Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

نتيجة 1: إذا كان a قاسما للعدد b، فكل قاسم للعدد a يكون قاسما للعدد b.

أمثلة توضيحية:

① لما كان $24 = 8 \times 3$، فإن 24 هو مضاعف 3 والعدد 3 هو قاسم للعدد 24، كما أن 24 هو مضاعف 8 والعدد 8 هو قاسم للعدد 24. كما أن 24 هو مضاعف 8 والعدد 8 هو قاسم للعدد 24، وبما أن 6 هو قاسم للعدد 24 فإن $24 = 6 \times 4$ وكذلك يمكن القول 24 هو مضاعف العدد 4 ويكون 4 قاسما للعدد 24، ويكون 24 مضاعف العدد 24. كما يكون 24 قاسما للعدد 24.

② العدد 8 يقسم العدد 24 والعدد 4 يقسم 8 فيكون 4 قاسما للعدد 24.

نتيجة 2:

إذا كان b مضاعفا للعدد a وكان c مضاعفا للعدد b فإن b يكون مضاعفا للعدد a.

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

القاسم المشترك لعددين :

- إذا كان العدد الطبيعي d يقسم العددين الطبيعيين a و b فإن d يقال إنه قاسم مشترك للعددين a و b.

مثال تطبيقي :

العدد 6 هو قاسم مشترك للعددين 36 و 90 ؛

$90 = 15 \times 6$ ، $36 = 6 \times 6$

نظرية :

مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b تقبل عنصرا أكبر.

- القاسم المشترك الأكبر لعددين :

القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b هو العنصر الأكبر في مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b. نرمز له بـ :

$PGCD(a,b)$ أو $a \wedge b$.

ملاحظة : إذا أخذنا عددين a و b ($a > b$) فالقاسم المشترك الأكبر للعددين يكون أكبر من العدد الصغير b إلا إذا كان $b = 0$ وحينئذ يكون a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

وتفرض دوما أن : $a, b \in \mathbb{N}^*$ ؛ $a \neq 0$ ، و

Association
Hawd Assafi

10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et
Informatique

العددان الأوليان

1. إذا كان ق.م.أ للعددين a, b هو 1 فنقول بأن العددين a, b أوليان فيما بينهما أو بأن كل منهما أولي مع الآخر.

إذا كان a, b عددين أوليين فيما بينهما فليس لهما قاسم مشترك سوى 1.

نظرية إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a, b $(a>b)$ فإن d يقسم $a+b$ كما يقسم $a-b$.

نتيجة إذا كان d قاسما مشتركا للعددين b, c $(b>c)$ ولم يكن c قاسما للعدد b وإذا وضعنا:

$$b = qc + r$$

حيث $r > 0$

فإن d يقسم r.

أمثلة تطبيقية:

① القواسم المشتركة للعددين 90, 36 هي

$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

و نرى أن $pgdc(36, 90) = 18$

④ العددان 16 ، 25 ليس لهما قاسم مشترك
سوى 1 فالعددان 16، 25 أوليان فيما بينهما.

⑤ العدد 6 قاسم مشترك للعددين 36، 90 فيكون
6 قاسما للمجموع 36+90=126 كما يكون قاسما
للفرق 90-36=54

⑥ العدد 90 ليس مضاعف للعدد 6 فيكون،

$$90 = 2 \times 36 + 18$$

أو أيضا

$$90 = 1 \times 36 + r$$

حيث $r = 18$ و العدد 6 قاسم مشترك للعددين
36، 90 فيكون 6 قاسما لباقي القسمة r،
حوار رقمية تقليدية سنة (التقسيم المتتابع).

ليجاد ق.م.ف (pgdc) العددين معلومين b، c
(c < b) نجري عملية القسمة الاقليدية في $\mathbb{N}$،

* إذا كان b مضاعف للعدد c، فإن $b = k.c$ ويكون
c هو ق.م.ف لأنه يقسم c، b بما فيها واحد وهو أكبر قاسم
للعدد c.

* إذا لم يكن b مضاعفا للعدد c، فيوجد زوج (k, r) وحيد

إذا لم يكن c مضاعفاً للعدد r فيوجد زوج (q_1, r_1) بحيث يكون:

$$c = q_1 r + r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < r$$

ويكون ق.م.أ المطلوب هو ق.م.أ للعددين r, r_1

($r > r_1$) نقسم بعد ذلك r على r_1 ونتابع كما سبق إلى أن نجد باقياً مساوياً للصفر.

فإذا كان r_n آخر باق غير منعدم فإن:

$$r_{n-1} = q' r_n$$

ويكون r_n التالي هو ق.م.أ للعددين r_{n-1}, r_n ($r_{n-1} > r_n$)

أي للعددين r_{n-2}, r_{n-1} أي للعددين --- أي للعددين r, r_1 أي للعددين b, k.

فالقاسم المشترك الأكبر لعددين (a, b) هو آخر باق غير منعدم لعمليات القسمة المتتابعة لخوارزمية اقليدس، وإذا كان آخر باق غير منعدم يساوي 1 فالعددان a, b أوليان فيما بينهما.

ونستنتج مما سبق أن مجموعة القواسم المشتركة لعددين هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر للعددين.

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

تمرين تطبيقي

① حدد pgdc(36,90) حسب خوارزمية اقليدس ثم كتب:

$$90 = 36 \times 2 + 18$$
$$36 = 2 \times 18 + 0$$

آخر باقي غير منعدم هو 18 فيكون $pgdc(90,36) = 18$

② حدد pgdc(2548,532) حسب خوارزمية اقليدس ثم كتب:

$$2548 = 532 \times 4 + 420$$
$$532 = 420 \times 1 + 112$$
$$420 = 112 \times 3 + 84$$
$$112 = 84 \times 1 + 28$$
$$84 = 28 \times 3 + 0$$

$$\Rightarrow pgdc(2548,532) = 28$$

ملاحظة: يمكن اجراء عملية القسمة الاقليدية في الجدول التالي:

خوارج القسمة		1	3	1	3
2548	532	420	112	84	(28)
532	420	112	84	28	0

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

خواص PGCD

(2) $b \wedge c = c \wedge b$

(3) $b \wedge 0 = b$

(4) $b \wedge 1 = 1$

(5) $b \wedge b = b$

(6) $c \mid b \iff b \wedge c = c$

(7) $d \mid b \text{ et } d \mid c \iff d \mid (b \wedge c)$

يكون d قاسما مشتركا لعددين a و b فقط
إذا كان d قاسما لـ ق.م.أ العددين

~~$b \wedge a \wedge c$~~

(8) $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$

(9) $b \wedge c = k \iff (b:k) \wedge (c:k) = 1$

(10) $(b \wedge c) \wedge d = b \wedge (c \wedge d)$

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

يكون : $b=kc+r$ ، $0<r<c$

- إذا كان d قاسما مشتركا للعددين b, c فإنه يقسم b فإنه يقسم الفرق بينهما b, kc فإنه يقسم r وبالتالي يكون d قاسما مشتركا للعددين r, c أي أن d يقسم $b-kc$

- وعكس ما سبق صحيح أي أنه إذا كان h قاسما مشتركا للعددين r, c فإنه يقسم kc, r فإنه يقسم b أي $kc+r$ وبالتالي مجموعهما b أي h هو قاسم مشترك للعددين b, c.

ينتج مما سبق أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين b, c هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين c, r أي أن القاسم المشترك الأكبر $pgdc$ للعددين b, c هو في آن معا القاسم المشترك الأكبر للعددين c, r ذاته.

- ولما كان $r<c$ فتقسم c على r:

إذا كان c مضاعفا للعدد r فإن r يكون هو قاسم للعددين c, r أو للعددين b, c فيكون $pgdc=r$