المحاضرة الثالثة

كنا قد رأينا في المحاضرات السابقة مقدمة حول التطور التاريخي للمنطق الرياضي والأسس الابستيمولوجية والعلمية التي قام عليها أو أدت إلى ظهوره لاسيما مع التقدم العلمي منذ بدايات الثورة العلمية. حيث كأنت هناك أسماء لامعة ساهمت في أنشاء هذا المنطق بالمزج بين المنطق التقليدي الأرسطي والرياضيات على أساس نسق أكسيوماتيكي جديد يلبّي الحاجة العلمية آنذاك. أسماء مثل Leibniz و De Morgan و G. Boole وغيرهم نهاية إلى راسل Russel.

ثم رأينا في المحاضرات اللاحقة مفهوم القضية أو العبارة المنطقية المتمثلة في التعبير الخبري الذي يعبر عن واقعة بالمفهوم الراسلي وهي المطلوبة دون سواها في الحساب الكلاسيكي للقضايا Propositional Calculus، ثم عدّدنا الروابط المنطقية التي سنتناولها لبناء هذا النسق وهذا النوع من الحسابات، وميزنا بين وظائفها النحوية ووظائفها المنطقية وأدرجنا القواعد الخاصة بكل رابط وجدول صدق كل منها كتعريفات أولية ضرورية في المنطق الرياضي.

فإذا كانت كل من p و q قضايا منطقية وبالرمز لقيمة صدق بـ 1 والكذب بـ 0 يكون ملخص جداول صدق الروابط الخمس كالآتي:

جدول صدق رابط النفي (~) (النفي والنفي المضاعف)

p	~p	~(~p)
1	0	1
0	1	0

جدول صدق رابط الوصل: إذا كان لدينا قضيتين p و q لتركيب قضية وصلية يمكن التعبير على ذلك كما يلي طبقا لقاعدته:

(أ) يكون الوصل صادقا إذا كانت كل موصولاته صادقة

(ب) يكذب الوصل إذا كذبت احدى موصولاته أو كذبتا معا

p	q	$(p \wedge q)$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

على أن خصائص الوصل تتمثل في أنه تبديلي، تجميعي ومتكافئ القوى أي أن:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

جدول صدق رابط الفصل: وقاعدة الفصل هي:

(أ) يكون الفصل صادقا إذا صدقت احدى مفصولاته أو معا

(ب) يكذب الفصل إذا كذبت كل مفصولاته

p	q	$(p \vee q)$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

على أن خصائص الفصل تتمثل في أنه تبديلي، تجميعي ومتكافئ القوى أي أن:

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

قانون أو خاصية دي مورغان: وتنص على أنه إذا دخل رابط النفي على قضية وصلية فسيحولها إلى فصلية منفية الطرفين، وإذا دخل على قضية فصلية حوّلها إلى وصلية منفية الطرفين أي:

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

جدول صدق رابط الشرط أو اللزوم:

قاعدته (أ) يكون الشرط صادقا كلما (كذب المقدم) أو (صدق التالي)

(ب) يكذب الشرط كلما (صدق المقدم و كذب التالي)

p	q	$(p \rightarrow q)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

ويمكن التعبير رمزيا على الجدول كما يلي:

$(\sim p \vee q) \equiv (p \rightarrow q)$ في حالة الإثبات (الصدق) (أ)

$\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$ في حالة النفي (الكذب) (ب)

جدول صدق رابط التشارط

قاعدته (أ) يكون التشارط صادقا كلما صدق (المتشارطان معا) أو (كذبا معا)

(ب) يكذب التشارط كلما كذب أحد المتشارطان وصدق الآخر (صدق الأول وكذب الثاني) أو (كذب الأول وصدق الثاني)

ويمكن التعبير رمزيا على ذلك كما يلي: $(p\leftrightarrow q) \equiv (p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$ في حالة الإثبات

أما في حالة النفي: $\sim(p\leftrightarrow q) \equiv (\sim p \wedge q)\vee(p \wedge\sim q)$

p	q	$(p\leftrightarrow q)$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1