الجمهـورية الجزائـرية الديمقـراطية الشعبيــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـم العــالي و البحـث العلمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جـامعة محــمد خيضــر –بسكرة –

كـلية العلــوم الاقتصــادية و التجـارية و علــوم التسييـر

قســم علـــوم التسييــر

المحاضرة الثانية:

مراجعة للبرمجـــة الخطـــية

السنـــــة الجامعيـــــة: 2024 / 2025

أهداف المحاضرة:

ينتظر من الطالب بعد تناوله هذه المحاضرة استذكار :

- بنية البرمجة الخطية و صيغتها الرياضية
- ايجاد الحل الأمثل في حالة التعظيم
- ايجاد الحل الأمثل في حالة التخفيض

محتوى المحاضرة

- بنية البرمجة الخطية
- حالات ايجاد الحل الامثل بطريقة السمبلاكس

I بنية البرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية من بين الأدوات الرياضية المهمة في مجال اتخاذ القرارات التسييرية التي تبحث عن ايجاد حلول للمشاكل المتعلقة بتخصيص الموارد المتاحة و الامكانيات المحدودة على استخدامات مختلفة من أجل الحصول على أفضل النتائج، وهذا يتم من خلال نمذجة المشكلة و جعلها في شكل برنامج رياضي يعكس مختلف القيود التي من قدرات المؤسسة بهدف الوصول الى تحقيق الهدف بنوعيه التعظيم و التخفيض.

بمعنى آخر أن نموذج البرمجة الخطية يتكون من :

- **متغيرات القرار**: تعبر عن المجاهيل المراد تحديد قيمها ، حيث يرمز لها بالرمز X_J.
- **دالة الهدف**: هي دالة خطية على ضوئها يتم اختيار الحل الأمثل ، حيث يرمز لها بالرمز Z الذي يأخذ أحد الشكلين: MaxZ في حالة التعظيم و MinZ في حالة التخفيض.وتأخذ الصيغة التالية:

$$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots\dots\dots + C_n X_n$$

- **القيود**: هي مجموعة من المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها و لكنه يحاول الوصول الى أفضل قرار في ظلها ، حيث يتم تجسيدها في شكل متباينات و معادلات رياضية. يعبر عنها رياضيا:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

- قيد عدم السلبية: يشترط البرنامج الخطي أن تكون المتغيرات غير سالبة أي موجبة أو معدومة.أي :

$$x_j \geq 0$$

II ايجاد الحل بطريقة السمبلاكس:

تتلخص خطواتها الأساسية في:

- **الخطوة الأولى :تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري:**

تحويل جميع المتراجحات الى معادلات بإضافة متغيرات جديدة الى الطرف الأيسر للمتراجحات، وذلك اما متغيرات الفجوة (e) اذا كانت المتراجحة ≤، بحيث تكون قيمتها في دالة الهدف معدومة ، واما بطرح متغيرات فجوة مع اضافة متغيرات جديدة تدعى بالمتغيرات الاصطناعية(A) اذا كانت المتراجحة ≥، مع وجوب اظهارها في دالة الهدف بمعامل M يعمل عكس الدالة

- **الخطوة الثانية :ايجاد الحل الأولي الممكن.**

تنظيم بيانات النموذج المعياري في جدول الحل الاولي، مع مراعاة أن تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساسية اذا كانت المتراجحة ≤ ، و متغيرات اصطناعية اذا كانت المتراجحة ≥ أو =

- **الخطوة الثالثة :اختبار أمثلية الحل**

. يتحقق شرط الأمثلية في مسائل التعظيم Max عندما تكون جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة (أي Δ C≥0). وفي مسائل التخفيض مشروط بأن تكون جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة

- **الخطوة الرابعة :تحسين الحل الى غاية بلوغ الحل الأمثل**

للقيام بهذه الخطوة ، يتطلب الأمر تحديد ثلاثة عناصر و المتمثلة في:

- ✓ المتغيرة الداخلة(variable entrante): هي تلك المتغيرة خارج الأساس التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها في حالة التعظيم عن طريق اختيار **أقل قيمة سالبة من قيم سطر التقييم** (أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) . اما في مسائل التخفيض فتقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم.
- ✓ المتغيرة الخارجة (variable sortante) : هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس يتم تحديدها من خلال قسمة عناصر عمود الثوابت (b_i) على عناصر عمود المتغيرة الداخلة (a_{ijk}) و اختيار **أصغر حاصل قسمة موجب**
- ✓ نقطة المحور(pivot): هي نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة

وبناءا على تحديد العناصر الثلاثة السابقة يمكن تشكيل جدول سمبلاكس جديد كما يلي:

- ✓ قسمة عناصر سطر المحور على نقطة المحور فنحصل على سطر المتغيرة الداخلة:
- ✓ جعل كل عناصر عمود المحور أصفارا ما عدى نقطة المحور.
- ✓ حساب بقية عناصر المصفوفة و كذلك الثوابت(b_i) بالعلاقة التالية:

القيمة الجديدة للعنصر = القيمة القديمة للعنصر −[(عنصر سطر المحور× عنصر عمود المحور)÷ نقطة المحور]

مثال1: اوجد الحل الامثل للبرنامج الخطي التالي:

كان البرنامج الخطي هو:

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \le 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 \le 2400 \\ x_1\ ,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

النموذج المعياري:

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + e_1 = 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 + e_2 = 2400 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ e_1,\ e_2 \ge 0 \end{cases}$$

جدول الحل رقم1

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	e_1	1000	2	1	1	0
0	$\mathbf{e_2}$	2400	3	**6**	0	1
Z= 0			-20	**-30**	0	0

جدول الحل رقم2:

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	$\mathbf{e_1}$	600	**3/2**	0	1	-1/6
30	$\mathbf{x_2}$	400	½	1	0	1/6
Z= 12000			**-5**	0	0	5

جدول الحل رقم3:

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	x_1	400	1	0	2/3	-1/9
30	$\mathbf{x_2}$	200	0	1	-1/3	2/9
Z= 14000			**0**	**0**	**10/3**	**40/9**

نلاحظ أن جميع عناصر سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر ، ما يعني أنه لا توجد امكانية لتحسين الحل ،لذلك فان هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل حيث تكون النتائج المحصل عليها كما يلي:

$$\mathbf{x_1 = 400\ ,\ \ x_2 = 200\ ,\ \ e_1 = 0,\ \ e_2 = 0\ ,\ Z = 140000}$$

مثال2: اوجد الحل الامثل للبرنامج الخطي التالي:

$$MinZ = 3000x_1 + 1000\,x_2$$

$$\begin{cases} 60\,x_1 + 40x_2 \geq 2000 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

النموذج المعياري:

$$MinZ = 3000x_1 + 1000\,x_2 + \ 0\,e_1 + MA_1 + \ 0\ \ e_2 + MA_2$$

$$\begin{cases} 60\,x_1 + 40x_2 - e_1 + A_1 = 2000 \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$x_2 - e_2 + A_2 = 3$$

$$x_1 , x_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0$$

جدول الحل رقم 1:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
M	A_1	100	3	2	-1	1	0	0
M	A_2	3	0	1	0	0	-1	1
Z= 103M			3M-3000	3M-1000	-M	0	-M	0

جدول الحل رقم2:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
M	A_1	94	3	0	-1	1	2	0
1000	X_2	3	0	1	0	0	-1	1
Z= 94M+3000			3M-3000	0	-M	0	2M-1000	0

جدول الحل رقم3:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
3000	x_1	94/3	1	0	-1/3	1/3	2/3	0
1000	X_2	3	0	1	0	0	-1	0
Z= 97000			0	0	-1000	1000-M	1000	-M

جدول الحل رقم4:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
0	e_2	47	3/2	0	-1/2	½	1	0
1000	X_2	50	3/2	1	-1/2	½	0	0
Z= 50000			**-1500**	**0**	**-500**	**500-M**	**0**	**-M**