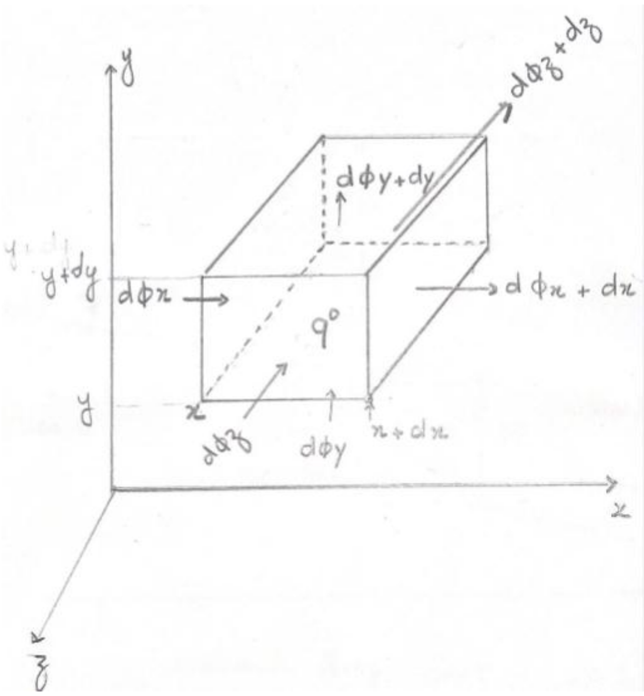
Suite Chapitre 3 : Conduction

2^{éme} leçon

3.3. Équation d'énergie (équation générale de la conduction)

dans un système de de coordonnées cartésiennes (o,x,y,z), l'équation dela conduction d la chaleur ou simplement l'équation de la chaleur peut etre développée en consi dérant un volume de contrôle et en effectuant le bilan thermique relatif à ce volume pendant le temps dt.



Le bilan energetique est :

[énergie entrante]-[énergie sortante]+[quantité d'énergie générée par une source]=

[accroissement ou diminution de lénergie dans le temps].

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \dot{E}_{Stockée}$$

Suivant l'axe X :

$$\dot{E}_e = d\Phi_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz)$$

$$\dot{E}_s = d\Phi_{x+dx} = d\Phi_x + \frac{\partial (d\Phi_x)}{\partial x}(dx)$$

Donc

$$d\Phi_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}\left[-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz)\right](dx)$$

$$d\Phi_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial}{\partial x}\left[T + \frac{\partial T}{\partial x}(dx)\right](dydz)$$

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) + \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz) + \frac{\partial}{\partial x}\left[+\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}(dydz)\right](dx)$$

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = +\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(dxdydz)$$

Ou bien

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right](dxdydz)$$

En approximant les differentes quantités de chaleur mises en jeu relativement aux parois perpendiculaires aux axes y et z ; et en développant les équations de la méme maniére que pour la direction x on aura :

$$d\Phi_y - d\Phi_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right](dxdydz)$$

$$d\Phi_z - d\Phi_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right](dxdydz)$$

Le bilan des quantités de chaleur transmises par conduction à travers le volume Vest :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right]\right](dxdydz)$$

- L'énergie engendrée par l'élement de volume dV à l'interieur est :

  $\dot{E}_g = \dot{q}\ dxdydz$ $\qquad$ $\dot{q}$: puissance volumique [W/m^3]

- L'energie stockée à l'intérieur de dV dans le temps dt est :

  $$\dot{E}_{stockée} = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

Le bilan énergetique final donne :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right]\right](dxdydz) + \dot{q}\ dxdydz = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right]\right] + \dot{q} = \rho Cp \frac{\partial T}{\partial t}$$

Qui est l'équation générale de la conduction en coordonnées cartésiennes pour un milieu hétérogéne anisotrope

- Pour un corps isotrope et homogéne, l'équation précdente devient :

$$\frac{\lambda}{\rho Cp}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{q}}{\rho Cp} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose

$$\frac{\lambda}{\rho Cp} = \alpha$$ coéfficient de diffusivité thermique

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

Ou bien

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda}$$

3.3. 1. Formes de l'équation de la chaleur

on peut déduire aisément les cas particuliers suivants que lon rencontre très fréquement :

- Milieu avec sources internes en régime permanent : $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$

$$\Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$ équation de Poisson

- Milieu sans sources internes, en régime permanent :

$$\Delta T = 0 \qquad \text{équation de Laplace}$$

➢ **Milieu sans sources internes en régime variable**

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{équation de Fourier}$$

➢ À une seul dimension sans source interne en régime permanent.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

3.4. Conditions aux limites spatio-temporelles

L'équation générale de la chaleur traduit par une relation entre les variables x,y,z,t et la température T, le mécanisme du phénoméne conductif, en tout point de coordonnées x,y,z et tout temps.

Cette équation aux derivées partielles, linéaire du deuxiéme ordre admet en principe une infinité de solution.

Cette équation n'a de sens physique que pour des conditions définies appliquées à un domaine d'espace-temps également défini (ces conditions sont les conditions initiale et aux limites).

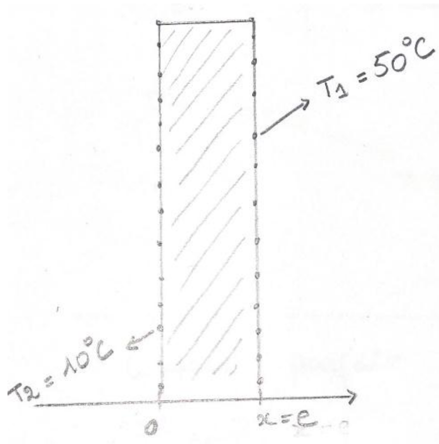
3.4.1. Condition initiale

La distribution des températures à l'interieur du solide et sur sa surface est supposé connue à l'instant $\boldsymbol{t = 0}$ $\quad \boldsymbol{T(x, y, z, 0) = T0\ (x, y, z)}$

3.4.2. Conditions aux limites

➢ ***Condition du premier type (condition de Dirichlet) :***

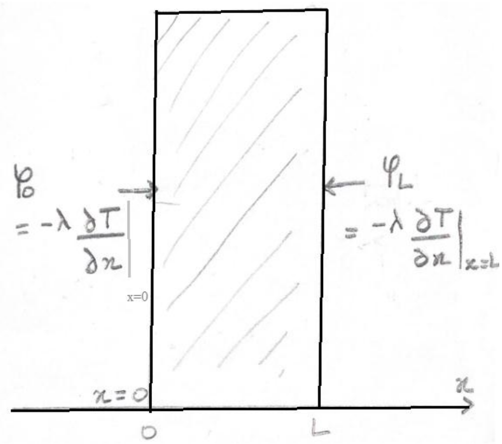
La température à la frontiére est imposée



➢ *Condition du deuxième type (condition de Neumann) :*

La densité du flux est imposée à la surface :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{M} = f(M, t)$$



Si la surface est adiabatique (isolation thermique parfaite)

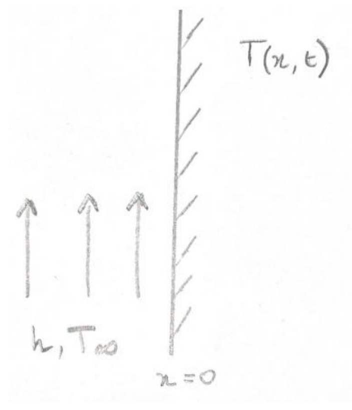
Cest à dire un flux nul

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \quad o\text{ù} \quad \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0$$

➢ *Condition du troisième type (condition de Fourier) :*

Transfert linéaire à la surface et condition mixte la densité du flux traversant la surface frontiére est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu environnant généralement fluide.

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \varphi = h(T_P - T_\infty)$$



h : Constante positive appelée coefficient d'échange convectif

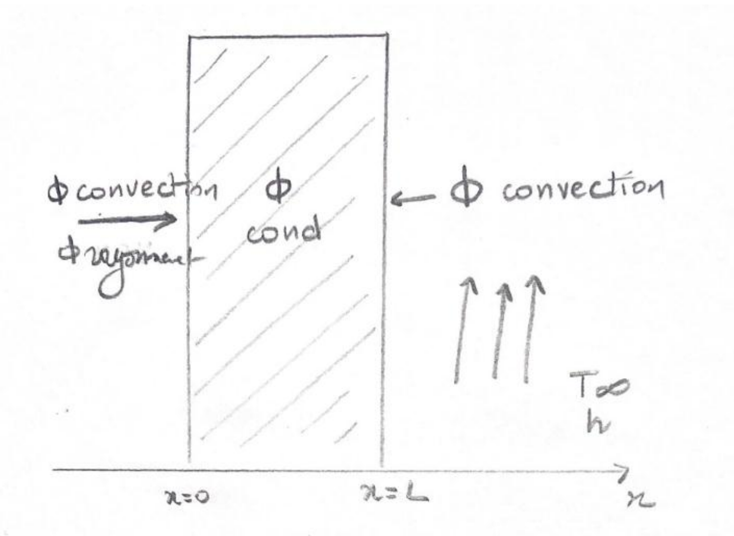
T_P : Température de la paroi

T_∞ : Température du fluide loin de la paroi--

D’autres lois d’échanges : par exemple présence du transfert de chaleur par rayonnement on a dans ce cas :

$h=h_c + h_r$ est appelé coefficient global d’échange de chaleur

h_r :coefficient d’échange par rayonnement..



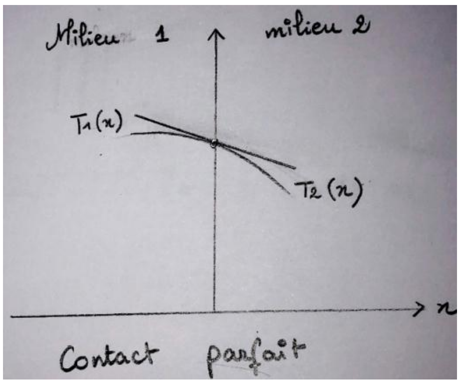
- ***Transfert à l’interface de deux solides différents (quatrième type) $\lambda_1 \neq \lambda_2$***

Lorsque deux solides de conductivités respectives λ_1 et λ_2 possedent une frontiére commune S, la conservation du flux s’écrit :

$$-\lambda_1 \overrightarrow{gradT_1} = -\lambda_2 \overrightarrow{gradT_2} \quad \text{sur S}$$

La courbe représentant la distribution des températures subit une réfraction au passage de l’interface.

- Une seconde condition est donnée dans le cas parfait par l’égalité des températures des deux corps à l’interface **$T_1 = T_2$** sur S



- On realité en régime permanent, tout se passe comme s'il y'a une résistance de contact introduisant tne brusque discontinuité de température sur une très faible distance au passage à l'interface.

Dans ce cas, la laison thermique à l'interface s'exprime :

- Par l'egalité des densités de flux thermiques des part et d'autre de de l'interface
- Par la proportionnalité du saut de température ΔT au flux thermique

$$\boldsymbol{\Delta T = R\Phi}$$

R : résistance thermique de contact.