Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Association
Hawd Assafi

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

الفصل 1: المجموعات العددية

I. مجموعة الأعداد الطبيعية

1) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

بديهيات:

نقبل بوجود مجموعة ندعى مجموعة الأعداد الطبيعية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ حيث،

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

وتحقق البديهيات التالية:

1. $\mathbb{N}$ غير خالية
2. $\mathbb{N}$ مزودة بالعلاقة $\leq$ علاقة ترتيب كلي،
3. $\mathbb{N}$ ليس لها عنصر أكبر وعنصرها الأصغر هو الصفر
4. كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ تقبل عنصرا أصغر

الخواص المتعلقة بالجمع:

- الجمع تبديلي وتجميعي والصفر عنصر حيادي

$$a, b, c \in \mathbb{N} \; ; \quad a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + 0 = a$$

- تحقق الجمع قاعدة الاختصار أي:

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Association
Hawd Assafi

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N} : a+b = c+b \Rightarrow a=c$

- علاقة الترتيب $\leq$ متلائمة مع الجمع أي:

$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

- إذا كان $b \leq a$ فإنه يوجد عدد طبيعي c وعدد واحد وحيث يكون $a = b+c$، نكتب $c = a-b$

- إذا كان $a < b$ فإنه لا يوجد عدد طبيعي يحقق $a = b+c$

الخواص المتعلقة بالضرب:

- الضرب تبديلي وتجميعي والعنصر 1 عنصر حيادي:

$a, b, c \in \mathbb{N} : a \times b = b \times a$

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

$a \times 1 = a$

- يحقق الضرب قاعدة الاختصار في $\mathbb{N}^*$ أي:

$a, b, c \in \mathbb{N}^* : a \times c = b \times c \Rightarrow a = b$

- من أجل $a, b \in \mathbb{N}$:

$a \times b = 0 \Rightarrow (a=0)$ أو $(b=0)$

- علاقة الترتيب $\leq$ متلائمة مع الضرب أي:

$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times c$

- الضرب توزيعي على الجمع: $a(b+d) = ab + ac$

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

العناصر الأساسية في $\mathbb{N}$

تعريف: L مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$.

- يسمى العنصر $a \in \mathbb{N}$ حاد من الأعلى للمجموعة L إذا: وفقط إذا تحقق: $\forall b \in L ; \ b \leq a$
- يسمى العنصر $b \in \mathbb{N}$ حاد من الأسفل للمجموعة L إذا: وفقط إذا تحقق: $\forall c \in L ; \ c \geq a$
- إذا كان $a \in L$ يسمى a بالعنصر الأكبر ونكتب $a = \max L$
- إذا كان $b \in L$ يسمى b بالعنصر الأصغر ونكتب $b = \min L$

② أنظمة العد:

القسمة الأوقليدية في $\mathbb{N}$:

نظرية: من أجل كل ثنائية (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث $b \neq 0$ توجد ثنائية وحيدة (k,r) من الأعداد الطبيعية تحقق:

$$a = kb + r \quad \text{و} \quad 0 \leq r < b$$

تسمى هذه العملية بالقسمة الأوقليدية للعدد a على b حيث k هو حاصل القسمة، و r باقيها.

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Association
Hawd Assafi

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

العدد

• استعمل الانسان منذ القدم رموزا مختلفة وطرقا متعددة في العد أو الترقيم. فقد استعمل الرومان مثلا الطريقة التالية:

I ، V ، X ، L ، C ، D ، M
1 ، 5 ، 10 ، 50 ، 100 ، 500 ، 1000

وكان الرومان يعبرون عن جميع الأعداد الطبيعية بهذه الرموز السبعة فقط.

• كتابة عدد حسب قوى عدد آخر أكبر من الواحد:

* لدينا العدد "ألفين وخمسة وعشرون" 2025 مكتوب

$2025 = 2000 + 25$

$= 2 \times 10^3 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

نكون بذلك قد كتبنا العدد 2025 حسب القوى المتتالية للعدد الطبيعي 10.

• هل يمكن استنتاج العدد السابق من الكتابة الأخيرة؟
نعم، نستطيع أن نحصل على العدد السابق بأخذ معاملات قوى العشرة ابتداء من أصغر قوة الى أكبر قوة مبتدئين من اليمين الى اليسار أي 5، 2، 0، 2

وهذه العملات تنتمي الى المجموعة
$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

الى اصلها 8،

تقول في هذه الحالة ان العدد 2025 مكتوب في
النظام الذي أساسه 8 ونكتب $(2025)_8$ للدلالة
على ذلك.

مثال 1: $(250)_{10} = {}^2 10 \times 2 + {}^1 10 \times 5 + {}^0 10,0 = 250$

مثال 2: $(13)_{10} = {}^1 10 \times 1 + {}^0 10,3 = 10 + 3 = 13$

مثال 3: لنكتب العدد 11 حسب قوى العدد 2

$$(11)_{10} = {}^3 2 + 2 + 1 = 8 + 2 + 1 =$$

$$= {}^3 2,1 + {}^2 2,0 + {}^1 2,1 + {}^0 2,1$$

اذن نكتب العدد $(11)_{10}$ في النظام الثنائي $(1011)_2$

نلاحظ اذن مجموعة أرقام النظام الثنائي هي $\{1,0\}$

مثال 4: $(13)_{10} = 8 + 4 + 1 = {}^3 2 + {}^2 2 + 1$

$$= {}^3 2,1 + {}^2 2,1 + {}^1 2,0 + {}^0 2,1$$

$$= (1101)_2$$

فستطيع الوصول الى هذه النتيجة بأخذ بواقي القسمة الاقليدية على 2، على أن يكون الباقي الاول هو وحدات الدرجة الاولى والباقي الثاني هو وحدات الدرجة الثانية وهكذا نحصل على:

$$13 = 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3$$

$$(13)_{10} = (1101)_2$$

نقبل النظرية التالية:

نظرية: يمكن كتابة أي عدد طبيعي x حسب القوى المتتالية للعدد a حيث $a \neq 1$ فيكون:

$$x = \alpha_0 a^0 + \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_n a^n$$

حيث $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ عناصر من المجموعة

$$\{0, 1, 2, \dots, a-1\}$$

ونكتب

$$x_a = \overline{\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_0}$$

يسمى العدد a أساس نظام العد هذا إذا كان $a = 2$ يكون نظام العد هو النظام الثنائي وإذا كان $a = 8$ يكون نظام العد هو النظام الثماني وهكذا

Association
Hawd Assafi

10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

أمثلة:

$(14)_{10} = 4 + 2*5 = 4\times5^0 + 2\times5^1$
$= (24)_5$

$(17)_{10} = 2 + 3\times5 = 2\times5^0 + 3\times5^1$

$= (32)_5$

$(14)_{10} = 2\times7 = 0\times7^0 + 2\times7^1$

$= (20)_7$

$(17)_{10} = 3 + 2\times7 = 3\times7^0 + 2\times7^1$

$= (23)_7$

$(14)_{10} = 5 + 9 = 5\times9^0 + 1\times9^1$

$= (15)_9$

$(17)_{10} = 8 + 9 = 8\times9^0 + 1\times9$

$= (18)_9$

* الانتقال من النظام العشري الى النظام الثنائي والعكس يمكن أن تجد أن:

$(15)_{10} = 1\times2^0 + 1\times2^1 + 1\times2^2 + 1\times2^3$

$= (1111)_2$

مثال: يمكن أن نكتب العدد $(11011)_2$ الكتابة العشرية

نعلم أن:

$(11011)_2 = 1\times2^0 + 1\times2^1 + 0\times2^2 + 1\times2^3 + 1\times2^4$

$= 1 + 2 + 8 + 16$

$= (27)_{10}$

فيكون $(11011)_2 = (27)_{10}$

③ القواسم و المضاعفات:

القاسم المشترك الأكبر في $\mathbb{N}$:

• تعريف: (القاسم و المضاعف في $\mathbb{N}$)

إذا كان c عددا طبيعيا غير الصفر نقول أن b هو مضاعف للعدد c إذا وجد عدد طبيعي q بحيث يكون:

$b = c.q$

و نقول عن c أنه قاسم للعدد b و نكتب c | b و نقرأ c يقسم b، ينتج عن ذلك

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

الدكتور الطالب

c يقسم b أو b يقسم c $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : b = c.x$

ملحوظات:

① قبل العدد 0 القسمة على أي عدد طبيعي غير الصفر، أي أن، أي عدد طبيعي غير الصفر يكون قاسما للصفر.

وتبين المتطابقة $0 = 0 \times 0$، أن يمكن اعتباره 0 قاسما للصفر، والعدد 0 حالة خاصة من حيث قابلية القسمة.

والعدد 0 لا يقسم نفسه.

نتوسع مفهوم التضاعف، حيث نقول ان مجموعة قواسم العدد 0 هي المجموعة $\mathbb{N}$.

② نقسم العدد 1، أي عدد طبيعي b.

③ إذا كان c قاسما للعدد b فواضح أن $b \geq c$.

نظرية:

إذا اعتبرنا في $\mathbb{N}$ العلاقة $\mid$، أي:

$x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, y = kx$

y مضاعف x، $\forall x, y \in \mathbb{N}$

فإن هاته العلاقة هي علاقة ترتيب جزئي.