n parties par les points $xi = aq^i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), où $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Rép. $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

$$2. \int_a^b \frac{dx}{x}, \text{ où } 0 < a < b. \text{ Rép. } \text{Log} \frac{b}{a}.$$

I n d i c a t i o n. Découper le segment $[a, b]$ comme dans l'exemple précédent.

$$3. \int_a^b \sqrt{x} dx. \text{ Rép. } \frac{2}{3} (b^{3/2} - a^{3/2}).$$

I n d i c a t i o n. Voir l'exemple précédent.

$$4. \int_a^b \sin x dx. \text{ Rép. } \cos a - \cos b.$$

I n d i c a t i o n. Etablir préalablement l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin(a+(n-1)h) &= \\ &= \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2 \sin h}, \end{aligned}$$

il faut, à cet effet, multiplier et diviser tous les termes du premier membre par $\sin h$ et remplacer les produits de sinus par des différences de cosinus.

$$5. \int_a^b \cos x dx. \text{ Rép. } \sin b - \sin a.$$

Utiliser la formule de Newton-Leibniz pour calculer les intégrales définies :

$$6. \int_0^1 x^4 dx. \text{ Rép. } \frac{1}{5}.$$

$$7. \int_0^1 e^x dx. \text{ Rép. } e - 1.$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \sin x dx. \text{ Rép. } 1.$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \text{ Rép. } \frac{\pi}{4}.$$

$$10. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Rép. } \frac{\pi}{4}.$$

$$11. \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx. \text{ Rép. } \text{Log } 2.$$

$$12. \int_1^e \frac{dx}{x}. \text{ Rép. } 1.$$

$$13. \int_1^x \frac{dx}{x}. \text{ Rép. } \text{Log } x.$$

$$14. \int_0^x \sin x dx. \text{ Rép. } 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$15. \int_0^x x^2 dx. \text{ Rép. } \frac{x^3 - a^3}{3}.$$

$$16. \int_1^z \frac{dx}{2x-1}. \text{ Rép. } \text{Log}(2z-1).$$

$$17. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx. \text{ Rép. } \frac{\pi}{4}.$$

$$18. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx. \text{ Rép. } \frac{\pi}{4}.$$

Calculer les intégrales suivantes en faisant les changements de variable indiqués :

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx, \quad \cos x = t. \quad \text{Rép. } \frac{1}{3}.$$

$$20. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t. \quad \text{Rép. } \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

$$21. \int_1^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{2+4x}}, \quad 2+4x = t^2. \quad \text{Rép. } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$22. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad x = \operatorname{tg} t. \quad \text{Rép. } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

$$23. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx, \quad x-1 = t^2. \quad \text{Rép. } 2(2 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2).$$

$$24. \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{5}} \frac{dz}{z \sqrt{z^2+1}}, \quad z = \frac{1}{x}. \quad \text{Rép. } \operatorname{Log} \frac{3}{2}.$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{6-5 \sin \varphi + \sin^2 \varphi}, \quad \sin \varphi = t. \quad \text{Rép. } \operatorname{Log} \frac{4}{3}.$$

Montrer que

$$26. \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx \quad (m > 0, n > 0).$$

$$27. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx. \quad 28. \int_0^a f(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) \, dx.$$

Calculer les intégrales impropres suivantes (bornes infinies ou singularité de la fonction à intégrer) :

$$29. \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Rép. } 1.$$

$$30. \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx. \quad \text{Rép. } 1.$$

$$31. \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}. \quad \text{Rép. } \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0).$$

$$32. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Rép. } \frac{\pi}{2}.$$

$$33. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}. \quad \text{Rép. } \frac{1}{4}.$$

$$34. \int_0^1 \operatorname{Log} x \, dx. \quad \text{Rép. } -1.$$

$$35. \int_0^{\infty} x \sin x \, dx. \quad \text{Rép. L'intégrale diverge.}$$

$$36. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad \text{Rép. L'intégrale diverge.}$$

$$37. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}. \quad \text{Rép. } \pi.$$

$$38. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \quad \text{Rép. } \frac{3}{2}.$$

$$39. \int_0^2 \frac{dx}{x^3}. \quad \text{Rép. L'intégrale diverge.}$$

$$40. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}. \quad \text{Rép. } \frac{\pi}{2}.$$

$$41. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}. \quad \text{Rép. L'intégrale diverge.}$$

$$42. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \quad (a > 0). \quad \text{Rép. } \frac{b}{a^2+b^2}.$$

$$43. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \quad (a > 0). \quad \text{Rép. } \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Calculer les valeurs approchées des intégrales :

$$44. \operatorname{Log} 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x} \quad \text{par application de la formule des trapèzes et de la formule de Simpson } (n=12). \quad \text{Rép. } 1,6182 \text{ (d'après la formule des trapèzes) ; } 1,6098 \text{ (Simpson).}$$

$$45. \int_1^{14} x^3 \, dx \quad \text{d'après la formule des trapèzes et la formule de Simpson } (n=10). \quad \text{Rép. } 3690 ; 3660.$$

$$46. \int_0^1 \sqrt{1-x^3} \, dx \quad \text{d'après la formule des trapèzes } (n=6). \quad \text{Rép. } 0,8109.$$

$$47. \int_1^3 \frac{dx}{2x-1} \quad \text{d'après la formule de Simpson } (n=4). \quad \text{Rép. } 0,8114.$$

48. $\int_1^{10} \log_{10} x \, dx$ d'après la formule des trapèzes et la formule de Simpson ($n=10$). Rép. 6,0656 ; 6,0896.
49. Calculer la valeur de π en partant de ce que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, par application de la formule de Simpson ($n=10$). Rép. 3,44159.
50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx$ d'après la formule de Simpson ($n=10$). Rép. 1,371.
51. En partant de l'égalité $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha}$, où $\alpha > 0$, trouver pour l'entier $n > 0$ la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$. Rép. $n!$.
52. Partant de l'égalité $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, trouver la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. Rép. $\frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$.
53. Calculer l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{x e^x} \, dx$. Rép. $\text{Log}(1+\alpha)$ ($\alpha > -1$).
54. Se servir de l'égalité $\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$ pour calculer l'intégrale $\int_0^1 x^{n-1} (\text{Log } x)^k \, dx$. Rép. $(-1)^k \frac{k!}{n^{k+1}}$.