Chapitre III

Statique d'un corps solide

III. Statique d'un corps solide

III.1 Définition

La statique est la partie de la mécanique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels soumis à un ensemble de forces. Ces systèmes peuvent se réduire à un point matériel, un ensemble de points matériels, un solide ou à un ensemble de solides. Dans cette partie nous analyserons les actions mécaniques exercées sur ces systèmes à travers l'étude de l'équilibre de celui-ci.

Un système matériel est en équilibre statique par rapport à un repère donné, si au cours du temps, chaque point de l'ensemble garde une position fixe par rapport au repère. Pour qu'un système soit en équilibre sous l'effets d'un ensemble de forces, il faut :

1- Faire la somme des forces et transformer l'ensemble des forces appliquées sur le corps solide on un modèle simplifié.

2- Définir les conditions d'équilibre de l'ensemble des forces appliquées sur le corps solide.

Les problèmes de la statique peuvent être résolus par la méthode "représentation graphique" ou à l'aide des calculs numérique (Méthode analytique).

Remarques :

1- On appelle, tout corps n'est pas fixé avec d'autres corps, ou l'on peut glisser de sa position dans n'importe quelle direction dans l'espace un corps libre.

2- Si on peut changer un ensemble des forces qui agissent sur un coprs libre avec un autre ensemble sans faire un changement dans l'état initial du coprs (libre ou statique), ces deux ensembles sont appellés "ensemble des forces équivalent" .

3- Un corps soumi a un ensemble de forces et reste en équilibre. cet ensemble est appellé ensemble équilibré ou équivalent à zero.

4- On appelle la seule force qui est équivalente à un ensemble de force, "la résultante".

III.2 Les axiomes de la statique

III.2.1 Corps soumis à l'action de deux forces coplanaires

Comme les deux forces sont situées dans le même plan, l'équilibre du corps se ramène à l'équilibre d'une figure plane ou plaque soumise aux mêmes forces (Figure II.1). La forme du corps n'a aucune influence sur les conditions d'équilibre de translation et de rotation puisqu'on suppose le corps indéformable. Une difficulté non négligeable pour résoudre une problème d'équilibre statique est de se libérer de la forme du corps et de ne considérer que les conditions statiques d'équilibre. C'est la raison pour laquelle il est recommandé de remplacer le corps par une plaque sur laquelle seront représentées toutes les forces coplanaires appliquées. Montrons par quelques exemples les conditions d'équilibre d'un corps soumis à l'action de deux forces.

L'expérience montre qu'il existe un seul cas pour lequel le corps reste en équilibre. Ce cas représente le quatrième axiome de la mécanique.

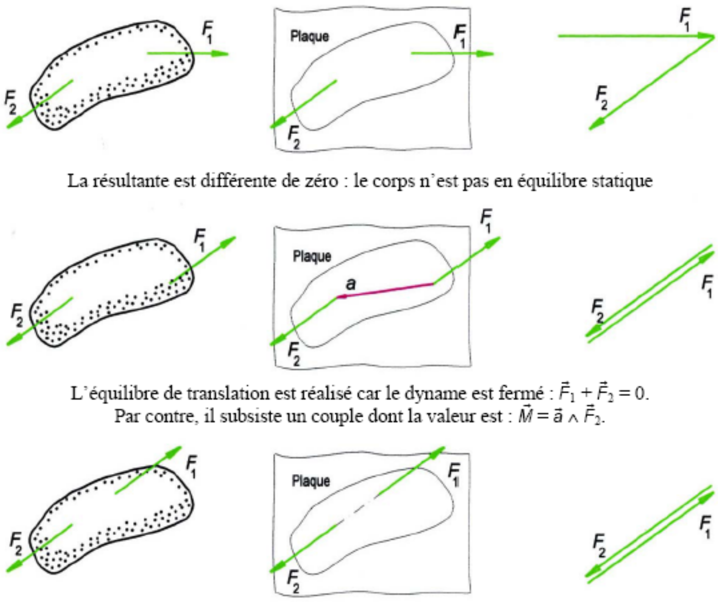


Figure III. 1: Corps soumis un deux forces.

Axiome 1 de la mécanique

Si deux forces sont appliquées sur un corps solide libre, ce corps ne peut rester en équilibre que si ces deux forces ont même intensité, même ligne d'action mais sont de sens opposés.

Les conditions d'équilibre peuvent aussi s'exprimer sous la forme suivante :

1. Equilibre de translation : polygone des forces fermé.

2. Equilibre de rotation : même ligne d'action pour les deux forces sur le corps.

Axiome 2 de la mécanique

Les conditions d'équilibre d'un corps solide ne sont pas modifiées si l'on ajoute au système de forces ou si on lui enlève un système de forces équilibrées.

III.2.2 Transport d'une force sur sa ligne d'action

Soit une force $\vec{F}$ appliquée au point ***P*** sur un corps solide quelconque (Figure III.2). En ajoutant sur la ligne d'action de $\vec{F}$ deux forces opposées $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, de même module que la force primitive, de même ligne d'action, les deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}_1$ s'annulent. La force $\vec{F}_2$ restante est donc équivalente à la force primitive $\vec{F}$. On peut énoncer ainsi la loi fondamentale du déplacement de forces.

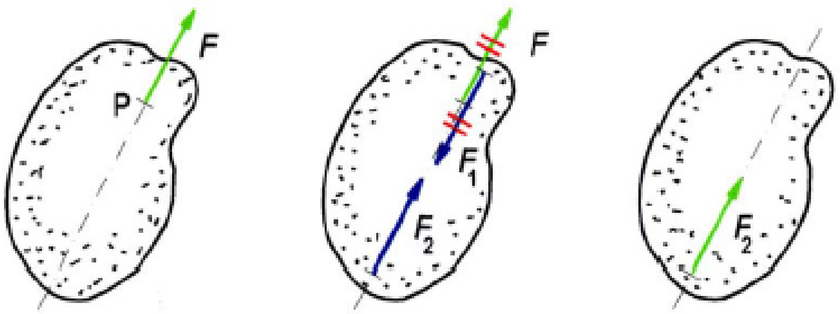


Figure III. 2: Transport d'une force sur sa ligne d'action.

Transport d'une force

On peut transporter le point d'application d'une force le long de sa ligne d'action sans modifier l'équilibre ou l'état de mouvement d'un corps solide.

Axiome 3 (parallélogramme)

Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ appliquées sur un point matériel possède une résultante unique représentée par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.

L'expérience montre que l'axiome 2 de la mécanique est valable dans tous les cas. Les forces $\overrightarrow{F_1}$ *et* $\overrightarrow{F_2}$ sont les composantes, la force $\overrightarrow{F_R}$ est appelée résultante. Cet axiome correspond à la définition de l'addition de deux vecteurs libres. L'axiome du parallélogramme des forces s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}.$$

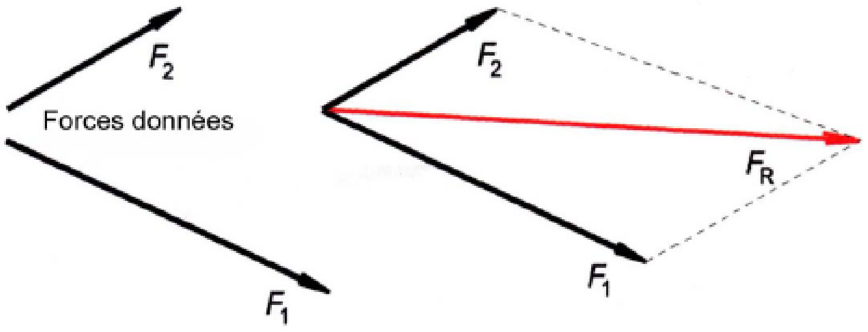


Figure III. 3: Résultante de deux forces (Principe de parallélogramme).

III.3 Principe de l'égalité de l'action et de la réaction

Soit un corps indéformable et homogène de poids G reposant sur un plan horizontal parfaitement lisse. Isolons le corps, c'est-à-dire supprimons le plan et maintenons le corps parfaitement immobile au moyen d'une force $\overrightarrow{F_N}$, placée sur la surface de contact entre le corps et le plan. La force $\overrightarrow{F_N}$, dessinée concentrée sur la figure ci-dessous, est en vérité répartie sur toute la surface de contact. Remarquons en passant que les forces de contact sont toujours situées au niveau de la surface et *dirigées vers l'intérieur* du corps.

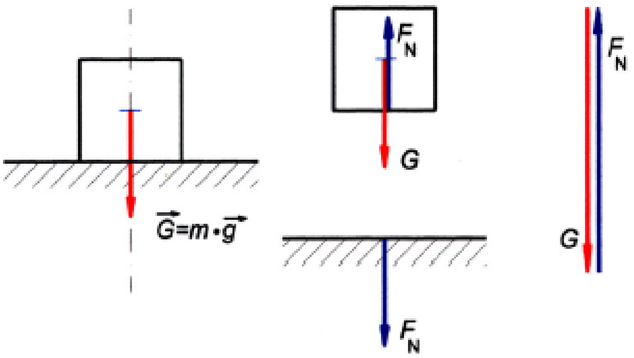


Figure III. 4: Action et réaction de deux corps en contact.

La force $\overrightarrow{F_N}$ est l'action mécanique exercée par le plan horizontal sur le corps. La force $\overrightarrow{F_N}$ est appelée aussi *réaction d'appui* : réaction parce que le corps agit sur le plan horizontal qui réagit alors sur le corps pour le mettre en équilibre statique. La force $\overrightarrow{F_N}$ agit aussi sur le plan horizontal. Cette force possède la même ligne d'action que la précédente, la même intensité, mais son sens est opposé. Le principe de l'action et de la réaction, énoncé par Newton, est la quatrième axiome de la mécanique. Il peut s'énoncer comme suit :

Axiome 4

Au contact de deux corps, les forces existent toujours par paire. Ces forces ont même intensité, même ligne d'action, mais elles sont de sens opposés.

Cette loi de l'égalité de l'action et de la réaction est tout à fait générale. Elle s'applique aussi bien aux actions mécaniques à distance qu'à celles de contact ou de liaison. Le but de la statique est la recherche de l'équilibre des corps. Pour résoudre facilement les problèmes qui se présentent, on a toujours avantage à isoler successivement chacun des corps qui constitue l'ensemble du problème. On distingue :

1. Les *forces connues* comme les charges appliquées sur la construction, les poids des divers corps, etc. Ces forces sont définies par leur point d'application, leur direction, leur sens et leur intensité.

2. Les *forces inconnues* comme les forces de liaison entre les corps, les réactions des appuis extérieurs, etc. En général, le point d'application de la force est donné par la construction tandis que les autres caractéristiques vectorielles sont à rechercher.

III.3.1 Principe de l'isolement des pièces

Pour trouver les actions mécaniques extérieures exercées sur les corps en étude, une méthode simple et efficace consiste à dessiner chaque corps séparément et à représenter les forces connues par des grandeurs vectorielles et les forces inconnues par un ou plusieurs points d'interrogation. Bien souvent, il est impossible de trouver l'équilibre statique d'une construction sans isoler chacune de ses parties. Dans les cas simples, on peut trouver les actions extérieures sur l'ensemble, ceci pour autant que le nombre d'inconnues ne dépasse pas le nombre fixé par les conditions d'équilibre statique.

Isolement des pièces

Isoler un corps signifie supprimer tous les appuis ou toutes les liaisons extérieures et les remplacer par des forces connues ou inconnues.

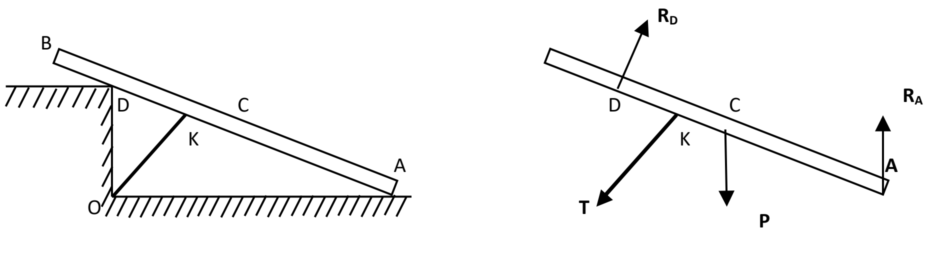


Figure III. 5: Isolement et représentation des efforts exercées sur la barre.

III.3.2 Liaisons sans frottement des solides et leurs réactions :

a. Réactions aux appuis et aux liaisons

- **Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse**

Les contacts entre les solides sont ponctuels.

Soit *(S)* un solide reposant sur une surface *(P)* , on dit que le point *A* du solide est un point d'appui s'il reste continuellement en contact de la surface *(P)*. Si le plan *(P)* est parfaitement lisse alors la force de liaison (la réaction $\vec{R}$) au point de contact est normale à ce plan.

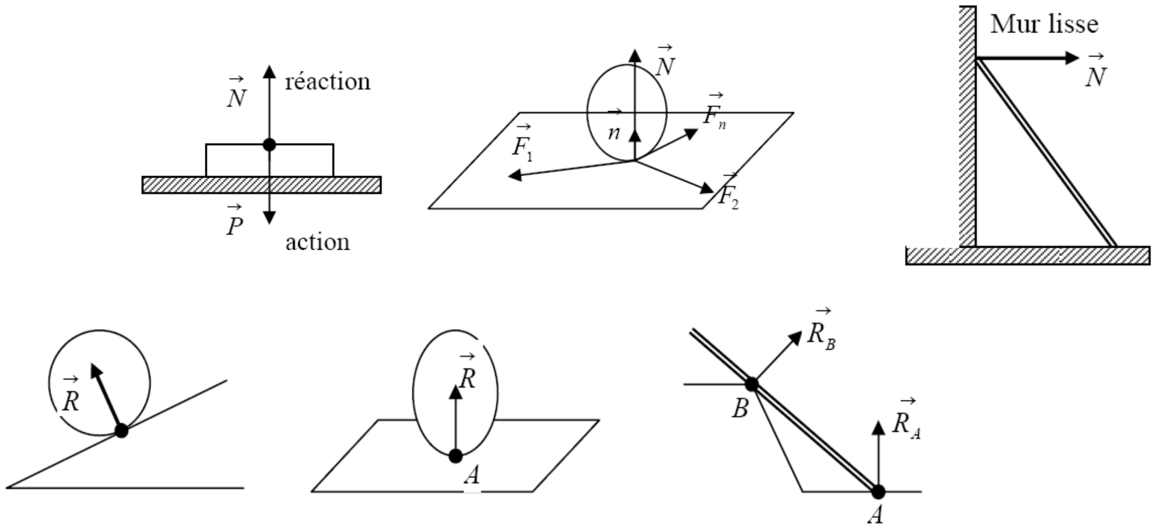


Figure III. 6: Différents types des liaisons mécaniques (Appuis simple).

- **Liaison verrou (Articulation cylindrique ou appui double)**

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S_1) a deux degrés de liberté par rapport au solide (S_2) : Une translation suivant l'axe *Az*, et une rotation autour du même axe. L'appuis double ou l'articulation cylindrique est une liaison plan qui réduit le degré de liberté. Un corps avec une liaison cylindrique à une mouvement de rotation autour de l'axe de la liaison. Cette liaison supprime le mouvement de translation suivant l'axe Ox et Oy qui est remplacer après isolement par deux réactions Rx et Ry (Figure III.7). La somme de ces deux réactions représente la résultante R qui est la réaction de la liaison cylindrique ou l'appuis double avec :

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_x} + \overrightarrow{R_y}$$

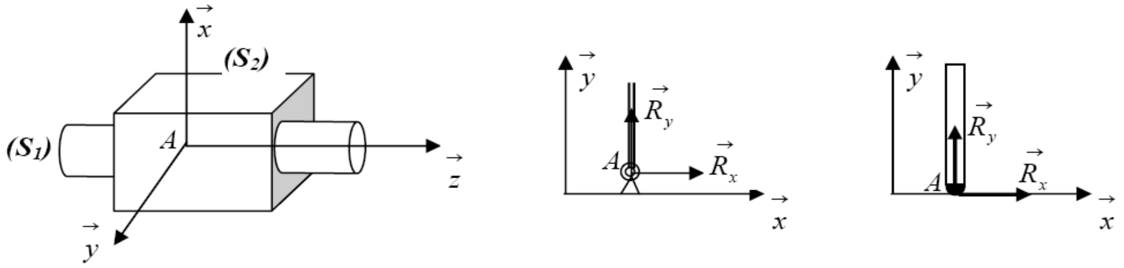


Figure III. 7: Représentation de la liaison appuis double ou articulation cylindrique.

- **Liaison rotule (Articulation sphérique)**

Si un corps lié a une rotule, le corps reste seulement en mouvement de rotation sur les trois axe. Cette liaison supprime les trois mouvements de translation du corps, et engendre trois réaction Rx, Ry et Rz. la résultante de ces trois réaction représente la réaction de la rotule sur le corps (Figure III.8).

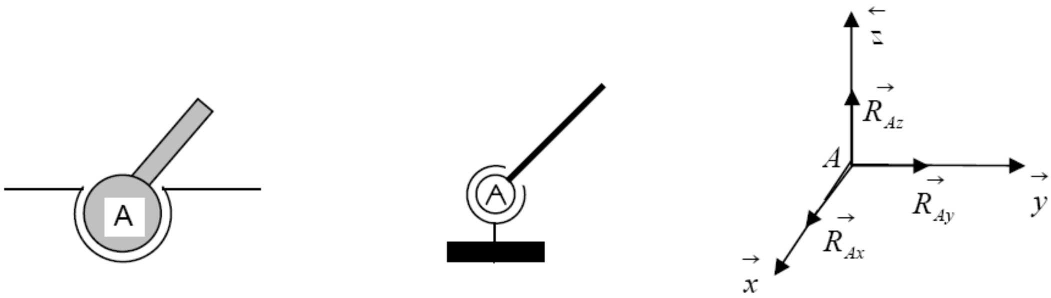


Figure III. 8: Réaction de la liaison rotule.

La réaction au point *A* de l'articulation sphérique a trois composantes :

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_{Ax}} + \overrightarrow{R_{Ay}} + \overrightarrow{R_{Az}}$$

b. Encastrement d'un solide

On dit qu'un solide est encastré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison (Figure III.9) est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$: la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point *A*.

$\overrightarrow{M_{/A}}$: le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point *A*.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}$$

$$\overrightarrow{M}_{/A} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F_i}$$

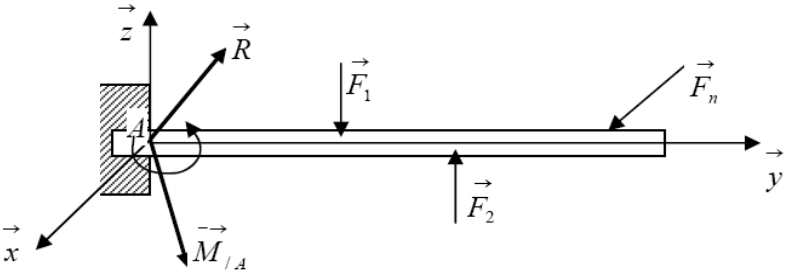


Figure III. 9: Représentation de la réaction d'une liaison encastrement.

c. Combinaisons de liaisons

Avec ces différents types de liaisons *(Appui simple, articulation cylindrique, articulation sphérique et encastrement)* nous pouvons réaliser des combinaisons qui permettent de réaliser montages mécaniques statiquement déterminés.

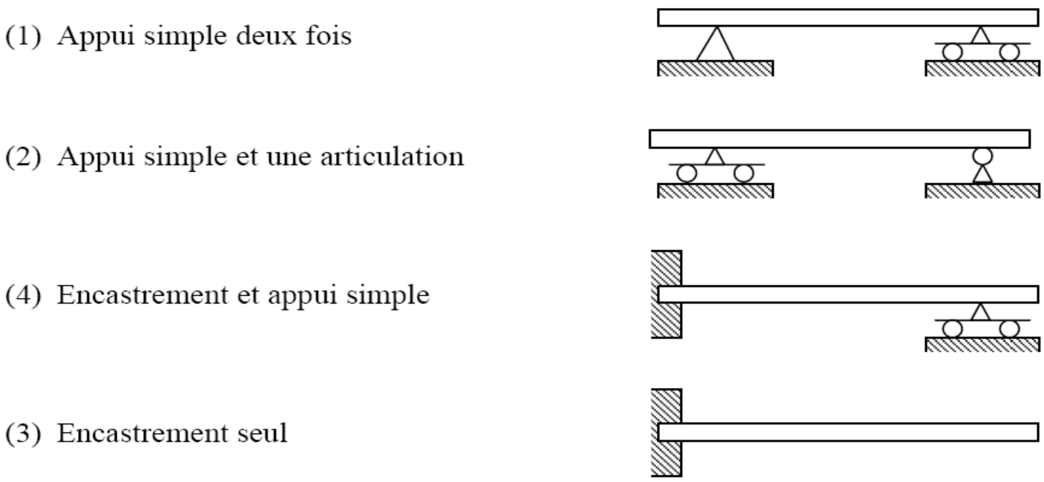


Figure III. 10 : Combinaison des liaisons sur un corps.

III.4 Les Forces parallèles

III.4.1 Résultante de deux forces parallèles et de même sens

Théorème: La résultante de deux forces parallèles de même sens appliquées en deux points invariablement liés entre eux, est égale à la somme des composantes, parallèles à leur direction, agit dans le même sens des deux forces, et le point d'application de cette résultante situé entre eux tel que ses distances à ces points sont proportionnelles à l'intensité de ces forces.

Soient F_1 et F_2 deux forces parallèles et de même sens appliquées au points A et B d'un même corps solide avec $F_1 > F_2$ (Figure III.11), et proposons-nous de trouver leur résultante F. Ajoutant à ce système, un système de forces équilibrés tel que $R = R' = F_1 + F_2$ (Le système reste toujours en équilibre).

D'aprés méthode parallélogramme on peut trouver les résultantes Q= F_1+R et Q'= F_2+R'. L'intersection de Q et Q' est le point C. La projection orthogonale du Point C sur AB donne le point d'application de la résultante F. Pour trouver la valeur de F en fonction de F_1 et F_2, en transport Q et Q' au point C, et en décompose chacune sur le deux axes CD et CD' . Les deux forces R et R' s'annule et la résultante F=F_1+F_2.

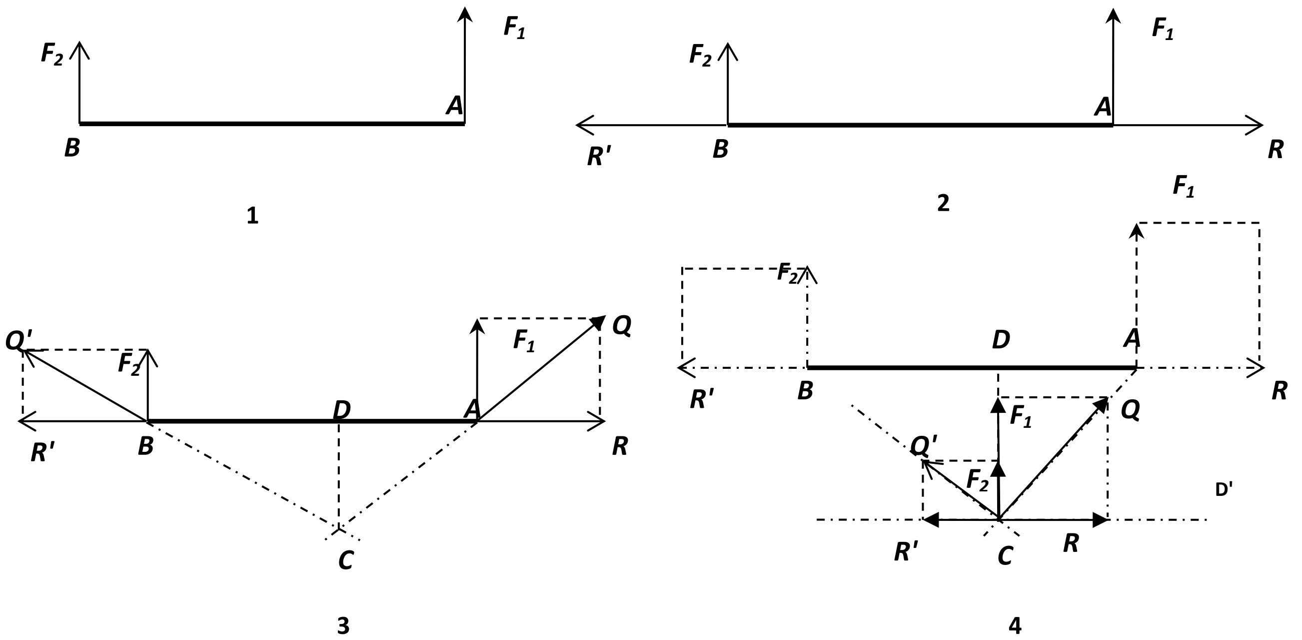


Figure III. 11: Résultante de deux forces parallèles de même sens.

Maintenant trouvant la relation qui donne la distances entre la résultante F et les point A et B.

a partir des deux triangles ACD et FRQ on a :

$$\frac{CD}{AD} = \frac{F_1}{R} \quad ==\gg CD = AD.\frac{F_1}{R}$$

a partir des deux triangles BCD et F_2R'Q' on a :

$$\frac{CD}{BD} = \frac{F_2}{R'} \quad ==\gg CD = BD.\frac{F_2}{R'}$$

L'égalité des deux equations donne :

$$AD.\frac{F_1}{R} = BD.\frac{F_2}{R'} ===> AD.F_1 = BD.F_2 \; ou \quad \frac{AD}{F_2} = \frac{BD}{F_1}$$

On a aussi AD = AB-BD et $AD.F_1 = BD.F_2$ Donc l'équation devient :

$$(AB - BD).F_1 = BD.F_2 ===> AB.F_1 - BD.F_1 = BD.F_2 ====> AB.F_1 = BD.(F_1 + F_2)$$

ou $AB.F_1 = BD.F ===> \frac{AB}{F} = \frac{BD}{F_1}$

Finalement, la relation qui donne le point d'application la resultante F de deux forces parallèles F_1 et F_2 est :

$$\frac{AD}{F_2} = \frac{BD}{F_1} = \frac{AB}{F}$$

III.4.2 Résultante de deux forces parallèles et de sens contraire

Théorème: La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire appliquées en deux points invariablement liés entre eux, est égale à la différences des composantes, parallèles à leur direction, agit dans le sens de la plus grande, et le point d'application de cette résultante rencontre le prolongement de la droite qui joints d'application des composantes en un point tel que ses distances à ces points sont inversement proportionnelles à l'intensité de ces forces.

Soient F_1 et F_2 deux forces parallèles et de sens contraire appliquées au points A et B d'un même corps solide avec $F_1 > F_2$ (Figure III.12), et proposons-nous de trouver leur résultante R.

La composition de ces deux forces peut se réduire de celle de deux forces parallèles et de même sens. En effet, prenons sur le prolongement de la droite AB et du côté de la plus grande force, un point I telque l'on ait :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{F_2}{F_1 - F_2}$$

et appliquant en ce point I deux force R et R' égale chacuneà la différence $F_1 - F_2$, directement opposées et parallèles aux forces données ($\vec{R} = -\overrightarrow{R'}$ et $R' = F_1 - F_2$): ces deuc forces, se détruisant, ne changent rien au système.

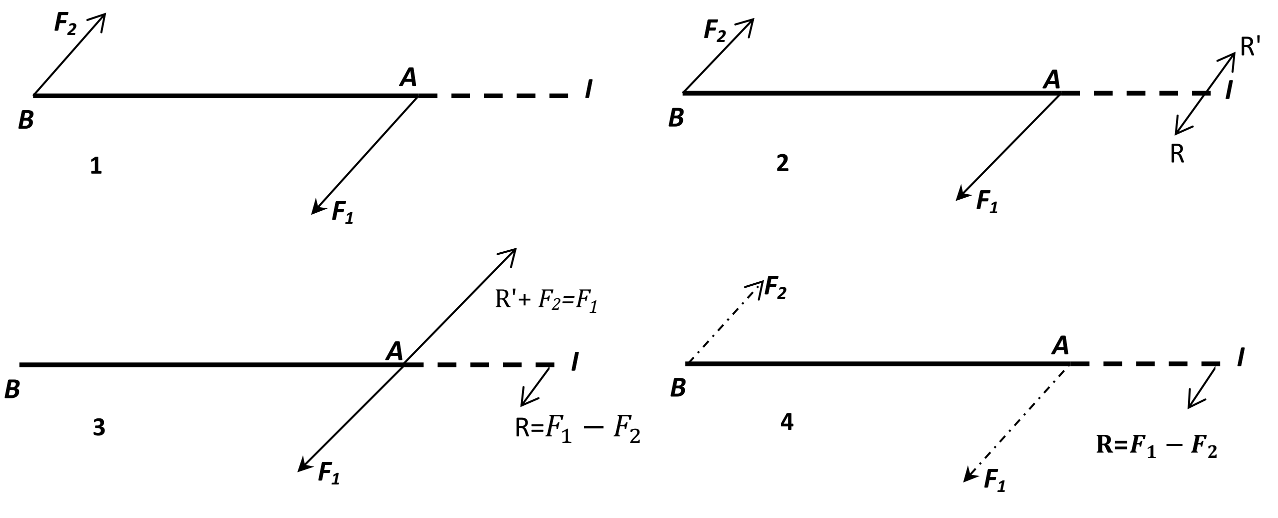


Figure III. 12: Résultante de deux forces parallèles de sens opposés.

D'après la relation précédente, ont voit que les forces R' et F_2 sont inversement proportionnelles aux distance AI et AB de leur point d'application à celui de la force F_1, et puisque l'on a par hypothèse R'= F_1- F_2 ou F=R+ F_2, on en conclut que la force F_1 est égale et directement opposée à la résultante des forces R' et F_2. Donc, le système des trois forces R', F_2 et F_1 est en équilibre, et comme dans tout système de force en équilibre l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de touts les autres, nous pouvons dire que R' est égale et directement opposée à la résultantes des forces F_1 et F_2, et par suite la force R est la résultante cherchée avec :

$$R = F_1 - F_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{BI}{F_1} = \frac{AI}{F_2} = \frac{AB}{R}$$

III.5 Equilibre du point matériel

III.5.1 Solution graphique

a. Conditions d'équilibre du point matériel

Un corps réel est soumis généralement à plusieurs forces non concourantes. Chacune de ces forces est appliquée à l'extérieur ou à l'intérieur du corps suivant des lignes d'action quelconques. Si le corps est vu de très loin, il peut être confondu avec un point matériel (Figure III.13). Soit un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces quelconques. Ces forces sont nécessairement concourantes sur ce point sans volume. Si le point matériel est en équilibre statique, la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui doit être nulle.

Les méthodes graphique et analytique permettent de trouver les conditions particulières d'équilibre statique du point matériel.

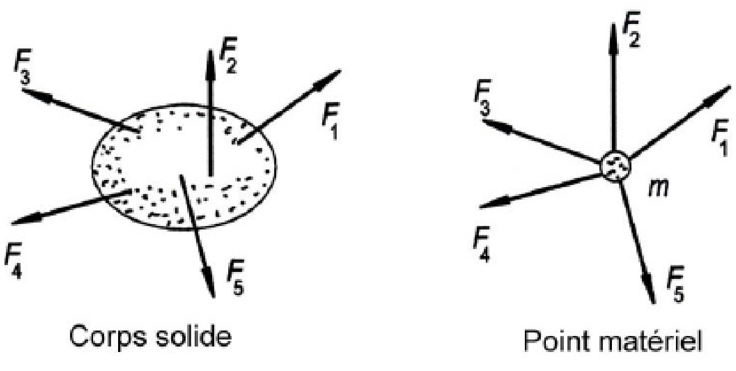


Figure III. 13: Système de corps solide et le système de point matériel.

La règle générale s'exprime par la phrase suivante :

Condition d'équilibre statique du point matériel
Pour qu'un point matériel soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante de toutes les forces appliquées sur le point soit nulle.

Inversement, un point matériel soumis à l'action d'une résultante de forces nulle est en équilibre statique si la vitesse du point est initialement nulle. La condition générale d'équilibre statique du point, en solution graphique, devient :

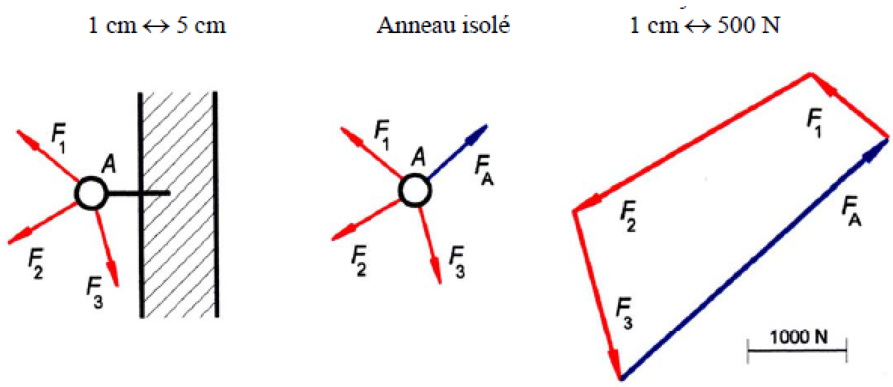
Condition d'équilibre statique du point matériel, solution graphique
Pour qu'un point matériel soit en équilibre statique, il faut et il suffit que le polygone construit par toutes les forces soit fermé, c'est-à-dire que l'extrémité de la dernière force coïncide avec l'origine de la première force.

Exemples :

Exemple A:

Trois forces coplanaires agissent sur un anneau *A* fixé au mur vertical selon figure. Les valeurs des forces connues sont : F_1 = 1000 N (140°) F_2 = 2750 N (210°) F_3 = 1750 N (285°).

Déterminer la direction de l'action du mur sur l'anneau.



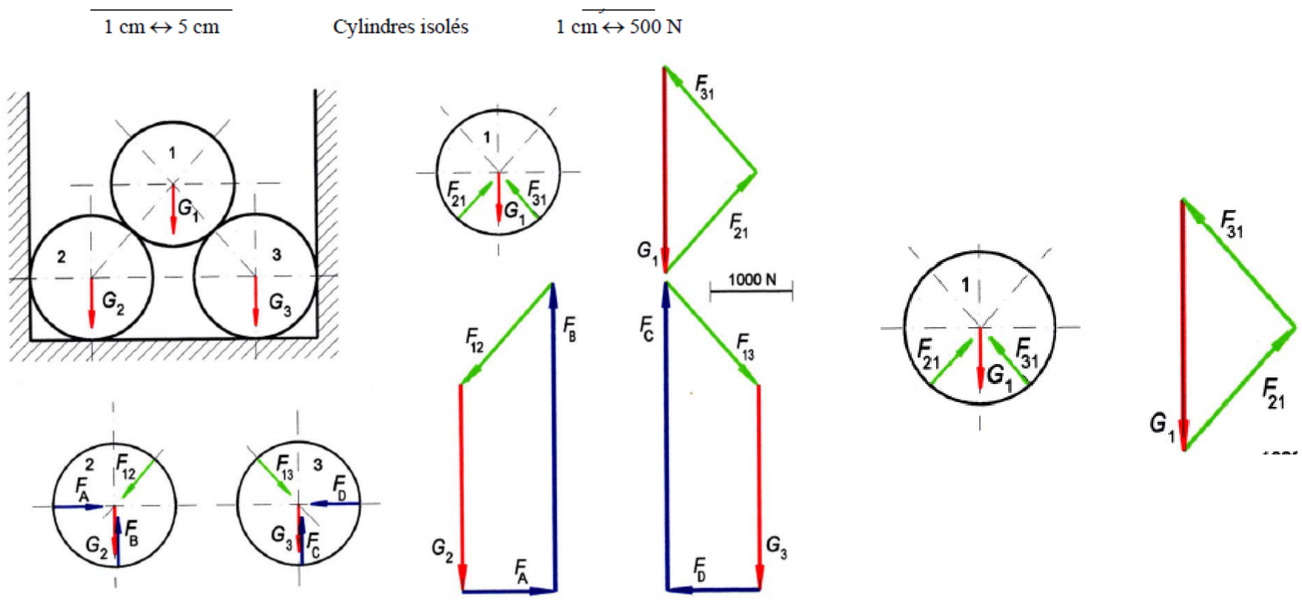
Après avoir choisi un échelle de dessin, on trace le polygone former par les forces appliquées sur l'anneau A et la réaction F_A. Puis on mesure la longueur de F_A, on trouve que F_A=7,25 cm . Pour obtenir l'intensité de la force la longueur est multipliée par l'échelle de dessin. F_A=7,25 cm x 500 N/cm = 3625 N d'ou l'angle de F_A est égale à 41,8°.

Exemple B :

Trois cylindres homogènes, pesant chacun 2500 N, sont placés entre deux appuis verticaux constitués par des parois sans frottement et un sol horizontal. Trouver les efforts entre les cylindres ainsi que les actions des parois et du sol sur chacun des cylindres.

Méthode de résolution

Pour trouver les forces appliquées entre les cylindres et les appuis, il faut introduire la méthode générale de résolution, soit isoler successivement chacun des cylindres en commençant par le cylindre supérieur.

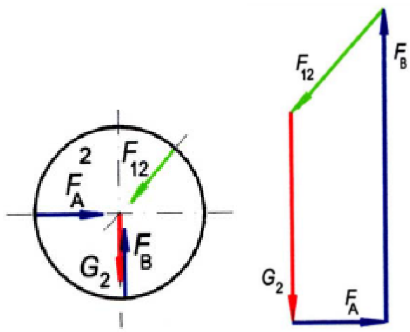


Cylindre 1 :

Condition d'équilibre : $\overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}} = \vec{0}$

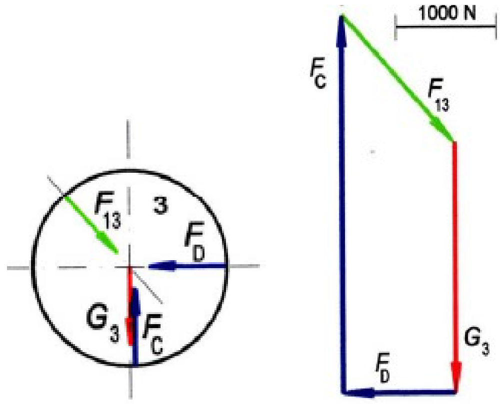
Cylindre 2 :

Condition d'équilibre : $\overrightarrow{G_2} + \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \vec{0}$



Cylindre 3 :

Condition d'équilibre : $\overrightarrow{G_3} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_D} = \vec{0}$

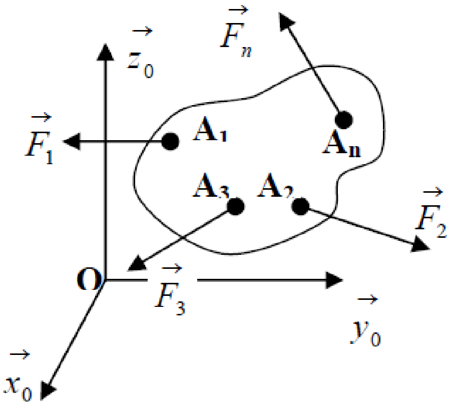


III.5.2 Equilibre analytique du point matériel

Le point matériel est dit *libre* lorsqu'il peut se déplacer dans toutes les directions de l'espace. Soumis à l'action de plusieurs forces, il suit le mouvement que lui imprime la force résultante.

Si le point matériel reste immobile, on dit qu'il est en équilibre. Un point matériel soumis à l'action de plusieurs forces dont la résultante est nulle est nécessairement en équilibre statique. La règle énoncée au chapitre précédent est aussi valable dans la solution analytique. Pour que la résultante des forces soit nulle, il faut que chacune de ses projections sur les axes de coordonnées soit nulle. Les conditions analytique d'équilibre peuvent s'écrire comme suit :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F_\iota} \quad = \vec{0} \;===> \begin{cases} \sum_i \overrightarrow{F_{\iota x}} & = \overrightarrow{F_{1x}} + \overrightarrow{F_{2x}} + \cdots + \overrightarrow{F_{nx}} = \vec{0} \\ \sum_i \overrightarrow{F_{\iota y}} & = \overrightarrow{F_{1y}} + \overrightarrow{F_{2y}} + \cdots + \overrightarrow{F_{ny}} = \vec{0} \\ \sum_i \overrightarrow{F_{\iota z}} & = \overrightarrow{F_{1z}} + \overrightarrow{F_{2z}} + \cdots + \overrightarrow{F_{nz}} = \vec{0} \end{cases}$$



- $\vec{M}_{(\vec{R})/O} = \sum_i \overrightarrow{M_\iota}(F_i)_{/O} = \vec{0} \quad ===> \begin{cases} \overrightarrow{M_y} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_z} = \vec{0} \end{cases}$

Dans le cas d'un solide soumis à des forces **coplanaires,** le système précédent se réduit à trois équations scalaires. Soit *(xoy)* , le plan contenant les forces appliquées au solide, nous avons alors :

$$z = 0 \; et \; F_z = 0 <==> \; \overrightarrow{M_x} = \vec{0} \; \; et \; \overrightarrow{M_y} = \vec{0} \; \text{ et } \overrightarrow{M_z} = \vec{M}_{(\vec{R})/O}$$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\overrightarrow{R_x} = \sum_i \overrightarrow{F_{\iota x}} = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{R_y} = \sum_i \overrightarrow{F_{\iota y}} = \vec{0}, \qquad et \;\; \vec{M}_{/O} = \sum_i \overrightarrow{M_{\iota z}} = \vec{0}$$

$$\vec{F_\iota} = \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy}\,, \\ 0 \end{cases} \quad OA_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_{\iota/O}} = \overrightarrow{OA_\iota} \wedge \overrightarrow{F_\iota} = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ x_i . F_{iy} - y_i . F_{ix} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

III.5.3 Théorie de trois forces coplanaires (Triangle des forces)

Le problème de statique du corps solide soumis à l'action de trois forces coplanaires se présente généralement sous la forme suivante :

1. *Une force est entièrement connue* : en direction, sens et intensité.

2. *La ligne d'action de la deuxième force est fixée sur le corps*.

3. *Le point d'application de la troisième force est connu*.

Les conditions d'équilibre d'un corps solide soumis à l'action de trois forces coplanaires peut se ramener à celles du corps soumis à l'action de deux forces en cherchant la résultante des deux premières. Remarquons en passant une propriété fondamentale des corps soumis uniquement à l'action de trois forces : **les trois forces ne peuvent être que coplanaires**.

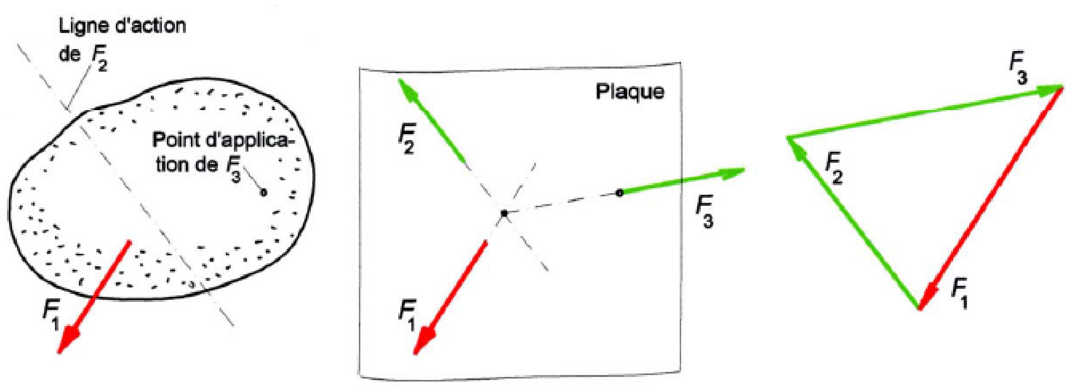


Figure III. 14: Equilibre d'un corps solide soumis à l'action de trois forces coplanaires.

Graphiquement, il est plus simple d'exprimer ces conditions sous la forme pratique suivante :

1. Isoler le corps solide en le représentant par exemple sur une plaque.

2. Représenter les forces par des vecteurs conventionnels. Les forces connues seront représentées en direction et sens là où elles agissent, les forces inconnues seront accompagnées de points d'interrogation, un point par inconnue.

3. Pour trouver la direction de la force dont seul le point d'application est donné, chercher le point de concours des trois forces.

4. Construire le triangle des forces en portant tout d'abord la force entièrement connue et en fermant le ***triangle des forces*** par la direction des deux autres.

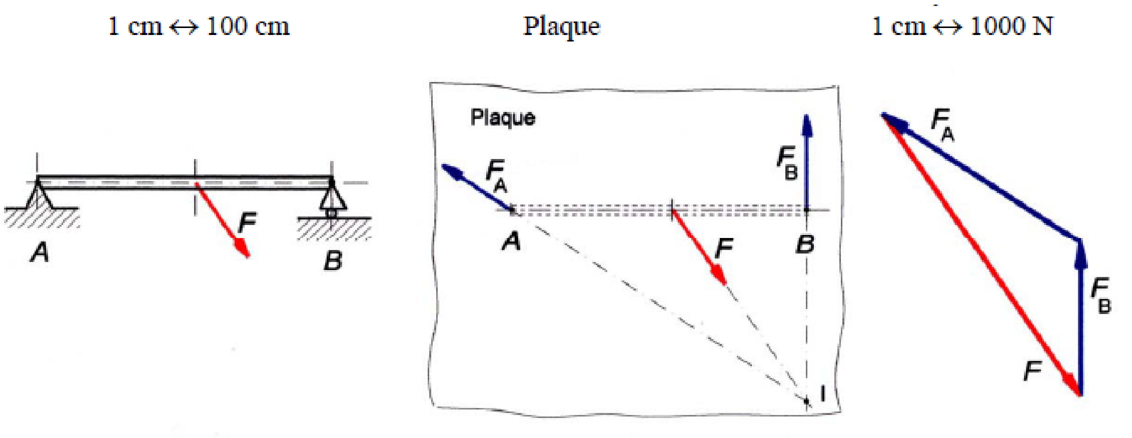
Théorie de trois forces : *si un corps solide* ***est équilibré*** *sous l'action des* ***trois forces non parallèles et coplanaires****, donc les lignes d'actions de ses trois forces se coïncident dans un point.*

Exemple :

Une poutre rectiligne, articulée sans frottement à ses deux extrémités A et B, supporte une force oblique $\vec{F}$. La poutre repose à gauche sur un appui articulé fixe, à droite sur un appui à rouleau. Trouver les réactions des appuis aux points A et B.

Solution

La force $\vec{F}$ donnée est entièrement connue par son point d'application, sa direction et sens, son intensité. La direction de la réaction d'appui $\vec{F}_B$ est perpendiculaires à la direction de l'appui, c'est-à-dire ici verticale. La réaction d'appui au point A n'est connue que par son point d'application ; sa direction, son sens et son module sont inconnus. Le nombre d'inconnues est 3 :



III.6 Problèmes statiquement déterminés ou indéterminés

Un problème est statiquement déterminé lorsque le nombre d'inconnues introduites par l'énoncé ne dépasse pas le nombre d'équations d'équilibre. Ce type de problème est dit problème ***isostatique***. Un problème est statiquement indéterminé lorsque le nombre d'inconnues dépasse le nombre d'équations d'équilibre. Ces problèmes sont appelés ***hyperstatiques*** c'est-à-dire des problèmes qui dépassent les possibilités de solution des méthodes de la statique.

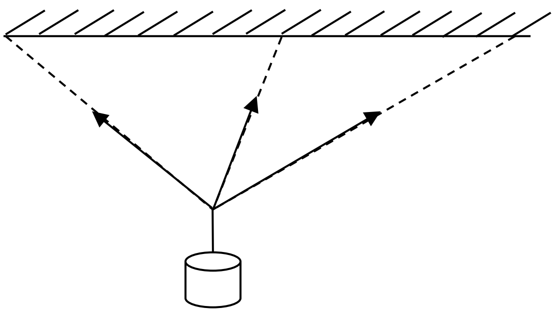


Figure III. 15: Problème Hyperstatique.

Généralement, les problèmes hyperstatiques peuvent se résoudre en introduisant des analyses supplémentaires, par exemple les relations existantes sur les déformations tirées de la résistance des matériaux.

III.7 Etapes de résolution des problèmes en statique

1- Spécification du corps a étudié.

2- Isolement du corps de ses liaisons et représentation des forces connues et les réactions des liaisons isolées.

3- Composition des conditions d'équilibres du corps (Graphique ou analytique).

4- Calcul des valeurs inconnus et vérification de la solution trouvée.

III.8 Le Frottement

III.8.1 Frottement de glissement

Dans la partie précédente, les corps solides sont considérés comme parfaitement rigides et parfaitement polis. Alors, si deux corps en repos ou en mouvement sont en contact par un point et peuvent glisser l'un sur l'autre, leur action mutuelle est normale au plan tangent commun en ce point.

Cette hypothèse est contraire à l'expérience : les solides naturels ne sont ni parfaitement rigides ni parfaitement polis. Quand deux solides naturels sont en contact, le contact n'a jamais lieu en un point unique; les deux corps subissent des déformations, généralement très petites, qui les mettent en contact suivant une petite portion de surface : ces déformations, permanentes si les corps sont en équilibre, sont variables quand les corps glissent l'un sur l'autre; il se produit alors des vibrations moléculaires et il se développe également de la chaleur ou de l'électricité, dont la production absorbe une partie du travail des forces motrices.

Ces phénomènes, très compliqués dans le calcul, sont introduites en supposant qu'à la réaction normale des deux corps en contact se joigne une réaction tangentielle appelée frottement. Les premières expériences sur le frottement, faites en 1781 par Coulomb, furent reprises et confirmées par le général Morin. Il importe de distinguer deux cas dans le frottement de glissement :

a- le frottement à l'état de repos et, en particulier, le frottement au départ;

b- le frottement à l'état de mouvement.

III.8.2 Loi du frottement de glissement à l'état de repos

Supposons un bloc pesant placé sur une table horizontale : le système est en équilibre et, par suite, les actions de la table sur le bloc ont actuellement une résultante $\boldsymbol{N}$ normale à la table, égale et opposée au poids $\boldsymbol{Q}$ du corps. Appliquons maintenant au corps, dans un plan vertical du centre de gravité, aussi près que possible de la table, une force horizontale $\boldsymbol{P}$ dont nous ferons croître graduellement l'intensité à partir de zéro.

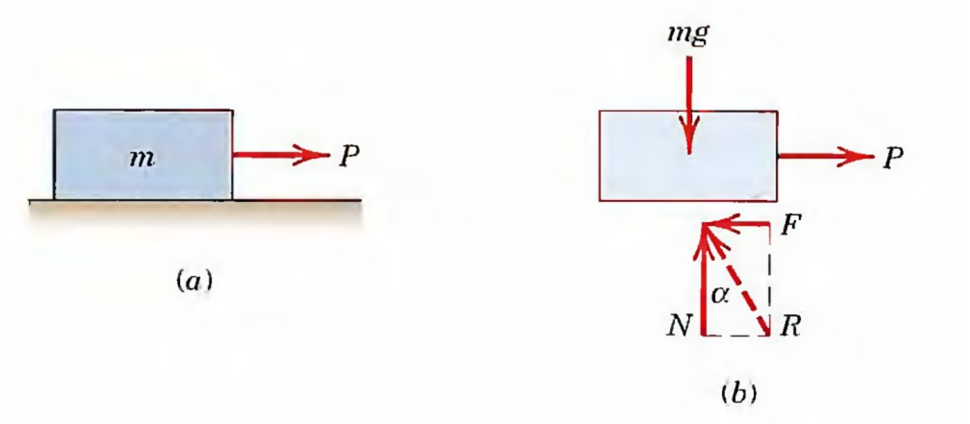


Figure III. 16: Représentation de la force de frottement.

Quand cette force $\boldsymbol{P}$ est très petite, le corps ne glisse pas : il reste en équilibre. Il faut donc que la réaction R de la table sur le corps soit égale et opposée à la résultante du poids $\boldsymbol{Q=mg}$ et de la force $\boldsymbol{P}$; cette réaction peut se décomposer en deux, l'une normale N, égale et directement opposée à $\boldsymbol{Q}$, l'autre tangentielle F, égale et opposée à $\boldsymbol{P}$: cette composante tangentielle est la force de frottement. L'angle $\boldsymbol{\alpha}$ de $\boldsymbol{R}$ avec La normale N est :

$$\boldsymbol{tang\ \alpha = \frac{F}{N} = \frac{P}{Q}}$$

Si l'on fait croître graduellement $\boldsymbol{P}$, il arrive un moment où, cette force ayant acquis une intensité $\boldsymbol{P'}$, le corps se met en mouvement. La valeur correspondante de $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F = P'}$, s'appelle le frottement au départ; la valeur correspondante $\boldsymbol{\varphi}$ de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$, s'appelle angle de frottement.

$$\boldsymbol{tang\ \varphi\ = \frac{P'}{Q}}$$

Coulomb a mesuré $\boldsymbol{P'}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ à l'aide d'une disposition expérimentale (chariot tiré par des poids croissants) permettant de réaliser les conditions précédentes; il a trouvé les trois lois suivantes :

1- Le frottement au départ est indépendant de l'étendue des surfaces en contact;

2- Il dépend de leur nature ;

3- Il est proportionnel à la composante normale de la réaction ou, ce qui revient au même, à la composante normale de la pression.

Le rapport constant $\boldsymbol{f}$ du frottement au départ $\boldsymbol{\varphi}$ avec la réaction normale $\boldsymbol{N}$ ou la pression normale $\boldsymbol{Q}$ s'appelle coefficient de frottement.

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{N}} = \frac{\boldsymbol{P'}}{\boldsymbol{Q}}$$

L'angle $\boldsymbol{\alpha}$ tant que l'équilibre subsiste, est moindre que $\boldsymbol{\varphi}$.

III.8.3 Équilibre des solides naturels avec frottement

a- Un point de contact : Considérons un corps $\boldsymbol{S}$ reposant sur un autre S' qu'il touche par une portion de surface très petite que nous supposerons réduite à un point $\boldsymbol{A}$. La réaction $\boldsymbol{R}$ de $\boldsymbol{S'}$ sur $\boldsymbol{S}$ se compose d'une réaction normale $\boldsymbol{N}$ et d'une réaction tangentielle $\boldsymbol{F}$, dont la direction est inconnue et dont le maximum est $\boldsymbol{f.N}$ l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ de $\boldsymbol{R}$ avec $\boldsymbol{N}$ est donc moindre que l'angle de frottement $\boldsymbol{\varphi}$.

Pour que le corps $\boldsymbol{S}$ soit en équilibre, il faut qu'il y ait équilibre entre les forces directement appliquées au corps $\boldsymbol{S}$ et la réaction $\boldsymbol{R}$, ou encore que les forces appliquées au corps aient une résultante unique égale et directement opposée à $\boldsymbol{R}$, c'est-à-dire :

1- passant par le point A;

2- faisant, avec la normale A$\boldsymbol{N}$, un angle moindre que l'angle de frottement.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes, car, si elles sont remplies, on peut supposer la résultante des forces directement appliquées transportée au point $\boldsymbol{A}$, et la décomposer en deux forces, l'une normale $\boldsymbol{P}$ et l'autre tangentielle $\boldsymbol{Q}$. Le glissement ne se produira pas si l'angle de la résultante avec la normale étant moindre que $\boldsymbol{\varphi}$, on a :

$$\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Q}} < f$$

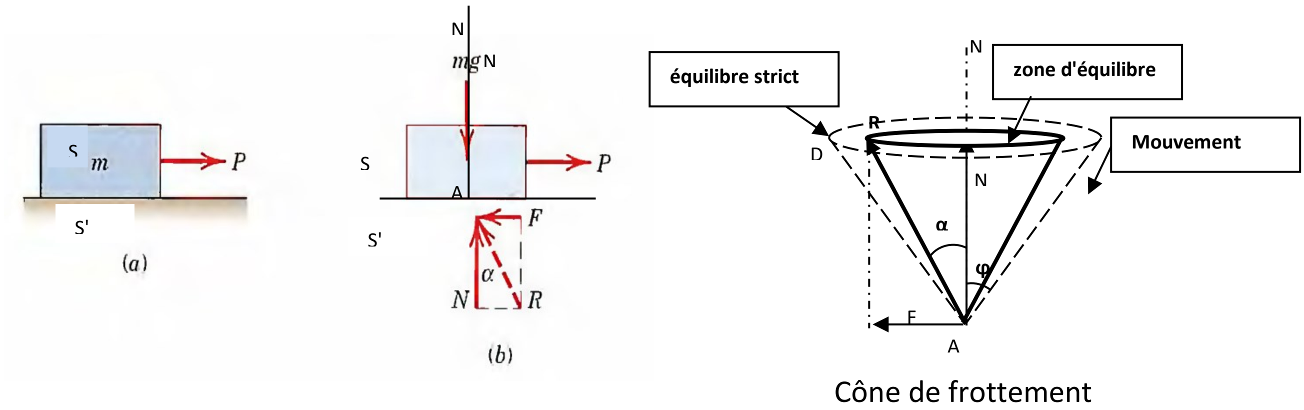


Figure III. 17: Le cône de frottement et condition d'équilibre.

Si on considère le cône de révolution ***C (Cône de frottement)*** d'axe ***AN*** engendré par une droite ***AD*** faisant avec ***AN*** l'angle φ, il faut et il suffit pour l'équilibre que les forces admettent une résultante passant par ***A*** et située dans le cône ***C***.