Chapitre IV

La géométrie des masses

IV. La géométrie des masses

IV.1 Introduction

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinétiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide

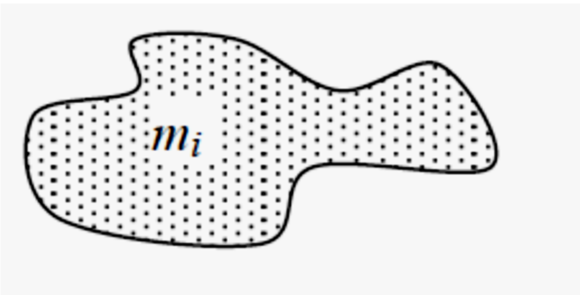
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

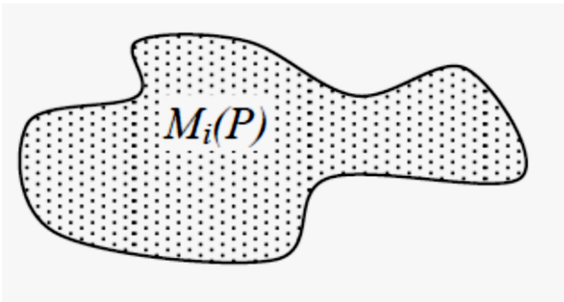
IV.2 Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses m_i :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



a- Système discret



b- Système continu

Figure IV. 1: Le système discret et le système continu.

IV.2.1 Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue :

$$m = \int_{(S)} dm(P)$$

L'élément $dm(P)$ est la mesure de la masse au voisinage du point (P).

b. Le système (S) est un volume

La masse s'écrirait : $m = \int_V \rho_{(P)}.dv$

$\rho_{(P)}$: est la masse volumique au point *P* et dv un élément de volume du solide (S).

c. Le système (S) est une surface (cas des plaques fines)

L'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions. La masse s'écrirait :

$$m = \int_S \sigma_{(P)}.dS$$

$\boldsymbol{\sigma_{(P)}}$ est la densité surfacique au point *P* et **dS** un élément de surface du solide (S).

d. Le système (S) est linaire (cas des tiges fines)

Les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige. La masse s'écrirait :

$$m = \int_L \lambda_{(P)}.dL$$

$\lambda_{(P)}$ est la densité linéique au point *P* et *dL* un élément de longueur du solide (S).

Remarque: *Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.*

IV.3 Centre d'inertie (centre de masse) des solides

Soit *O* le centre d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G défini par la relation :

$$\int_{P\epsilon(S)} \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$

où *P* est un point du solide avec : $\overrightarrow{OP} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$ et $\overrightarrow{OG} = x_G.\vec{\imath} + y_G.\vec{\jmath} + z_G.\vec{k}$

Les coordonnées du centre d'inertie ***G*** d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que : ***dl*** pour les éléments linéaires, ***dS*** pour les éléments surfaciques et ***dv*** pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

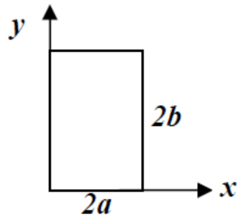
$$x_G = \frac{1}{m}.\int_{P\epsilon(S)} x.dm, \qquad y_G = \frac{1}{m}.\int_{P\epsilon(S)} y.dm, \quad z_G = \frac{1}{m}.\int_{P\epsilon(S)} z.dm$$

Remarques :

- Le centre d'inertie des masses homogènes coïncide avec le centre d'inertie de leurs volumes s'ils sont volumiques ou de leurs surfaces s'ils sont surfaciques.

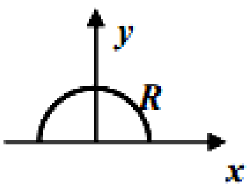
- Si le solide présente des éléments de symétrie (axes ou plans) son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

Exemple 1 : calculer le centre de gravité d'un rectangle (plein) de 2b de longueur et de 2a de largeur.



Exemple 2 :

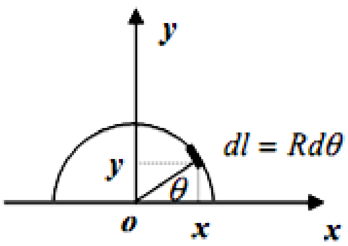
Déterminer le centre d'inertie d'un demi-cercle matériel de rayon R et d'une densité linéaire λ.



a) L'axe *(Oy)* est un axe de symétrie donc : $x_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a : $y_G = \frac{1}{m}\int_S dm$

Le solide est linéaire ayant la forme d'un demi cercle, sa masse est donnée par :
$m = \int_S \lambda dl$ où : λ est la densité linéaire et dl un élément de longueur. L'élément de longueur dl a pour coordonnées : $dl\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{cases}$ avec : $0 \le \theta \le \pi$

(a)



La masse du solide est donnee par : $m = \int_S \lambda dl = \int_0^{\pi} \lambda R d\theta = \lambda\pi R$

$$y_G = \frac{1}{m}\int_S y dm = \frac{1}{m}\int_S y\lambda dl = \frac{1}{\lambda\pi R}\int_0^{\pi} R\sin\theta R d\theta = \frac{R}{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi} \; ; \quad \text{d'où : } G\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$

IV.4 Centre d'inertie d'un système composé

Dans la réalité c'est le cas le plus souvent rencontré, les calculs sont élémentaires en résonnant sur chacun des éléments qui composent les systèmes.

On détermine d'abord le centre d'inertie de chaque élément Δ_i du système au point G_i , puis on détermine le centre d'inertie $\boldsymbol{G}$ du système comme barycentre des points G_i.

Soient les éléments d'un système composé : Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n ayant pour centres d'inertie respectifs : G_1, G_2,..., G_n ayant pour vecteurs positions dans un repère : $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$: $\vec{r_1},\vec{r_2},\dots,\vec{r_n}$.

Le centre d'inertie de ce système est donné par :

$$\overrightarrow{r_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}.\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$$

Elle peut être un élément de longueur, de surface, de volume ou de masse.

Le centre d'inertie du système aura pour coordonnées :

$$\overrightarrow{x_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{x_i}.\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}, \qquad \overrightarrow{y_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{y_i}.\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}, \qquad \overrightarrow{z_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{z_i}.\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$$

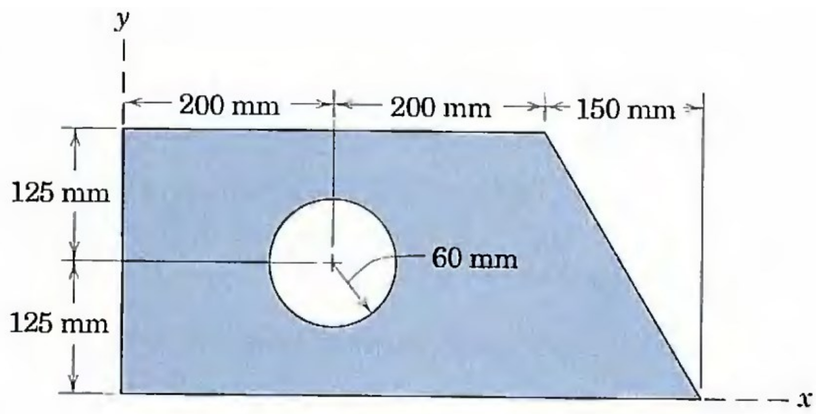
où : x_i, y, z_i sont les coordonnées des points G_i où l'élément Δ_i est concentré.

si les Δ_i sont des éléments de masses alors on peut écrire :

$$\overrightarrow{x_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{x_i}.m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \overrightarrow{y_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{y_i}.m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \overrightarrow{z_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{z_i}.m}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Exemple :

Déterminer le centre d'inertie de la surface suivante



IV.5 Théorème de Guldin

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par *Guldin*. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

IV.5.1 Premier théorème de Guldin

La surface S engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur $\boldsymbol{L}$ autour d'un axe **(Δ)** sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur $\boldsymbol{L}$ de l'arc par la longueur de la circonférence $\boldsymbol{2.\pi.R_G}$ décrite par le centre d'inertie $\boldsymbol{G}$ de l'arc de courbe.

Soit $\boldsymbol{L}$ la longueur de l'arc et R_G sont centre d'inertie (Figure IV.2).

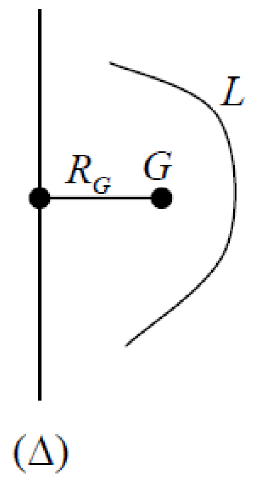


Figure IV. 2: Théorème de Guldin pour un solide linéaire.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie $\boldsymbol{G}$ par rapport à l'axe **(Δ)** est donnée par : $\boldsymbol{2.\pi.R_G}$, alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2.\pi.R_G.L \qquad \text{d'où} \qquad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2.\pi.L}$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura : $R_G = \frac{S_{totale/\Delta}}{2.\pi.L_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, $\vec{y}$)nous aurons : $x_G = \frac{S_{/oy}}{2.\pi.L}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, $\vec{x}$)nous aurons : $y_G = \frac{S_{/ox}}{2.\pi.L}$

IV.5.2 Deuxième théorème de Guldin

Une surface plane homogène $\boldsymbol{S}$, limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe **(Δ)** sans le rencontrer engendre un volume $\boldsymbol{V}$.

Le volume ***V*** engendré est égal au produit de la surface ***S*** par la longueur du périmètre $\boldsymbol{2.\pi.R_G}$ décrit par le centre d'inertie ***G*** de cette surface autour de l'axe **(Δ)** (Figure IV.3).

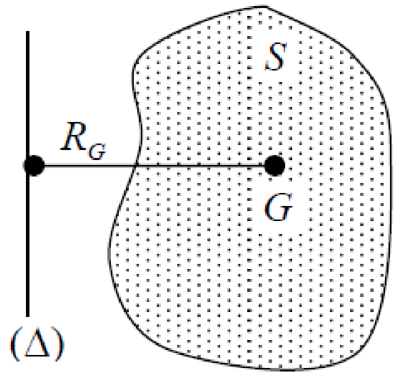


Figure IV. 3: Théorème de Guldin pour un corps surfacique.

Soit ***S*** la surface et $\boldsymbol{R_G}$ la distance de son centre d'inertie **(Δ)**. La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie ***G*** par rapport à l'axe **(Δ)** est donnée par : $\boldsymbol{2.\pi.R_G}$, alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{/\Delta} = 2.\pi.R_G.S \qquad \text{d'ou} \qquad R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2.\pi..S}$$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura : $R_G = \frac{V_{totale/\Delta}}{2.\pi.S_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, $\vec{y}$)nous aurons : $x_G = \frac{V_{total/oy}}{2.\pi.S_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe (O, $\vec{x}$)nous aurons : $y_G = \frac{V_{total/ox}}{2.\pi.S_{totale}}$

IV.6 Opérateur d'inertie

IV.6.1 Définition du moment d'inertie d'un solide

Soit un solide de masse ***dm*** lié à une tige *(AA')* de masse négligeable, en rotation autour d'un axe (Δ). Si on applique un couple au système (tige + masse), il se mettra à tourner librement autour de l'axe (Δ). Le temps nécessaire à cet élément de masse ***dm*** pour atteindre une vitesse de rotation donnée est proportionnel à la masse ***dm*** et au carré de la distance ***r*** qui sépare la masse de l'axe (Δ). C'est pour cette raison que le produit $\boldsymbol{r^2.dm}$ est appelé moment d'inertie de la masse ***dm*** par rapport à l'axe(Δ).

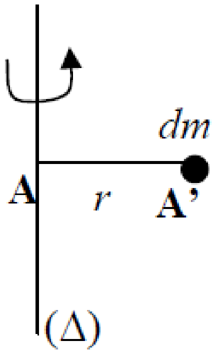


Figure IV. 4: Représentation d'un moment d'inertie d'un corps.

IV.6.2 Moments et produits d'inertie d'un solide

Soit un repère orthonormé $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et un solide *(S)* tel que $O \in (S)$. Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point ***O*** (Moment polaire) est obtenu en intégrant la relation ***r².dm.***

$$\boldsymbol{I_O = \int_{(S)} r^2 . dm}$$

$$\boldsymbol{r^2 = OP^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

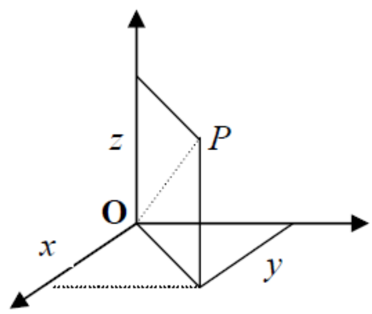


Figure IV. 5: Moment d'inertie d'un corps par rapport à un point (Moment polaire).

Les intégrales sont calculées sur le solide. Celui-ci peut être linéaire, surfacique ou volumique. L'élément d'intégration ***dm(P)*** est situé en un point ***P*** du solide.

Le tenseur d'inertie du solide au point ***O*** est représenté dans la base $\boldsymbol{R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}$ par une matrice notée: appelée matrice d'inertie en ***O*** dans la base $\boldsymbol{R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}$ du solide ***(S)*** :

$$\boldsymbol{I_{O_{(S)/R}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_{xx}} & \boldsymbol{-I_{xy}} & \boldsymbol{-I_{xz}} \\ \boldsymbol{-I_{xy}} & \boldsymbol{I_{yy}} & \boldsymbol{-I_{yz}} \\ \boldsymbol{-I_{xz}} & \boldsymbol{-I_{yz}} & \boldsymbol{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice d'inertie s'écriraient sous la forme :

- Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Ox)* : $\boldsymbol{I_{xx} = \int_{(S)}(y^2 + z^2)dm}$

- Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Oy)* : $\boldsymbol{I_{yy} = \int_{(S)}(x^2 + z^2)dm}$

- Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Oy)* : $\boldsymbol{I_{zz} = \int_{(S)}(x^2 + y^2)dm}$

- Moment d'inertie par rapport au plan *(Oxy) où produit d'inertie* : $\boldsymbol{I_{xy} = \int_{(S)} x.y\, dm}$

- Moment d'inertie par rapport au plan *(Oxz) où produit d'inertie* : $\boldsymbol{I_{xz} = \int_{(S)} x.z\, dm}$

- Moment d'inertie par rapport au plan *(Oyz) où produit d'inertie* : $\boldsymbol{I_{yz} = \int_{(S)} y.z\, dm}$

Observations :

Certains solides présentent des formes particulières admettant ***des plans de symétrie*** par rapport aux axes du repère choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

(*xOy)* plan de symétrie ==> $I_{xz} = \int_{(S)} x.z\, dm = 0 \; et \; I_{yz} = \int_{(S)} y.z\, dm = 0$

(*yOz)* plan de symétrie ==> $I_{xz} = \int_{(S)} x.z\, dm = 0 \; et \; I_{xy} = \int_{(S)} x.y\, dm = 0$

(*xOz)* plan de symétrie ==> $I_{yz} = \int_{(S)} y.z\, dm = 0 \; et \; I_{xy} = \int_{(S)} x.y\, dm = 0$

IV.7 Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément , ***dm*** est ***nulle***. Si le solide est dans le plan (xOy) alors z = 0 .

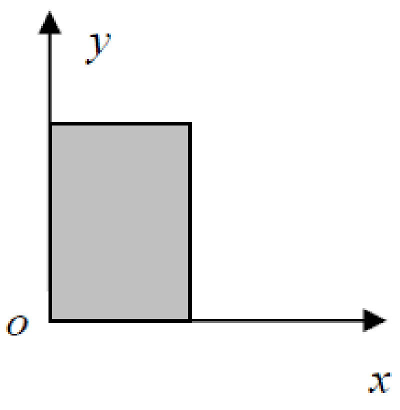
On déduit immédiatement que :

$$\boldsymbol{I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm}$$

$$\boldsymbol{I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm}$$

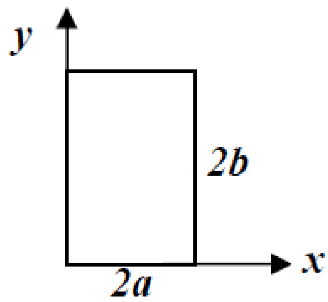
d'où $\boldsymbol{I_{zz} = \int_{(S)}(x^2 + y^2)dm = I_{xx} + I_{yy}}$

$\boldsymbol{I_{xy} = \int_{(S)} x.y\, dm}$ avec $\boldsymbol{I_{zy} = I_{yz} = 0}$



Exemple :

Déterminer le moment d'inertie au point *G* de la plaque mince rectangulaire de masse *m* , de longueur *2a* et de largeur *2b* de centre d'inertie *G (a, b,* 0*)*.



Les plans *(xGz)* et *(yGz)* sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls $I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$; la matrice d'inertie en ***G*** est diagonale.

Masse de la plaque : $m = \sigma . S = \sigma . 4b$

Nous avons un solide plan : *z = 0* ==> $I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$

$$I_{Gxx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma ds = \sigma \int_S y^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \sigma .2a \frac{2}{3} b^3 = \sigma 4ab \frac{b^2}{3} = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{Gxx} = \int_S x^2 dm = \int_S x^2 \sigma ds = \sigma \int_S x^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy = \sigma . \frac{2}{3} a^3 .2b = \sigma 4ab \frac{a^2}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

La matrice d'inertie au point *G* s'écrit :

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

IV.8 Théorème de HUYGENS

Si le tenseur d'inertie est connu au centre d'inertie ***G*** du solide ***(S)*** dans la base $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$; alors on peut déterminer le tenseur d'inertie au point ***O*** dans la même base par les six relations de Huygens, qui lient les moments d'inertie et les produits d'inertie en un point ***O*** d'un repère et le centre d'inertie ***G*** du solide dans le même repère.

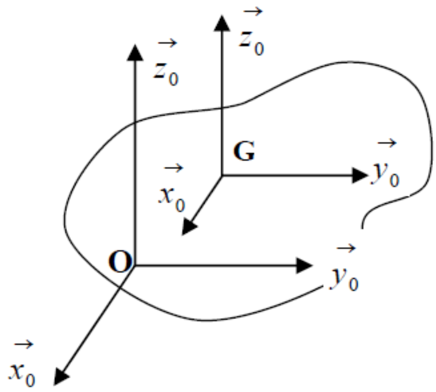


Figure IV. 6: Moment d'inertie par rapport deux point différents (Théorème de HUYGENS).

$$I_{Oxx} = I_{Gxx} + m(y_G^2 + z_G^2) \qquad I_{Oxy} = I_{Gxy} + m x_G y_G$$

$$I_{Oyy} = I_{Gyy} + m(x_G^2 + z_A^2) \qquad I_{Oxz} = I_{Gxz} + m x_G z_G$$

$$I_{Ozz} = I_{Gzz} + m(x_G^2 + y_G^2) \qquad I_{Oyz} = I_{Gyz} + m y_G z_G$$

Exemple :

Déterminer le moment d'inertie au point O de la plaque mince rectangulaire de masse m , de longueur $2a$ et de largeur $2b$ de centre d'inertie G *(a, b,* 0*)(exemple précédent).*

On déduit par le théorème de Huygens :

$$I_{Oxx} = \frac{mb^2}{3} + mb^2 = \frac{4}{3}mb^2 \quad ; \quad I_{Oxy} = 0 + mab$$

$$I_{Oyy} = \frac{ma^2}{3} + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2 \quad ; \quad I_{Oxz} = 0 + ma.0 = 0$$

$$I_{Oyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2) + m(a^2 + b^2) = \frac{4}{3}m(a^2 + b^2) \quad ; \quad I_{Oyz} = 0 + mb.0 = 0$$

La matrice d'inertie au point O est égale à :

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$