Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

الحالة 2 : $a=2k+1$, $b=2l$

$n=4k^2+4l^2+4k+1$ باقي قسمة n على 4 هو 1 وهذا يكافئ

الحالة 3 : $a=2k$, $b=2l+1$

$n=4k^2+4l^2+4l+1$ باقي قسمة n على 4 هو 1 وهذا يكافئ

الحالة 4 : $a=2k+1$, $b=2l+1$

$n=4k^2+4l^2+4k+4l+2$ باقي قسمة n على 4 هو 2 وهذا يكافئ

3- البرهان بالتراجع :

لتكن $P(n)$ قضية لعدد طبيعي n ، وادلخان :

- $P(0)$ صحيحة

- من أجل كل عدد طبيعي n ، إذا كان $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ فإنه تكون $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ،

ملاحظة : يمكن البرهان بالتراجع أن يجري ابتداءً من عدد طبيعي m بحيث $m \neq 0$.

- $P(m)$ صحيحة

- من أجل $n \geq m$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

إذن $P(n)$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m$,

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

$\forall n \in \mathbb{N}$

مثال: أثبت أنه

$3^{3n+1} + 2^{n+1}$ قابل للقسمة على 5

الحل: - من أجل $n = 0$

$3^{3\times0+1} + 2^{0+1} = 3 + 2 = 5$

وهو قابل للقسمة على 5، $P(0)$ محققة.

- نفرض أن $P(n)$ محققة:

$3^{3n+1} + 2^{n+1} = 5k, \quad k \in \mathbb{N}$

فيكون من أجل $n+1$:

$$3^{3(n+1)+1} + 2^{(n+1)+1} = 3^{3n+1} \cdot 3^3 + 2 \cdot 2^{n+1}$$
$$= 27 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1}$$
$$= (2+25)3^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1}$$
$$= 2(2^{n+1} + 3^{n+1}) + 25 \cdot 3^{n+1}$$
$$= 2 \cdot 5k + 5 \cdot 5 \cdot 3^{n+1}$$
$$= 5(2k + 5 \cdot 3^{n+1}) = 5R$$

محققة $P(n+1)$ ومنه

؟ ماذا

$\forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+1} + 3^{3n+1}$

قابل للقسمة على 5.

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

3- كيف البرهان بمثال: نستخدم في إثبات قضايا من الشكل

$\exists x \in E : P(x)$ صحيحة

مثال: بين أن المجموعة الموالية غير خالية.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 12x - 7y = 8\}$

$(x,y) = (3,4)$ يكفي أخذ

3-4 البرهان بالتحليل والتركيب:

يسمح هذا النمط من الاستدلال بإثبات وجود ووحدانية كائن رياضياتي يحقق خاصية أو خصائص معطاة، ويتم على مرحلتين:

- مرحلة التحليل: نفترض وجود هذا الكائن ونحاول التعرف عليه بدلالة كائن أو كائنات معطاة، وذلك بالاعتماد على الشروط الضرورية التي ينبغي أن يحققها هذا الكائن.

- مرحلة التركيب: نستخلص من المرحلة السابقة وحدانية الكائن المكتشف واستجابته للشروط المطلوبة.

مثال: أثبت أن كل دالة f معرفة من $\mathbb{R}$ في نفسه تكتب بشكل وحيد كمجموع دالتين احداهما زوجية والأخرى فردية.

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

التحليل: نفرض وجود دالة زوجية g ودالة فردية h بحيث $f = g + h$

حينئذ: $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$

أي $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$

وبالتالي: $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$

و $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

التركيب: بوضع $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$

و $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

يمكن التحقق بسهولة أن الدالتين المعرفتين بهذا الشكل تعطيان حلا للمسألة وأن هذا الحل وحيد.

2