

**Série N°1 : ACP**

**Exercice 1** On considère la matrice des données:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit matriciel  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  et s'assurer que c'est une matrice carré et symétrique.
2. Calculer les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  et ces vecteurs propres  $\mathbf{u}_i$  associés. Donner la matrice diagonale  $\Lambda$  semblable à  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  et la matrice de passage  $\mathbf{P}$ .
3. Vérifier que  $\text{trace}(\mathbf{X}^t \mathbf{X}) = \sum_i \lambda_i$ .

**Exercice 2** Soit la matrice des données suivante

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Centrer et réduit (normer) les deux vecteurs colonnes,  $X_1^*$  et  $X_2^*$ , de  $\mathbf{X}^*$ .
2. Déterminer la matrice de variances-covariances  $\mathbf{V}$  et la matrice des corrélations  $\mathbf{R}$ .
3. Diagonaliser  $\mathbf{V}$ . On note  $\lambda_i$  ses valeurs propres.
4. Déterminer les vecteurs propres  $\mathbf{u}_i$  associés à ces valeurs propres.
5. Dans le contexte de l'analyse en composantes principales, déterminer les axes principaux du nuage de points défini par la matrice  $\mathbf{X}$ .

**Exercice 3** On s'intéresse à l'ACP sur le nuage de points défini par la matrice

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc il s'agit de 4 lignes-individus et 4 colonnes-variables.

1. Donner les moyennes et les variances des quatre variables puis déterminer la matrice de variances-covariances  $\mathbf{V}$  associée à  $\mathbf{X}^*$ .
2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\mathbf{V}$ .
3. Donner les coordonnées des lignes sur le deuxième axe principal de l'ACP de  $\mathbf{X}^*$ .
4. Donner les coordonnées des colonnes sur le deuxième axe principal de l'ACP de  $\mathbf{X}^*$ .

**Exercice 4** Une étude gastronomique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre restaurants. Pour cela, un expert à note ces restaurants avec des notes allant de  $-3$  à  $3$ . Les résultats sont les suivants:

Restaurant	Service	Qualité	Prix
$\mathbf{R}_1$	$-2$	$+3$	$-1$
$\mathbf{R}_2$	$-1$	$+1$	$0$
$\mathbf{R}_3$	$+2$	$-1$	$-1$
$\mathbf{R}_4$	$+1$	$-3$	$2$

La matrice de variances-covariances est

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3 & 1/2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix},$$

et celle de corrélations (aux erreurs arrondies près) est

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0.85 & 0.26 \\ -0.85 & 1 & -0.73 \\ 0.26 & -0.73 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1. Etude de valeurs propres:**

- i) Vérifier que  $\mathbf{V}$  admet une valeur propre  $\lambda_3 = 0$ .
- ii) On donne  $\lambda_1 = 30.5/4$ . Déduire la valeur de  $\lambda_2$ .
- iii) Calculer les pourcentages d'inerties. Quelle est la dimension à retenir?

**2. Les vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , aux erreurs arrondies près, sont**

$$\mathbf{u}_1^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 0.3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_2^* = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.11 \\ -0.75 \end{pmatrix}.$$

- i) Déterminer les composantes principales qui correspondent aux axes principaux associés à  $\mathbf{u}_1^*$  et  $\mathbf{u}_2^*$  respectivement.
- ii) Représenter les individus dans le plan principal (1, 2).

**3. Représentation:**

- i) Déterminer les corrélations entre les variables originelles et les composantes principales.
- ii) Représenter les variables sur le cercle des corrélations dans le plan factoriel (1, 2).
- iii) Interpréter les résultats.