CHAPITRE I

Compléments sur les Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert jouent un rôle fondamental en analyse en fournissant un cadre mathématique général pour faire de "la géométrie en dimension infinie".

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

I.1.Cas réel.

I.1.1.Définition.

On dit qu'une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si elle est:

- bilinéaire,

$$\forall (x_1, x_2) \in E \times E,\ \forall y \in E,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ b(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha b(x_1, y) + \beta b(x_2, y)$$

- symétrique,

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ b(x, y) = b(y, x)$$

- définie positive,

$$\forall x \in E,\ x \neq 0,\ b(x, x) > 0$$

I.1.2.Exemples.

- Sur $\mathbb{R}^n$, l'application

$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire, appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Sur l'ensemble $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ des suites réelles $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de carrés sommables

$\left(\sum_n |x_n|^2 < +\infty\right)$, l'application

$$(x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

est un produit scalaire.

I.1.3.Définition.

un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien réel.

Le produit scalaire $b(x, y)$ est alors noté $(x \diagdown y)$. On note, $\|x\| = \sqrt{(x \diagdown x)}$.

I.1.4.Remarque.

Un espace préhilbertien réel de dimension finie est aussi appelé espace euclidien.

I.1.4.Inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ |(x \diagdown y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Preuve.

Si $\|y\| = 0$ alors $y = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon, $\|y\| > 0$ et nous avons

$$\|x\|^2 - \frac{|(x \diagdown y)|^2}{\|y\|^2} = \left\| x - \frac{(x \diagdown y)}{\|y\|^2} y \right\|^2 \geq 0$$

d'où

$$|(x \diagdown y)| \leq \|x\| \|y\|$$

I.1.5. Remarque.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz exprime la continuité du produit scalaire.

I.1.6. Proposition.

L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui à $x \in E$ associe $\|x\| = \sqrt{(x \diagdown x)}$ est une norme sur E.

On dit que c'est la norme associé au produit scalaire.

Preuve.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne l'inégalité triangulaire.

I.1.7. Identité du parallélogramme.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

I.1.8. Identité de polarisation.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ (x \diagdown y) = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

I.1.9. Proposition.

Soit f une isométrie sur E (application linéaire telle que $\|f(x)\| = \|x\|$). Alors

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \ (f(x) \diagdown f(y)) = \ (x \diagdown y)$$

Preuve.

Conséquence de l'identité de polarisation.

I.2. Cas complexe.

I.2.1. Définition.

On dit qu'une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien si elle est:

- linéaire par rapport à la première variable,

$$\forall (x_1, x_2) \in E \times E,\ \forall y \in E,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)$$

- antilinéaire(sesquilinéaire) par rapport à la deuxième variable,

$$\forall (y_1, y_2) \in E \times E,\ \forall x \in E,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ h(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} h(x, y_1) + \overline{\beta} h(x, y_2)$$

- hermitienne,

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ h(x,y) = \overline{h(y,x)}$$

- définie positive,

$$\forall x \in E,\ x \neq 0,\ h(x,x) > 0$$

I.2.2.Exemples.

- Sur $\mathbb{C}^n$, l'application

$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

est un produit scalaire hermitien, appelé produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$.

- Sur l'ensemble $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ des suites complexes $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de carrés sommables $\left(\sum_n |x_n|^2 < +\infty \right)$, l'application

$$(x,y) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

est un produit scalaire hermitien.

I.2.3. Définition.

un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien est appelé espace

préhilbertien complexe. Le produit scalaire hermitien $h(x,y)$ est alors noté $(x \diagdown y)$.

I.2.4. Remarque.

Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est aussi appelé espace hermitien.

On note $\|x\| = \sqrt{(x \diagdown x)}$.

I.2.5. Inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \ |(x \diagdown y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Preuve.

Si $\|x\| = 0$ alors $x = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon, $\|x\| > 0$ et

pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leq \|tx + y\| = t^2 \, \|x\|^2 + 2t\mathcal{R}e\,(x \diagdown y) + \|y\|^2$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit être ≤ 0 :

$$(\mathcal{R}e\,(x \diagdown y))^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2 \leq 0$$

d'où

$$\|x\| \, \|y\| \geq |\mathcal{R}e\,(x \diagdown y)| \geq \mathcal{R}e\,(x \diagdown y)$$

et

$$\|x\| \, \|y\| = \|x\| \left\|ye^{i\theta}\right\| \geq \mathcal{R}e\left(x \diagdown ye^{i\theta}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{-i\theta}\,(x \diagdown y)\right) = \mathcal{R}e\,|(x \diagdown y)| = |(x \diagdown y)|$$

$(\ (x \diagdown y) = |(x \diagdown y)| \ e^{i\theta}, \ $ un complexe$)$

I.2.6. Remarque.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz exprime la continuité du produit scalaire.

I.2.7. Proposition.

L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui à $x \in E$ associe $\|x\| = \sqrt{(x \diagdown x)}$ est une norme sur E.

On dit que c'est la norme hermitienne associée au produit scalaire hermitien.

Preuve.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne l'inégalité triangulaire.

I.2.8. Identité du parallélogramme.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

I.2.9. Identité de polarisation.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \ (x \diagdown y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2\right)$$

I.2.10. Proposition.

Soit f une isométrie sur E. Alors

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \ (f(x) \diagdown f(y)) = \ \ (x \diagdown y)$$

I.3. Orthogonalité.

Soit E un Un espace préhilbertien réel ou complexe.

I.3.1. Définition.

On dit que deux éléments x et y de E sont orthogonaux si $(x \diagdown y) = 0$.

On note $x \perp y$.

I.3.2. Théorème. (Pythagore) .

Si $x \perp y$ alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

I.3.3. Définition.

$$\forall x \in E, \quad x^{\perp} = \{y \in E \ / \ (x \diagdown y) = 0\}$$
$$\emptyset \neq A \subset E, \quad A^{\perp} = \{y \in E \ / \ \forall x \in A, \quad (x \diagdown y) = 0\}$$

I.3.4. Proposition.

$A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, et $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.

Preuve.

- $\forall x \in A,\ (x \diagdown y_1) = 0$ et $(x \diagdown y_2) = 0 \Longrightarrow \forall x \in A,\ (x \diagdown \alpha y_1 + \beta y_2) = 0 \Longrightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in A^{\perp}$

- $A^{\perp} = (\bullet \diagdown y)^{-1}(\{0\})$ et $(\bullet \diagdown y)$ est continue $\Longrightarrow A^{\perp}$ est fermé.

- $x \in A \cap A^{\perp} \Longrightarrow (x \diagdown x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

I.3.5. Proposition.

$$\forall A \subset E, \quad \overline{A} \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Preuve.

$A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{y \in E \ / \ \forall x \in A^{\perp}, \quad (x \diagdown y) = 0\right\}$ et $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ est fermé.

I.3.6. Définition.

- On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est orthogonale si l'on a:

$$\forall (i,j) \in I \times I,\ \ i \neq j \Longrightarrow (x_i, x_j) = 0$$

- On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus

$$\|x_i\| = 1,\ \ \forall i \in I$$

I.3.7. Proposition.

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille orthogonale constituée de vecteurs tous non nuls.

Alors cette famille est libre.

Preuve.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_p x_p = 0 \Longrightarrow \forall i = \overline{1,p},\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_p x_p \diagdown x_i) = \alpha_i = 0$.

I.3.8. Proposition.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille orthonormale de E et $v \in$Vect$(e_1, e_2, ..., e_n)$. Alors

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v \diagdown e_i)\, e_i$$

Preuve.

$v \in$Vect$(e_1, e_2, ..., e_n) \Longrightarrow v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ et $(v \diagdown e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i \diagdown e_j) = \alpha_j$, $\forall j = \overline{1, n}$.

I.3.9. Corollaire.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille orthonormale de E et (x, y) un couple d'éléments

de Vect$(e_1, e_2, ..., e_n)$. Alors

$$(x \diagdown y) = \sum_{i=1}^{n} (x \diagdown e_i)(y \diagdown e_i)$$

I.3.10. Théorème. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Soit $(a_1, a_2, ..., a_p)$ une famille libre de E. Alors, il existe une unique famille

orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_p)$ telle que:

- $\forall j \in \overline{1;p}$, Vect$(e_1, e_2, ..., e_j)$ =Vect$(a_1, a_2, ..., a_j)$.
- $\forall j \in \overline{1;p}$, $(a_j \diagdown e_j) > 0$.

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \bullet\bullet\bullet, e_{k+1} = \frac{a_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} (a_{k+1} \diagdown e_i) e_i}{\left\| a_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} (a_{k+1} \diagdown e_i) e_i \right\|}, \qquad 1 \leq k \leq p.$$

I.3.11. Théorème. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une famille libre de E. Alors, il existe une unique famille orthonormale

$(e_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que:

- $\forall j \in \mathbb{N}$, Vect$(e_1, e_2, ..., e_j)$ =Vect$(a_1, a_2, ..., a_j)$.
- $\forall j \in \mathbb{N}$ $(a_j \diagdown e_j) > 0$.

I.3.12. Définition.

Un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire est

appelé espace de Hilbert.

I.3.13. Exemples.

- $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis du produit scalaire canonique sont des espaces de Hilbert.

- $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ et $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ des suites complexes ou réelles $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de carrés sommables,

munis du produit scalaire

$$(x \diagdown y) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

sont des espaces de Hilbert.

I.3.14. Proposition.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthogonale d'un espace de Hilbert H. Alors $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$

converge dans H si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty$.

Si cette dernière condition est vérifiée, on a alors, l'égalité de Parseval:

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$$

Preuve.

D'après Pythagore, $\left\|\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \|x_i\|^2$, à la limite on obtient $\left\|\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\right\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty$

Projecteurs orthogonaux.

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe.

I.3.15. Théorème

Soit K un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe

un unique point $p_x \in K$ tel que

$$\|x - p_x\| = d(x, K) = \inf_{y\in K} \|x - y\|$$

Le point p_x est appelé projection de x sur K. C'est l'unique point de K vérifiant

$$\forall y \in K, \ \ \mathcal{R}e\left(x - p_x \diagdown y - p_x\right) \leq 0$$

Preuve.

L'unicité de p_x provient du fait que si $p'_x \in K$ vérifie aussi $\|x - p'_x\| = d(x, K)$

alors on a d'après l'identité de la médiane

(conséquence de l'identité du parallélogramme):

$$\|x - p_x\|^2 + \|x - p'_x\|^2 = \frac{1}{2}\|p'_x - p_x\|^2 + 2\left\|x - \frac{p'_x + p_x}{2}\right\|^2$$

et donc $p_x \neq p'_x$ entraînerait $\left\|x - \frac{p'_x+p_x}{2}\right\| < d(x, K)$. comme par convexité $\frac{p'_x+p_x}{2} \in K$,

cela contredirait la définition de $d(x, K)$.

Pour l'existence, notons $d = d(x, K)$. Par définition de d, il exite une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de

points de K telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = d$. D'après l'identité de la médiane, on a pour

tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 + 2\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

Par convexité de K, on a $\frac{x_n+x_m}{2} \in K$, donc $\left\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\right\| \geq d$. En conséquence, on a

$$\frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 \leq \|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 - 3d^2$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Sa limite $p_x \in K$ car K est fermé.

Pour la dernière inégalité. Soit donc $y \in K$. Pour tout $t \in [0,1]$, le point $y_t = p_x + t(y - p_x) \in K$. Donc on a

$$\|x - p_x\|^2 \leq \|x - y_t\|^2 = \|x - p_x\|^2 + t^2\|y - p_x\|^2 - 2t\mathcal{R}e\,(x - p_x \diagdown y - p_x)$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que $\mathcal{R}e\,(x - p_x \diagdown y - p_x) \leq 0$.

Réciproquement, si $x_0 \in K$ vérifie $\mathcal{R}e\,(x - x_0 \diagdown y - x_0) \leq 0$ pour tout $y \in K$ alors on a,

compte-tenu de $\mathcal{R}e\,(x_0 - p_x \diagdown x - p_x) \leq 0$,

$$\|x_0 - p_x\|^2 = \mathcal{R}e\,(x_0 - p_x \diagdown x_0 - x) + \mathcal{R}e\,(x_0 - p_x \diagdown x - p_x) \leq 0$$

Donc $x_0 = p_x$.

I.3.16. Corollaire.

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $x \in H$, la projection

de x sur F est l'unique point p_x de F tel que $(x - p_x) \in F^{\perp}$.

Preuve.

Comme un sous-espace vectoriel fermé est convexe fermé. On a p_x est l'unique point

de F vérifiant

$$\forall z \in F,\ \ \mathcal{R}e\,(x - p_x \diagdown z - p_x) \leq 0$$

Pour $y \in F$ fixé, on appliquant cette inégalité à $z = p_x - y$ puis à $z = p_x + y$, (et aussi à $z = p_x \pm iy$ dans le cas complexe), on obtient $(x - p_x \diagdown y) = 0$. Soit $p'_x \in F$ tel que $x - p'_x \in F^{\perp}$. Comme $p'_x - p_x \in F$, on a

$$(x - p_x \diagdown p'_x - p_x) = 0 \quad \text{et} \quad (x - p'_x \diagdown p'_x - p_x) = 0$$

En retranchant la 2ième à la 1ère, on trouve $\|p'_x - p_x\|^2 = 0$. Donc $p'_x = p_x$.

I.3.17. Proposition.

Soit F un sous-espace vectoriel de H. Les trois énoncés sont équivalents:

(i) F est fermé.

(ii) $H = F \oplus F^{\perp}$.

(iii) $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Preuve.

(i)$\Longrightarrow$(ii):

F fermé $\Longrightarrow \forall x \in H,\ x = p_x + (x - p_x)$ avec $p_x \in F$ et $x - p_x \in F^{\perp} \Longrightarrow H = F \oplus F^{\perp}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii):

$x \in F \Longrightarrow x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp} \Longrightarrow (x \diagdown z) = (y \diagdown z) + \|z\|^2 \Longrightarrow$
$z = 0 \Longrightarrow x = y \in F \Longrightarrow F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

(iii)$\Longrightarrow$(i):

Comme $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et comme l'orthogonal est fermé, alors F est fermé.

I.3.18. Corollaire.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H, on a,

$$\overline{F} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$$

Preuve.

$F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \Longrightarrow \overline{F} = \left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp}$ et $F \subset \overline{F} \Longrightarrow \overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp} \Longrightarrow \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset \left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp}$

alors $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset \overline{F}$. ($\overline{F} \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ évidente).

I.3.19. Définition.

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$

est appelé supplémentaire orthoganal de F $\left(H = F \oplus F^{\perp}\right)$.

Tout élément x de H se décompose donc de manière unique en,

$$x = y + z \qquad \text{avec} \qquad y \in F \quad \text{et} \quad z \in F^{\perp}$$

Le vecteur y est la projection orthogonale de x sur F et l'application $x \longmapsto y$

est appelée projection orthogonale ou projecteur orthogonal sur F.

Le vecteur z est appelé projection orthogonale de x sur $F^{\perp}$.

I.4. Dualité.

Définition.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle dual (topologique) de H et on note H' l'ensemble des formes linéaires

continues sur H.

I.4.1. Théorème.

H' muni de l'application

$$\|f\|_{H'} = \sup_{\|x\|_H = 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_H}$$

est un espace vectoriel normé complet.

Preuve.

Comme $f \in H'$, f est continue et il existe une constante C telle que

$$\forall x \in H, \quad |f(x)| \leq C \|x\|_H$$

donc le sup est bien défini. On a

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_H} = \sup_{x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|_H}\right)\right| = \sup_{\|y\|_H = 1} |f(y)|, \quad \left(\|y\|_H = \left\| \frac{x}{\|x\|_H} \right\|_H = 1 \right).$$

D'autre part

$$\{|f(x)|,\ \|x\|_H = 1\} \subset \{|f(x)|,\ \|x\|_H \leq 1\}$$

d'où

$$\sup_{\|x\|_H=1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)|$$

Si $f = 0$ on a égalité, supposons donc que $f \neq 0$ et

$$\sup_{\|x\|_H=1} |f(x)| < \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)|$$

il existe y_0, avec $\|y_0\| < 1$ tel que $|f(y_0)| > |f(x)|$ pour tout x tel que $\|x\| = 1$.

$$|f(y_0)| > \left| f\left(\frac{y_0}{\|y_0\|}\right)\right| = \frac{1}{\|y_0\|} |f(y_0)|$$

comme $f(y_0) \neq 0$ on a $\|y_0\| > 1$, ce qui contredit $\|y_0\| < 1$.
Donc

$$\sup_{\|x\|_H=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)|.$$

Il est facile de montrer que $\|\bullet\|_{H'}$ est une norme.
Montrons maintenant que H' est complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H'

$$\forall \epsilon < 0;\quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall p, q \geq n_0,\quad \|f_q - f_p\| < \epsilon.$$

Donc

$$\forall x \in H,\quad |f_q(x) - f_p(x)| < \epsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet. Donc elle converge

pour tout x vers $\varphi_x \in \mathbb{K}$. Montrons que l'application $\varphi : x \longmapsto \varphi_x$ appartient à H'.

Puisque toute suite de Cauchy est bornée

$$\exists M > 0.\ \ \forall n \in \mathbb{N},\quad \|f_n\| \leq M.$$

Donc,pour tout $x \in H$, $|f_n(x)| \leq M \|x\|_H$ par passage à la limite on obtient

$$\forall x \in H,\quad |\varphi(x)| \leq M \|x\|_H$$

d'où la continuité de φ. Pour la linéarité, c'est évident.

Enfin, nous avons $\|f_n - \varphi\|_{H'} \to 0$, soient $x \in H$ de norme inférieure ou égale à 1 et $\epsilon > 0$.

Comme $f_n(x) \to \varphi(x)$, on peut trouver n_x tel que $\forall n \geq n_x$, $|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

D'autre part, il existe n_0 tel que $\forall n, p \geq n_0$, $\|f_n - f_p\|_{H'} < \frac{\epsilon}{2}$. Soit donc $p_x \geq \max(n_0, n_x)$.

On obtient pour tout $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \leq |f_n(x) - f_{p_x}(x)| + |f_{p_x}(x) - \varphi(x)| \leq \|f_n - f_{p_x}\| + |f_{p_x}(x) - \varphi(x)| < \epsilon.$$

Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f_n(x) - \varphi(x)| < \epsilon$$

et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans H'.

I.4.2. Remarque.

On peut donc définir une application J de H dans H' appellée application de dualité de H,

$$J : H \to H'$$

$$x \longmapsto J(x)$$

où

$$J(x) : H \to \mathbb{K}$$

$$y \longmapsto J(x)(y) = (y \diagdown x).$$

I.4.3. Exemples.

- Le dual topologique de $\mathbb{R}^n$ est égal à son dual algébrique.
- Le dual topologique de $l^1(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$ est

$$l^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

I.4.4. Théorème. (de représentation de Riesz-Fréchet).

Soit H un espace de Hilbert. Alors, pour tout $f \in H'$ (dual topologique de H),

il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \ f(y) = (y \diagdown x)$$

De plus,

$$\|f\|_{H'} = \|x\|_H .$$

L'application de dualité J de H est donc une isométrie linéaire bijective.

I.4.5. Remarque.

On peut munir H' d'un produit scalaire

$$\forall f, g \in H', \quad (f \diagdown g)_{H'} = \left(J^{-1}(f) \diagdown J^{-1}(g)\right) = (x \diagdown y)$$

où $J^{-1}(f) = x$ et $J^{-1}(g) = y$. On a $(f \diagdown f)_{H'} = (x \diagdown x) = \|x\|_H^2 = \|f\|_{H'}^2$ ..

Preuve.

Si $f = 0$, alors $x = 0$. Si $f \neq 0$, soit $F = f^{-1}(\{0\})$. Alors F est un hyperplan fermé de H,

(noyau d'une forme linéaire continue f) distinct de H ($f \neq 0$). Donc $H = F \oplus F^{\perp}$, où $F^{\perp}$
est de dimension 1. Soit $x_0 \in F^{\perp}$ avec $\|x_0\|_{H'} = 1$. Tout $y \in H$ s'écrit $y = u + v$
avec $u \in F$ et $v = tx_0 \in F^{\perp}$. Comme f est linéaire, on a $f(y) = f(u) + f(v) = tf(x_0)$
avec $t = (y \diagdown x_0)$. Par conséquent, on a $f(y) = f(x_0)(y \diagdown x_0) = (y \diagdown x_0 f(x_0))$.
Par conséquent, en posant $x = x_0 f(x_0)$, on bien $f(y) = (y \diagdown x)$.
Pour l'unicité, il suffit de constater que si $(y \diagdown x_1) = (y \diagdown x_2)$ pour tout $y \in H$, alors
$(x_1 - x_2) \in H^{\perp} = \{0\}$ et donc $x_1 = x_2$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $|f(y)| \leq \|y\| \|x\|$, et donc $\|f\|_{H'} \leq \|x\|_H$.
De plus, comme $f\left(\frac{x}{\|x\|_H}\right) = \|x\|$, on obtient $\|f\|_{H'} \geq \|x\|_H$.

I.4.6. Exemple.
- Toute forme linéaire continue φ sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = (a \diagdown x)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

où $a \in \mathbb{R}^n$.
- Soit $f : H \to \mathbb{R}$ différentiable.Sa différentielle $\mathcal{D}_f(a)$ est une forme linéaire continue
sur H. D'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique $b \in H$ tel que
$\mathcal{D}_f(a)(x) = (b \diagdown x)$. Le vecteur b s'appelle le gradient de f en a et le note $\nabla f(a)$.
Donc

$$\forall x \in H, \quad \mathcal{D}_f(a)(x) = (\nabla f(a) \diagdown x).$$

- Toute forme linéaire continue φ sur $L^2([0,1])$ est de la forme

$$\varphi(v) = (u \diagdown v)_{L^2([0,1])} = \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt.$$

où $u \in L^2([0,1])$.
Espaces réflexifs.
Soit (E, $\|\bullet\|$) un e.v.normé sur $\mathbb{K}$. On définit l'application

$$\chi : E \to E'' = (E')' \qquad (\; E'' = (E')' \text{ bidual topol}$$

$$x \longmapsto \chi(x)$$

où

$$\chi(x) : E' \to \mathbb{K}$$

$\varphi \longmapsto$

$(\chi(x))(\varphi) = \varphi(x)$.

L'application χ est une isométrie linéaire continue.

I.4.7. Définition.

L'e.v.normé (E, $\|\bullet\|$) est dit réflexif si l'application χ est surjective.

I.4.8. Exemples.

- Tout espace de Hilbert est réflexif.
- $l^1(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.

I.5. Bases hilbertiennes.

I.5.1. Définition.

Un sous-ensemble A de H est dit dense dans H si

$$\forall x \in H, \forall \epsilon > 0,\ \exists y \in A; \quad \|x-y\|_H < \epsilon,$$

ou de manière équivalente si

$$\forall x \in H,\ \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A; \quad \lim_{n\to+\infty} \|x-y_n\|_H = 0,$$

ou bien si

$$\overline{A} = H.$$

I.5.2. Définition.

On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace de Hilbert H est total si le sous-espace vectoriel $Vect(A)$ engendré par A est dense dans H ($\overline{Vect(A)} = H$).

I.5.3. Proposition.

Soit A un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H. Alors A est total si et seulement si $A^{\perp} = \{0\}$.

Preuve.

"$\Longrightarrow$"

Soit $x \in A^{\perp}$ ($\Longrightarrow x \in (Vect(A))^{\perp}$); comme A est total ($\overline{Vect(A)} = H$), il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Vect(A)$ qui converge vers x.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ (x_n \diagdown x) = 0$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} (x_n \diagdown x) = (x \diagdown x) = 0$ d'où $x = 0$.

"$\Longleftarrow$"

$$\overline{Vect(A)} = \left((Vect(A))^{\perp}\right)^{\perp} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

$$(\ (Vect(A))^{\perp} = A^{\perp}\ )$$

I.5.4. Remarque.

Un sous-espace vectoriel F de H est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

$$(\ Vect(F) = F\ )$$

I.5.5. Définition.

Un espace topologique est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense.

I.5.6. Proposition.

Un Hilbert est séparable si et seulement s'il contient une partie totale dénombrable.

Preuve.

"$\Longrightarrow$" évidente.

"$\Longleftarrow$"

Soit A une partie total dénombrable de H, $Vect\,(A)$ est est dense dans H. Comme $\mathbb{Q}$

est dense dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A à

coefficients rationnelles est dense dans H. De même l'ensemble des combinaisons

linéaires d'éléments de A à parties réelle et imaginaire rationnelles est dense dans H.

Donc H est bien séparable.

I.5.7. Définition.

Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H.

On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H si,

- $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de H.
- L'ensemble $\{e_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ est total.

I.5.8. Remarque.

La base hilbertienne généralise la notion de base orthonormée en dimension finie.

I.5.9. Proposition.

Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement s'il admet

une base hilbertienne.

Preuve.

"$\Longrightarrow$"

Supposons H séparable. Soit $\{a_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense de H.

De cette partie on peut extraire une partie $\{b_k \;/\; k \in \mathbb{N}\}$ libre et dénombrable

non finie (sinon H serait de dimension finie). Par le procédé d'orthonormalisation

de Gram-Schmidt on construit une partie $\{e_k \;/\; k \in \mathbb{N}\}$orthonormale et qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\; Vect\,(e_0, e_1, ..., e_n) = Vect\,(b_0, b_1, ..., b_n)\,.$$

Reste à vérifier que $\{e_k \;/\; k \in \mathbb{N}\}$ est total.

Soit $x \in H$ et $\epsilon > 0$. Comme $\{b_k \;/\; k \in \mathbb{N}\}$ est total, il existe $n \in \mathbb{N}$ et

$y \in Vect\,(b_0, b_1, ..., b_n) = Vect\,(e_0, e_1, ..., e_n)$ tel que $\|x - y\| < \epsilon$.

"$\Longleftarrow$"

Si H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors l'ensemble $\{e_n\ /\ n\in\mathbb{N}\}$ est total

et dénombrable.Donc H est séparable.

I.5.10. Proposition.

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors

- pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^2, la série $\sum \alpha_n e_n$ converge dans H et sa somme

$x=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n$ vérifie

$$\forall m\in\mathbb{N},\ \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n \diagdown e_m\right)=\alpha_m \quad \text{et} \quad \|x\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|^2$$

- pour tout $x\in H$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|(x\diagdown e_n)|^2$ converge et

$$x=\sum_{n\in\mathbb{N}}(x\diagdown e_n)\,e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|(x\diagdown e_n)|^2$$

Preuve.

Soit $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k e_k$. Si $p\geq n$, on obtient

$$\|u_p-u_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{p}\alpha_k e_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{p}|\alpha_k|^2$$

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H qui est complet, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge dans H .De plus, pour tout $n\geq q$, on a $(u_n\diagdown e_q)=\alpha_q$.

Par continuité du produit scalaire, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\diagdown e_q)=(x\diagdown e_q)=\alpha_q$.

Par continuité de la norme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|^2=\|x\|^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}|\alpha_k|^2=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}|\alpha_k|^2$

Reste à démontrer la 2ième assertion.

Soit $x\in H$. Posons $y_n=\sum\limits_{k=0}^{n}|(x\diagdown e_k)|^2$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et positive.

Elle converge si et seulement si elle est majorée. Posons $x_n=x-\sum\limits_{k=0}^{n}(x\diagdown e_k)\,e_k$.

Alors $x_n\perp e_k$ pour tout $k=\overline{0,n}$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2=\|x_n\|^2+\left\|\sum\limits_{k=0}^{n}(x\diagdown e_k)\,e_k\right\|^2=\|x_n\|^2+\sum\limits_{k=0}^{n}|(x\diagdown e_k)|^2$

qui donne $y_n \leq \|x\|^2$. On conclut ensuite en appliquant la 1ère assertion.

I.5.11. Remarque.

- La proposition I.5.10. fournit une isométrie bijective entre tout Hilbert séparable de dimension infinie et l^2; une fois fixée une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$l^2 \longrightarrow H$$

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$$

Par conséquent, l'étude des Hilbert séparables peut se ramener à celle de l^2.

- Une base hilbertienne n'est jamais une base algébrique.

I.5.12. Exemples.

- Soit e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $n^{ième}$ qui est égale à 1.

L'ensemble $\{e_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N})$.

- Soit $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodiques; continues

muni du produit scalaire $(f \diagdown g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$, la famille

$\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}$, $n \geq 1$, constitue une base hilbertienne de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

I.6. Noyaux reproduisants.

En analyse fonctionnelle, un espace de Hilbert à noyau reproduisant est un Hilbert de fonctions dans lequel la fonction evaluation est une fonctionnelle linéaire continuue.

En d'autres mots, il existe des espaces qui peuvent être definis par des noyaux reproduisants.Le sujet était originalement et simultanément developpé par N.Aronszajn et S.Bergman en1950.

Beaucoup d'examples d'espaces de Hilbert à noyaux reproduisants sont des espaces de fonctions analytiques complexes, bien que quelques espaces de Hilbert réels ont aussi des noyaux reproduisants. Les espaces de Hilbert à noyaux reproduisants associés à un noyau continu ont de larges applications dans l'analyse complexe, la mécanique quantique, la statistique et l'analyse harmonique.

Soit X un ensemble, H un espace de Hilbert de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(\bullet \diagdown \bullet)$.

I.6.1. Définition.

Une fonction K définie sur $X \times X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite noyau reproduisant

de l'espace de Hilbert H si,

i) $\forall x \in X, \quad K_x = (\bullet \diagdown x) \in H$

où $$K_x : X \to \mathbb{R}$$ $$y \longmapsto K_x(y) = K(y,x)$$

ii) $\forall (f,x) \in H \times X, \quad (f \diagdown K_x) = f(x).$

I.6.2. Définition.

Un espace de Hilbert muni d'un noyau reproduisant est dit à noyau reproduisant.

Propriétés d'un noyau reproduisant.

I.6.3. Théorème. (d'existence et d'unicité).

H admet un noyau reproduisant ssi les fonctionnelles de Dirac δ_x sont continues:

$\forall x \in X, \quad \delta_x \in H' \quad (\delta_x : H \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi \longmapsto \delta_x(\varphi) = \varphi(x))$

Un tel noyau est unique.

Preuve.

"$\Longrightarrow$"

Si H admet un noyau K, on a pour tout $x \in X$,

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x) = (\varphi \diagdown K_x), \ \forall \varphi \in H$$

et donc $\delta_x \in H'$.

"$\Longleftarrow$"

Si pour tout $x \in X$, $\delta_x \in H'$, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe

un unique $K_x \in H'$,

$$\forall \varphi \in H, \quad (\varphi \diagdown K_x) = \delta_x(\varphi) = \varphi(x)$$

On définit alors la fonction K par:

$$\forall (x,y) \in X \times X, \quad K(x,y) = K_y(x)$$

Alors K est bien un noyau reproduisant de H.

L'unicité découle du théorème de Riesz-Fréchet.

I.6.4. Proposition.(Propriété de densité).

Si H admet un noyau reproduisant K. la famille $F = \{K_x \ / \ x \in X\}$ est totale ($F^{\perp} = \{0\}$).

Preuve.

$$\forall x \in X, \ (\varphi \diagdown K_x) = \varphi(x) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$$

I.6.5. Théorème de caractérisation.

Une fonction K définie sur $X \times X$ est le noyau reproduisant d'un espace de Hilbert

$H \subset \mathbb{R}^X$ si et seulement si

i) $\forall (x, y) \in X \times X, \quad K(x, y) = K(\, y, x)$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

Preuve.

"$\Longrightarrow$"

Soit K le noyau reproduisant de H. Alors pour tout $\varphi \in H$ et tout $x \in X$,

$(\varphi \diagdown K_x) = \varphi\,(x)$ et donc, en particulier pour tout $(x, y) \in X \times X$, $(K_x \diagdown K_y) = K\,(x, y)$. Il s'ensuit que

$$K\,(x, y) = K_y\,(x) = (K_y \diagdown K_x) = (K_x \diagdown K_y) = K\,(y, x)$$

et donc (i) est vérifiée.

D'autre part, si $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_{x_i}$, on a:

$$0 \leq \|h\|^2 = (h \diagdown h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j)$$

et donc (ii) est vérifiée.

"$\Longleftarrow$"

Soit K défini sur $X \times X$, vérifiant (i) et (ii). Alors on peut lui associer un espace

hilbertien H de noyau reproduisant K.

Soit $H_0 = Vect\,(K_x, \;\; x \in X)$, on définit sur H_0 un produit scalaire par,

$$(f \diagdown g)_{H_0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j K(x_i, y_j)$$

où $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_{x_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j K_{y_j}$ et $(H_0 \;, (\bullet \diagdown \bullet)_{H_0})$ est un espace préhilbertien.

On pose, $H = \{\lim \text{ites ponctuelles de suites de Cauchy de } H_0\}$. On munit H du

produit scalaire,

$$\forall\,(f, g) \in H \times H, \quad (f \diagdown g)_H = \lim_{n \to +\infty} (f_n \diagdown g_n)_{H_0}$$

où $(f_n)_{n \in N}$ et $(g_n)_{n \in N}$ sont deux suites de Cauchy dans H_0 telles que

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n \;\; \text{ et } \;\; g = \lim_{n \to +\infty} g_n$$

L'espace de Hilbert H admet K pour noyau reproduisant. En effet, $\forall x \in X,\ \ K_x \in H_0$

et donc la suite constante $(K_x)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans H_0 qui converge

vers K_x. Donc K_x est un élément de H. ($\forall x \in X, \quad K_x \in H$).

Pour tout $f \in H$ et tout $x \in X$, on a pour toute suite de Cauchy dans H_0, $(f_n)_{n\in N}$,

de limite ponctuelle f,

$$(f \diagdown K_x)_H = \lim_{n\to+\infty} (f_n \diagdown K_x)_{H_0} = \lim_{n\to+\infty} f_n\,(x) = f\,(x)$$

et donc

$$\forall x \in X\ ,\ \forall f \in H, \qquad (f \diagdown K_x)_H = f\,(x)$$

I.6.6. Exemples.

- Si g est une fonction de X dans $\mathbb{R}$, alors $K(x, y) = g(x)g(y)$ est un noyau reproduisant.
- Si $X = \mathbb{R}^2$ et $K(x, y) = (\ x \diagdown y) = x_1y_1 + x_2y_2$, alors l'espace de Hilbert H à noyau K

est le dual de $\mathbb{R}^2$ et

$\forall (f, g) \in H \times H, \quad (f \diagdown g)_H = (\ u \diagdown v)_{\mathbb{R}^2}$

où $\quad f(x) = (x \diagdown u)_{\mathbb{R}^2} \qquad$ et $\ g(x) = (\ x \diagdown v)_{\mathbb{R}^2}$.

Références.

Aronszajn, N. (1950). "Theory of Reproducing Kernels". Transactions of the American Mathematical Society 68 (3): 337-404.

Alain Berlinet and Christine Thomas, Reproducing kernel Hilbert spaces in Probability and Statistics, Kluwer Academic Publishers, 2004.

I.7. Convergence faible.

I.7.1. Définition.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H.

On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si,

$$\forall h \in H, \quad \lim_{n\to+\infty} (h \diagdown x_n) = (h \diagdown x)$$

On note $\ x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.

I.7.2. Proposition..

La limite faible est unique.

Preuve.

$$\forall h \in H,\ \lim_{n\to+\infty} (h \diagdown x_n) = (h \diagdown x_1) = (h \diagdown x_2) \Longrightarrow \forall h \in H, (h \diagdown x_1 - x_2) \Longrightarrow (x_1 - x_2) \perp H \Longrightarrow x_1 = x_2$$

I.7.3. Théorème.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert H et x et y

deux éléments de H. On a alors:

- $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \Longrightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x.$
- $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\| \Longrightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x.$
- $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} y \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n \diagdown y_n) = (x \diagdown y).$

I.7.4. Remarque.

En dimension finie, la convergence faible est équivalente la convergence forte.

I.7.5. Proposition.

Soit C un convexe de H. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:

(i) C est fermé,

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente d'éléments de C, la limite faible

est dans C.

Preuve.

(i)$\Longrightarrow$(ii):

Supposant C est fermé et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C convergeant

faiblement vers $x \in H$. Comme C est convexe fermé, le point x admet une

projection p_x sur C. Cette projection est l'unique point de C tel que

$$\forall y \in F, \ \mathcal{R}e\,(x - p_x \diagdown y - p_x) \leq 0$$

En appliquant cette relation à $y = x_n$, puis en faisant tendre n vers l'infini,

on obtient

$$\|x - p_x\|^2 \leq 0.$$

D'où $x = p_x \in C$.

(ii)$\Longleftarrow$(i):

Sachant que toute suite fortement convergente est faiblement convergente, on obtient (ii).

I.7.6. Théorème. (compacité faible).

De toute suite bornée d'un Hilbert, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

I.8. Topologie faible.

Soit H un espace de Hilbert et H' son dual topologique.

I.8.1. Définition.

On appelle topologie faible sur H et on note $\sigma(H, H')$, la topologie la moins fine

rendant continues toutes les formes linéaires de H'.

I.8.2. Remarque.

Si O est un ouvert de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert pour la topologie faible de H.

$$(\ \forall f \in H' \ ) \ .$$

Les ouverts pour la topologie faible sont les réunions quelconques d'intersections finies d'ensembles de type $f^{-1}(O)$ avec O ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$).

L'ensemble $\left\{x \in H \;/\; \forall i = \overline{1,n},\quad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \alpha_i,\;\; \forall f_i \in H'\right\}$ est un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie faible.

I.8.3. Proposition.

La topologie faible est séparée.

Preuve.

Soit x_1 et x_2 distincts de H. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $L \in H'$ telle que $L(x_1) \neq L(x_2)$. Posons

$$\epsilon = \frac{L(x_2) - L(x_1)}{4},\quad V_1 = L^{-1}\left(]L(x_1) - \epsilon, L(x_1) + \epsilon[\right),\quad V_2 = L^{-1}\left(]L(x_2) - \epsilon, L(x_2) + \epsilon[\right)$$

Les ouverts V_1 et V_2 contiennent respectivement x_1 et x_2, et sont disjoints.

I.8.4. Remarque.

On peut munir H de deux topologies séparées,

- la topologie forte associée à la norme de H.
- la topologie faible $\sigma(H, H')$.

I.8.5. Remarque.

Par construction, la topologie faible $\sigma(H, H')$ est moins fine que la topologie forte associée à la norme de H, et donc tout ouvert pour la topologie faible est un ouvert pour la topologie forte.

Si une topologie possède moins d'ouverts, elle possède, par contre, plus de compacts.

Cest ce qui montre l'utilité de la topologie faible. Les compacts jouent un rôle important quand on cherche à établir des théorèmes d'existences.

I.8.6. Proposition.

En dimension finie, les deux topologies sont les mêmes.

Exemple.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 et ne converge pas fortement vers 0.

(la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |(x \diagdown e_n)|^2$ converge$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (x \diagdown e_n) = 0$).

CHAPITRE II

$\boxed{\text{Compléments sur les Espaces de Banach}}$

La théorie des espaces de Banach est extrêmement développée, et leurs propriétés(théorème de Baire, Banach-Steinhaus, graphe fermé, caractérisation des application linéaires continues, dualité, existence et propriétés des topologies faibles,etc.) sont bien connues et développées. Les espaces de Banach sont le cadre fonctionnel naturel dans lequel se fait la grande partie de l'analyse fonctionnelle.

II.1.1.Définition.

On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet pour la distance

issue de sa norme.

II.1.2.Exemples.

- $C\left([0,1] \to \mathbb{R}\right)$, $\quad \|f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

- $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty$, muni de la norme.

$$\|u_n\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}.$$

- Tout espace vectoriel normé de dimension finie.

- L'espace $L_c(E,F)$ des applications linéaires continues d'un e.v.normé E dans un espace de Banach F, muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|_F$.

II.1.3.Théorème.

Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente dans E.

Preuve.

Supposons que E soit un espace de Banach. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de teme général u_n. La suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est une suite de Cauchy

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right\| \leq \|u_{n+1}\| + \bullet\bullet\bullet + \|u_{n+p}\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

E étant complet la suite S_n est convergente.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente soit convergente.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Nous pouvons extraire une sous-suite $v_n = u_{\varphi(n)}$

telle que

$$\|v_{n+1} - v_n\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

La série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ est donc absolument convergente. Comme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0,$$

nous en déduisons que la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

II.1.4.Théorème. (de Baire).

Dans un espace de Banach non vide E,

(i) toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

$$\overline{O_n} = E,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E,$$

(ii) toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides dans E est d'intérieur vide dans E.

$$\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \emptyset,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}} = \emptyset,$$

(iii) si E est réunion dénombrable de fermés de E, l'un au moins de ces fermés est d'intérieur non vide dans E.

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \overset{\circ}{\widehat{F_{n_0}}} \neq \emptyset.$$

Preuve.

(i)$\Longleftrightarrow$(ii). Par passage au complémentaire.

Montrons (i).

Pour montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, il faut montrer que

$$\forall V \text{ ouvert non vide de } E, \quad V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \right) \neq \emptyset.$$

Soit donc V un ouvert non vide de E. Par réccurence, on va constuire une suite $(\ B_n)_{n\in\mathbb{N}}$

de boules fermées de E telles que

1- $\forall n \in \mathbb{N}, B_n$ est une boule fermée de rayon inférieur à $1/2^n$.

2- $B_0 \subset O_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{\widehat{B_n}}$.

L'ouvert O_0 est dense dans E, donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$. Or $O_0 \cap V$ est ouvert, il existe donc une

boule ouverte $B(x_0, r) \subset O_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermée de centre x_0 et de rayon

inf$(r/2; 1)$,on a donc $B_0 \subset O_0 \cap V$. Supposons les boules $B_0, B_1, \bullet\bullet\bullet, B_n$ construites et vérifiant (1) et (2). L'ouvert O_{n+1} est dense dans E, donc $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{\widehat{B_n}}$ est un ouvert non vide.

Il existe donc une boule ouverte $B(x,r) \subset O_{n+1} \cap \widehat{B_n}$. Si B_{n+1} est la boule fermée de centre x

est de rayon $\inf\left(r/2; 1/2^{n+1}\right)$, on a donc $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \widehat{B_n}$. Ainsi B_{n+1} vérifie (1) et (2).

Par construction, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le

diamètre tend vers 0. De plus E est complet, il existe donc $a \in E$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

Or $B_0 \subset V$, donc $a \in V$. D'après (2), on a aussi $B_n \subset O_n$ pour tout n, donc $a \in O_n$

pour tout n. Ainsi $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Enfin, $a \in V \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n\right)$.

Montrons maintenant (iii).

Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \emptyset$,alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{C_E(F_n)} = C_E\left(\overset{\circ}{\widehat{F_n}}\right) = C_E(\emptyset) = E$,

donc on peut appliquer (i) aux $C_E(F_n)$: $\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_E(F_n)} = E$. Or,

$E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longrightarrow \emptyset = C_E\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_E(F_n)$ et donc $\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_E(F_n)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

D'où une contradiction.

II.1.5.Application.

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- Tout espace de Banach est de dimension finie ou non dénombrable.

II.1.6.Théorème. (de Banach-Steinhaus).

Soit $(E, \|\bullet\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\bullet\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit de plus,

A une partie non vide de $L_c(E,F)$, telle que:

$$\sup_{f\in A} \|f(x)\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E.$$

Alors

$$\sup_{f\in A} \|f\|_{L_c(E,F)} < +\infty$$

Preuve.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $W_k = \{x \in E \ / \ \forall f \in A, \ \|f(x)\|_F \leq k\}$.

Pour $g \in A$, posons $\varphi_g : E \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \|g(x)\|_F$. Les applications g et $y \mapsto \|y\|_F$ étant continues, il en est de même de φ_g. Comme $W_k = \varphi_g^{-1}([0,k])$, W_k est un fermé de E. Comme $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} W_k = E$, il résulte du théorème de Baire qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que W_{n_0} est d'intérieur non vide. Soient donc $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $B_r(x_0) \subset W_{n_0}$. Alors

$$\|f(x_0 + rz)\|_F \leq n_0, \quad \forall f \in L_c(E, F), \quad \forall z \in B_1(0).$$

($\|x_0 + rz - x_0\|_E = \|rz\|_E = r\|z\|_E < r \Longrightarrow x_0 + rz \in B_r(x_0) \subset W_{n_0}$)

Par conséquent

$$|\|f(rz)\|_F - \|f(x_0)\|_F| \leq \|f(rz) + f(x_0)\|_F = \|f(x_0 + rz)\|_F \leq n_0$$

D'où

$$\sup_{f \in A} \|f\|_{L_c(E,F)} \leq \frac{n_0 + \|f(x_0)\|_F}{r} < +\infty$$

II.1.7.Application.

- Soit $(E, \|\bullet\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\bullet\|_F)$ un espace vectoriel normé.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L_c(E, F)$ convergeant simplement vers f. Alors $f \in L_c(E, F)$.

- Soit G un e.v.normé, B un sous-ensemble de G. On suppose que $\forall f \in G'$, $f(B)$ est borné. Alors B est borné.

II.1.8.Théorème. (de l'application ouverte).

Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.

La preuve du théorème repose sur les deux lemmes suivants:

II.1.9.Lemme.

Soit u une application linéaire continue surjective d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. Alors

$$\exists \delta > 0 \ \text{ tel que } B_F(0, \delta) \subset \overline{u(B_E(0,1))}.$$

Preuve.

Posons

$$F_n = \overline{u(B_E(0,n))} = \overline{u(nB_E(0,1))} = n\overline{u(B_E(0,1))}, \quad n \geq 1.$$

u étant surjective, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$ et alors, F étant complet, par le théorème de Baire

$$\exists n_0 \geq 1 \text{ tel que } \overset{\circ}{\widehat{F}}_n = n_0 \overset{\circ}{\widehat{\overline{u(B_E(0,1))}}} \neq \emptyset.$$

Par homothétie on a

$$\overset{\circ}{\widehat{\overline{u(B_E(0,1))}}} \neq \emptyset$$

autrement dit

$$\exists B_F(y_0,r) \subset \overline{u(B_E(0,1))}$$

$u(B_E(0,1))$ est convexe ($B_E(0,1)$ convexe et u linéaire), symétrique, ainsi que son

adhérence et donc $-y_0 \in \overline{u(B_E(0,1))}$. Or pour un convexe C, on a $C + C \subset 2C$.

D'où

$$B_F(0,r) = B_F(y_0,r) - \{y_0\} \subset \overline{u(B_E(0,1))} + \overline{u(B_E(0,1))} \subset 2\overline{u(B_E(0,1))}$$

ou encore

$$\frac{1}{2}B_F(0,r) = B_F\left(0,\frac{r}{2}\right) \subset \overline{u(B_E(0,1))}.$$

Donc $\delta = \frac{r}{2}$.

II.1.10.Lemme.

Soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F vérifiant

$$\exists \delta > 0 \ \text{ tel que } B_F(0,\delta) \subset \overline{u(B_E(0,r))}.$$

Alors

$$B_F\left(0,\frac{\delta}{2}\right) \subset u(B_E(0,r)).$$

Preuve.

Par hypothèse et par homothétie, on a

$$B_F\left(0,\frac{\delta}{2^n}\right) \subset \overline{u\left(B_E\left(0,\frac{r}{2^n}\right)\right)}.$$

Posons $\delta_n = \frac{\delta}{2^n}$ et $r_n = \frac{r}{2^n}$.

Soit $y \in B_F(0,\delta_1)$, alors $y \in \overline{u(B_E(0,r_1))}$, et donc

$$\exists x_1 \in B_E(0,r_1) \quad \text{tel que } \|y - u(x_1)\| < \delta_2.$$

Alors

$$y - u(x_1) \in B_F(0,\delta_2) \subset \overline{u(B_E(0,r_2))}$$

et donc

$$\exists x_2 \in B_E(0,r_2) \quad \text{tel que } \|(y - u(x_1)) - u(x_2)\| < \delta_3$$

et ainsi, on construit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tel que

$$x_n \in B_E(0,r_n) \quad \text{et} \quad \|y - u(x_1) - u(x_2) - \bullet\bullet\bullet - u(x_n)\| < \delta_{n+1}. \qquad (\ *\ )$$

Posons $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Alors $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy car $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$.

E étant complet, elle converge vers un point $x \in E$. Mais

$$\|s_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{r}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r}{2^k} = r.$$

Donc

$$\|x\| = \left\| \lim_{n\to+\infty} s_n \right\| = \lim_{n\to+\infty} \|s_n\| \leq r \quad \text{et} \quad x \in B_E(0,r)$$

u étant linéaire continue, en passant à la limite dans (*), on obtient:

$$\|y - u(x)\| = 0 \Longrightarrow y = u(x) \Longrightarrow B_F(0,\delta_1) = B_F\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \subset u(B_E(0,r)).$$

Preuve du théorème.

Soit V un ouvert de E.

- Si $V = \emptyset$, $u(V) = \emptyset$ est un ouvert de F.
- Si $V \neq \emptyset$, alors $u(V) \neq \emptyset$. Par hypothèse tout $y \in u(V)$ est l'image d'un point

$x \in V$. V étant ouvert,

$$\exists B_E(x,r) \subset V \quad \text{et donc} \quad u(B_E(x,r)) \subset u(V).$$

Or

$$u(x) + B_F\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \subset u(x) + u(B_E(0,r)) \quad \text{ou encore } B_F\left(u(x), \frac{\delta}{2}\right) \subset u(B_E(x,r)).$$

Alors

$$\forall y \in u(V), \ \exists B_F\left(y, \frac{\delta}{2}\right) \subset u(V)$$

d'où $u(V)$ est un ouvert de F.

Application.

II.1.11.Corollaire.(Théorème d'isomorphisme de Banach).

Si une application T est linéaire continue et bijective entre espaces de Banach,

alors T^{-1} est continue.

Preuve.

D'après le théorème de l'application ouverte, $T(B_E(0,1))$ est est un ouvert de F. Il existe donc $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1))$. Comme T est bijective, on a

$$T^{-1}\left(\overline{B}_F\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) \subset T^{-1}(B_F(0,r)) \subset B_E(0,1) \subset \overline{B}_E(0,1)$$

ce qui implique

$$T^{-1}\left(\overline{B}_F(0,1)\right)=T^{-1}\left(B_F\left(0,\frac{r}{2}.\frac{2}{r}\right)\right)=\frac{2}{r}T^{-1}\left(B_F\left(0,\frac{r}{2}\right)\right)\subset\frac{2}{r}\overline{B}_E(0,1)\subset\overline{B}_E\left(0,\frac{2}{r}\right)$$

d'où T^{-1} est bornée sur la boule unité fermée $\overline{B}_F(0,1)$ et donc elle est continue.

II.1.12.Théorème. (du graphe fermé).

Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. Alors T

est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans $E\times F$.

Preuve.

"$\Longrightarrow$"

Supposons T continue. Soit $(x,y)\in E\times F$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,T(x_n))=(x,y)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$ et $y=\lim\limits_{n\to+\infty}T(x_n)=T\left(\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\right)=T(x)$.

Donc $y=T(x)$ et $(x,y)\in G(T)$, d'où le graphe $G(T)$ est fermé dans $E\times F$.

"$\Longleftarrow$"

Réciproquement, soit $T:E\to F$ linéaire dont le graphe $G(T)$ est fermé dans $E\times F$.

On a:

- $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E\times F$ car T est linéaire.
- $E\times F$ est un espace de Banach pour la norme $\max(\|\bullet\|_E,\|\bullet\|_F)$.
- $G(T)$ fermé dans $E\times F$ complet est donc un espace de Banach.

Soit $g:E\to G(T)$, $x\longmapsto(x,T(x))$. C'est une bijection et $g^{-1}:G(T)\to E$ est la

restriction à $G(T)$ la première projection pr_1. Mais pr_1 est continue, et donc g^{-1}

est linéaire bijective et continue. D'après le théorème d'isomorphisme de Banach,

$\left(g^{-1}\right)^{-1}=g$ est continue. Or $T=pr_2\circ g$ où pr_2 est la deuxième projection.

Comme pr_2 est continue, T est continue.

Application.

II.1.13.Corollaire.

Une application linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F

est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que:

- $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}T(x_n)=y$,

on a: $y=T(x)$.

Preuve.

"$\Longleftarrow$" évident.
"$\Longrightarrow$"

$$\forall\left(x_n, T\left(x_n\right)\right) \in G\left(T\right), \ \left[\left(x_n, T\left(x_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(x, T\left(x\right)\right)\right] \Longrightarrow G\left(T\right)$$

est fermé

et donc T est continue.

II.2. Dualité.

II.2.1. Définition.

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle dual (topologique) de E et on note E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

II.2.2. Théorème.

E' muni de l'application qui à $f \in E'$ associe $\left\|f\right\|_{E'}$ telle que

$$\left\|f\right\|_{E'} = \sup_{\left\|x\right\|_E = 1} \left|f\left(x\right)\right| = \sup_{\left\|x\right\|_E \leq 1} \left|f\left(x\right)\right| = \sup_{x \neq 0} \frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left\|x\right\|_E}$$

est un espace vectoriel normé complet.

II.2.3. Proposition.

L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par

$$\begin{array}{cccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & E' \times E & \to & \mathbb{K} \\ & & (\varphi, x) & \longmapsto & \langle\varphi, x\rangle = \varphi(x) \end{array}$$

est une forme bilinéaire continue. On l'appelle application de dualité ou crochet de dualité.

Preuve.

Il est bien clair que c'est une forme bilinéaire sur $E' \times E$. Par définition de la norme de E', on a

$$\left|\langle\varphi, x\rangle\right| = \left|\varphi(x)\right| \leq \left\|\varphi\right\|_{E'} \left\|x\right\|_E$$

d'où la continuité.

II.2.4. Théorème. (Hahn-Banach).

Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et φ une forme linéaire continue sur F muni de la topologie induite, c-à-dire telle que

$$\exists C > 0, \forall x \in F, \left|\varphi(x)\right| \leq C \left\|x\right\|_E .$$

Il existe alors un élément $\widetilde{\varphi} \in E'$ tel que $\widetilde{\varphi}_{\backslash F} = \varphi$ et tel que $\left\|\widetilde{\varphi}\right\|_{E'} = \left\|\varphi\right\|_{F'}$.

II.2.5. Remarque.

Le théorème de Hahn-Banach est un théorème fondamental de prolongement de forme linéaire continue définie sur sous-espace vectoriel.

II.2.5. Corollaire.

Soit x un élément non nul d'un espace vectoriel normé E. Il existe une forme linéaire continue φ telle que l'on ait

$$\langle \varphi, x\rangle = \|x\|_E \qquad \text{et} \qquad \|\varphi\|_E = 1.$$

Preuve.

Posons $F = \mathbb{K}x$ et pour tout $y = \lambda x \in F, \varphi(y) = \lambda \|x\|_E$. On a donc $\varphi(x) = \|x\|_E$ et pour tout $y \in F, |\varphi(y)| = |\lambda| \|x\|_E = \|\lambda x\|_E = \|y\|_E$, d'où $\|\varphi\|_{E'} = 1$.

II.2.7. Définition.

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual. On appelle bidual de E, et l'on note E", le dual de E'.

II.2.8. Proposition.

Soit J l'application de E dans E" définie par

$$J : E \to E"$$

$$x \longmapsto J(x)$$

où

$$J(x) : E' \to \mathbb{K}$$

$$\varphi \longmapsto J(x)(\varphi) = \langle \varphi, x\rangle = \varphi(x).$$

Alors J est une injection isométrique de E dans E".

Preuve.

Il est clair que J est linéaire E dans E". De plus, elle est continue car

$$|J(x)(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{E'} \|x\|_E$$

ce qui montre aussi que $\|J(x)\|_{E"} \leq \|x\|_E$. Poir démontrer l'égalité, on utilise le corollaire du théorème de Hahn-Banach: pour $x \neq 0$ de E, il existe $\varphi_0 \in E'$ telle que $|J(x)(\varphi_0)| = \|x\|_E$ et $\|\varphi_0\|_{E'} = 1$.

II.2.9. Définition.

On dit qu'un espace vectoriel normé E est réflexif si l'application J est surjective.

$$(\ J(E) = E")$$

II.2.10. Proposition.

Si un espace vectoriel normé est réflexif, alors c'est un espace de Banach.

Preuve.

E est isométrique à son bidual E" qui est un espace de Banach.

II.2.11. Exemples.

- Tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.
- Tout espace de Hilbert est réflexif.
- Les espaces $l^p(\mathbb{N})$ pour $1 < p < +\infty$ sont réflexifs.
- $l^1(\mathbb{N})$ et $l^\infty(\mathbb{N})$ ne sont pas réflexifs.

II.3. Convergence faible.

II.3.1. Définition.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Banach E et x un élément de E.

On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si,

$$\forall \varphi \in E', \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$$

On note $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.

II.3.2. Définition.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite faiblement de Cauchy si la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

pour toute $\varphi \in E'$. Un espace vectoriel normé E est dit faiblement complet si toute

suite de E qui est faiblement de Cauchy converge faiblement dans E.

II.3.3. Proposition..

La limite faible est unique.

II.3.4. Théorème.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Banach E et x et y

deux éléments de E. On a alors:

- $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \Longrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.
- $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ dans E' et $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow \varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

II.3.5. Remarque.

En dimension finie, la convergence faible est équivalente la convergence forte.

II.4. Topologie faible.

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique.

II.4.1. Définition.

On appelle topologie faible sur E et on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine

rendant continues toutes les formes linéaires de E'.

II.4.2. Remarque.

Si O est un ouvert de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert pour la topologie faible de E.

$(\ \forall f \in E'\ )$.

Les ouverts pour la topologie faible sont les réunions quelconques d'intersections finies d'ensembles de type $f^{-1}(O)$ avec O ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$).

L'ensemble $\left\{x \in E \ / \ \forall i = \overline{1,n}, \ \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \alpha_i, \ \ \forall f_i \in E'\right\}$ est un voisinage ouvert de x_0 pour la topologie faible.

II.4.3. Proposition.

La topologie faible est séparée.

On peut munir E de deux topologies séparées,

- la topologie forte associée à la norme de E.
- la topologie faible $\sigma(E, E')$.

II.4.5. Remarque.

Par construction, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est moins fine que la topologie forte associée à la norme de E, et donc tout ouvert pour la topologie faible est un ouvert pour la topologie forte.

Si une topologie possède moins d'ouverts, elle possède, par contre, plus de compacts.

C'est ce qui montre l'utilité de la topologie faible. Les compacts jouent un rôle important quand on cherche à établir des théorèmes d'existences.

I.8.6. Proposition.

En dimension finie, les deux topologies sont les mêmes.

II.5. Convexité uniforme.

II.5.1. Définition.

Soit E un espace de Banach, on dit que E est uniformément convexe si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout x et $y \in \overline{B}_E(0,1)$ si $\|x - y\| \geq \epsilon$ alors $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

Remarque.

- L'uniforme convexité dépend de la norme.
- Tout espace de Hilbert est uniformément convexe. (Identité du parallélogramme).
- Les espaces l^p pour $1 < p < +\infty$, sont uniformément convexes.
- Les espaces l^1 et l^∞ ne sont pas uniformément convexes.

Théorème. (Millman-Pettis).

Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Références.

W.Rudin, Functional Analysis (McGraw-Hill, NewYork, 1991, 2e édition).

H.Brézis, Analyse, Théorie et applications (Masson, Paris, 1992, 3e tirage).

CHAPITRE III
espaces de Lebesgue L^p

La théorie des espaces L^p joue un rôle fondamental dans les applications de l'analyse fonctionnelle, par exemple dans la théorie des équations différentielles et des équations

intégrales.

III.1.1.Définition.

Soit $0 \leq p < +\infty$ un nombre réel, (Ω, T, μ) un espace mesuré et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On définit alors

- pour $p = 0$

$$\mathcal{L}^0(\Omega, \mu) = \mathcal{L} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu - \text{mesurable}, \ \mu\left(\{x \in \Omega, \ \ |f(x)| \neq 0\}\right) < +\infty\}$$

muni de l'application $\mathcal{N}_0 : \mathcal{L}^0(\Omega, \mu) \to [0, +\infty]$

$$f \longmapsto \mathcal{N}_0\left(f\right) = \mu\left(\{x \in \Omega, \ \ |f(x)| \neq 0\}\right)$$

- pour $0 < p < 1$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu - \text{mesurable}, \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \right\}$$

muni de l'application $\mathcal{N}_p : \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \to [0, +\infty]$

$$f \longmapsto \mathcal{N}_p\left(f\right) = \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

- pour $1 \leq p < +\infty$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu - \text{mesurable}, \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \right\}$$

muni de l'application $\mathcal{N}_p : \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \to [0, +\infty]$

$$f \longmapsto \mathcal{N}_p\left(f\right) = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

- pour $p = +\infty$

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu - \text{mesurable}, \ \exists c \ , |f(x)| \leq c \ \ p.p. \text{ sur } \Omega\}$$

muni de l'application $\mathcal{N}_\infty : \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) \to [0, +\infty]$

$$f \longmapsto \mathcal{N}_\infty\left(f\right) = \inf\left\{c, \quad |f(x)| \leq c \ \ p.p. \text{ sur } \Omega\right\} = ess \sup_{x \in \Omega} |f|$$

III.1.2.Remarque.

c est dit majorant essentiel de f; $ess\sup_{x\in\Omega}|f|$ est dit sup essentiel de f, $f\in\mathcal{L}^{\infty}(\Omega,\mu)$ est dite essentiellement bornée.

III.1.3.Inégalité de Hölder

Soit (Ω,T,μ) un espace mesuré, et soit $1\leq p,q\leq+\infty$ et $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Alors, pour toutes

fonctions $f\in\mathcal{L}^{p}(\Omega,T,\mu)$, $g\in\mathcal{L}^{q}(\Omega,T,\mu)$

$$\mathcal{N}_1\left(fg\right)\leq\mathcal{N}_p\left(f\right)\mathcal{N}_q\left(g\right).$$

Preuve.

C'est évident si $p=1$ou $p=+\infty$,supposons donc $1<p<+\infty$. Par concavité de la fonction ln, on a pour tout $a,b>0$

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)\geq\frac{1}{p}\ln\left(a^p\right)+\frac{1}{q}\ln\left(b^q\right)=\ln\left(ab\right)$$

et donc

$$ab\leq\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

cette inégalité est évidente pour $a=0$ ou $b=0$. On a donc:

$$\frac{\left|f\left(x\right)g\left(x\right)\right|}{\mathcal{N}_p\left(f\right)\mathcal{N}_q\left(g\right)}\leq\frac{1}{p}\frac{\left|f\left(x\right)\right|^p}{\mathcal{N}_p^p\left(f\right)}+\frac{1}{q}\frac{\left|g\left(x\right)\right|^q}{\mathcal{N}_q^q\left(g\right)}$$

on en déduit $fg\in\mathcal{L}^1$ et on obtient en intégrant l'inégalité précédente:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\left|f\left(x\right)g\left(x\right)\right|}{\mathcal{N}_p\left(f\right)\mathcal{N}_q\left(g\right)}d\mu(x)\leq1$$

III.1.4.Inégalité de Minkowski.

Soit (Ω,T,μ) un espace mesuré, et soit $1\leq p\leq+\infty$.

Alors, pour toutes fonctions $f,g\in\mathcal{L}^{p}(\Omega,T,\mu)$

$$\mathcal{N}_p\left(f+g\right)\leq\mathcal{N}_p\left(f\right)+\mathcal{N}_p\left(g\right)$$

Preuve.

C'est évident pour $p=1$ ou $p=+\infty$; supposons donc $1<p<+\infty$. Par convexité

de la fonction t^p, on a:

$$\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|^p\leq\left(\left|f\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|\right)^p\leq2^{p-1}\left(\left|f\left(x\right)\right|^p+\left|g\left(x\right)\right|^p\right)$$

de sorte que $(f+g)\in\mathcal{L}^p$. Soit f et g dans $\mathcal{L}^p$, on a

$$\mathcal{N}_p^p\left(f+g\right)=\int\limits_{\Omega}\left|f+g\right|^pd\mu=\int\limits_{\Omega}\left|f+g\right|^{p-1}\left|f+g\right|d\mu\leq\int\limits_{\Omega}\left|f+g\right|^{p-1}\left|f\right|d\mu+\int\limits_{\Omega}\left|f+g\right|^{p-1}\left|g\right|d\mu$$

et comme $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^{p/p-1} = \mathcal{L}^q$, il résulte de l'inégalité de Hölder que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p^p(f+g) &\leq (\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)) \left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \right)^{(p-1)/p} \\ &= (\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)) \mathcal{N}_p^{p-1}(f+g) \end{aligned}$$

de sorte que l'on a bien

$$\mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g)$$

III.1.5.Théorème.

L'application $\mathcal{N}_p$ définie sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ est:

- pour $1 \leq p \leq +\infty$, une semi-norme:

$$\mathcal{N}_p(f) \geq 0, \quad \mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g); \quad \mathcal{N}_p(\lambda f) = |\lambda| \mathcal{N}_p(f)$$

- pour $0 \leq p < 1$,positive, homogène de degré p et vérifiant l'inégalité triangulaire:

$$\mathcal{N}_p(f) \geq 0, \quad \mathcal{N}_p(f+g) \leq \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(g); \quad \mathcal{N}_p(\lambda f) = |\lambda|^p \mathcal{N}_p(f)$$

De plus, pour $0 \leq p \leq +\infty$, une fonction $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifie $\mathcal{N}_p(f) = 0$ si et seulement si

elle est nulle $\mu-$presque partout.

Preuve.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$,pour montrer que $\mathcal{N}_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$, il suffit de montrer

l'inégalité triangulaire, qui n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Pour $0 \leq p < 1$,pour montrer l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer l'inégalité

$$\forall a, b \geq 0,\ \forall p,\ 0 \leq p < 1, \quad (a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

(Utiliser le théorème des accroissements finis pour $f(x) = x^p$ dans $[a, a+b]$).

III.1.6.Définition.

On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(\Omega, T, \mu)$, par:

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad \mu - \text{presque partout}$$

III.1.7.Définition.

Soit (Ω, T, μ) un espace mesuré, et $p \in [0, +\infty]$. On appelle espace de Lebesgue d'ordre p,

et on note $L^p(\Omega, T, \mu)$ ou $L^p(\Omega, \mu)$ ou $L^p(\mu)$ ou $L^p(\Omega, d\mu)$ ou $L^p(d\mu)$ ou $L_p(\Omega, T, \mu)$

ou $L_p(\Omega, \mu)$ ou $L_p(\Omega)$ ou simplement L^p ou L_p, l'espace vectoriel de toutes les classes d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^p(\Omega, T, \mu)$, pour la relation d'équivalence "$\sim$".

Si $[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega, T, \mu),\ f \sim g\}$ alors $\mathcal{N}_p([f]) = \mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_p(g)$

et on note $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p$.

III.1.8.Théorème.

L'espace $(L^p(\Omega, T, \mu), \mathcal{N}_p)$ ainsi défini est un espace vectoriel qui est:

- normé pour $1 \leq p \leq +\infty$;
- muni d'une distance invariante par translation, pour $0 \leq p < 1$.

($d(f+h, g+h) = \mathcal{N}_p(f-g) = d(f,g)$, $\forall h \in L^p$)

Preuve.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$; il suffit de montrer que

$$\mathcal{N}_p([f]) = 0 \Longleftrightarrow [f] = [0]$$

Or

$$\mathcal{N}_p([f]) = \mathcal{N}_p(f) = 0 = \mathcal{N}_p(0) \Longleftrightarrow f \in [0] \Longleftrightarrow [f] = [0]$$

III.1.9. Théorème.

Pour tout $p : 1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(\Omega, T, \mu), \mathcal{N}_p)$ est un espace de Banach.

Preuve.

Cas : $1 \leq p < +\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p, donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq M, \quad \|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

Construisons une suite extraite convergente en prenant

$$M_1 < M_2 < M_3 < \bullet\bullet\bullet \text{ tels que } \quad \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall n, m \geq M_k.$$

Posons alors,

$$g_0(x) = f_{M_1}(x), g_1(x) = f_{M_2}(x) - f_{M_1}(x), \bullet\bullet\bullet, g_k(x) = f_{M_{k+1}}(x) - f_{M_k}(x).$$

On a donc $f_{M_{k+1}}(x) = \sum_{i=0}^{k} g_i(x)$.

Définissons $G_k(x) = \sum_{i=0}^{k} |g_i(x)|$ et $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |g_i(x)|$.

Par le théorème de la convergence monotone, on a :

$$\int_\Omega (G(x))^p\, d\mu(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega (G_k(x))^p\, d\mu(x)$$

et par l'inégalité de Minkowski :

$$\int_\Omega (G_k(x))^p\, d\mu(x) \leq \left(\|g_0\|_p + \frac{1}{2} + \bullet\bullet\bullet + \frac{1}{2^k}\right)^p < \left(\|g_0\|_p + 1\right)^p < +\infty.$$

Donc

$$\int_{\Omega} (G(x))^p \, d\mu(x) \leq \left(\|g_0\|_p + 1\right)^p < +\infty$$

d'où $G \in L^p$ et l'ensemble $E = \{x \in \Omega \;/\; G(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle.

Posons alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in E \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} g_i(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus E \end{cases}$$

On a donc $\forall x \in \Omega$, $|F(x)| \leq G(x)$ et donc $F \in L^p$. De plus

$$F(x) = f_{M_{k+1}}(x) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i(x), \quad \forall x \in \Omega \setminus E$$

donc

$$\left|F(x) - f_{M_{k+1}}(x)\right| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |g_i(x)|, \quad \forall x \in \Omega \setminus E$$

et donc par convergence monotone et par Minkowski :

$$\int_{\Omega} \left|F(x) - f_{M_{k+1}}(x)\right|^p d\mu(x) \leq \liminf_{l \to +\infty} \inf \int_{\Omega} \left(\sum_{i=k+1}^{l} |g_i(x)|\right)^p d\mu(x) \leq \liminf_{l \to +\infty} \inf \left(\sum_{i=k+1}^{l} \|g_i\|_p\right)^p \leq \left(\frac{1}{2^k}\right)^p.$$

Donc $\left\|F - f_{M_{k+1}}\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ et ainsi F est la limite de la suite (f_{M_k}) au sens de L^p,donc aussi

la limite de la suite (f_n) puisque celle-ci est une suite de Cauchy.

Cas : $p = +\infty$.

Soit $E = \{x \in \Omega,\ \exists n,\ \ |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty \ \text{ ou } \exists n, m,\ \ |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty \ \}$.

L'ensemble E réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, est de mesure nulle.

Sur $\Omega \setminus E$, les fonctions f_n sont bornées et forment une suite de Cauchy, l'espace des

fonctions bornées de $\Omega \setminus E$ dans $\mathbb{C}$ est complet pour la norme uniforme, donc

la suite (f_n) converge vers une fonction f bornée sur $\Omega \setminus E$. En complétant par 0 sur E,

on obtient une limite de (f_n) dans L^∞ pour $\|\bullet\|_\infty$.

III.1.10.Remarque.

- Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f \diagdown g) = \int_{\Omega} u(x) f(x) d\mu(x), \quad \forall (f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

.   - Si $\Omega = \mathbb{N}$, $T = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ ($\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A) = card(A)$),

on a:

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = l^p(\mathbb{N})$$

Relations entre espaces de Lebesgue.

III.1.11.Théorème.

Soit (Ω, T, μ) un espace mesuré fini ($\mu(\Omega) < +\infty$). Alors, dès que $q \geq p \geq 1$ on a,

pour tout f $\mu-$mesurable,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^q(\Omega)} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

En particulier; les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, T, \mu)$ $(p \geq 1)$ sont emboités dans

le sens décroissant: $q \geq p \geq 1 \Longrightarrow L^q \subset L^p$ et cette injection est continue.

Preuve.

C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder: on écrit

$$\int (|f|^p \times 1) \, d\mu \leq \left(\int (|f|^p)^{\frac{q}{p}} d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int 1 d\mu \right)^{1-\frac{p}{q}}$$

et on élève les deux membres de l'inégalité à la puissance $\frac{1}{p}$.

III.1.12.Remarque.

Dans le cas général, les espaces de Lebesgue ne sont pas emboités, et il n'y a pas de règle

générale. On peut d'ailleurs trouver des cas où l'emboitement a lieu dans le sens croissant.

III.1.13.Théorème.

Soit (Ω, T, μ) un espace mesuré tel que

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in \Omega, \quad \mu(\{x\}) \geq \epsilon$$

Alors, dès que $q \geq p \geq 1$, pour tout f $\mu-$mesurable, on a,

$$\|f\|_{L^q} \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|f\|_{L^p}$$

En particulier; les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, T, \mu)$ $(p \geq 1)$ sont emboités dans

le sens croissant: $q \geq p \geq 1 \Longrightarrow L^p \subset L^q$ et l'injection est continue.

Preuve.

Pour tout $x_0 \in \Omega$, on a

$$\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{x_0\}} |f|^p \, d\mu = \mu(\{x_0\}) |f(x_0)|^p \geq \epsilon |f(x_0)|^p$$

Par passage au supremum essentiel, on obtient

$$\|f\|_{L^p} \geq \epsilon^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}$$

En reportant dans l'inégalité

$$\int_\Omega |f|^q \, d\mu = \int_\Omega |f|^{q-p} |f|^p \, d\mu \leq \int_\Omega \|f\|_{L^\infty}^{q-p} |f|^p \, d\mu = \|f\|_{L^\infty}^{q-p} \int_\Omega |f|^p \, d\mu \qquad (\ |f| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p. })$$

on trouve

$$\int_\Omega |f|^q \, d\mu \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{q}{p}-1}} \|f\|_{L^p}^p \|f\|_{L^p}^{q-p}$$

d'où l'on déduit facilement le résultat.

III.1.14.Inégalité de Clarkson.

Soit $p : 2 \leq p < +\infty$, pour tout f et g dans $L^p(\Omega, T, \mu)$, on a:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)$$

III.1.15.Remarque.

Pour $p = 2$, l'inégalité de Clarkson est une égalité, c'est l'identité du parallélogramme.

III.1.16.Inégalité de Hanner.

Soit $p : 1 < p \leq 2$, pour tout f et g dans $L^p(\Omega)$, on a:

$$\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \right)^p + \left| \|f\|_{L^p(\Omega)} - \|g\|_{L^p(\Omega)} \right|^p \leq \|f+g\|_{L^p(\Omega)}^p + \|f-g\|_{L^p(\Omega)}^p$$

III.1.17.Théorème.

Pour tout $p : 1 < p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe.

Preuve.

Pour $p : 2 \leq p < +\infty$, utiliser l'inégalité de Clarkson.

Pour $p : 2 \leq p < +\infty$, utiliser l'inégalité de Hanner.

III.1.18. Remarque

$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas uniformément convexes.

III.1.19. Théorème.

Pour tout $p : 1 < p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace réflexif.

III.1.20. Remarque.

$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.

III.1.21. Théorème. (Théorème de représentation de Riesz)

Soit $p : 1 < p < +\infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, alors il existe
un unique $u \in L^q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$, tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

de plus, on a

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

III.1.22. Remarque.

Le théorème de représentation de Riesz exprime que toute forme linéaire continue

sur L^p, avec $1 < p < +\infty$, se représente à l'aide d'une fonction de L^q.

L'application $\varphi \longmapsto u$ est linéaire isométrique et bijective, elle permet d'identifier le dual de L^p avec L^q.

Ainsi si $1 < p < +\infty$ et si q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $(L^p)' = L^q$.

III.1.23. Théorème.

Soit $\varphi \in \left(L^1(\Omega)\right)'$, alors il existe un unique $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in L^1(\Omega)$$

de plus, on a $\|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$

III.1.24. Remarque.

Le théorème III.1.22. exprime que toute forme linéaire continue sur L^1se représente à l'aide d'une fonction de L^∞.

L'application $\varphi \longmapsto u$ est linéaire isométrique et bijective, elle permet d'identifier le dual de L^1 avec L^∞. Ainsi $\left(L^1\right)' = L^\infty$.

III.1.25. Théorème.

Pour tout $p : 1 \leq p < +\infty$, L^p est séparable.

III.1.26. Remarque.

L'espace L^∞ n'est pas séparable.

III.1.27. Tableau résumant les principales propriétés des espaces L^p.

	$L^p, 1 < p < +\infty$	L^1	L^∞
Réflexif	Oui	Non	Non
Séparable	Oui	Oui	Oui
Dual	$L^q, q = \frac{p}{p-1}$	L^∞	$L^1 \subsetneqq (L^\infty)'$

III.2.Interpolation.

En analyse, un espace d'interpolation ou espace interpolé est un espace qui se trouve entre deux autres espaces (un espace intermédiaire). La théorie de l'interpolation des espaces vectoriels a débuté par une observation faite par Józef Marcinkiewicz, et qui fut généralisée ultérieurement et connue sous le non de Théorème de Riesz-Thorin. En termes simples, si une application linéaire est continue sur un certain espace L^p et aussi sur un autre espace L^q, alors elle est aussi continue sur l'espace L^r, pour tout r compris entre p et q. En d'autres mots, L^r est un espace intermédiaire entre L^p et L^q. Il y a de nombreuses manières de construire des espaces interpolés (et le théorème de Riesz-Thorin en est un exemple pour les espaces L^p).

III.2.1.Théorème. (théorème d'interpolation de Riesz-Thorin)

Soient X et Y deux espaces mesurés et $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$.

Soit T un opérateur linéaire de $L^{p_0+p_1}(X)$ dans $L^{q_0+q_1}(Y)$.

Si T est un opérateur linéaire continu de $L^{p_0}(X)$ dans $L^{q_0}(Y)$, et de $L^{p_1}(X)$ dans $L^{q_1}(Y)$.

Alors, pour tout $\theta \in \,]0,1[\,$, l'opérateur T admet un unique prolongement continu

de $L^{p_\theta}(X)$ dans $L^{q_\theta}(Y)$, où

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

En plus, si l'on pose $M_\theta = \|T\|_{L^{p_\theta} \to L^{q_\theta}}$, alors

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

Cas particulier:

Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, et T est un opérateur linéaire, borné de L^p dans L^p et de L^q dans L^q,

alors T se prolonge uniquement en un opérateur borné de L^r dans L^r, pour tout $r \in \,]p,q[\,$.