الفصل 1: الاستدلال الرياضي

① مفهوم المنطق: من التعاريف الشائعة للمنطق هو أنه تحليل طرق الاستدلال من حيث شكلها بغض النظر عن محتوى المفاهيم التي نعالجها. لنضرب مثالين:

1) كل إنسان فان
سقراط إنسان
إذن سقراط فان

2) كل جزائري يحب كرة القدم
سليم جزائري
إذن سليم يحب كرة القدم.

- ليس للمثالين السابقين نفس المحتوى لكنهما من نفس الشكل: "كل م هو ع" و "س هو م" إذن "س هو ع".

لا يهم علماء المنطق صدق أو كذب مقدمات أو نتائج معينة من ناحية المحتوى، إنما يهمهم فقط ماذا ينتج على صحة المقدمات، أو متى ينتج عن صدق المقدمات صدق النتائج. (~~وعلى سبيل المثال~~)

② القضية: تستعمل الرياضيات جملا أو تراكيب لغوية تسمى بعضها منها قضايا.

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

أمثلة: ① "يقبل العدد 6 القسمة على 2"
② "قسنطينة عاصمة تونس"
③ "زوايا كل مربع متساوية"

* مبدأ الثالث المرفوع (أو المحذوف): تكون كل قضية إما صادقة (خاطئة) أو صادقة (صحيحة). ينتج مبدأ الثالث المرفوع هذا أنه إذا لم نستطع وصف تركيب لغوي أو رمزي بالصدق أو الكذب فهو ليس بقضية.

* الاستنتاج: لنعتبر الجمل التالية:
① إذا كان الجزائريون شجعانا و أنا جزائري فأنا شجاع
② إذا كان العدد أكبر من الصفر فإن الصفر أصغر منه
وبوجه عام إذا كانت p و q قضيتين، نرمز إلى القضية "إذا كانت p صادقة فإن q صادقة" بـ $p \Rightarrow q$ ونقرأ q مستنتجة من p.

* النفي: إذا كانت p قضية، نسمي نفي القضية p القضية التي نرمز لها بـ $\overline{p}$ ونقرأ لا p أو نفي p والتي تكون صادقة إذا كانت p كاذبة وتكون كاذبة إذا كانت p صادقة

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

* الاستلزام الذي يكون من الشكل $p \Rightarrow q$ حيث p و q تعتبر قضيتين:

p: "كان ابن باديس يقطن بقسنطينة"

q: "كان ابن باديس يقطن في القطر الجزائري"

إذا علمنا أن قسنطينة تقع في القطر الجزائري فمن الواضح أن $p = q$ وإذا كانت p صادقة لا يمكن لـ q أن تكون q كاذبة، هذا يؤدي إلى التعريف:

تعريف: نسمي القضية الشرطية أو الاستلزام التي نرمز لها $p \Rightarrow q$ (أو $q \Leftarrow p$) ونقرأ p يستلزم q.

ملاحظة: يجدر بنا الآن أن نشرح المقصود من الكلمتين "العكس" و "العكس النقيض"

- إذا كانت p و q قضيتين فإن عكس الاستلزام $p \Rightarrow q$ هو $q \Rightarrow p$.

- وعكس نقيض الاستلزام هو $q \Rightarrow p$ عكس نقيضه $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

* الكافؤ المنطقي: نقول أن القضيتين p و q أنهما متكافئتان ونكتب $p \Leftrightarrow q$ إذا كان $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

* الشرط اللازم و الشرط الكافي: غالبا ما يعبر عن القضية الشرطية $p \Rightarrow q$ بتعبيرين: q شرط لازم عن p أو p شرط كاف لـ q.

وبالتالي إذا كانت القضية $p \Leftrightarrow q$ فتكون كل من p و q شرطا لازما وكافيا للأخرى، وفي هذه الحالة نستخدم التعبير: تكون p إذا وفقط إذا كان q،
أو تكون q إذا وفقط إذا كان p.

* التناقض: نقول عن قضية مركبة أنها تناقض إذا كانت كاذبة مهما كانت قيم حدتها القضايا التي تكونها.

② الاستدلال:

نعتبر كل ما سبق تحضيرا للهدف الرئيسي لهذا الفصل ألا وهو التعرف على الاستدلالات الصحيحة و الباطلة، و تشتمل المنطق الكلاسيكي، الذي كان كلاميا أكثر منه رمزيا، على قواعد محددة للاستدلالات الصحيحة، نجد في مقدمتها القاعدتين الأساسيتين للاستدلال التاليتين:

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

القاعدة 01 : إذا اعتبرنا بصدق الاستلزام $p \Rightarrow q$ وبصدق المقدم p فحينئذ يجب أن نقبل بصدق التالي q،

القاعدة 02 : إذا اعتبرنا بصدق الاستلزام $p \Rightarrow q$ وبكذب التالي q فحينئذ يجب أن نقبل بكذب المقدم p،

- إليك مثالين على تطبيق هاتين القاعدتين،

المثال 11 : ① إذا أمطرت السماء يبتسم الفلاح
② السماء تمطر
③ إذن يبتسم الفلاح

المثال 12 : ① إذا توحدت الأمة العربية تحررت فلسطين
② فلسطين غير محررة
③ إذن الأمة العربية هي غير موحدة.

استنتجنا في كل من المثالين السابقين صدق القضية الثالثة من فرضنا صدق القضيتين ① و ②.

* تسمى استدلالا كل عملية انتقال من قضية أو أكثر تسميها مقدمة أو مقدمات) إلى قضية أخرى تسميها نتيجة أو تاليا)، ونقول إننا حصلنا انطلاقا من القرضين ① و ② على النتيجة ③ الصادقة بحجة صحيحة.

* وعلى كل فإن اتفاق صدق أو كذب النتيجة مع الواقع

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Association Hawd Assafi

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

غيرهم ~ إيمكن إعطاء عدة حجج صحيحة حيث تتفق النتيجة مع الواقع وعدة حجج صحيحة أخرى حيث لاتتفق النتيجة مع الواقع كما في المثال التالي:

مثال 03: إذا ألفت جزائريا فأنت تملك بئر للبترول

أنت جزائري

إذن أنت تملك بئرا للبترول

إذا ألفت جزائريا وقبلت القضية الشرطية على أنها صادقة فأنت مضطر بعد ذلك إلى قبول النتيجة على أنها صادقة. التراجع غير ممكن حتى ولو أنك لا تملك لقمة واحدة تسد بها رمقك هذا المساء.

③ أنماط البرهان (الاستدلال):

3-1 البرهان بالخلف:

لكي نبرهن أن p صحيحة، نفرض أن $\bar{p}$ صحيحة ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض.

مثال: أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}$ ، $\sqrt{n^2+1} > n$ (P)

الحل: نفرض أن $\sqrt{n^2+1} < n$ ومنه $n^2+1 < n^2$

يكافئ $1 < 0$ وهذا تناقض ومنه (P) صحيحة

3-2 البرهان بالعكس النقيض:

لكي نبرهن $q \Rightarrow p$ صحيحة يكفي أن نبرهن صحة $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

Association
Hawd Assafi

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique

مثال: أثبت أن:
$\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x - 10 = 7 \Rightarrow x \neq 1$
الحل: يكفي إثبات أن: $x = 1 \Rightarrow x^3 + 3x - 10 \neq 7$
وهذا المحقق كون: $1^3 + 3 - 10 = -6 \neq 7$

3.3 البرهان بالمثال المضاد:

لكي نبرهن عدم صحة القضية $\forall x \in E : P(x)$
يكفي إيجاد عنصر x_0 من E بحيث تكون $P(x)$ خاطئة

مثال: أثبت أن: $n^2 + n + 2 \geq n^3$
الحل: القضية خاطئة لأنه يوجد على الأقل مثال مضاد
لصحتها، بأخذ $n = 3$ نجد: $3^2 + 3 + 2 = 14 \not\geq 3^3 = 27$

3.4 البرهان بفصل الحالات: (ماهي هذا تعريف)

لإثبات صحة قضية P على مجموعة كلية E نعطي تجزئة E إلى عدة مجموعات جزئية $E_1, E_2, \dots, E_n$ ونثبت أن P صحيحة على كل جزء.

مثال: أثبت أن: إذا كان n مجموع مربعين فإن باقي قسمة n على 4 تختلف عن 3.

الحل: $n = a^2 + b^2$ ولدينا الحالات التالية:

الحالة 1: $a = 2k$, $b = 2l$

$n = 4k^2 + 4k^2$ باقي قسمة n على 4 هو 0 تختلف عن 3

فصل الحالات :

يعتمد على المبدأ التالي :

① — P ص د $\Leftarrow [(a \vee \bar{a}) \Rightarrow P]$

والذي يمكن كتابته وفق الصيغة الحاضنة التالية.

② — P ص د $\Leftarrow [(a \Rightarrow P) \wedge (\bar{a} \Rightarrow P)]$

لاحظ أن : ① $\Leftrightarrow$ ②

القيام ببرهان عن طريق فصل الحالات، يقتضي إيجاد تجزئة منتهية للمجموعة التي يجري فيها البرهان ثم القيام بالبرهنة على كل جزء.

Université d'été de Safi
10ème Edition
JMASA
25 - 27 JUIN 2008

Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi
Département de Mathématique et Informatique