Université Mohamed Khider de Biskra
Département Informatique
Module: Analyse de données

Première Année Master
2024/2025

Corrigé des exercices de TD 01

Solution de l'Exercice 1 *(Lecture sur la table de la loi Normale)*

a) La résolution de cet exercice nécessite la table de la loi normale centrée et réduite.

1. La quantification des probabilités dans ces situations se fait par la lecture sur la table de la loi normale centrée et réduite, et cela soit par une lecture directe sur la table de la loi normale, soit après une transformations adéquate en se basant sur les propriétés de la loi normale.
   - $P(X \leq 2.41) = 0.99202$ (obtenue directement sur la table).
   - $P(X \geq 1.34) = 1 - P(X \leq 1.34) = 1 - 0.9099 = 0.0901$
   - Pour déterminer la valeur de $P(X \leq -1.72)$ sur la table de la loi normale centrée et réduite, on doit réaliser d'abord la transformation de l'écriture. On se basant sur la propriété de symétrie de la loi normale et la propriété de probabilité totale, on obtient ce qui suit :

     $$P(X \leq -1.72) = P(X \geq 1.72) = 1 - P(X \leq 1.72),$$

     et par une lecture directe sur la table de la loi normale centrée et réduite on aura $P(X \leq 1.72) = 0.95728$ ainsi $P(X \leq -1.72) = 1 - 0.95728 = 0.0427$.
   - Avec le même raisonnement que dans l'exemple precedent on obtient :
     $P(X \leq -1.45) = 1 - P(X \leq 1.45) = 1 - 0.9265 = 0.0735$.
   - On utilisons la propriété de la symétrie de la loi normale on aura :
     $P(X \geq -1.53) = P(X \leq 1.53) = 0.9370$.
   - $P(1.34 \leq X \leq 2.41) = P(X \leq 2.41) - P(X \leq 1.34) = 0.99202 - 0.9099 = 0.0821$.
   - $P(-1.53 \leq X \leq 2.41) = P(X \leq 2.41) - P(X \leq -1.53) = P(X \leq 2.41) - [1 - P(X \leq 1.53)] = P(X \leq 2.41) + P(X \leq 1.53) - 1 = 0.99202 + 0.9370 - 1 = 0.9290$.
   - $P(-2.74 \leq X \leq -1.45) = P(2.74 \leq X \leq 1.45) = P(X \leq 2.74) - P(X \leq 1.45) = 0.9969 - 0.9265 = 0.0705$.
   - $P(|X| \leq 1.45) = P(-1.45 \leq X \leq 1.45) = P(X \leq 1.45) - P(X \leq -1.45) = P(X \leq 1.45) - [1 - P(X \leq 1.45)] = 2 * P(X \leq 1.45) - 1 = 2 * 0.9265 - 1 = 0.8529$.
   - $P(|X| \geq 1.96) = P(X \leq -1.96) + P(X > 1.96) = [1 - P(X \leq 1.96)] + [1 - P(X \leq 1.96)] = 2 - 2P(X \leq 1.96) = 2 - 2 * 0.975 = 0.05$.
2. La détermination de la valeur de x dans ces situation se fait par la lecture inverse sur la table de la loi normale centrée et réduite.
   - $P(X \leq x) = 0.95 \Rightarrow x = 1.64$ (obtenue directement sur la table).
   - $P(X \geq x) = 0.239 \Rightarrow 1 - P(X \leq x) = 0.239$ c'est-à-dire
     $P(X \leq x) = 1 - 0.239 = 0.7610 \Rightarrow x = 0.71$
   - $P(X \leq x) = 0.486$ on a $P(X \leq x) \leq 0.5 \Rightarrow x \leq 0$ et $P(X \leq x) = 1 - P(X \leq -x) \Rightarrow 1 - P(X \leq -x) = 0.486 \Rightarrow P(X \leq -x) = 0.5140 \Rightarrow -x = 0.04 \Rightarrow x = -0.04$
   - $P(X \geq x) = 0.812 \Rightarrow P(X \leq -x) = 0.812 \Rightarrow -x = 0.89 \Rightarrow x = -0.89$.

b) Le calcul des probabilités dans ce cas nécessite la transformation des variables. En effet, avant de lire sur la table de la loi normale centrée et réduite il faut posé $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, tel que $\mu = 5$ et $\sigma = 2$.

1. $P(X \leq 6) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{6-\mu}{\sigma}) = P(\frac{X-5}{2} \leq \frac{6-5}{2}) = P(Z \leq 0.5) = 0.69$.
2. $P(X \leq -1) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-1-\mu}{\sigma}) = P(\frac{X-5}{2} \leq \frac{-1-5}{2}) = P(Z \leq -3) = 1 - P(Z \leq 3) = 0.0013$.
3. $P(X \geq 7) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{7-\mu}{\sigma}) = P(\frac{X-5}{2} \geq \frac{7-5}{2}) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0.1587$.
4. $P(X \geq -2) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{-2-\mu}{\sigma}) = P(\frac{X-5}{2} \geq \frac{-2-5}{2}) = P(Z \geq -3.5) = P(Z \leq 3.5) = 0.9998$.
5. $P(3 \leq X \leq 7) = P(\frac{3-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{7-\mu}{\sigma}) = P(\frac{3-5}{2} \leq \frac{X-5}{2} \leq \frac{7-5}{2}) \Rightarrow P(3 \leq X \leq 7) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 * 0.8413 - 1 = 0.6827$.

c) Soit X une *v.a.* de loi $N(\mu, \sigma^2)$ tel que $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 4$.
Pour déterminer les valeurs de x tel que : $P(X \leq x) = 0.95$, $P(X \geq x) = 0.015$ et $P(X \geq x) = 0.812$, on ne peut pas exploiter d'une manière directe la table de la loi normale centrée et réduite et cela le fait que X suit une loi normale qui n'est ni centrée et ni réduite. A cet effet, pour répondre à la question on doit effectué les trois étapes suivante :

1. Réaliser une transformation de la *v.a.* X vers une *v.a.* Y qui suit une loi $N(0,1)$, en posant $y = \frac{X-\mu}{\sigma}$.
2. Par une lecture inverse sur la table de la loi normale centrée et réduite on détermine la valeur de y.
3. Par une transformation inverse, on détermine la valeur de x, c'est-à-dire $x = \sigma y + \mu$.

$\underline{P(X \leq x) = 0.95 :}$
• $P(X \leq x) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{x-3}{2}\right) = 0.95 \Leftrightarrow P(Y \leq y) = 0.95$.
• A partir de la table de la loi $N(0,1)$ par une lecture inverse on obtiens 1.645
• Alors $x = 2 * y + 3 = 2 * 1.645 + 3 = 6.2897$.
$\underline{P(X \geq x) = 0.015 :}$
•$P(X \geq x) = 0.015 \Leftrightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x-3}{2}) = 0.015 \Leftrightarrow P(Y \geq y) = 0.015 \Leftrightarrow P(Y \leq y) = 0.985$
• à partir de la table de la loi $N(0,1)$ par une lecture inverse on obtiens $y = 2.17$
• Alors $x = 2 * 2.17 + 3 = 7.34$
$\underline{P(X \geq x) = 0.812 :}$
• avec le même raisonnement que dans le premier cas on obtiens : $P(Y \leq y) = 0.188 \leq 0.5$ cela signifié que y est négatif alors pour réaliser une lecture sur la table $N(0,1)$ la transformation suivante est nécessaire $P(Y \leq y) = 0.188 \Leftrightarrow P(Y \leq -y) = 0.812$.
• à partir de la table de la loi $N(0,1)$ par une lecture inverse on obtiens $-y = 0.89 \Rightarrow y = -0.89$
• Alors $x = 2 * (-0.89) + 3 = 1.22$.

Solution de l'Exercice 2 *(Lecture sur les tables statistique)*

1. T une $v.a.$ d'une loi de Student de degré de liberté n ($T \rightsquigarrow t_n$).

   - On a $n = 18$ et $P(T \leq t) = 0.95 = 1 - \frac{0.1}{2}$, alors a partir de la table de la loi de Student dans l'intersection de la ligne 18 et la colonne $P = 0.10$ on aura $t = t(18, 1 - \frac{0.1}{2}) = 1.734$.
   - On a $n = 10$ et $P(T \leq t) = 0.80 \Rightarrow t = t_{(10,0.80)} = t_{(10,1-0.2)}$, alors a partir de la table de la loi de Student dans l'intersection de la ligne 10 et la colonne $P = 0.40$ on aura $t = t_{(10,1-0.2)} = 0.879$.
   - On a $n = 40$ $P(T \leq t) = 0.95 = 1 - \frac{0.1}{2}$ alors, a partir de la table de la loi de Student dans l'intersection de la ligne $n = \infty$ et la colonne $P = 0.10$ on aura $t = 1.645$.
   - On a $P(T \geq t) = 0.25$, dans cette situation, avant de lire sur la table de la loi de Student on réalise la transformation suivante : $P(T \geq t) = 0.25 \Rightarrow P(T \leq t) = 1 - 0.25$. A partir de la table de la loi de Student dans l'intersection de la ligne 25 et la colonne $P = 0.50$ on aura $t = t_{(10,0.75)} = t_{(10,1-0.25)} = 0.684$.
   - On a $n = 25$ et $P(T \geq t) = 0.975$, le fait que $P \leq 0.5$ cela signifier que t est négative ($t < 0$), alors $P(T \geq t) = 0.975 \Rightarrow P(T \leq -t) = 0.975$(propriété de symétrie de la loi de Student) c'est-à-dire $P(T \leq -t) = 1 - \frac{0.05}{2}$. Ainsi, à partir de la table de la loi de Student dans l'intersection de la ligne 25 et la colonne $P = 0.05$ on aura $-t = t(25, 1 - \frac{0.05}{2}) = 2.060 \Rightarrow t = -2.060$.

2. Y une $v.a.$ d'une loi de Khi-deux de degré de liberté m ($Y \rightsquigarrow \chi^2_m$).

   - Pour determiner la valeur de y pour le cas $m = 15$ et $P(Y \geq y) = 0.90$ il suffit de lire directement la valeur qui se trouve dans l'intersection de la ligne $m = 15$ et la colonne $p = 0.90$ où on aura $y = 8.547$.
   - On a $m = 15$ et $P(Y \geq y) = 0.975$, avec la même démarche que le cas précédent on aura $y = 6.262$.
   - Pour determiner la valeur de y pour le cas $m = 20$ et $P(Y \leq y) = 0.975$, il faut réaliser d'abord la transformation suivante : $P(Y \leq y) = 0.90 \Rightarrow P(Y \geq y) = 1 - 0.975 = 0.025$. Maintenant, pour obtenir la valeur de y, il suffit de lire la valeur située dans l'intersection de la ligne 20 et la colonne $p = 0.025$ où on obtient $y = 34.170$.
   - On a $m = 50$ et $P(Y \geq y) = 0.975$ dans cette situation on ne peut pas lire sur la table de la loi de $khi - deux$ mais plutôt c'est à partir de la table de la loi normale que y sera déterminer. En effet, afin de déterminer la valeur de y, il faut faire recoure à l'approximation de loi de $khi - deux$ par une loi normale centrée réduite et cela toute en utilisant la transformation suivante, $z = \sqrt{2 * Y} - \sqrt{2 * m - 1} \leq \sqrt{2 * y} - \sqrt{2 * m - 1}$ (z suit une loi normale centrée réduite), avec $P(Z \leq z) = 0.975$. A partir de la table de la loi normale on aura $z = 1.96 \Rightarrow \sqrt{2 * y} - \sqrt{2 * m - 1} = 1.96$ d'où $y = 70.9226$.

3. Soit f une $v.a.$ d'une loi de $Fisher$ de degrés de libertés n, m ($f \rightsquigarrow F_{n,m}$).

   - A partir de la table de la loi de Fisher $P = 0.99$ (troisième table), dans l'intersection de la colonne $n = 6$ et de la ligne $m = 2$, on a $f = F_{(6,2,0.99)} = 99.3$.
   - Avant de lire sur la table de la loi de Fisher on doit réaliser la transformation suivante : $P(F \geq f) = 0.05 \Rightarrow P(T \leq t) = 0.95$. A partir de la table de la loi de Fisher $P = 0.95$ (première table), dans l'intersection de la ligne $m = 15$ et la colonne $n = 20$, on a $f = F_{(20,15,0.95)} = 2.33$.