Chapitre II

Les forces et les moments

II. Les forces et les moments

II.1 Définition d'une force

Une force est toute cause capable de modifié la forme ou le mouvement d'un objet sur lequel elle s'applique.

Exemples:

Force de pesanteur (Force d'attraction) : Un objet posé sur une table**,** la masse de l'objet exerce une force sur la table. La force de pesenteur est égale à :

$P = m.g$ m(Kg) : masse du corps, g(m/s^2): l'accélération de la pesanteur.

L'unité de la force de pesanteur est **m.Kg/s^2**, avec le système international la force est mesurée en Newton ***N***. Alors, ***N= m.Kg/s^2.***

Force de gravitation (F_g): Dans le cas d'un objet assez éloigné de terre, la force de pesanteur subit par l'objet de masse m n'est plus égale à ***F = m.g***. Cette formule doit être remplacée par une formule plus générale :

$$F_g = m.(M.G)/d^2$$

M (Kg) : La masse de la terre, ou l'objet qui attire la masse m.

d(m) : La distance entre le centre de l'objet m et du corps M.

G(N.m^2/kg^2) : est la constante universelle de la gravitation.

Force motrice : Le moteur d'une voiture exerce une force qui permet de la mêtre en mouvement.

Force de frottement : Les freins de la voiture exerce une force pour diminuer la vitesse.

Force ou pousser d'Archimède: L'eau exerce une force sur les objets (bateau, Personne) pour les permet de flotter.

Moment de force : Un moteur fait tourner un ventilateur, le moteur exerce un moment de force sur le ventilateur.

II.2 Les systèmes de forces dans l'espace

Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

- Concourants : les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.

- Parallèles : les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'interceptent à l'infini

- Non concourantes et non parallèles : les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

II.3 Les Forces

II.3.1 L'aspect vectoriel des forces

Nous remarquons que pour soulever un objet, il faut exercer une force vers le haut. Pour traîner un sac parterre, vers une porte, il faut exercer une force dans la direction de la porte. L'intensité d'une force n'est qu'une des caractéristiques des forces en physique.

Une force est une grandeur caractérisée par 4 quantités (Figure II.1) :

- Une intensité qui peut se mesurer avec un dynamomètre.

- Une direction, - Un sens, - Un point d'application.

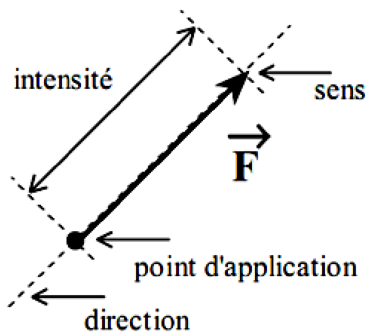


Figure II. 1: Caractéristique d'un vecteur de force.

II.3.2 Composantes d'une force

Soit une force $\vec{F}$, appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (Figure II.2). Les composantes de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_z = \vec{F}\sin\theta + \vec{F}\cos\theta = \vec{F}\sin\theta\cos\varphi + \vec{F}\cos\theta\ \sin\varphi + \vec{F}\cos\theta$$

$$\vec{F} = \vec{F}\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \vec{F}\cos\theta\ \sin\varphi\,\vec{\jmath} + \vec{F}\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_x}\,\vec{\imath} + \overrightarrow{F_y}\,\vec{\jmath} + \overrightarrow{F_z}\,\vec{k}$$

Avec : $\overrightarrow{F_x} = \vec{F}\sin\theta\cos\varphi$, $\overrightarrow{F_y} = \vec{F}\cos\theta\ \sin\varphi$ et $\overrightarrow{F_z} = \vec{F}\cos\theta$

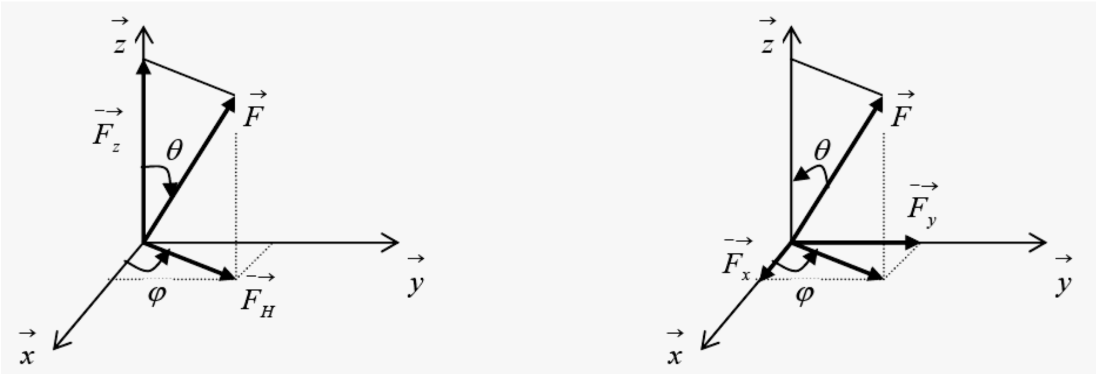


Figure II. 2: Composante d'une force dans l'espace.

II.3.3 Cosinus directeurs

Les projections de la force $\vec{F}$ sur les trois axes ox, oy, oz donnent respectivement les angles $\theta_x, \theta_y\ et\ \theta_z$ (Figure II.3), nous aurons alors :

$F_x = F.\cos\theta_x, \quad F_y = F.\cos\theta_y, \quad F_z = F.\cos\theta_z,$

Si $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires du repère nous aurons :

$\vec{F} = F_x.\vec{\imath} + F_y.\vec{\jmath} + F_z.\vec{k}$

$\vec{F} = F.(\cos\theta_x.\vec{\imath} + \cos\theta_y.\vec{\jmath} + \cos\theta_z.\vec{k}) = F.\vec{\lambda}$

avec : $\vec{\lambda} = (\cos\theta_x.\vec{\imath} + \cos\theta_y.\vec{\jmath} + \cos\theta_z.\vec{k}) = F.\vec{\lambda}$

Le vecteur $\vec{\lambda}$ a la même direction que la force $\vec{F}$ et pour module 1.

$$\lambda = \sqrt{\cos\theta_x^{\ 2} + \cos\theta_y^{\ 2} + \cos\theta_z^{\ 2}} = 1$$

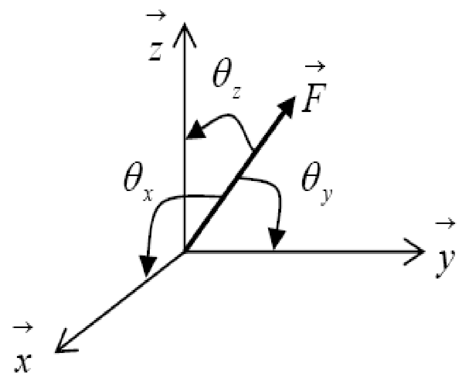


Figure II. 3: Cosinus directeur d'une force dans l'espace.

II.4 Résultante d'un ensemble des forces concourantes

II.4.1 Résultante de deux force

On peut déterminer la somme géométrique R des deux forces F_1 et F_2 soit en utilisant la méthode parallélogramme ou construire la triangle des forces (Figure II.4).

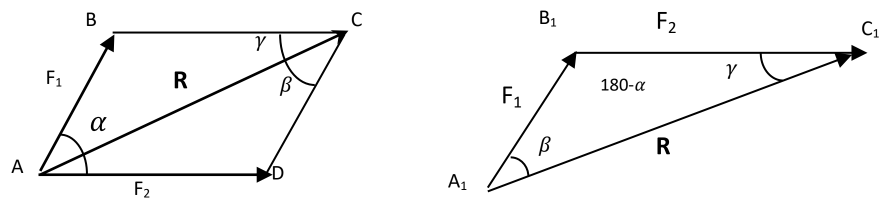


Figure II. 4: Représentation géométrique d'une somme de deux forces concourantes.

avec : $$R^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 - 2F_1F_2\cos(180 - \alpha)$$

$$R = \sqrt{{F_1}^2 + {F_2}^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

On peut aussi déterminer les angles $\beta\ et\ \gamma$ avec la loi de sinus suivante :

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad avec \quad \sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$$

II.4.2 Résultante de plusieurs forces

a. Solution Graphique "Règle du polygone des forces"

Pour la construction du polygone des forces, on respect le sens et la direction de chaque forec. Tout d'abord, on place l'origine du vecteur $\overrightarrow{F_2}$ à l'extrimité du vecteur $\overrightarrow{F_1}$, puis de placer l'origine de $\overrightarrow{F_3}$ à l'extrimité de $\overrightarrow{F_2}$, ...etc. en joignant le point d'application des forces et extrémité de $\overrightarrow{F_n}$, on obtient la résultante $\vec{R}$. Le polygone ABCDEF constitué par les forces est appelé polygone des forces (Figure II.5), et le vecteur $\vec{R}$ vecteur fermant le polygone s'appelle la résultante des forces.

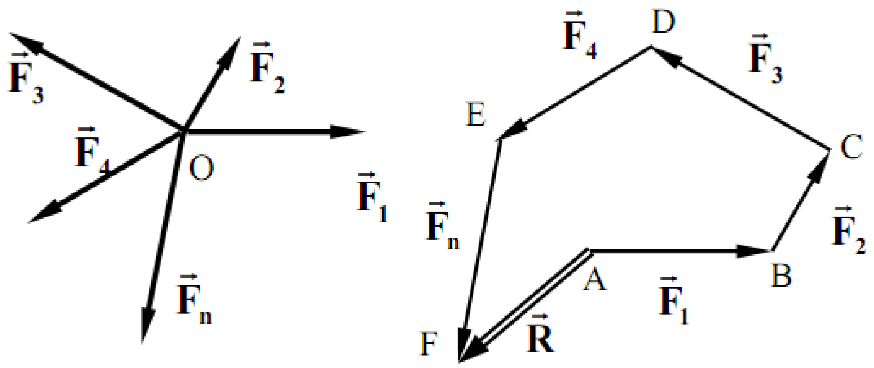


Figure II. 5: Résultante de plusieurs forces concourantes (Polygone des forces).

La résultante est représentée par la somme :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}$$

ou sous la forme : $$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

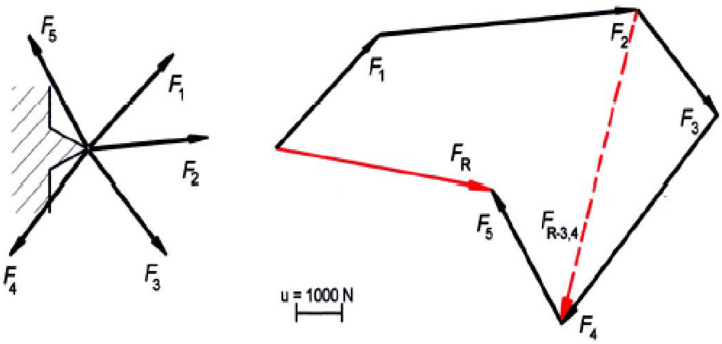
La résultante d'un système de forces concourantes est égale à la somme vectorielle de ces forces. La résulatante est appliquée au point d'intersection des lignes d'action des forces. L'origine de la résultante doit coïncider avec l'origine de la première force et l'extrémité de la résultante doit coïncider avec l'extrémité de la dernière force.

Exemple:

Le point A fixe est soumis à l'action de 5 force coplanaires concourantes dont les valeurs de définition sont :

$$\vec{F_1} = 3300\ N, 45°, \vec{F_2} = 5700\ N, 5°, \vec{F_3} = 2650\ N, 310°, \vec{F_4} = 5400\ N, 30°, \vec{F_5} = 3150\ N, 120°$$

remplacer cette ensemble de forces par une résultante.



b. Solution analytique

La recherche de la résultante de plusieurs forces concourantes par la méthode analytique fait intervenir le théorème de la projection de la somme de plusieurs vecteurs sur un axe; Les composantes sont projetées sur un système d'axes orthonormés Oxy. Si α représente l'angle compté positivement entre l'axe 0x et la direction positive de la force, la projection sur l'axe Ox de chacune des composantes s'écrit :

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1$$
$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2$$
$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n$$

La projection de la résultante $\vec{R}$ sur l'axe Ox vaut :

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{nx}$$

Sous forme généralisée, cette forme s'écrit :

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_i cos\alpha_i$$

De même, la projection des composante sur l'axe Oy s'écrivent :

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3$$

....

$$F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$$

La projection de la résultante $\vec{R}$ sur l'axe Oy vaut :

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{ny}$$

Sous forme généralisée, cette forme s'écrit :

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin \alpha_i$$

La résultante $\vec{R}$ doit se définir en module, direction et sens. Comme les axes sont orthonormés, le module de la résultante se calcul en appliquant le théorème de Pythagore :

$$|\vec{R}| = +\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

La direction et le sens de la force résultante sont trouvés à partir des projections sur l'axes de coordonnées :

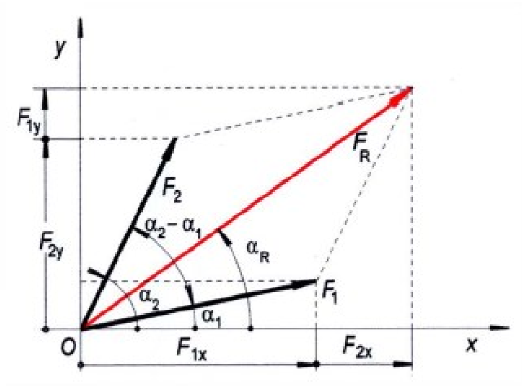
$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$

Le sens de R_x et R_y fixent la position du vecteur résultant dans le plan. En effet, on aurra :

- La résultante est située dans le premier quadrant : R_x (+) et R_y (+)
- La résultante est située dans le deuxième quadrant : R_x (-) et R_y (+)
- La résultante est située dans le troisième quadrant : R_x (-) et R_y (-)
- La résultante est située dans le quatrième quadrant : R_x (+) et R_y (-)

Exemple:

Trouver la résultante, par voie analytique, de deux force $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ concourantes d'inclinaison α_1 et α_2 par rapport à l'axe Ox.



Les projections des deux forces sur les axes orthonormés Ox et Oy valent :

$$F_{Rx} = F_1 . \cos\alpha_1 + F_2 . \cos\alpha_2$$

$$F_{Ry} = F_1 . \sin\alpha_1 + F_2 . \sin\alpha_2$$

En remplaçant F_{Rx} et F_{Ry} par les valeurs des projections dans l'expression du module de la résultante, on obtient :

$$|\vec{F}_R| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1\ F_2\ .\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

l'inclinaison de la force résultante par rapport à l'axe Ox vaut:

$$tan\alpha_R = \frac{F_1 . \sin\alpha_1 + F_2 . \sin\alpha_2}{F_1 . \cos\alpha_1 + F_2 . \cos\alpha_2}$$

Ce résultat correspond à la construction de la diagonale du parallélogramme au moyen des deux forces.

II.4.3 Décomposition de forces

a. Dans deux directions

Il est souvent avantageux de remplacer une force $\vec{F}$ par deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, dont l'action combinée est identique à celle de par deux forces $\vec{F}$. Les force $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont alors les composantes de la résultantes $\vec{F}$.

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

Afin de déterminer les composantes d'une force $\vec{F}$, il faut d'abord judicieusement choisir les direction suivant lesquelles on va les décomposer. Ensuite, on trace des rayons suivant ces directions en partant de l'origine de $\vec{F}$. On construit alors le parallélogramme dont la la diagonale est $\vec{F}$. Les côtés de ce parallélogramme constituent les composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ (Figure II.6).

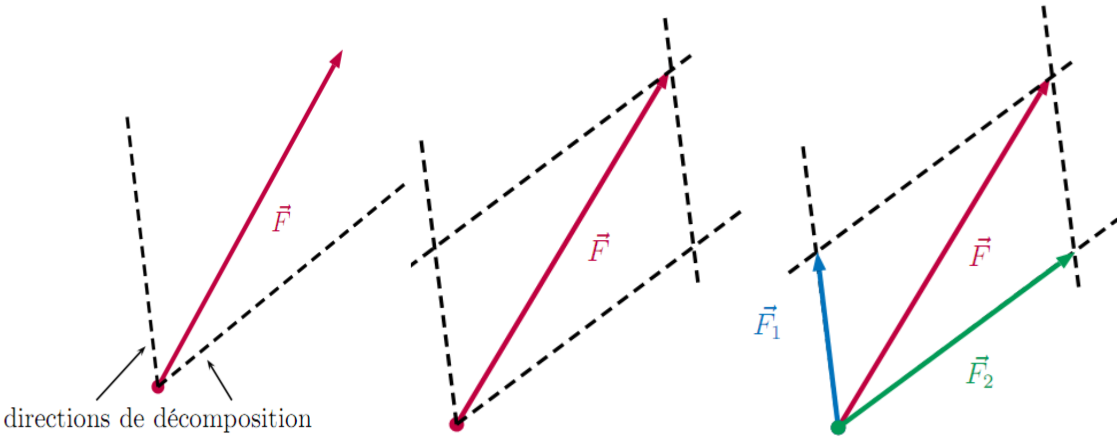


Figure II. 6: Décomposition d'une force sur deux directions quelconque.

b. Décomposition d'une force dans trois directions

Si les trois directions sont connues et n'appartient pas un seul plan, la décomposition d'une force $\vec{F}$ sur ces trois directions ramène à la construction d'un parallélépipède où la force $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$ représente son diagonal (Figure II.7).

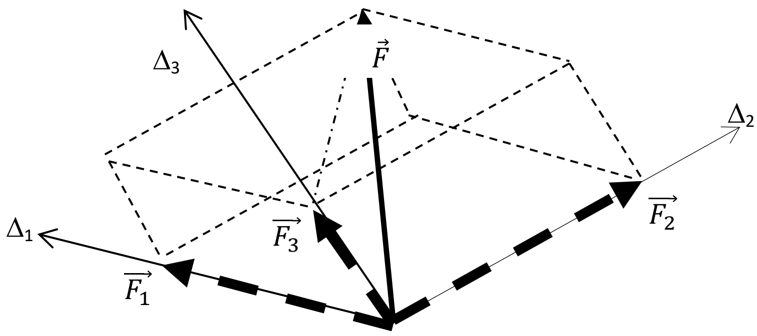


Figure II. 7: Décomposition d'une force sur trois directions quelconque.

II.5 Moment d'une force par rapport à un point

II.5.1 Définition du moment d'une force par rapport à un point

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point ***O*** est égal au produit vectoriel du rayon vecteur ***r* = *OA* ;** joignant le point ***O*** à l'origine ***A*** de la force, par la force $\vec{F}$ elle-même (Figure II.8).

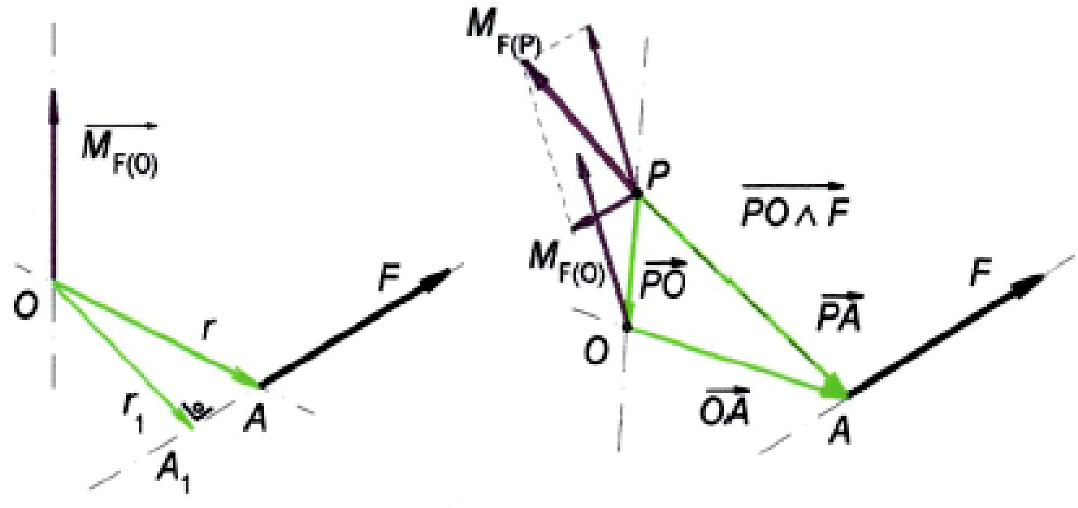


Figure II. 8: Représentation d'un moment d'une force par rapport à un point.

Remarques

1. Le moment de la force par rapport à un point est une grandeur vectorielle liée au point ayant pour origine le point considéré.

2. La définition du moment de la force est indépendante de la position du point A choisi sur la ligne d'action de la force $\vec{F}$. En effet, on peut écrire :

$$(\vec{r}_1 + \overrightarrow{A_1A}) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + \overrightarrow{A_1A} \wedge \vec{F}.$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{A_1A} \wedge \vec{F}$ est nul car les deux vecteurs $\overrightarrow{A_1A}$ et $\vec{F}$ sont alignés. Ainsi :

$$(\vec{r}_1 + \overrightarrow{A_1A}) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}$$

3. Le moment d'une force par rapport à un point est très souvent défini comme le produit de la force par son « bras de levier ». Cette définition est incorrecte au point de vue vectoriel.

4. Système d'unités : la force $\vec{F}$ s'exprime en newtons, la longueur du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ en mètres. En conservant la définition fondamentale, le moment d'une force par rapport à un point doit se donner en ***m.N***.

Certains auteurs utilisent le newton – mètre comme unité du moment de force, le symbole étant N m. Cela permet d'éviter de confondre le m.N avec le millinewton mN.

II.5.2 Expression du moment d'une force dans un système orthonormé trirectangle

Le moment de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ par rapport au point $\boldsymbol{O}$ étant représenté par le produit vectoriel de $\vec{\boldsymbol{r}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$, les vecteurs $\vec{\boldsymbol{r}}$ et $\vec{\boldsymbol{F}}$ peuvent s'exprimer en fonction de leurs projections sur le système d'axes orthonormé trirectangle par :

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_x} + \overrightarrow{r_y} + \overrightarrow{r_z} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y} + \overrightarrow{F_z} = F_x.\vec{\imath} + F_y.\vec{\jmath} + F_z.\vec{k}$$

Le produit vectoriel s'écrit alors :

$$\overrightarrow{M}_{\vec{F}(O)} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ou encore : $\overrightarrow{M}_{\vec{F}(O)} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \left(y.F_z - z.F_y\right).\vec{\imath} - (x.F_z - F_x.z).\vec{\jmath} + \left(x.F_y - F_x.y\right).\vec{k}$

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O peut aussi s'exprimer en fonction des composantes de ce moment dans le système orthonormé trirectangle. L'expression devient :

$$\overrightarrow{M}_{\vec{F}(O)} = \overrightarrow{M_x} + \overrightarrow{M_y} + \overrightarrow{M_z} = M_x.\vec{\imath} + M_y.\vec{\jmath} + M_z.\vec{k}$$

En comparant cette expression avec l'expression développée précédemment, on obtient :

$$M_x = \left(y.F_z - z.F_y\right)$$

$$M_y = (F_x.z - x.F_z)$$

$$M_z = \left(x.F_y - F_x.y\right)$$

Les moments M_x, M_y, M_z, sont les composantes scalaires du moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O.

II.5.3 Moment d'une force par rapport à deux points différents

Soient une force $\vec{F}$ et deux points quelconques O et P. Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O vaut :

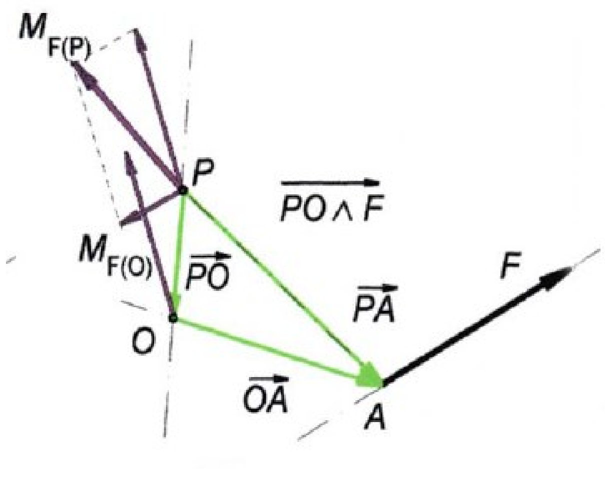


Figure II. 9 : Moment d'une force par rapport à deux points différents.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\vec{F}(\boldsymbol{O})} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$$

Le moment de la même force *F* par rapport au point *P* se calcule par une expression semblable :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\vec{F}(\boldsymbol{P})} = \overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}$ est égal à la somme des rayons vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{PO}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$, soit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PA}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$$

Le moment de la force $\vec{\boldsymbol{F}}$ par rapport au point $\boldsymbol{P}$ s'exprime aussi par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\vec{F}(\boldsymbol{P})} = \overrightarrow{\boldsymbol{PA}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}} = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{PO}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\right) \wedge \vec{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PO}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$$

Cette expression se transforme en :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\vec{F}(\boldsymbol{P})} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\vec{F}(\boldsymbol{O})} + \overrightarrow{\boldsymbol{PO}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{\boldsymbol{PO}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{PO}}$ et $\vec{\boldsymbol{F}}$.

II.5.4 Moments de plusieurs forces par rapport à un même point

Comme le moment d'une force par rapport à un point est une grandeur vectorielle, le moment total de plusieurs forces par rapport à un même point est égal à la somme vectorielle des moments de chacune des forces par rapport à ce même point.

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\overrightarrow{F_1}(\boldsymbol{O})} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\overrightarrow{F_2}(\boldsymbol{O})} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\overrightarrow{F_3}(\boldsymbol{O})} + \cdots + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{\overrightarrow{F_n}(\boldsymbol{O})}$$

Ou encore : $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F_2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{r_3}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F_3}} + \cdots + \overrightarrow{\boldsymbol{r_n}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F_n}}$

Les composantes scalaires du moment total se calculeront par les expressions généralisées suivantes :

- Moment sur $\boldsymbol{Ox}$: $M_x = \sum_{i=1}^{n}(y_i.F_{iz} - z_i.F_{iy})$
- Moment sur Oy : $M_y = \sum_{i=1}^{n}(z_i.F_{ix} - x_i.F_{iz})$
- Moment sur Oz : $M_z = \sum_{i=1}^{n}(x_i.F_{iy} - y_i.F_{ix})$

L'expression du moment total de l'ensemble des forces par rapport au même point sera :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M_O}} = \sum_{\boldsymbol{i=n}}^{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{r}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F_\imath}}$$

Cas particulier de forces coplanaires avec le point

Toutes les forces et le point sont situés dans le même plan. Le moment total de l'ensemble des forces coplanaires avec le point est égal à la ***somme algébrique*** des moments de chacune des forces par rapport au même point ***O***. Si toutes les forces sont placées sur le plan ***x O y*** , le moment résultant de toutes les forces vaut :

$$M_{(O)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i . F_{iy} - y_i . F_{ix})$$

II.5.5 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit O un point sur l'axe $(\triangle)$ et $\vec{u}$ vecteur unitaire porté par cet axe. On détermine le moment par rapport au point O, noté : $\vec{M}_{(\vec{F})/O}$, sa projection sur l'axe $(\triangle)$ est donnée par :

$$\vec{M}_{(\vec{F})/\triangle} = (\vec{M}_{\vec{F}/O} . \vec{u}) . \vec{u}$$

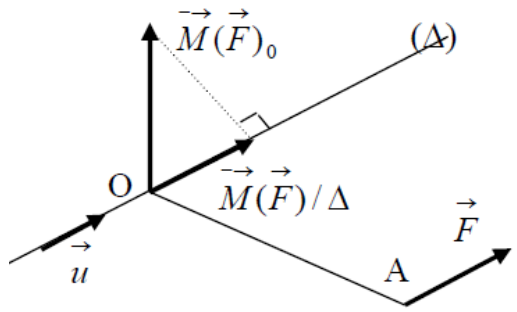


Figure II. 10: Représentation d'un moment d'une force par rapport à un axe.

II.5.6 Théorème de VARIGNON

Le moment d'un système de forces concourantes en un point A par rapport à un point O est égal au moment de la résultante des forces par rapport au point O. Dans les deux cas de figure nous montrerons que le moment résultant est égal au moment de la résultante des forces du système.

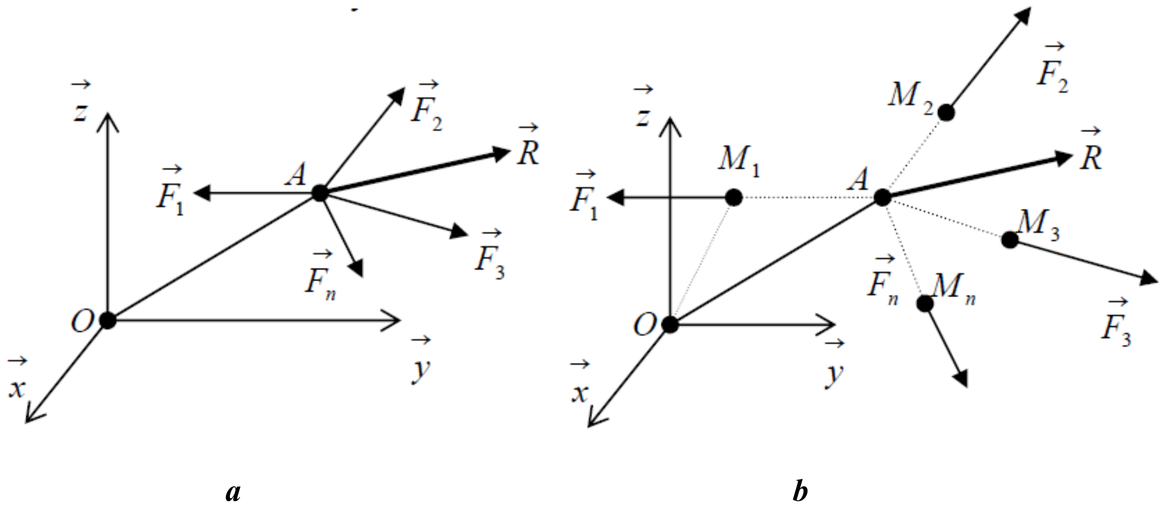


Figure II. 11: Moment de plusieurs forces concourantes (Théorème de VARIGNON).

Figure II.11-a : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}(A)$ et le moment au point O est donné par :

$$\vec{M}_{(\vec{R})/O} = \sum_i \vec{M}_i(\vec{F_i}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_2 + \cdots + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_{(\vec{R})/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n\right) = \overrightarrow{OA} \wedge \sum_i \vec{F_i} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}$$

Figure II.11-b : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F_i}(M_i)$

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2}, \dots, \overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_n}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_i}(F_i)_{/O} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{OM_n} \wedge \overrightarrow{F_n}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_i}(F_i)_{/O} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1}\right) \wedge \overrightarrow{F_1} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2}\right) \wedge \overrightarrow{F_2} + \cdots + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_n}) \wedge \overrightarrow{F_n}$$

avec : $\overrightarrow{AM_i} \parallel \vec{F_i}$ ==> $\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F_i} = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\sum_i \overrightarrow{M_i}(F_i)_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \sum_i \vec{F_i} = \vec{M}_{(\vec{R})/O}$$

II.5.7 Moment d'un couple de forces

Un couple de force est défini par deux forces de même module, de sens opposée et portées par deux droites parallèles tel que : $\overrightarrow{F_1}$= -$\overrightarrow{F_2}$

$$\sum_i \overrightarrow{M_i}(F_i)_{/O} = \overrightarrow{M_1}(F_1)_{/O} + \overrightarrow{M_2}(F_2)_{/O}$$

$\sum_i \overrightarrow{M_i}(F_i)_{/O} = \overrightarrow{OA}_1 \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OA}_2 \wedge \overrightarrow{F_2} = \left(-\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2\right) \wedge \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{A_1A}_2 \wedge \overrightarrow{F_2}$

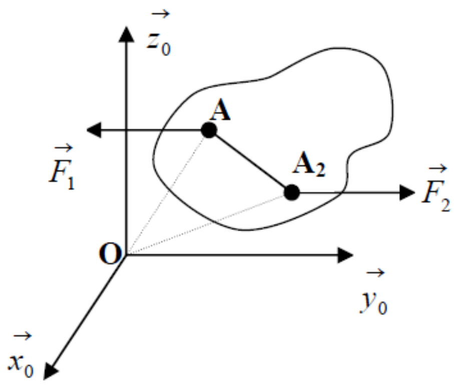


Figure II. 12: Le moment d'un couple de force.

La somme des forces, est nulle mais le moment n'est pas nul. Un couple de force produit uniquement un mouvement de rotation. Le moment d'un couple est indépendant du point où on le mesure, il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des deux forces.

• Un couple ne peut jamais être remplacé par une force unique ;

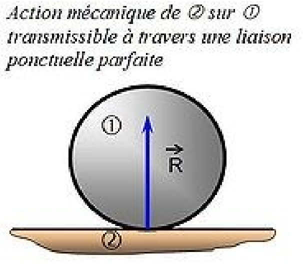
• Un système force couple tel que $\vec{F} \perp \vec{M}$ peut toujours se réduire en une résultante unique. On choisit la résultante des forces au point O où s'applique le moment de telle sorte que son propre moment soit nul et le moment en ce point serait égal à la somme des moments de toutes les forces du système.

II.6 Les forces extérieures

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donné. Suivant le cas, ces charges peuvent-être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figure aussi les réactions d'appuis.

II.6.1 Force concentrée

Une force est dite force concentrée si elle est appliquée à un point (Exemple : Contact Ponctuel). La force concentrée peuvent être un poids, une force appliquée sur un corps en un point ou une réaction des liaisons (Appuis simples, articulations, rotules,....).



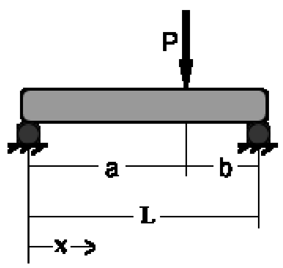


Figure II. 13 : Représentation d'une force concentrée.

II.6.2 Force répartie

a. Charge uniformément répartie

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge (q) qui agit sur une distance considérable de la poutre (d), et de façon uniforme (q=constante), c'est-à-dire la charge sollicitante par unité de longueur [N/m] de la poutre est constante. Par exemple: Le poids de la poutre, lui aussi, est une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.

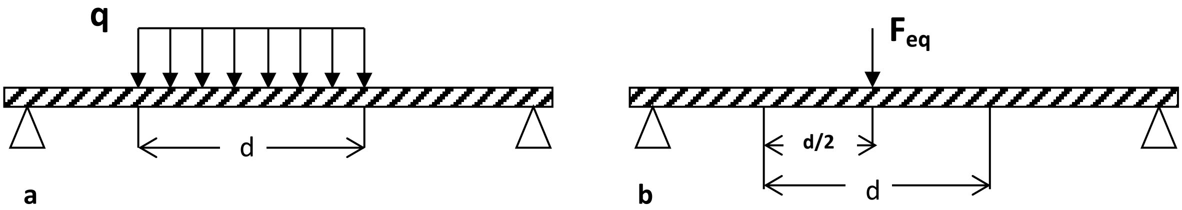


Figure II. 14 : a- Charge uniformément répartie. b-Equivalence d'une charge uniformément répartie

On peut remplacer la charge uniformément répartie par une charge équivalente concentrée appliquée au centre de gravité du rectangle (ou carré). d'ou :

$$F_{eq} = \int \mathbf{q.dx}$$

F_{eq} (N) représente la surface du rectangle (ou carré) produit par q et d d'ou $\mathbf{Feq = q.d}$

q (N/m) : Intensité de la charge répartie.

d(m): La distance de distribution de la charge q.

b. Charge linéairement répartie

Il existe plusieurs types de charges non uniformément réparties, la plus souvent rencontrée est la charge répartie linéaire ou charge triangulée. Un peu comme la charge uniformément répartie, la charge totale d'une charge triangulée est donnée par "l'aire de la charge" ou par l'intégrale suivant:

$$F_{eq} = \int_{q_1}^{q_2} \mathbf{q(x).dx}.$$

On peut remplacer la force répartie linéaire par une force équivalente $\mathbf{F_{eq}}$ appliquée au centre de gravité du polygone (Triangle, Trapézoïdale,....).

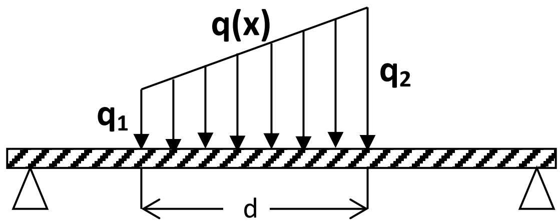


Figure II. 15: Chargé linéairement répartie (Charge triangulaire).

c. Pression ou contrainte

La pression est définie classiquement par son effet sur une surface élémentaire **dS**. La force exercée **F** est définie par :

$$dF = PdS$$

Cette force est normale à la surface. Cette expression définit le scalaire P défini comme la pression. Pour un milieu d'aire finie:

P=F/S

d. Force volumique

Il existe des forces qui s'exercent sur la totalité de l'objet, comme le poids, ces forces sont dites volumiques. On démontre, dans le cas des solides indéformables, que l'action de telles forces est équivalente à l'application d'une seule force au barycentre du corps, encore appelé « centre de masse », « centre de gravité » ou « centre d'inertie ».

II.7 Les forces intérieurs (efforts de cohésion)

II.7.1 Définition :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des structures (poutres) et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées. Les efforts intérieurs sont calculés avec le principe fondamental de la statique à partir des l'actions extérieures agissant sur la poutre.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle, on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation ***(S)***. on distingue le vecteur des forces ***F(N,*** $\boldsymbol{T_y}$***,*** $\boldsymbol{T_z}$***)*** et le vecteur moment ***M(*** $\boldsymbol{M_x}$***,*** $\boldsymbol{M_y}$***,*** $\boldsymbol{M_z}$***)*** résultant des forces intérieures dans la section.

$$\vec{F} = N.\vec{x} + T_y.\vec{y} + T_z.\vec{z} \qquad \overrightarrow{M} = M_x.\vec{x} + M_y.\vec{y} + M_z.\vec{z}$$

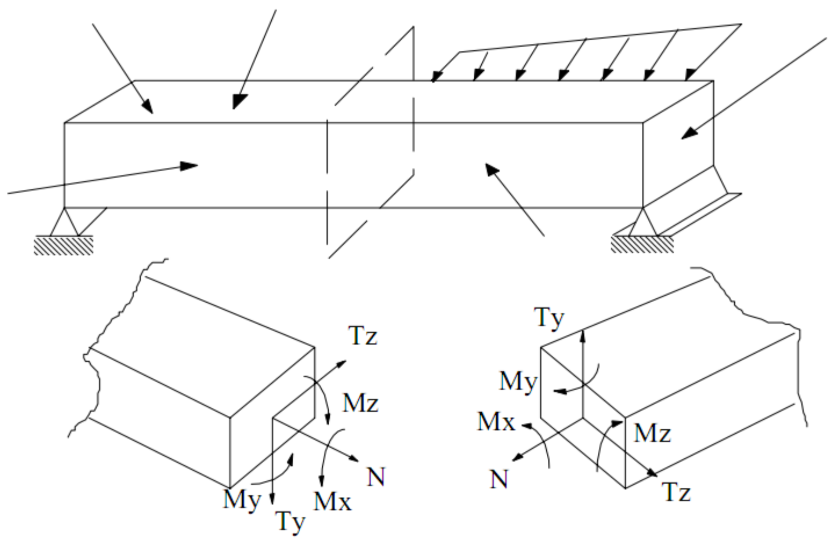


Figure II. 16: Efforts intérieurs ou efforts de cohésions.

II.7.2 Effort longitudinal (N) :

La composante ***N*** de la résultante ***F*** représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort longitudinal provoque une déformation longitudinale de l'élément. ***N*** est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas de compression.

La formule générale donnant la valeur de l'effort longitudinal dans une section droite arbitraire de la barre est de la forme :

$$N = \sum F + \sum \int q_x . dx$$

L'intégrale s'étend à la totalité de la longueur de chaque partie soumise à une charge répartie et la sommation à toutes les parties se trouvant d'un côté de la section considérée.

Si on oriente le vecteur de l'effort longitudinal ***N*** suivant la normale extérieure à la section droite considérée, la condition d'équilibre de la partie tranchée de la barre, c'est-à-dire la formule, nous donnera la valeur et le signe de l'effort recherché.

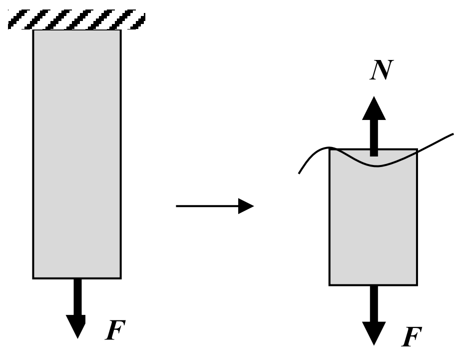


Figure II. 17: Représentation d'un effort normal dans une poutre en traction.

II.7.3 Effort tranchant (T) :

Les efforts transversaux T_y et T_z sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction y et z. le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre.

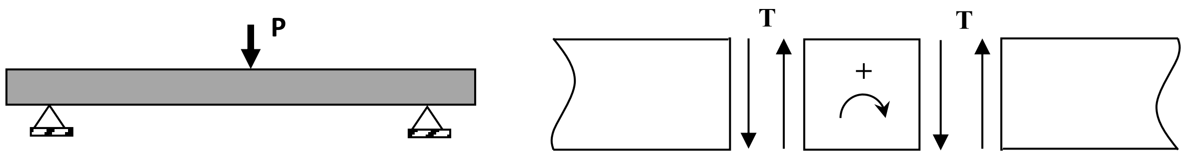


Figure II. 18: Représentation d'un effort tranchant dans une poutre en flexion.

II.7.4 Moment fléchissant (M_f) :

Les composantes M_y et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière y et z respectivement. La figure indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inferieures et comprime les fibres supérieures de la section.

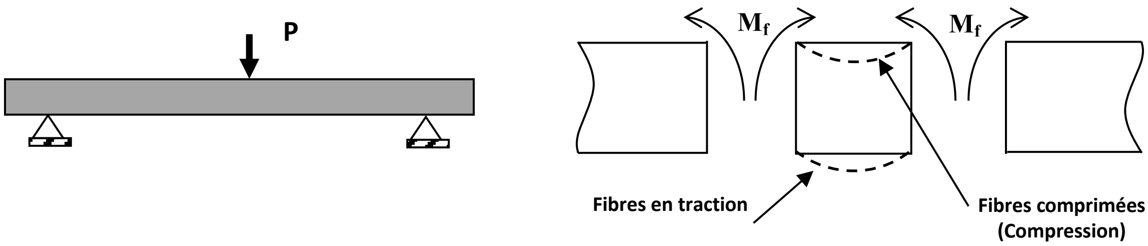


Figure II. 19: Représentation d'un moment fléchissant dans une poutre en flexion.

II.7.5 Moment de torsion M_t

Le moment de torsion M_x ou M_t est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre x. Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en garant la section du côté de la normale extérieure.

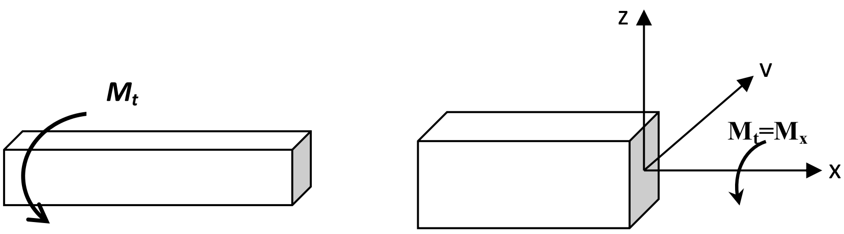


Figure II. 20: Moment de torsion dans une section de la poutre.

II.8 Modèle mécanique

II.8.1 Point matériel

On appelle point matériel ou masse ponctuelle un système mécanique qu'il est possible de le modéliser par un point géométrique M auquel est associée sa masse m. Il s'agit souvent d'un système dont les dimensions sont petites devant les distances caractéristiques du mouvement étudié (distance parcourue, rayon d'une orbite...). En mécanique, il existe plusieurs modèles de solide. Le plus simple est celui du point matériel. La description du solide est réduite à la position de son centre de gravité et à sa masse. Ce modèle est adapté aux cas où l'on ne s'intéresse qu'aux mouvements du centre de gravité. En particulier, il ne prend en compte ni les rotations propres de l'objet, ni ses déformations.

II.8.2 Corps solide

Le second modèle est le modèle du solide indéformable. Il est bien adapté pour l'étude des mouvements — cinématique du solide — et des efforts mis en œuvre — dynamique — tant que les efforts restent modérés. Il permet de prendre en compte les rotations propres.

Dès que les efforts entraînent une déformation notable, ou bien dès lors que l'on s'intéresse à la déformation elle-même, il faut considérer d'autres modèles. On passe dans le domaine de la mécanique des milieux continus, comportant des lois de comportement de matériaux.

Le premier modèle de solide déformable est celui du solide élastique : on considère que les déformations sont linéaires et réversibles. Ce modèle est bien adapté aux petites déformations, en particulier à l'étude des vibrations, des chocs élastiques et à l'étude des pièces subissant une sollicitation modérée.