المحور الرابع

الكهرومغناطيسية النسبية

1.IV. مقدمة

قد اصبح معروفا الان من ان قانون كولوم هو الاساس في حساب القوة الكهربائية المؤثرة على الشحنات الساكنة. ولكن اذا تحركت تلك الشحنات فان قوة جديدة تظهر لتضاف الى قوة كولوم هي القوة المغناطيسية وقد تم توضيح ذلك سابقا. افتراض اينشتاين في عام *1905* مستعينا بنظريته النسبية ان هاتين القوتين الكهربائية والمغناطيسية تنشآن من القوة الكهربائية. وقد أجريت تجارب كثيرة تتعلق بهذه الدراسة وثبت ان العالم اينشتاين كان على صواب عندما وضع هذا الافتراض. ان هاتين القوتين تم تسميتهما معا بالقوة الكهرومغناطيسية للترابط الوثيق فيما بينهما وان ظهور قوة مغناطيسية يعطي تصحيحا نسبيا لقانون كولوم.

2.IV. مراجعة لقوانين الكهرومغناطيسية

1.2.IV. المجال الكهربي والمغناطيسي المتغير مع الزمن

اذا كانت الشحنة الكهربية دالة للزمن، فانه عند اي نقطة ما وفي اي لحظة زمنية يكون قانون جاوس بصيغته التفاضلية والتكاملية صحيحا وكالتالي:

$$\nabla . E(r,t) = \frac{\rho(r,t)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \oint_s \ E(r,t).ds = \frac{Q(r,t)}{\varepsilon_0} \qquad (1.IV)$$

وبالمثل، تكون معادلات المجال المغناطيسي *B(r,t)* صحيحة وبالصيغة الرياضية التالية:

$$\nabla . B(r,t) = 0 \quad \Rightarrow \oint_s \ B(r,t).ds = 0 \qquad (2.IV)$$

وتعتبر هذه المعادلات الاركان الاساسية للنظرية الكهرومغناطيسية .اما قانون فراداي بصيغته التفاضلية للمجالات المتغيرة زمنيا يكون صحيحا ويمثل احد المعادلات الاصلية للنظرية الكهرومغناطيسية ، وهو على الصورة التالية:

$$\nabla \times E(r,t) = -\frac{\partial B(r,t)}{\partial t} \qquad (3.IV)$$

في هذه الحالة، نلاحظ ان المجال الكهربي ال يكون مجالا محافظا، أي $\oint_c \ E.dr \neq 0$ لأن القوة الدافعة التأثيرية لا تساوي صفرا في هذه الحالة، كما نلاحظ ان مصدر المجال الكهربي يعود الى التوزيع الشحني والى التغير الزمني للمجال المغناطيسي والناتج عن كون توزي ع التيار الكهربي دالة زمنية. وبصورة عامة لا يكون تدوير (التفاف) و تباعد المجال الكهربي مساويا للصفر. وفقط يكون المجال الكهربي محافظا عندما يكون المجال المغناطيسي ثابتا مع الزمن .

لايجاد شدة المجال الكهربائي ، والمكون من حدين الاول منهما يكون محافظا والثاني غير محافظ ، نتبع ما يلي:

بما ان :

$$\nabla . B = 0 \Rightarrow B = \nabla \times A \qquad (4.IV)$$

حيث A الجهد المغناطيسي المتجه، بالتعويض في قانون فراداي التفاضلي نحصل على:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A) = \nabla \times \left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \qquad (5.IV)$$

من نظريات المتجهات، اذا كان التفاف اي متجه ما يساوي الصفر، فإن هذا المتجه يساوي سالب تحدر دالة عددية. وعليه:

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\Phi \Rightarrow E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\Phi \qquad (6.IV)$$

حيث Φ تمثل دالة الجهد الكهربي.

2.2.IV. معادلات ماكسويل

استطاع ماكسويل ان يضع الاسس الرياضية للنظرية الكهرومغناطيسية في الاوساط المادية على الصورة التالية:

معادلة ماكسويل
$$\text{Div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

معادلة ماكسويل فراداي
$$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

معادلة التدفق
$$\text{Div}\,\vec{B} = 0$$

معادلة ماكسويل امبار
$$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{B} = \mu_o \vec{J} + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3.2.IV. معادلة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية

في غياب المنبع ($\vec{J} = \vec{0}$ ،$\rho = 0$) ، معادلات انتشار الامواج بالسرعة c = $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$هي

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) = -\Delta\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = 0 \qquad (7.IV)$$

تسمى معادلة الموجة للمجال الكهربائي.

بنفس الطريقة نتحصل على معادلة الموجة للمجال المغناطيسي:

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = 0 \qquad (8.IV)$$

اي ان كل مركبات شعاع الحقل الكهرومغناطيسي تحقق معادلة الموجة

$$\nabla\psi = 0 \qquad (9.IV)$$

3.IV. صمود قوانين الكهرومغناطيسية: الاشعة الرباعية للتيار والكمون

1.3.IV. قوة لورنتز

قوة لورنتز $\vec{F}_{ext}$ التي تؤثر على شحنة q سرعتها $\vec{V}$ عن طريق الحقل الكهرومغناطيسي $(\vec{E},\vec{B})$ تبقى صامدة بتحويلات لورنتز.

$$\vec{F}_{ext} = q(\vec{E} + \vec{V}\Lambda\vec{B}) \qquad (10.IV)$$

وقانون تحويل شعاع الحقل الكهرومغناطيسي يكون بالشكل التالي:

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_Z) \\ E_Z = \gamma(E'_Z - vB'_y) \end{cases} \qquad \begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z) \\ B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y) \end{cases} \qquad (11.IV)$$

ومركبات تحويل السرعة تعطى كالاتي:

$$v_x = \frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}،\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1+\frac{v'_xV}{c^2}\right)}،\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1+\frac{v'_xV}{c^2}\right)} \qquad (12.IV)$$

وبالتالي فان مركبات شعاع القوة تكون:

$$\begin{cases} F_x = q(E_x + V_yB_z - V_zB_y) \\ F_y = q(E_y + V_zB_x - V_xB_z) \\ F_z = q(E_z + V_xB_y - V_yB_x) \end{cases} \qquad (13.IV)$$

يمكن التعبير عن هذه القوة بشكل مغاير (القوة الرباعية).

$$\overrightarrow{F^{\mu}} = \frac{d\overrightarrow{P^{\mu}}}{d\tau} = \gamma\frac{d\overrightarrow{P^{\mu}}}{dt} = \left(\gamma\frac{\vec{F}.\vec{v}}{c}, \gamma\vec{F}\right) \qquad (14.IV)$$

2.3.IV. الشعاع الرباعي لكثافة التيار الكهربائي

$$Div\,\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) = 0$$
(15.IV)

المركبات الزمن - مكانية للشعاع الرباعي $\vec{j}^{\,\mu}$ هي

$$\vec{j}^{\mu} = (j_0, \vec{J}) = (\rho_{0c}, \vec{J}) \qquad (16\ .IV)$$

بالنسبة لملاحظ ساكن بالنسبة للإلكترون

$$j^{\mu} = (\rho_0 c, 0) \qquad (17.IV)$$

وشبه الطويلة لهذا الشعاع من النوع الزمني

$$j^2 = {\rho_0}^2 c^2 \qquad (18.IV)$$

قانون تحويل الشعاع الرباعي لكثافة التيار بين المعالم: $\vec{j}'^{\,\mu} = (\mathscr{L})\,\vec{j}^{\,\mu}$

$$\begin{cases} \rho' c = \gamma_{(v)}(\rho c - \beta J_x) \\ J'_x = \gamma_{(v)}(J_x - \beta\rho c) \\ J'_y = J_y \\ J'_z = J_z \end{cases} \qquad (19.IV)$$

3.3.IV. العامل التفاضلي نابلا في الفضاء الزمكان

في الفضاء رباعي الابعاد يعطى نابلا كالاتي:

$$\vec{\nabla}\_^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \qquad (20.IV)$$

حيث يسمح لنا قانون التحويل بين المعالم بكتابة: $\vec{\nabla}^{\mu\prime} = (\mathscr{L})\,\vec{\nabla}^{\mu}$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma_{(v)}\left(c\beta\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma_{(v)}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (21.IV)$$

4.3.IV. الشعاع الرباعي للكمون الكهربائي

لدينا من معادلات ماكسويل

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \quad (22.IV)$$

$\vec{A}$ هو شعاع الكمون

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)}{\partial t} = \vec{\nabla}\wedge\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}.\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow -\Delta\phi - \frac{\partial\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (23.IV)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{J} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

(24.IV)

بعد بعض الترتيبات نجد

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J} - \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A}\right) \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A}\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (25.IV)$$

الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي لايتغيران(مقياس لورنتز *jauge de Lorentz*)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{J} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (26.IV)$$

ومنه نعرف الشعاع الرباعي للكمون الكهربائي الذي له تباعد معدوم مركباته الزمن- مكانية

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \quad (27.IV)$$

في غياب المنبع نجد

$\begin{cases}\Delta\vec{A}=0\\ \Delta\phi=0\end{cases}$وهي معادلات لها شكل معادلة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية

4.IV. تنسور الحقل الكهرومغناطيسي (المصفوفة الكهرومغناطيسية)

بما ان قوة لورنتز معرفة بدلالة السرعة فان الشعاع الرباعي للقوة يتعلق بالشعاع الرباعي للسرعة وبالتالي هذه علاقة ضد تناظرية.

$$F_\mu = q\sum_{\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}V_\nu \qquad (28.IV)$$

$F_{\mu\upsilon}$هي المصفوفة الناتجة من المقدار

$$F_{\mu\upsilon} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \qquad (29.IV)$$

$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow \frac{E}{c} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\Phi\right) \qquad (30.IV)$$

بما أن$F_{\mu\upsilon}$ مصفوفة ضد متناظرة فان:

$$F_{01} = \nabla_0 A_1 - \nabla_1 A_0 = \frac{\partial}{c\partial t}(-A_x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = \frac{E_x}{c}$$

$$F_{02} = \nabla_0 A_2 - \nabla_2 A_0 = \frac{\partial}{c\partial t}(-A_y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t}\right) = \frac{E_y}{c}$$

$$F_{03} = \nabla_0 A_3 - \nabla_3 A_0 = \frac{\partial}{c\partial t}(-A_z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) = \frac{E_z}{c}$$

$$F_{12} = \nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1 = \frac{\partial}{\partial x}(-A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(-A_x) = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -B_z$$

$$F_{13} = \nabla_1 A_3 - \nabla_3 A_1 = \frac{\partial}{\partial x}(-A_z) - \frac{\partial}{\partial y}(-A_z) = -\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = B_y$$

$$F_{32} = \nabla_3 A_2 - \nabla_2 A_3 = \frac{\partial}{\partial z}(-A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(-A_z) = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = B_x$$

ملاحظة: بما ان المصفوفة ضد تناظرية فان: $F_{\mu\vartheta} = F_{\vartheta\mu}$

بعد التعويض :

$$F_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (31.IV)$$

وهي المصفوفة الكهرومغناطيسية او تسمى مصفوفة فراداي.

حسب تحويلات لورنتز فان قانون التحويل بين المعالم يعطى بالعلاقة التالية:

$$F'_{\mu\upsilon} = \mathcal{L}_\mu{}^\rho \mathcal{L}^\sigma{}_\upsilon F_{\rho\sigma} \quad \text{او} \quad F'_{\mu\upsilon} = \mathcal{L}\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathcal{L}^{\mathrm{t}} \qquad (32.IV)$$

$$F_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{(V)} & -\beta\gamma_{(V)} & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_{(V)} & \gamma_{(V)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F_{\mu\nu}\mathcal{L}^t$$

بعد الحسابات نتحصل على:

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_Z) \\ E'_Z = \gamma(E_Z + vB_y) \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y) \end{cases}$$

أسئلة الفصل الرابع

س 1- هل معادلات ماكسويل صامدة بتحويلات لورنتز ام بتحويلات غاليلي؟

س 2- اكتب مركبات الحقل الكهربائي ومركبات الحقل المغناطيسي وهل هي صامدة بتحويلات لورنتز؟

س 3- اكتب معادلات انتشار الحقل الكهرومغناطيسي؟

س 4- بين ان شبه الطويلة للشعاع الرباعي لكثافة التيار تكتب : $j^2 = {\rho_0}^2 c^2$

س 5- ماهو تنسور الحقل الكهرومغناطيسي وما هي عبارته؟

تمارين الفصل الرابع

التمرين الاول:

1. عبر عن المركبات $\partial x', \partial y', \partial z', \partial t'$ بدلالة $\partial x, \partial y, \partial z, \partial t$

2. اكتب معادلة ماكسويل $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ في المعلم (R') واكتب عبارات E_x, E_y, B_z بدلالة مركبات $\overrightarrow{E'}, \overrightarrow{B'}$

3. عبر عن مركبات $\overrightarrow{E'}, \overrightarrow{B'}$ بدلالة $\vec{E}, \vec{B}$

التمرين الثاني:

يعطى الحقل الكهرومغناطيسي بـ $(\vec{E}, \vec{B})$ ، ولتكن: $\vec{D} = \vec{E} + ic\vec{B}$

- باستعمال تحويلات لورنتز بين ان المقدارين $\vec{E}.\vec{B}$ و $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ صامدين ثم استنتج ان: $\overrightarrow{D'}^2 = \vec{D}^2$

التمرين الثالث:

باستعمال الشعاع الرباعي للكمون -اوجد عبارات تحويل الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي بتحويلات لورنتز.

حلول تمارين الفصل الرابع

حل التمرين الاول:

1. التعبير عن المركبات $\partial x'$،$\partial y'$، $\partial z'$، $\partial t'$ بدلالة ∂x،∂y، ∂z، ∂t

حسب قانون التحويل بين المعالم بكتابة: $\vec{\nabla}^{\mu'}=(\mathscr{L})\,\vec{\nabla}^{\mu}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t'} = \gamma_{(v)}\left(c\beta\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} = \gamma_{(v)}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} = \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

2. كتابة معادلة ماكسويل $\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ في المعلم (R')

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{\imath} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{\jmath} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}$$

واكتب عبارات E_x،E_y، B_z بدلالة مركبات $\vec{E'}, \vec{B'}$:

وفق الاتجاه $\vec{\imath}$ نجد:

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E}(\vec{\imath}): \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

نعوض بقيم $\dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial t}$ فنتحصل على:

$$\frac{\gamma(\partial E'_z - v\partial E'_y)}{\partial y'} - \frac{\gamma\left(\partial E'_y + v\partial E'_z\right)}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t}.\frac{\partial x'}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial t}.\frac{\partial t'}{\partial t'}$$

$$= -v\gamma\frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \gamma\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

وهذا ما يفسر ان:

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_Z = \gamma(E'_Z - vB'_y) \\ B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y) \end{cases}$$

3. التعبير عن مركبات $\overrightarrow{E'},\overrightarrow{B'}$ بدلالة $\vec{E},\vec{B}$

$$\begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z) \\ B_z = \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y) \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_Z) \\ E_Z = \gamma(E'_Z - vB'_y) \end{cases}$$

حل التمرين الثاني:

لنثبت باستعمال تحويلات لورنتز بين ان المقدارين $\vec{E}.\vec{B}$ و $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ صامدين: باستعمال تحويلات لورنتز يكون:

$$\vec{E}.\vec{B} = E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z$$

$$= E'_xB'_x + \gamma(E'_y + vB'_Z).\gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right) + \gamma(E'_Z - vB'_y)B_z.\gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y)$$

بعد التبسيط نجد:

$$\vec{E}.\vec{B} = \overrightarrow{E'}.\overrightarrow{B'}$$

هذا المقدار صامد بتحويلات لورنتز.

من جهة أخرى المقدار

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - c^2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$$

$$= {E'_x}^2 + [\gamma(E'_y + vB'_Z)]^2 + [\gamma(E'_Z - vB'_y)]^2$$
$$- c^2\left({B'_x}^2 + \left[\gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_Z)\right]^2 + \left[\gamma(B'_Z + \frac{v}{c^2}E'_y)\right]^2\right)$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = E_x^2 + \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})E_y^2 + \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})E_z^2 - c^2(B_x^2 + \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})B_y^2$$
$$+ \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})B_z^2)$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{1}{\gamma^2}\Rightarrow\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1$$

وعليه يكون:

$$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2=E_x'^2+E_y'^2+E_z'^2-c^2\left(B_x'^2+B_y'^2+B_z'^2\right)=\vec{E}'^2-c^2\overrightarrow{B'}^2$$

اذن هذا المقدار صامد بتحويلات لورنتز.

- استنتاج ان: $\overrightarrow{D'}^2=\vec{D}^2$

لدينا

$$\vec{D}=\vec{E}+ic\vec{B}$$

بالتربيع:

$$\vec{D}^2=\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2+i2c\vec{E}.\vec{B}$$

مما سبق وجدنا ان المقدارين $\vec{E}.\vec{B}$ و $\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$ صامدين وبالتالي نعوض فنجد:

$$\vec{D}^2=\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2+i2c\vec{E}.\vec{B}=\vec{E}'^2-c^2\overrightarrow{B'}^2+i2c\overrightarrow{E'}.\overrightarrow{B'}=\vec{D}'^2$$

وهو المطلوب.

<u>حل التمرين الثالث:</u>

إيجاد عبارات تحويل الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي بتحويلات لورنتز باستعمال الشعاع الرباعي للكمون:

$$A^\mu=\left(\frac{\phi}{c},\vec{A}\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\phi}{c}=\gamma\left(\dfrac{\phi'}{c}+\beta A'_x\right)\\ A_x=\gamma\left(A'_x+\beta\dfrac{\phi'}{c}\right)\\ A_y=A'_y\quad ,A_z=A'_z\end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge \vec{A} \Longrightarrow \begin{cases} B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Longrightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial t} \\ E_y = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial t} \\ E_z = -\dfrac{\partial \phi}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + c\beta t') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial ct} = \gamma(\dfrac{\partial}{\partial ct'} - \beta \dfrac{\partial}{\partial x'}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \beta \dfrac{\partial}{\partial ct'}) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{cases}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = B'_x$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z'}\gamma(A'_x + \beta \frac{\phi'}{c}) - \gamma(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial ct'})A'_z$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \gamma(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'}) - \frac{\gamma\beta}{c}(\frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial t'})$$

$$B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{\beta}{c}E'_z\right)$$

بنفس الطريقة نجد

$$B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{\beta}{c}E'_y\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$= -\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta\frac{\partial}{\partial ct'}\right)\gamma c\left(\frac{\phi'}{c} + \beta A'_x\right) - \gamma c\left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)\gamma\left(A'_x + \beta\frac{\phi'}{c}\right)$$

$$E_x = -\gamma^2\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'} - \beta\frac{\partial\phi'}{\partial ct'}\right) - \gamma^2 c\beta\left(\frac{\partial A'_x}{\partial x'} - \beta\frac{\partial A'_x}{\partial ct'}\right) - \gamma^2 c\left(\frac{\partial A'_x}{\partial ct'} - \beta\frac{\partial A'_x}{\partial x'}\right)$$
$$-\gamma^2 c\frac{\beta}{c}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial ct} - \beta\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)$$

$$E_x = -\gamma^2\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'} - \beta^2\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right) - \gamma^2\left(-\beta\frac{\partial\phi'}{\partial ct'} + \beta\frac{\partial\phi'}{\partial ct'}\right) - \gamma^2 c\beta\left(\frac{\partial A'_x}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial x'}\right) - \gamma^2 c\left(\frac{\partial A'_x}{\partial ct'} - \beta^2\frac{\partial A'_x}{\partial ct'}\right)$$

$$E_x = -\gamma^2\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'} - \beta^2\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right) - \gamma^2 c\left(\frac{\partial A'_x}{\partial ct'} - \beta^2\frac{\partial A'_x}{\partial ct'}\right)$$

$$E_x = -\gamma^2(1-\beta^2)\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right) - \gamma^2(1-\beta^2)\left(\frac{\partial A'_x}{\partial t'}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{(1-\beta^2)}$$

ومنه

$$E_x = -\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right) - \left(\frac{\partial A'_x}{\partial t'}\right) = E_x$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y'}\gamma c\left(\frac{\phi'}{c} + \beta A'_x\right) - \gamma c\left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta\frac{\partial}{\partial x'}\right)A'_y \Rightarrow$$

$$E_y = -\gamma\frac{\partial\phi'}{\partial y'} - \gamma c\beta\frac{\partial A'_x}{\partial y'} - \gamma\frac{\partial A'_y}{\partial t'} + \gamma c\beta\frac{\partial A'_y}{\partial x'} \Rightarrow$$

$$E_y = \gamma\left(-\frac{\partial\phi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'}\right) + \gamma c\beta\left(\frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'}\right) \Rightarrow E_y = \gamma E'_y + \gamma c\beta B'_z$$

بنفس الطريقة نجد $E_z = \gamma E'_z - \gamma c\beta B'_y$