Chapitre I

Généralités sur le calcul vectoriel

I. Généralités sur le calcul vectoriel

En physique et en géométrie, certaines quantités sont complètement définies par une grandeur réelle, ainsi la masse d'un corps m (Kg), la chaleur spécifique de l'eau, l'air d'un cercle et son diamètre, le volume d'une sphère.... Chacune des ces quantités est représentée par un nombre qui dépend du système d'unités choisi (Kg, k, m^2,...). Une telle quantité est appelée un scalaire.

Il existe cependant d'autres quantités physiques et géométriques qui ne peuvent être représentées par un simple nombre, car leur caractérisation complète nécessite la connaissance d'une direction et d'une grandeur. Par exemple, les forces en mécaniques sont des quantités de ce type.

Il est habituel de représenter une force graphiquement par un segment orienté qui indique la direction de la force et dont la longueur est égale à la grandeur de la force pour une échelle préalablement choisie. C'est le vecteur.

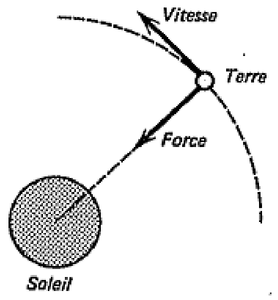


Figure I. 1: Représentation des grandeurs physiques.

I.1 Généralités sur les vecteurs

I.1.1 Définitions

a. Vecteur lié

On appelle vecteur lié ou simplement vecteur un segment de droite dont on distingue une origine et une extrémité. Le vecteur d'origine **A** et d'extrémité **B**, appelé "Vecteur **AB**", aura un module, une distance entre A et B, et un sens qui est le sens de parcours de A vers B. Le vecteur AB se représente généralement par la notation $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

- La droite joignant les point A et B est appelée support du vecteur AB.
- Le vecteur BA d'origine B est d'extrémité A est l'opposé du vecteur AB. Soit : $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$.

b. Vecteur nul

Lorsque l'extrémité d'un vecteur coïncide avec son origine, on dit que c'est un vecteur nul. Son module sera nul, sa direction et son sens sont indéterminés.

c. Vecteur de même direction

Sur une droite donnée on peut définir deux sens de parcours opposés. Lorsque deux vecteurs ont des supports parallèles distincts, on dit qu'ils ont même direction. On dit qu'ils ont même sens si, dans leur plan, ils sont situés d'un même côté de la droite qui joint leurs origines.

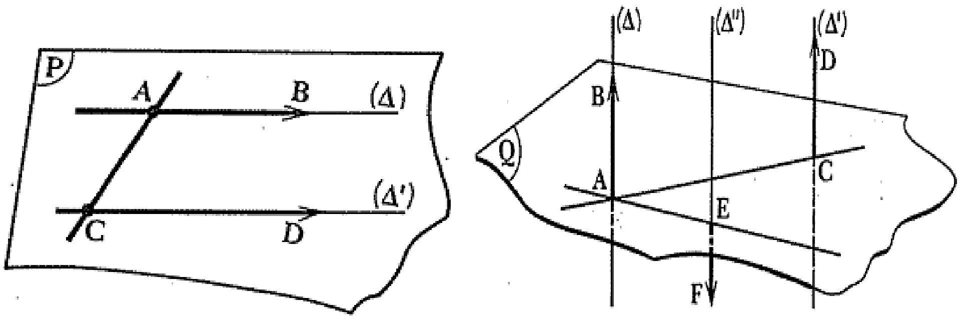


Figure I. 2: Sens de deux vecteurs.

d. Vecteurs équipollents

On dit que deux vecteurs (liés) AB et A'B' sont équipollents si le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme (Fig. a).

Dans le cas où AB et A'B' ont même support et ils sont liés par deux parallélogrammes (Fig.b), les deux vecteurs sont équipollents.

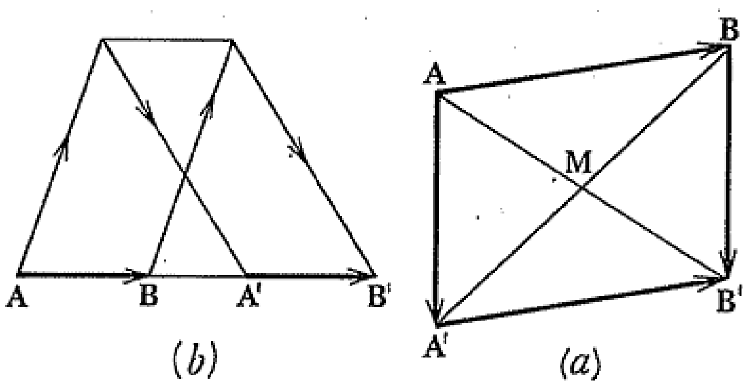


Figure I. 3 : Représentation des vecteurs équipollents.

e. Vecteur glissant

On parle d'une vecteur glissant AB de support (Δ) pour désigner l'un quelconque des vecteur liés équipollents au vecteur lié AB et de support (Δ). L'origine reste arbitraire sur le support donnée.

f. Vecteur libre

On parle d'un vecteur libre AB pour désigner l'un quelconque des vecteurs liés équipollents au vecteur lié AB. L'origine reste arbitraire dans le plan ou dans l'espace.

g. Géométrie sur un axe dirigé

Soit (Δ) un axe dirigé, c'est-a-dire une droite illimitée sur laquelle on choisi un sens positif de parcours (Figure I.4). L'expérience montre que la résultante de deux forces portées par un même axe s'obtient en mettant les vecteurs qui les représentent bout à bout comme le précises la définition suivante:

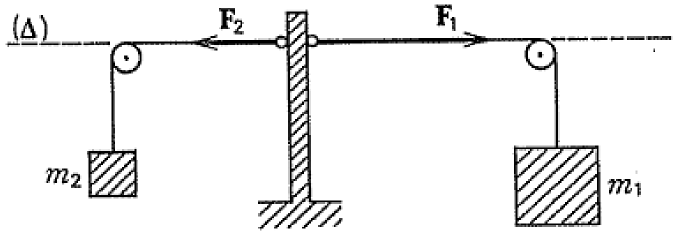


Figure I. 4: Vecteurs portées par un même axe.

La somme géométrique de deux vecteurs glissants F_1 et F_2 sur un axe (Δ) est le vecteur V glissant obtenu de la manière suivante (Figure I.5) : on ramène par un point A quelconque de (Δ) le vecteur AA_1 équipollent à F_1, puis par A_1 le vecteur A_1A_2 équipollent à F_2. Alors le vecteur glissant $F=AA_2$ équipollent est la somme F_1+F_2. Soit $AA_2=AA_1+A_1A_2$ soit $F=F_1+F_2$

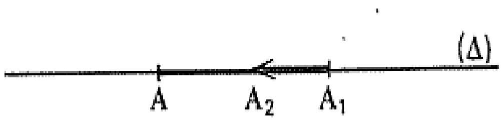


Figure I. 5: Représentation géométrique de la somme de deux vecteurs.

L'adition des vecteurs possède les mêmes propriétés que celle des scalaires, soit :

$\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_1}$

$\overrightarrow{V_1}+(\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3})=\overline{(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2})}+\overrightarrow{V_2}$

$\overrightarrow{V_1}+\vec{0}=\overrightarrow{V_1}$

Chaque vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ possède un opposé $-\vec{V}=\overrightarrow{BA}$.

h. Produit d'un vecteur par un scalaire

Exemple: Portons sur (Δ) un point I_1 (Figure I.6), puis les graduations I_2, I_3, ..., extrémités des vecteurs $2.\overrightarrow{AI_1}$, $3.\ \overrightarrow{AI_1}$, ...etc.

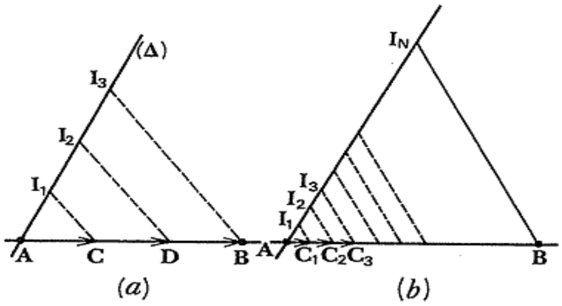


Figure I. 6: Représentation du produit d'un vecteur par un scalaire.

Considérons la droite I_3B et les parallèles à celle-ci menées par I_1, I_2, qui coupent AB en C et D. D'après le théorème de Thalès nous avons :

$$AC = CD = DB \text{ soit aussi : } AB = 3.AC$$

Une trisection du vecteur AB ou du segment AB est réalisée, alors :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}, \text{ et } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$$

Les propriétés du produit d'un vecteur par des scalaires sont les suivantes :

$\lambda.(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \lambda.\ V_1 + \lambda.V_2$

$(\lambda_1+\lambda_2).\vec{V} = \lambda_1.\vec{V} + \lambda_2.\vec{V}$

$\lambda_1.(\lambda_2.\vec{V}) = (\lambda_1.\lambda_2).\vec{V}$

i. Rapport de deux vecteurs glissants

Etant donné deux vecteurs glissants $\vec{u}$ et $\vec{V}$, on peut trouver par approximation successives un réel λ unique tel que :

$$\vec{V} = \lambda.\vec{u}$$

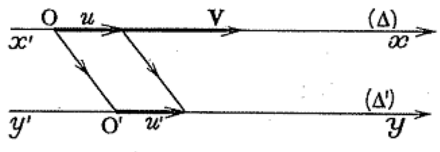


Figure I. 7: Rapport de deux vecteurs glissants.

Si l'on fixe le vecteur $\vec{u}$, tout vecteur glissant $\vec{V}$ est alors caractérisé par le nombre λ, ce qui est très commode. Ce vecteur fixe $\vec{u}$, choisi de sens positif sur (Δ), est appelé vecteur unitaire. Le nombre λ, rapport de $\vec{V}$ à $\vec{u}$, est la mesure algébrique de $\vec{V}$ par rapport à $\vec{u}$. Si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$, on désigne habituellement cette mesure algébrique par $\overline{AB}$, soit :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{u}$$

La valeur absolue de $\overline{AB}$ précise la notion de vecteur plus ou moins grand. Par ailleurs le signe de $\overline{AB}$ indique le sens de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à $\vec{u}$.

j. Module ou norme d'un vecteur

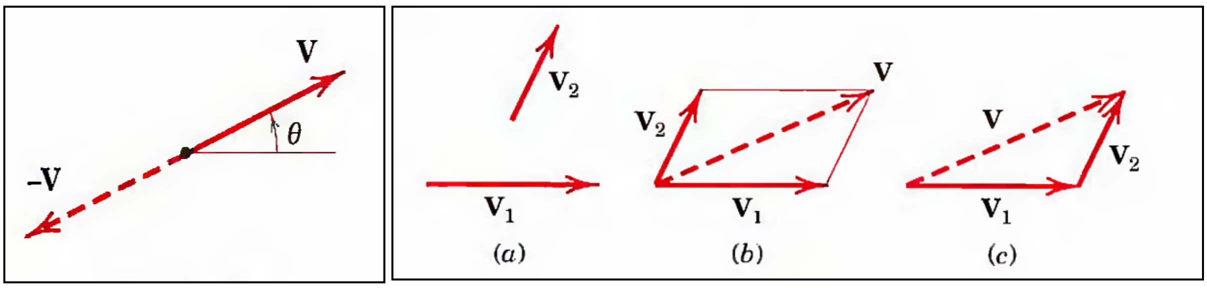
On appelle module ou norme d'un vecteur glissant $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ par rapport à un vecteur unitaire $\vec{u}$ la quantité positive $|\overline{AB}|$que l'on note $\|\overrightarrow{AB}\|$, ou simplement AB.

$$\|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = |\overline{AB}|$$

On appelle distance des deux points A et B, étant donné le vecteur unitaire $\vec{u}$, le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à $\vec{u}$.

I.2 Le calcul vectoriel

La direction du vecteur $\vec{V}$ peut être mesurée par un angle θ par rapport à une direction de référence connue, comme indiqué sur la figure I.8-A. L'opposé du vecteur $\vec{V}$ est le vecteur -$\vec{V}$ ayant la même amplitude que $\vec{V}$ mais dirigé dans le sens opposé à $\vec{V}$.



A *B*

Figure I. 8: Adition géométrique de deux vecteurs.

Les vecteurs doivent obéir à la loi de la combinaison de parallélogramme. Cette loi précise que deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, traités comme des vecteurs libres, Figure I.8-B, peuvent être remplacés par leur vecteur équivalent $\vec{V}$, qui est la diagonale du parallélogramme formé par les deux côtés $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$. Cette combinaison s'appelle la somme vectorielle représentée par l'équation vectorielle:

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

$$\|\vec{V}\|^2 = \|\vec{V_1}\|^2 + \|\vec{V_2}\|^2 - 2.\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_1}\|.cos\theta$$

La somme scalaire des grandeurs des deux vecteurs est écrite de la manière habituelle comme $V_1 + V_2$. La géométrie du parallélogramme montre que $\|\vec{V}\| \neq \|\vec{V_1}\| + \|\vec{V_2}\|$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, à nouveau traités comme des vecteurs libres, peuvent également être ajoutés par la loi des triangles, comme le montre la figure I.8-B, pour obtenir la somme vectorielle identique $\vec{V}$.

La différence $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$ entre les deux vecteurs est facilement obtenue par l'addition de l'opposé du vecteur $\overrightarrow{V_2}$ (-$\overrightarrow{V_2}$) au vecteur $\overrightarrow{V_1}$ comme le montre la figure I.9, où la procédure de triangle ou de parallélogramme peut être utilisée. La différence $\overrightarrow{V'}$ entre les deux vecteurs est exprimée la relation vectoriel suivante, où le signe moins indique une soustraction de vecteur :

$$\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$$

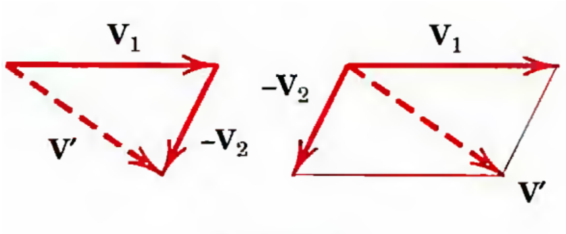


Figure I. 9: Soustraction géométrique de deux vecteurs.

On dit que deux ou plusieurs vecteurs dont la somme est égale à un certain vecteur $\vec{V}$ sont les composants de ce vecteur. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$$et$ $\overrightarrow{V_2}$ sur la figure I.10 sont les composantes de $\vec{V}$ dans les directions 1 et 2, respectivement. Il est généralement plus pratique de traiter des composants vectoriels perpendiculaires entre eux. ceux-ci sont appelés composants rectangulaires. Les vecteurs $\overrightarrow{V_x}$ et $\overrightarrow{V_y}$ sur la Fig. 1/4b sont les composantes x et y respectivement du vecteur $\vec{V}$.

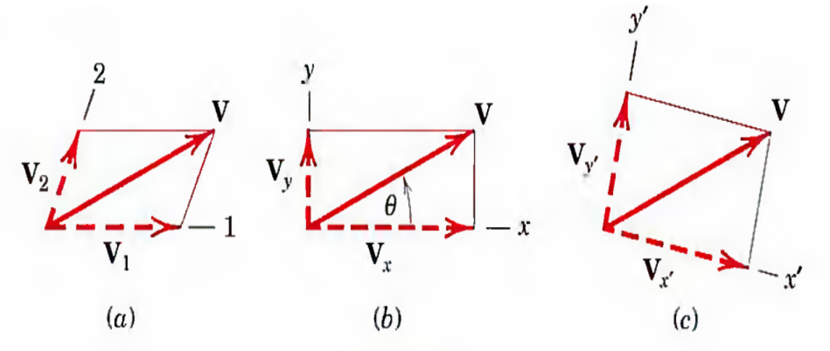


Figure I. 10: Composante d'un vecteur dans un repère quelconque.

De même, sur la figure I.10, $\overrightarrow{V_{x'}}$ et $\overrightarrow{V_{y'}}$ sont les composantes x' et y' de $\vec{V}$. Lorsqu'elles sont exprimées en composantes rectangulaires, la direction du vecteur par rapport à l'axe des x, par exemple, est clairement spécifiée. par l'angle θ, où:

$$\theta = tan^{-1}.\frac{V_y}{V_x}$$

Le module et la direction du vecteur sont commodément contenues dans une expression mathématique. Dans de nombreux problèmes, en particulier ceux en trois dimensions, il convient d'exprimer les composantes rectangulaires de $\vec{V}$, Figure I.11, en termes de vecteurs unitaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, qui sont des vecteurs dans les directions x, y et z respectivement , avec des magnitudes unitaires. Comme le vecteur V est la somme vectorielle des composants dans les directions x, y et z, nous pouvons exprimer $\vec{V}$ comme suit:

$$\vec{V} = V_x.\vec{\imath} + V_y.\vec{\jmath} + V_z.\vec{k}$$

D'ou ; $V_x = V.Cos\theta_x$ $V_y = V.Cos\theta_y$ $V_z = V.Cos\theta_z$

d'où, du théorème de Pythagore le module de vecteur $\vec{V}$ est donné par :

$$V^2 = {V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2$$

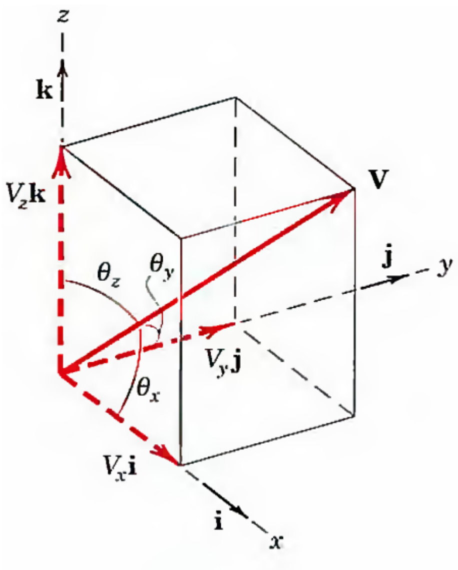


Figure I. 11: Représentation et composantes d'un vecteur dans l'espace.

Exemple 1:

Déterminer l'angle construit par le vecteur $\vec{V} = -10.\vec{\imath} + 24.\vec{\jmath}$ et l'axe positive x. Ecrire le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\vec{V}$.

Solution 1:

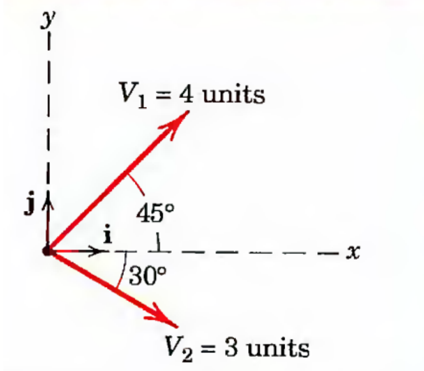
$V_x = V.Cos\theta_x$ $V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{(-10)^2 + 24^2} = 26$

On a : $Cos\theta_x = V_x/V$ $\quad Cos\theta_x = -\frac{10}{26}$ $\quad \theta_x = 112{,}6$

Le vecteur V s'ecrit sous la forme : $\vec{V} = V.\vec{u} = -10.\vec{\imath} + 24.\vec{\jmath}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V} = \frac{-10.\vec{\imath} + 24.\vec{\jmath}}{26} = -0{,}385\vec{\imath} + 0{,}923\vec{\jmath}$$

Exemple 2 :



Pour les deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ représentés dans la figure,

a) - Déterminer le module du vecteur $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.

- Déterminer l'angle θ entre le vecteur $\vec{S}$ et l'axe positif x

- Ecrire le vecteur $\vec{S}$ en termes de vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, et écrire aussi le vecteur unitaire $\vec{u}$ le long du vecteur $\vec{S}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{D} = \vec{V_1} - \vec{V_2}$

Solution 2 :

a)

- $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$, Alors $S = {V_1}^2 + {V_1}^2 - 2.V_1.V_2.cos\beta$

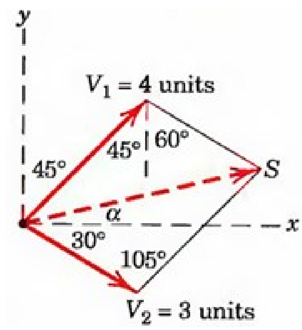
  $\beta = 105 = [360 - 2.(30 + 45)]/2$

  $S = 5.59$

- On utilisant la loi des sinus dans le triangle construit par $\vec{S}, \vec{V_1} et \vec{V_2}$:

  $\frac{S}{\sin 105} = \frac{V_1}{Sin(\varphi)}$ d'ou : $sin\varphi = \frac{V_1}{S}.\sin 105 = \left(\frac{4}{5{,}59}\right).\sin 105 = 0{,}69$

  $\varphi = 43{,}72$ donc $\alpha = \varphi - 30 = 13{,}72$



- $\vec{S} = S_x.\vec{\imath} + S_y.\vec{\jmath}$

  $S_x = S.cos\alpha = 5{,}43$, $S_y = S.sin\alpha = 1{,}32$

- $\vec{S} = 5{,}43.\vec{\imath} + 1{,}32.\vec{\jmath}$

b) $\vec{D} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = (4.\cos 45.\vec{\imath} + 4.sin45.\vec{\jmath}) + [-(3.\cos 30.\vec{\imath} - 3.sin30.\vec{\jmath})]$

$\vec{D} = 2{,}83.\vec{\imath} + 2{,}83.\vec{\jmath} - 2{,}60\vec{\imath} + 1{,}5.\vec{\jmath}$

$$\vec{D} = 0{,}23.\vec{\imath} + 4{,}33.\vec{\jmath}$$

I.3 Produit scalaire

Pour un couple de vecteurs $\vec{A}\ et\ \vec{B}$, on peut correspondre un nombre réel appelé

produit scalaire de $\vec{A}\ par\ \vec{B}$, noté $\vec{A}.\vec{B}$. Il s'écrit :

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos(\vec{A},\overrightarrow{B})$$

- Si $\vec{A}.\vec{B} = 0$ alors $\vec{A}\ perpenduculaire\ à\ \vec{B}$.

- Un vecteur est unitaire si son module est égal à 1.

I.4 Produit Vectoriel

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$ trois vecteurs quelconques de l'espace vectoriel à trois dimensions qui sont rapportés à une base $(\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ ,\vec{k})$ orthonormée et directe.

Le produit vectoriel $\overrightarrow{A_1}\wedge\overrightarrow{B_2}$ s'écrit :

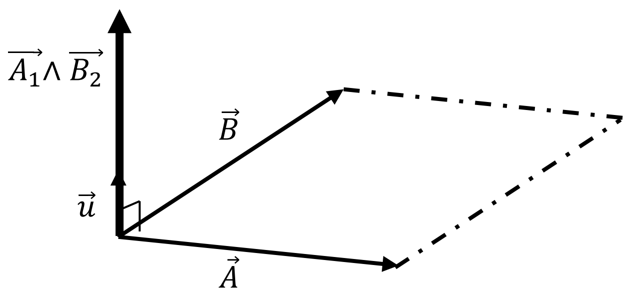
$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} \wedge \begin{cases} B_x \\ B_y \\ B_z \end{cases} = Det \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = (A_y.B_Z - B_y.A_z).\vec{\imath} - (A_x.B_Z - B_x.A_z).\vec{\jmath} + (A_x.B_y - B_x.A_y).\vec{k}$$

Le produit vectoriel est déterminé autrement :

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = A.B.\sin(\vec{A},\vec{B}).\vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire du produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B}$, dirigé perpendiculairement à $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



- Si le produit vectoriel $\overrightarrow{A_1}\wedge\overrightarrow{B_2} = \vec{0}$, Alors les deux vecteur sont parallèles.