الاهتزازات

الباب الأول: الاهتزازات الحرة ذات درجة واحدة من الحرية

1.1 مقدمة

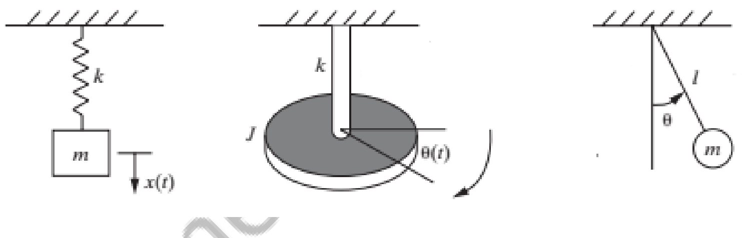
عدد درجات الحرية لنظام معين هو عدد المتغيرات المستقلة اللازمة للوصف الكامل لحركة كل جسيم من هذا النظام.
الجسيم الواحد الحر الذي يتحرك في الفضاء له 3 درجات من الحرية، و الاختيار المناسب للإحداثيات المعممة يتكون من الإحداثيات الكارتيزية (x,y,z) للجسيم بالنسبة لمعلم ثابت. عندما يتحرك الجسيم في الفضاء، وضعيته تكون بدلالة الزمن.
كل جسم الصلب غير مقيد يملك ست درجات من الحرية، ثلاث إحداثيات لمركز الكتلة ودورانه الزاوي حول ثلاث محاور للإحداثيات.
كل مجموعة من N إحداثيات مستقلة حركيا وضرورية لوصف حركة النظام تسمى مجموعة الإحداثيات المعممة. عدد درجات الحرية المستعملة في تحليل نظام وحيدة، لكن اختيار الإحداثيات المستعملة لوصف نظام ليست وحيدة. الإحداثيات المعممة هي المتغيرات غير المتعلقة بمسألة اهتزازية هي دوال للمتغير المستقل، الزمن.

أمثلة:

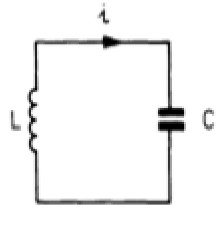
أنظمة لدرجة واحدة من الحرية (الشكل 1.1)

الإحداثيات المعممة:

أ - x (نظام كتلة- نابض)
ب - θ (كتلة – نابض الفتل)
ج - θ (نواس بسيط)
د - q (دارة LC) الشكل 1.3 أنظمة ذات ثلاث (أ) وأربعة (ب) درجات من الحرية



(أ) (ب) (ج)



(د)

الشكل 1.1

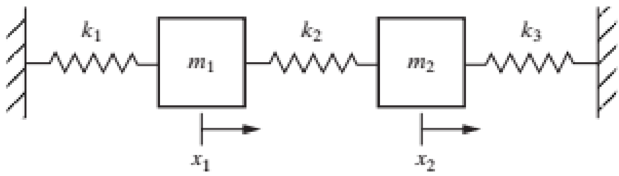
أنظمة ذات درجتين من الحرية (الشكل 2.1)

الإحداثيات المعممة:

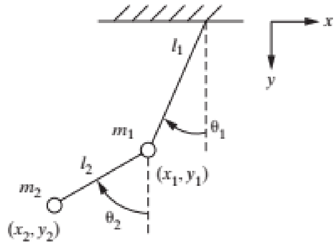
أ - x_1 و x_2

ب و ج- θ_1 و θ_2

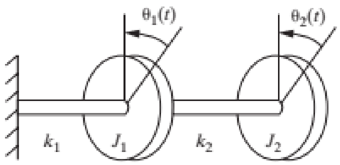
د- q_1 و q_2



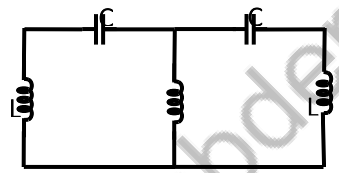
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

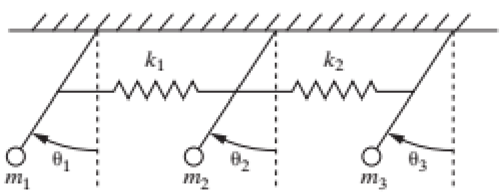
الشكل 2.1

أنظمة مهتزة ذات: (أ) ثلاث درجات من الحرية، (ب) أربع درجات من الحرية (الشكل 3.1)

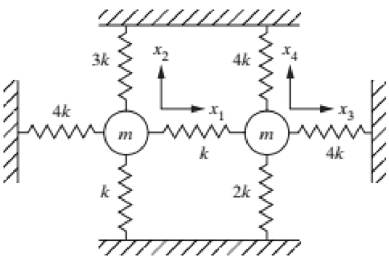
الإحداثيات المعممة:

أ - θ_1، θ_2، θ_3

ب - X_1، X_2، X_3، X_4



(أ)



(ب)

الشكل 3.1

كما سيتضح لاحقا، وجود أي اهتزاز يعني وجود قوة مرنة وقوة عطالة.

كل عنصر من المادة له كتلة وقابل للضغط لعدة درجات، إذا كل عنصر من المادة هو نموذج لهزاز لأن له كتلة ومرونة. تحت تأثير قوة F يخضع قضيب معدني طوله l ومساحة مقطعه S لاستطالة Δl، إذا كانت الاستطالة صغيرة بالنسبة لطول القضيب dl، فالعلاقة استطالة- قوة هي علاقة خطية، وتعطى بقانون هوك الذي يكون بالشكل التالي:

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (1.1)$$

حيث σ هي الضغط (القوة على وحدة المساحة) :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ε هو التشوه (الاستطالة النسبية):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

E عامل يونغ (عامل المرونة)

وحدة الضغط وعامل يونغ هو الباسكال ، أما التشوه فليس له وحدة ويحسب بالنسبة المئوية%

عامل يونغ يتعلق بمادة الجسم المدروس، ويعبر عن مقاومته للتشوه

المادة	عامل يونغ (جيغا نيوتن / م^2)
ألومنيوم	62
فولاذ	210
الإسمنت	20
البلاستيك	2
المطاط	2,2 إلى 2,7
الخشب	11 إلى 13
أنبوب الكربون النانوي	1000
فضة	78
رخام	61 إلى 90

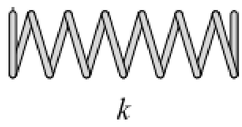
الجدول 1.1

قوى وعزوم النوابض والقضبان

النابض الخطي: قوة النابض الخطي هي قوة إرجاع ، سعتها في حالة التشوهات الصغيرة متناسبة مع الاستطالة

$$F = -kx \qquad (1.2)$$

حيث k و x هما على التوالي صلابة و استطالة النابض.

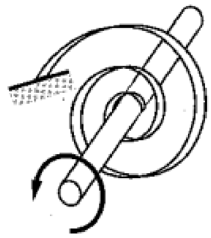


شكل 4.1 : نابض

نابض الفتل: الزوج M الناتج عن نابض الفتل هو مزدوجة إرجاع متناسبة مع الانحراف الزاوي θ:

$$M = -C\theta$$

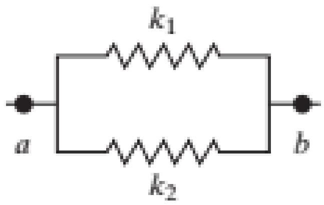
حيث: C هو ثابت الفتل



الشكل 5.1: نابض فتل

تركيب النوابض

نوابض على التوازي: يتصرف نظام نوابض متوازية مثل نابض وحيد صلابته تساوي مجموع صلابات النوابض التي تكون منها النظام.

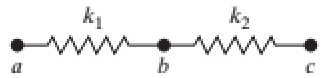


الشكل 6.1 : نابضين على التوازي

$$k = k_1 + k_2 \cdots + k_N \qquad 1.4$$

نوابض على التسلسل: يتصرف نظام نوابض على التسلسل مثل نابض وحيد مرونته (عكس صلابته) تساوي مجموع مرونات النوابض التي تكون النظام:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \qquad 1.5$$



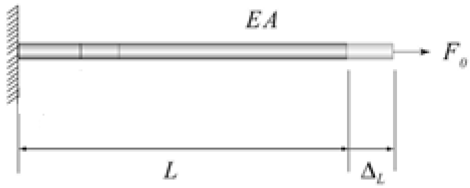
شكل 7.1 نابضين على التسلسل

قضبان مرنة

لنعتبر قضيبا مرنا منتظم الشكل طوله L ومقطعه A ، وكتلته مهملة بالنسبة للكتل المرتبطة بها. القضيب المعدني يمكن تعديله مثل نابض مرن مكافيء صلابته مرتبطة بطبيعة الضغط الذي تخضع له.

إذا كان لدينا تمدد و انقباض مثل الذي في الشكل 8.1 ، فالصلابة المكافئة تعطى بالعلاقة:

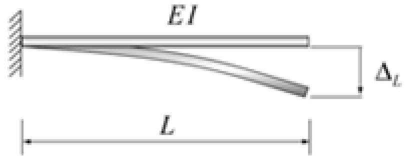
1.6 $$k = \frac{EA}{L}$$



الشكل 8.1 قضيب خاضع لسحب محوري

إذا كان القضيب ذو عزم العطالة **I** خاضعا لانحناء (الشكل 9.1) ، فصلابته المكافئة تعطى بالعلاقة التالية:

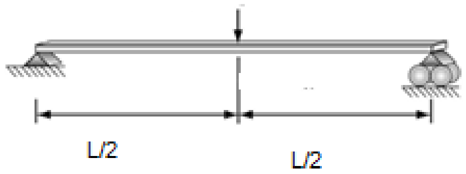
1.7 $$k = \frac{3EI}{L^3}$$



الشكل 9.1 : (a) قضيب خاضع لانحناء

بالنسبة لقضيب (عارضة) مدعمة ببساطة خاضعة لثقل نقطي عرضي في منتصفه (الشكل 1.10)، الصلابة المكافئة لهذه البنية هي:

$$k = \frac{48EI}{L^3} \tag{1.8}$$



الشكل 10.1: عارضة مدعمة حاملة لثقل عرضي

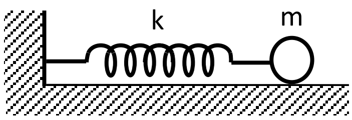
1.2 الاهتزازات الحرة غير المتخامدة:

عمليا كل الأنظمة لها القدرة على الاهتزاز ، فالذرات في الجزيئات و الأجسام الصلبة تهتز بشكل دائم. والأنظمة العيانية الصلبة أو السائلة أو الغازية لها كتلها الخاصة وصلابتها ويمكن نمذجتها كنظام كتلة – نابض حيث m تمثل عطالة النظام و النابض قوة إرجاع مرنة.

النظام كتلة – نابض:

ليكن النظام الميكانيكي للشكل 1.11 حيث m كتلة نقطية والنابض ذو الصلابة k وذو كتلة مهملة

فليكن النظام الميكانيكي في الشكل (1.11) حيث m كتلة نقطية ، والنابض صلابته k وكتلته مهملة.



الشكل 11.1 النظام كتلة – نابض

بتطبيق علاقة نيوتن، نحصل على:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{\gamma} \tag{1.9}$$

حيث P ، F و R هم على التوالي الوزن وقوة إرجاع النابض و رد فعل الأرض، وعند إسقاط المعادلة على المحور OX، نحصل على: $-kx = m\ddot{x}$

وتكتب المعادلة التفاضلية حينئذ على الشكل:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.10}$$

وهي معادلة من الشكل

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 \quad (1.11)$$

حيث:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.12)$$

و

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

معادلة الحركة:

حركة نابض حر غير متخامد تحكمه المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{s}+\omega_0^2 s=0 \quad (1.13)$$

حيث s تمثل الإحداثية المعممة، وتقبل الحل التالي:

$$s(t)=a\cos(\omega_0 t+\phi) \quad (1.14)$$

خواص الحركة:

a: هي السعة وتمثل الاستطالة القصوى للجسم أثناء الحركة

T_0: هو دور الحركة ويمثل مدة اهتزاز واحد

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.15)$$

ω_0 هو نبض الحركة أو السرعة الزاوية

و $\omega_0 t+\phi$: هو طور الحركة

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \quad (1.16)$$

$$f_0=\frac{1}{T_0} \quad (1.17)$$

f_0 هو تواتر الاهتزازات، وهو عدد الاهتزازات في الثانية.

ϕ: هو الطور الابتدائي للحركة

قيم السعة والطور الابتدائي يتم تحديدها من الشروط الابتدائية للحركة.

إذا مثلنا الموقع والسرعة الابتدائية على التوالي بالقيم:

$v(0)=v_0$ و $s(0)=s_0$

وعوضناها في المعادلة 10.1، نحصل على :

$$a\cos(\phi) = s_0$$ 1.18

و

$$a\sin(\phi) = -\frac{v_0}{\omega_0}$$ 1.19

عندما نحسب $(1.14)^2 + (1.15)^2$ و $(1.15)/(1.14)$، نستنتج السعة والطور الابتدائي:

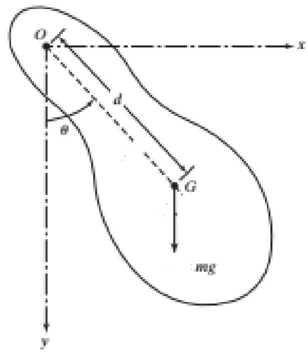
$$a = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$ 1.20

$$\phi = -arctg\left(\frac{v_0}{s_0\omega_0}\right)$$

3.1 نماذج بسيطة للهزازات

أ) النواس ذو الطول L و عزم العطالة J:

ليكن النواس في الشكل (1.12)



الشكل 12.1 : نواس

بما أن مجموع عزوم القوى الخارجية تساوي جداء عزم العطالة في التسارع الزاوي

$$-mgd\sin(\theta) = J_o\ddot{\theta} \qquad 1.21$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_o}\sin(\theta) = 0 \qquad 1.22$$

في حالة اهتزازات صغيرة $\sin(\theta)=\theta$ ، نحصل على معادلة تفاضلية من نوع المعادلة (1.9):

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_o}\theta = 0 \qquad 1.23$$

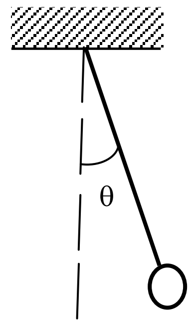
الحركة توافقية دورها T_0 :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad 1.24$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} \qquad 1.25$$

في حالة نواس بسيط: $J=md^2$ ، يساوي الدور حينئذ:

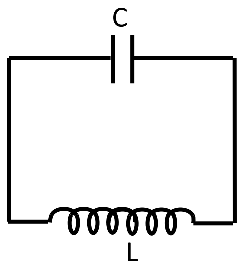
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \qquad 1.26$$



الشكل 13.1 نواس بسيط

ب) الدارة LC:

لتكن الدارة الكهربائية المكونة من وشيعة ذات تحريض ذاتي L ومقاومة مهملة ومكثفة ذات سعة C تحمل شحنة ابتدائية q_0 . نريد حساب تغير التوتر بين قطبي المكثفة.



الشكل 14.1: دارة LC

بتطبيق قانون كيرشوف:

$$v_L + v_C = 0 \tag{1.27}$$

التوتر بين قطبي الوشيعة هو:

$$v_L = L\frac{di}{dt} \tag{1.28}$$

والتوتر بين قطبي المكثفة:

$$v_C = \frac{q}{C} \tag{1.29}$$

المعادلة (1.27) تصبح:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \tag{1.30}$$

علما بأن:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

و $q = Cv_c$

إذا:

$$\ddot{v}_c + \frac{1}{LC}v_c = 0 \tag{1.31}$$

هذه المعادلة تقبل الحل التالي:

$$v_c = V_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.32}$$

1.33 والنبض يساوي: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

والدور يساوي: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ج) النظام كتلة- نابض ذات كتلة خطية μ:

لنأخذ نظام الشكل (11.1)، حيث يكون النابض متجانسا وكتلته m وطوله l . كتلته الخطية تساوي:

$$\mu = \frac{m}{l}$$

العنصر ds من الإحداثية s كتلته $dm = \mu ds$

واستطالته $\frac{s}{l}x$

وطاقته الحركية إذا هي:

1.34
$$dE_{cm} = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}\mu ds\left(\frac{s}{l}\dot{x}\right)^2$$

$$dE_{cm} = \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}^2 s^2 ds$$

الطاقة الحركية الكلية هي:

1.35
$$E_{cm} = \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}^2\int_0^l s^2 ds = \frac{1}{6}m\dot{x}^2$$

الطاقة الكلية هي مجموع الطاقة الحركية للنابض والطاقة الكامنة له والطاقة الحركية للكتلة:

$$E = E_{cm} + E_p + E_{cM}$$

لدينا إذا:

1.36
$$E = \frac{1}{6}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

1.37
$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{3}m\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

بما أن الطاقة هي ثابت للحركة: $\frac{dE}{dt}=0$

فإن:

1.38 $$\left(M+\frac{1}{3}m\right)\ddot{x}+kx=0$$

نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

1.39 $$\ddot{x}+\frac{k}{\left(M+\frac{1}{3}m\right)}x=0$$

وحينذلك، النبض يساوي:

1.40 $$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{\left(M+\frac{1}{3}m\right)}}$$

لأخذ كتلة النابض بالاعتبار رأخذ نظاما حيث نعوض الكتلة M بالكتلة M' : $M'=M+\frac{1}{3}m$

حيث m هي كتلة النابض.

1.4 ميزان الطاقة:

الطاقة الكلية E لهزاز حر غير متخامد هي ثابت للحركة، وهي مجموع طاقته الحركية E_c وطاقته الكامنة E_p. وحسب نموذج الهزاز: نابض- كتلة ، لدينا صيغة الطاقة الحركية:

1.41 $$E_c=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

وصيغة الطاقة الكامنة:

1.42 $$E_p=\frac{1}{2}kx^2$$

علما بأن: $x(t)=a\cos(\omega_0 t+\phi)$ و $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

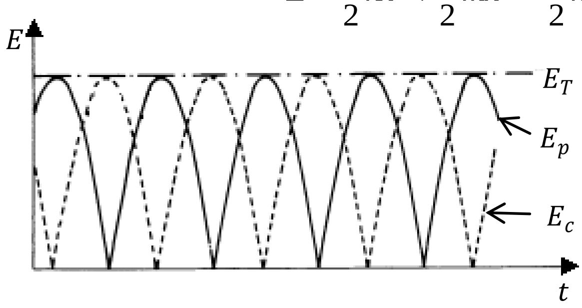
وبالتعويض في المعادلات السابقة ، نحصل على العبارات الزمنية للطاقة الحركية والطاقة الكامنة.

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \qquad 1.43$$

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \qquad 1.44$$

الطاقة الكلية E:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} ka^2 \qquad 1.45$$



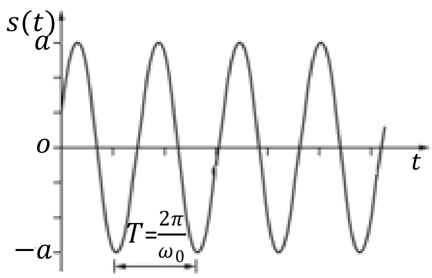
الشكل 15.1: الطاقة الحركية E_c ممثلة بالخط المتقطع والطاقة الكامنة E_p ممثلة بالخط المتصل

منحنيات E_C و E_p هي في حالة تربيع، على سبيل المثال ، إذا كان في الشروط الابتدائية $\phi = 0$ (حيث السرعة الابتدائية منعدمة والاستطالة قصوى)، حينئذ تكون الطاقة الكامنة قصوى والطاقة الحركية منعدمة، الانتقال يتم إذا من الطاقة الكامنة إلى الطاقة الحركية بحيث عند نقطة التوازن تصبح الطاقة الكامنة منعدمة والطاقة الحركية قصوى، وانطلاقا من هذه النقطة، تنقص الطاقة الحركية وتزيد الطاقة الكامنة.

1.5 تمثيل الحركة التوافقية البسيطة:

1.1.5التمثيل البياني

يتم تمثيل المعادلة الزمنية $s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$ بيانيا في نظام محاور (Ot,Ox)



الشكل 16.1 : التمثيل البياني للمتغير s

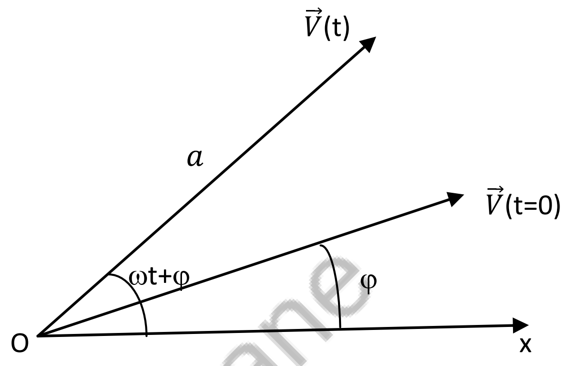
2.1.5. التمثيل الشعاعي:

الاهتزاز التوافقي يتم تمثيله بشعاع $\vec{V}$ طويلته تساوي سعة الاهتزاز وجهته بالنسبة لمحور مرجعي: طور الاهتزاز

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \to \vec{V}: \quad \|\vec{V}\| = a, \ \langle \vec{V}, Ox \rangle = \omega_0 t + \varphi$$

تمثيل فرينيل حالة خاصة للتمثيل الشعاعي حيث الزاوية بالنسبة لمحور مرجعي يساوي الطور الابتدائي للاهتزاز:

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \to \vec{V}: \quad \|\vec{V}\| = a, \ \langle \vec{V}, Ox \rangle = \varphi$$



الشكل 17.1: التمثيل الشعاعي للمتغير وتمثيل فرينل ($\vec{V}(t=0)$)

3.1.5 التمثيل بالأعداد المركبة:

هذا التمثيل هو الأكثر استعمالا،و ذلك لسهولة استعمال الأعداد المركبة بالنسبة للدوال المثلثية. في هذه الحالة، الدالة :

$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$ يتم تمثيلها بعدد مركب طويلته ρ تساوي السعة a وعمدته θ تساوي طور s .

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \to \bar{s}(t) = ae^{i(\omega t + \varphi)} \qquad 1.46$$

التمثيل السابق يأخذ الشكل التالي:

$$\bar{s}(t) = \bar{a}e^{i\omega t}$$

حيث : $\bar{a} = ae^{i\phi}$ 1.47

و $\bar{a}$ هي السعة المركبة.

4.1.5 مخطط الطور:

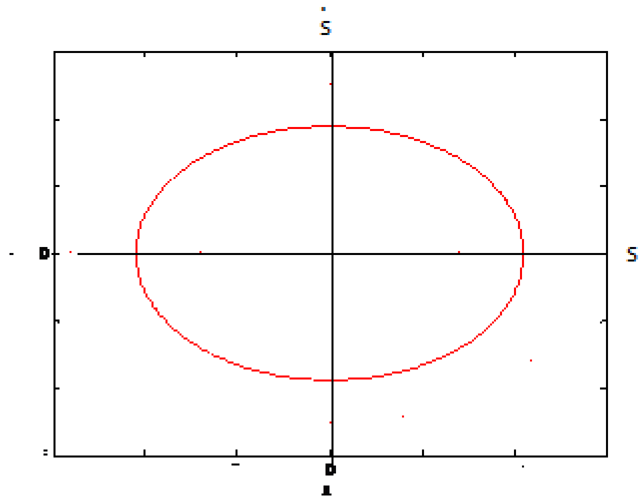
مستوى الطور هو المستوى (O,s,ṡ) حيث الفاصلة هي الإحداثية المعممة s والترتيب هو السرعة المعممة ṡ

$$s(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{s} = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{s}}{\omega_0 a}\right)^2 = 1 \qquad 1.48$$

في مستوى الطور، الدالة التوافقية البسيطة s يتم تمثيلها بقطع ناقص محاوره الرئيسية OX و OY أطوالها على التوالي a و $\omega_0 a$.



الشكل 18.1 : مخطط الطور

6.1 تطابق الحركات التوافقية:

1.6.1 الحركات التي لها نفس الاتجاه ونفس النبض:

لتكن حركتان لهما نفس الاتجاه OX ونفس النبض

$$x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \quad \text{و} \quad x_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right)$$

نبحث عن الحاصلة x(t) لتطابق هذين الاهتزازين :

$$x = x_1 + x_2$$

وبعد النشر نحصل على:

$$x_1 = A_1 \cos\varphi_1 \cos\omega t - A_1 \sin\varphi_1 \sin\omega t \qquad 1.49$$

$$x_2 = A_2 \cos\varphi_2 \cos\omega t - A_1 \sin\varphi_2 \sin\omega t \qquad 1.50$$

ومنه:

$$x_1 + x_2 = \left(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right)\cos\omega t - \left(A_1 \sin\varphi_1 + A_1 \sin\varphi_2\right)\sin\omega t \tag{1.51}$$

علما بأن :

$$A\cos\left(\omega t+\varphi\right) = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t \tag{1.52}$$

و بالمقارنة مع (1.51)، نحصل على:

$$A \cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 \tag{1.53}$$

$$A \sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 \tag{1.54}$$

وتربيع العبارتين السابقتين، وأخذ مجموعهما $(1.53)^2 + (1.54)^2$، نحصل على:

$$A^2 = \left(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right)^2 + \left(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2\right)^2 \tag{1.55}$$

سعة وطور الاهتزاز الحاصل هي :

$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} - 2A_1 A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)} \tag{1.56}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}, \quad \varphi = arctg\left(\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}\right) \tag{1.57}$$

نستنتج أن تراكب اهتزازين لهما نفس الاتجاه ولهما نبضين متساووين يعطي اهتزازا جيبيا: $x = A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$

حيث سعته A وطوره ϕ تعطى بالعلاقتين 56.1 و 57.1

2.6.1 الحركات التي لها نفس الاتجاه ولها نبض متقارب:

لتكن حركتين توافقيتين لهما نفس الاتجاه ولها نبض متقارب:

$$\omega_2 \approx \omega_1$$

$$x_2 = A\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right) \quad و \quad x_1 = A\cos\omega_1 t$$

تتطابق الاهتزازين $x = x_1 + x_2$ ، علما بأن:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{1.58}$$

يعطي:

1.59
$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

نعرف على التوالي الفرق بين النبضين والنبض المتوسط بالعبارتين:

1.60
$$\omega_2-\omega_1=\delta\omega \quad \text{و} \quad \omega_m=\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$$

معادلة حاصل الحركتين هي إذا:

1.61
$$x = 2A\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega_m t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

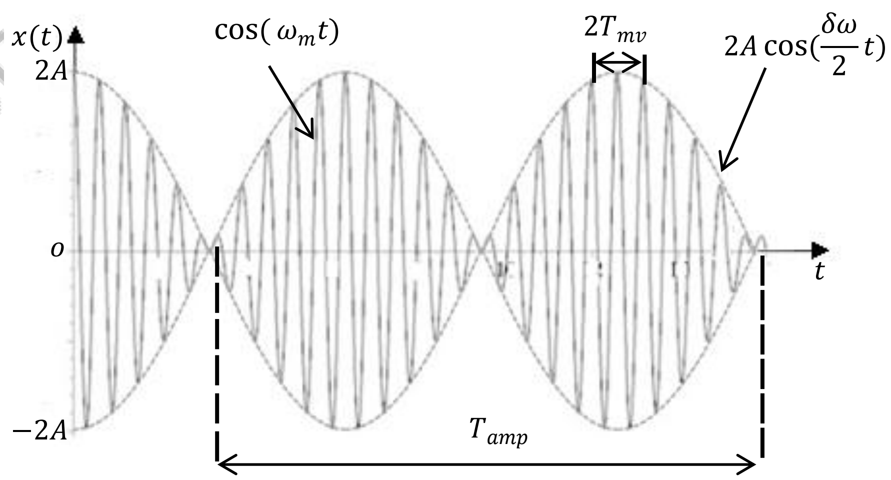
بما أن النبضين متقاربين، وأن: $\omega_m \gg \delta\omega$ ، فالحركة الحاصلة هي حركة جيبية ذات سعة تتغير جيبيا.

1.62
$$x = C(t)\cos\left(\omega_m t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

حيث:

1.63
$$C(t) = 2A\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t+\frac{\varphi}{2}\right)$$

الحركة الحاصلة تم تمثيلها في الشكل 1.19



الشكل 19.1 أ: تطابق حركتين توافقيتين لهما نفس السعة ولهما نبضين متقاربين

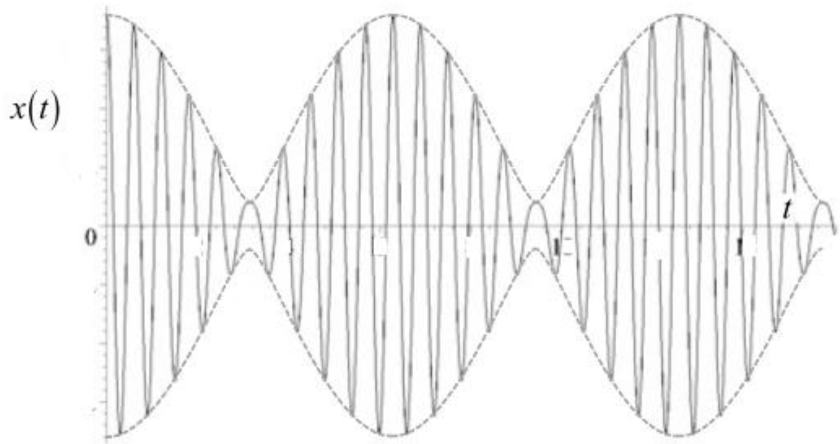
نحصل على ما يسمى حركة ذات خفقات. دور الحركة هو: $T_m=\frac{2\pi}{\omega_m}=\frac{4\pi}{\omega_2+\omega_1}$

ودور الخفقات T_b هو نصف الدور T_{amp} للسعة C(t):

$$T_{amp} = \frac{2\pi}{\delta\omega/2} = \frac{4\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}, \quad \omega_{amp} = \frac{2\pi}{T_{amp}} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}$$

$$T_b = \frac{T_{amp}}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}, \quad \omega_b = \frac{2\pi}{T_b} = |\omega_2 - \omega_1|$$

وفي حالة ما إذا كانت سعتي الحركتين الأصليتين مختلفتين، نحصل على تغير x(t) الممثلة في الشكل 1.14ب :



الشكل 19.1 ب: تتطابق حركتين توفقيتين ذات نبضين متقاربين وسعتين مختلفتين

3.6.1 الحركات التوافقية ذات الاتجاهات المتعامدة:

نحاول إيجاد المحصلة لحركتين توافقيتين ذوات اتجاهين متعامدتين : x(t) و y(t)

$$x = A_1 \cos \omega_1 t$$

و $$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

الحركات التي لها نفس النبض : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

$$\cos^2 \omega t = \left(\frac{x}{A_1}\right)^2$$

و بما أن: $\cos^2 \omega t = 1 - \sin^2 \omega t$ ، فإن:

$$\sin^2 \omega t = 1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2$$

وبنشر y ، نحصل على:

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\varphi)\cos(\omega t) - \sin(\varphi)\sin(\omega t)$$

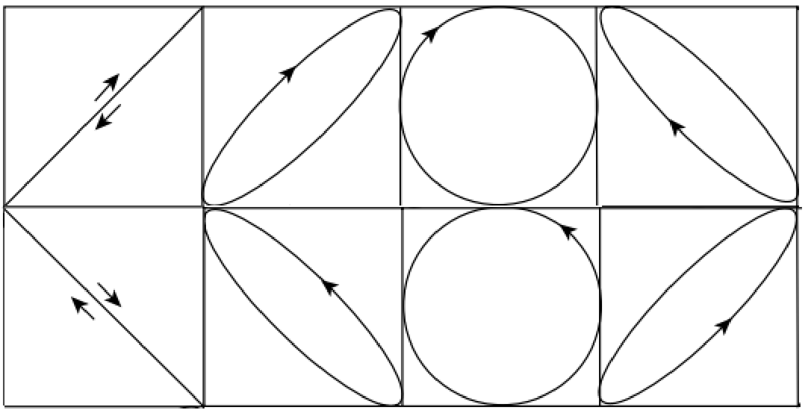
$$\left(\frac{y}{A_2} - \cos(\varphi)\frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2(\varphi)\sin^2(\omega t)$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \cos(\varphi)\frac{x}{A_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \sin^2(\varphi)$$

1.64 $$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \sin^2(\varphi)$$

المعادلة (64.1) هي معادلة قطع ناقص، ذات محاور رئيسيه مائلة على المعلم Oxy

φ 0 π/4 π/2 3π/4



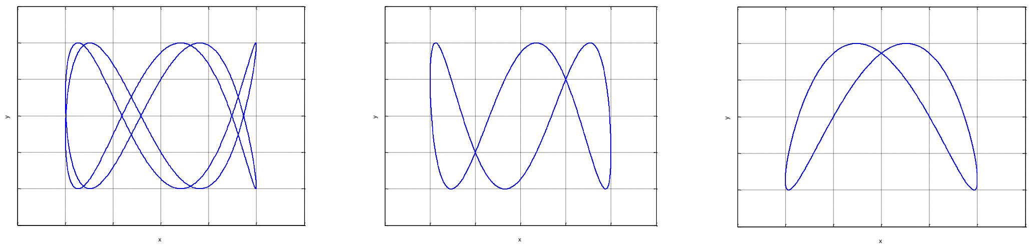
φ: π 5π/4 3π/2 7π/4

الشكل 20.1

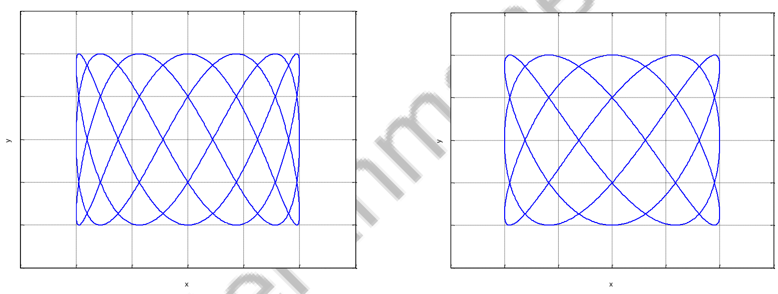
الحركات المختلفة النبض:

نلاحظ حالتين: إذا كانت النبضات قابلة للقياس، أي أن نسبتها تساوي نسبة عددين كاملين $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n}{m}$ حيث $n,m \in \mathcal{N}$

المسار مغلق والمنحنيات الناتجة تسمى أشكال ليساجو ، الرسومات الظاهرة في الشكل 20.1، كل واحدة بنسبة معينة $\frac{n}{m}$



5/2 3 2

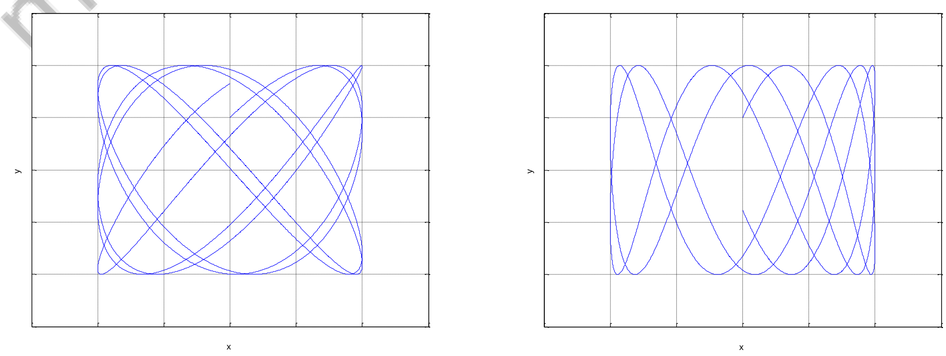


7/3 5/3

الشكل 21.1: أشكال ليساجو بنسب معينة مختلفة n/m و $\varphi=\frac{\pi}{3}$

أمثلة لأشكال ليساجو ناتجة عن نسب النبضات. 2, 3, 5/2, 5/3 et 7/3.

الحالة الثانية: عندما تكون النبضات غير قابلة للقياس، فالمسار يكون مفتوحا.



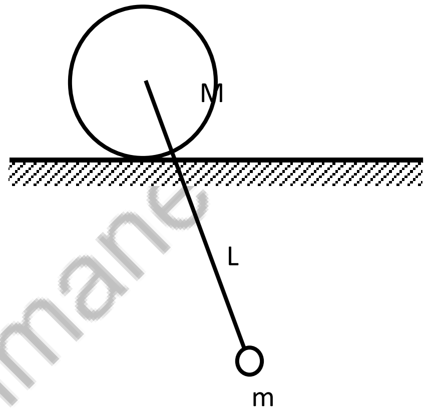
$\sqrt{2}$ π

الشكل 22.1: أشكال ليساجو لنبضات بنسب $\sqrt{2}$ ، π

1.7 تمارين محلولة:

التمرين الأول:

نربط قضيبا صلبا كتلته مهملة وطوله L بإحكام في أسطوانة كتلتها M ونصف قطرها R ، ونعلق في طرفه السفلي كتلة نقطية m ، ونحاول دراسة الحركة ضعيفة السعة لهذا النظام.



الشكل 1

الحل:

المحور اللحظي للدوران هو النقطة C ، نقطة تماس الاسطوانة مع الأرض، حيث السرعة اللحظية منعدمة، لدينا إذا:

$$\sum M_C = J_C\ddot{\theta} \qquad \text{حيث} \qquad M_C = -mgl\sin\theta$$

J_c هو عزم عطالة الأسطوانة والكتلة m بالنسبة للنقطة C، وهو - حسب نظرية هوغنز- عزم القرص بالنسبة للنقطة O: $\frac{1}{2}MR^2$

زائد كتلة القرص جداء مربع المسافة بين C و O إضافة إلى عزم عطالة الكتلة m بالنسبة للنقطة C :

$$mCA^2$$

$$J_C = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right) + mCA^2$$

لدينا: $\vec{CA} = \vec{CO} + \vec{OA}$

إذا $CA^2 = R^2 + l^2 + 2Rl\cos\theta$

عزم القوى الخارجية يختزل في عزم إرجاع الثقل P: $M_C = -mgl\sin\theta$

وبما أن الاهتزازات صغيرة: $\sin\theta \simeq \theta$ و $\cos\theta \simeq 1$

ومنه $CA^2 = R^2 + l^2 - 2Rl$

إذا $CA^2 = (l-R)^2$ و $M_C = -mgl\theta$

$$-mgl\theta = \left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)}\theta = 0$$

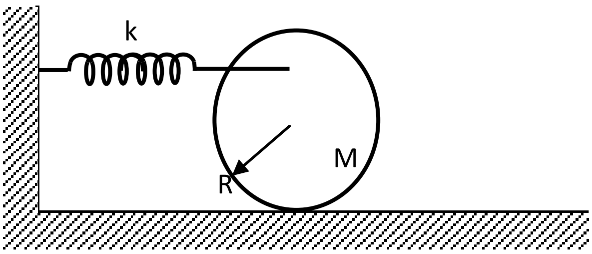
المعادلة التفاضلية هي: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

إذا لدينا حركة توافقية دورها:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)}{mgl}}$$

التمرين 2:

ليكن النظام الميكانيكي للشكل 2 ، حيث الاسطوانة ذات الكتلة M المرتبطة بنابض صلابته K وكتلته مهملة، تمشي بدون انزلاق ، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة الأسطوانة، واستنتاج الحل.



الشكل: 2

الحل:

عبارة الطاقة الحركية مكونة من طرفين: الطرف الأول يمثل انتقال مركز الكتلة ، والطرف الثاني يمثل الدوران حول مركز الكتلة.

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2$$

وبما أن الحركة تتم دون انزلاق، إذا: $x = R\theta$ ، ومنه : $v = R\dot{\theta}$

عزم عطالة الاسطوانة المتجانسة هو : $J_o = \frac{1}{2}MR^2$

مما يعني أن:

$$E_c = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

و بالنسبة للاهتزازات صغيرة: $E_p = \frac{1}{2}k\left(R+a\right)^2\theta^2$

اللاغرانجي هو : $L = E_c - E_p$

إذا: $L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(R+a\right)^2\theta^2$

وبتطبيق معادلة لاغرانج: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

نستنتج معادلة الحركة:

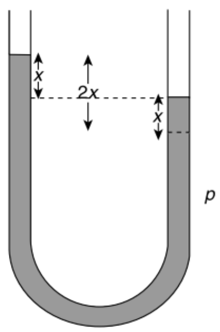
$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + k\left(R+a\right)^2\theta = 0$$

ومنه: $\ddot{\theta} + \frac{2k\left(R+a\right)^2}{3MR^2}\theta = 0$

ولدينا اهتزازات توافقية دورها: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3MR^2}{2k\left(R+a\right)^2}}$

التمرين 3:

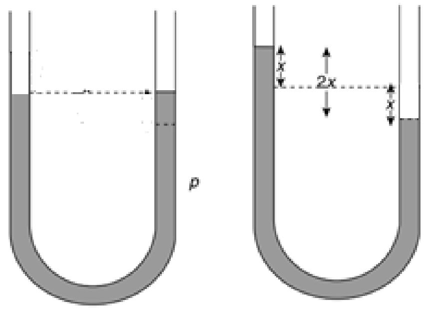
ليكن مقياس ضغط السوائل الممثل في الشكل (25.1)، عمود السائل طوله L وكثافته ρ يهتز في أنبوب على شكل U ومقطعه S. المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الصغيرة للعمود.



الشكل 3

الحل:

إذا تمت إزاحة السائل عن موضع التوازن، يخضع العمود لقوة إرجاع بسبب الكتلة الزائدة الناتجة عن فرق مستوى السائل بين فرعي الأنبوب.



وبتطبيق قانون نيوتن: $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

حيث F هي قوة إرجاع الوزن الناتج عن الكتلة ′m ،

$$F_x = -m'g$$

حيث قوة الإرجاع و كتلة العمود هما على التوالي:

$$m = lA\rho \quad \text{و} \quad F = -2Axg\,\rho$$

وعند تطبيق قانون نيوتن، نحصل على :

$$-2Axg\,\rho = lA\rho\ddot{x}$$

وبما أن : $m' = 2xS\,\rho$ ، فالكتلة الكلية للعمود هي: $m = lS\,\rho$

وبالتعويض في قانون نيوتن: $-2xS\,\rho g = lS\,\rho\ddot{x}$

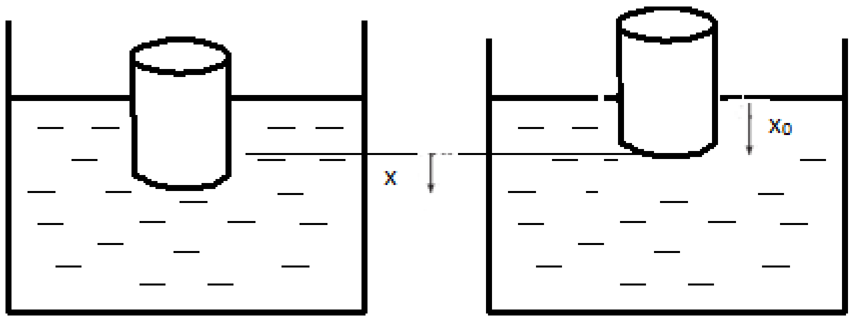
ومعادلة الحركة هي: $-2xS\,\rho g = lS\,\rho\ddot{x}$

ونبضها يساوي: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$

ودور الاهتزازات هو: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$

التمرين 4

أنبوب من الخشب الثقيل مقطعه A و كتلته الحجمية ρ ، مغمور نصفيا في حمام مائي كتلته الحجمية ρ_0، مثل ما هو ممثل في الشكل 4، يتم دفع الأنبوب نحو الأسفل ثم إطلاقه، المطلوب إيجاد التواتر الطبيعي للإهتزاز.



الشكل 4

عند التوازن، لدينا: $P- F_a= 0$

حيث Fa هي قوة أرخميدس: $F_a = Ax_0\rho g$

$$mg - Ax_0\rho_0 g = 0$$

$$m = Ah\rho$$

$$Ah\rho g - Ax_0\rho_0 g = 0$$

$$x_0 = \frac{\rho}{\rho_0}h$$

وبتطبيق قانون نيوتن،نحصل على المعادلة:

$$mg - A\left(x_0 + x\right)\rho_0 g = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{A\rho_0 g}{m}x = 0$$

وبالتعويض m بقيمتها، نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0 g}{\rho h}x = 0$$

والنبض يساوي:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}$$

التمرين 5

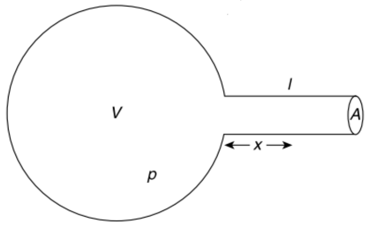
لتكن قارورة كروية حجمها V، والجزء الأنبوبي مقطعا A وطولها L

القارورة تحتوي على غاز كثافته ρ و عامل القابلية للانضغاط لديه κ، و p الفارق في الضغط بين داخل وخارج القارورة.

الحل:

نفترض أن حجم الأنبوب أقل بكثير من حجم القارورة ، أي أن: $lA \ll V$

المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الناتجة عن تغير الضغط p



الشكل 5

الحل:

كتلة الغاز $m = lA\rho$ التي يحتويها الأنبوب تخضع لضغط P ولقوة إرجاع طويلتها pA ، وبتطبيق قانون نيوتن، نحصل على:

$$lA\rho\ddot{x} = -Ap$$

يعرف عامل القابلية للانضغاط على أنه النقصان النسبي للحجم على وحدة الضغط:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}$$

$$\kappa = -\frac{\Delta V}{V}\frac{1}{p}$$

الانتقال x للمكبس في الأنبوب تولد تغير في الحجم : ΔV=Ax ، إذا:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{Ax}{v}$$

$$\kappa = \frac{1}{p}\frac{Ax}{v}$$

$$lA\rho\ddot{x} = -A\frac{1}{\kappa}\frac{Ax}{v}$$

$$\ddot{x} + \frac{A}{l\rho\kappa v}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{l\rho\kappa v}}$$

8.1 الاهتزازات الحرة المتخامدة:

أساسا، تتناقص الاهتزازات مع الزمن. هذا التخامد سببه أن الهزاز العياني مرتبط دائما بمحيطه ولو يسيرا، مما يجعل الطاقة الابتدائية للاهتزازات تتلاشى تدريجيا.

في كل نظام ، يوجد تبديد للطاقة بسبب الاحتكاكات أو بسبب مفعول جول (المقاومة تحول الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية)، أو أي آلية لتبادل الطاقة.

في الأنظمة الميكانيكية، ضياع الطاقة يكون غالبا بسبب قوى الاحتكاك، هناك نوعان من الاحتكاك:

الاحتكاك الصلب حيث تكون القوة ثابتة ومعاكسة لجهة الحركة :

$$\vec{F}_\alpha = -k\vec{u}_v \qquad 1.65$$

حيث $\vec{u}_v$ هو شعاع الوحدة لشعاع السرعة $\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

الاحتكاك اللزج سببه مقاومة السائل لحركة الجسم، إذا كان هذا الأخير يتحرك ببطء كاف لمنع تدفق الهواء المحيط به

بأخذ شكل تدومي

قوة الاحتكاك تكتب بالشكل التالي:

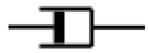
$$F_\alpha = -\alpha_1 v - \alpha_2 v^2 \qquad 1.66$$

حيث α_1 و α_2 ثابتين، والإشارة ، والإشارة ناقص تدل على أن القوة عكس اتجاه السرعة

إذا كان v صغير جدا بالنسبة للكسر $\alpha 1/\alpha 2$

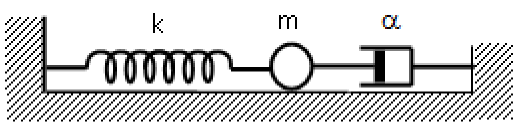
$$F_\alpha = -\alpha_1 v \qquad 1.67$$

في الأنظمة الميكانيكية، يتم تمثيل القوة F_α بجهاز تخامد عامل تخامده α



مثال نظام كتلة - نابض متخامد:

نأخذ نظام كتلة - نابض وندخل فيه إحتكاك على شكل جهاز تخامد ثابته α (الشكل 1.23)، نبحث عن معادلات الحركة.



الشكل 23.1

معادلة لاغرانج لنظام ذو درجة واحدة من الحرية (ملحق 2) هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=0 \qquad 1.68$$

حيث L هو لاغرانجي النظام المعرف بالعلاقة:

$$L=E_c-E_p \qquad 1.69$$

حيث E_c هي الطاقة الحركية للنظام و Ep طاقته الكامنة.

D هي دالة التبديد:

$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \qquad 1.70$$

حيث اللاغرنجي ودالة التبديد، لهما على التوالي العبارتين:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2 \qquad 1.71$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\,,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}\,,\frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

و $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=\alpha\dot{x}$

المعادلة 1.71 تكتب إذا:

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$$

وبالتقسيم على m، يصبح لدينا:

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \qquad 1.72$$

نحصل حينها على المعادلة بالشكل التالي:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0 \qquad 1.73$$

حيث: $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$

و $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

1.8.1 معادلة الحركة:

حركة الهزاز الحر المتخامد تحكمه المعادلة التالية:

$$\ddot{s} + 2\lambda\dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{1.74}$$

عندما نبحث على حل من الشكل: e^{pt}

نحصل على المعادلة الكيفية التالية: $p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2 = 0$ (1.75)

الحلول تتوقف على القيم النسبية لكل من ω و λ

عندنا ثلاث حالات:

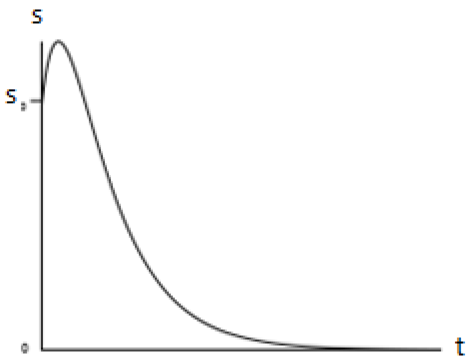
الحالة الأولى: $\lambda > \omega_0$

وهي حالة توافق احتكاكا كبيرا:

$$p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \tag{1.76}$$

$$s(t) = A_1 e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \tag{1.77}$$

التخامد قوي، مما يعني أن النظام يتجه نحو وضعية توازن بدون اهتزازات، في هذه الحالة الحركة لا دورية

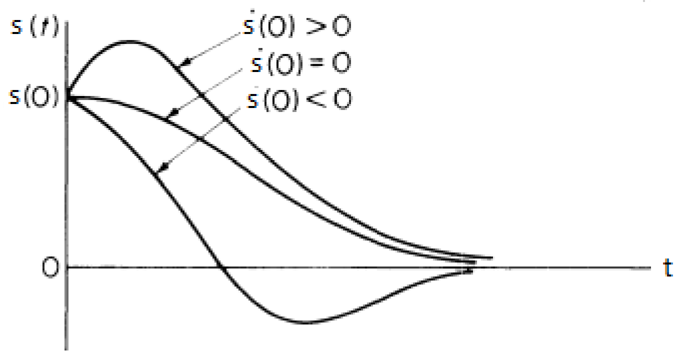


الشكل 24.1: نظام لا دوري

الحالة الثانية: $\lambda = \omega_0$

$$s(t) = \left(A_1 + A_2 t\right) e^{-\lambda t}$$ 1.78

الجملة هنا في نظام حرج. والحركة تتناقص أسيا والعودة إلى حالة التوازن تحدث بسرعة بالمقارنة مع الحركة اللادورية.



الشكل 25.1: نظام حرج لقيم مختلفة من السرعة الابتدائية

الحالة الثالثة: $\lambda<\omega_0$

هذه الحالة توافق تخامدا ضعيفا. الحل هنا جيبي مع تناقص أسي للسعة.

$$s(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t + \phi)$$ 1.79

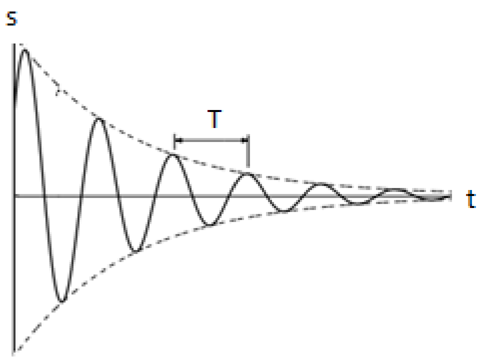
$$s(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi)$$ 1.80

حيث يسمى ω نبض وهمي

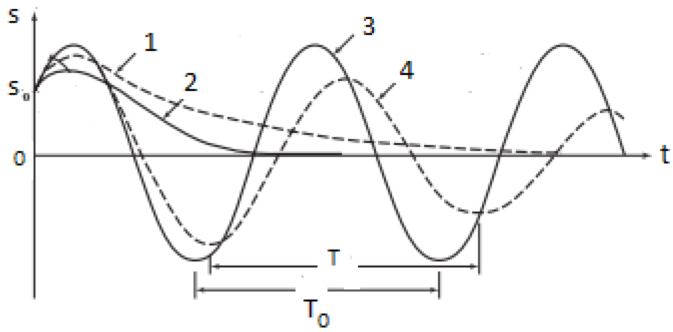
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$ 1.81

الحركة ليست دورية رياضيا، بل دورية وهما ، وخلافا للحالات السابقة، نحصل على اهتزازات ذات دور وهمي:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$ 1.82

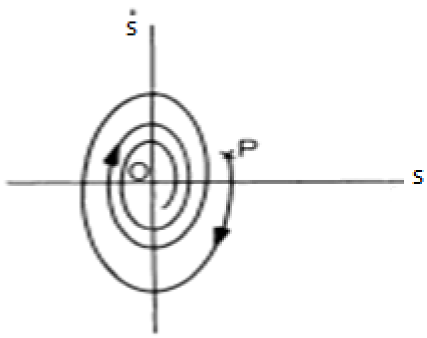


الشكل 26.1: نظام دوري وهما



الشكل 27.1: الحالات الثلاث والحالة غير المتخامدة (3)

في رسم مستوى الطور، المكان الذي يصف التصرف الاهتزازي لهذا النظام هو عبارة عن دوامة ممثلة في الشكل28.1، حيث في الرسم البياني هي الحالة الابتدائية للنظام والدوامة مرسومة بخط قطري تدور في اتجاه عقارب الساعة.



الشكل 28.1

2.8.1 مقادير تميز الحركة المتخامدة:

أ) عامل النوعية Q:

في أغلب الحالات ، درجة التخامد ، عوض أن يكون معرفا بالرمز α، يتم تعريفه عموما بالرمز Q، الذي عبارته:

$$Q=\frac{\omega_0}{2\lambda} \qquad 1.83$$

نظام شبه دوري: Q>1/2

نظام حرج: Q=1/2

نظام غير دوري: Q<1/2

Q ليس له بعد، إذ هو النسبة بين معدل الاهتزازات ومعدل فقدان الطاقة لكل دورة. الجملة ذات التخامد الضعيف، لديه قيمة λ، وبذلك Q يكون مرتفعا.

بالنسبة لتطبيقات عديدة، يفضل أن يكون Q مرتفعا، لأننا نتمنى أن تدوم الاهتزازات وقتا أطول. كذلك ، Q مرتفع يعني أن تناقص الاهتزازات يتم ببطء، بحيث يكون شكل الموجة الحقيقية قريبلمن منحنى جيبي مثالي .
في حالة اهتزازات بلورة كوارتز التي تحدد وقت الساعة ، Q يساوي تقريبا 100 . لكن في تطبيقات أخرى ، يفضل أن سكون Q ضعيفا ، مثلا عندما يكون تعليق السيارة في حالة اهتزاز، يفضل الركاب أن تتوقف عن الاهتزاز. تعليق السيارة يملك Q يساوي حوالي 1. عند تعديل دارات الراديو، القيمة Q هي قياس للانتقائية، إذ كلما كان Q مرتفعا، كلما كانت الإشارة واضحة.
في دارات الراديو الكلاسيكية، قيم Q تساوي حوالي بضعة مئات.

ب) النقصان اللوغاريتمي δ:

النقصان اللوغاريتمي يمثل القياس على السلم اللوغاريتمي لتناقص السعة خلال دور واحد، ويعرف على أنه النسبة بين سعتين متتاليتين:

$$\delta=\ln\left(\frac{Amp(t)}{Amp(t+T)}\right) \qquad 1.84$$

بتعويض السعة بقيمتها عند اللحظة t و t+T ، نحصل على:

$$\delta=\ln\left(\frac{Ce^{-\lambda t}}{Ce^{-\lambda(t+T)}}\right)=\lambda T \qquad 1.85$$

القياس التجريبي للنقصان اللوغاريتمي وللنبض الوهمي يسمح بتعيين معامل تخامد النظام. القياس، لمزيد من الدقة، هو عموما محسوب على n- دورة وهمية، لدينا إذا: $\delta=n\lambda T$، ونستنتج أن: $\lambda=\frac{\delta}{nT}$

ج) ثابت الزمن τ

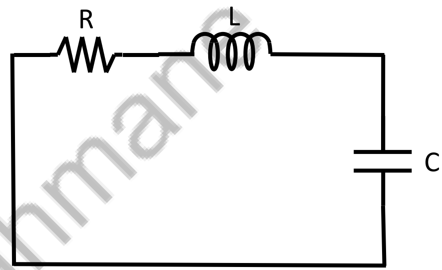
يعرف ثابت الزمن على أنه الزمن اللازم للحصول على تناقص للسعة قدره 1/e

$$\frac{Ce^{-\lambda(t+\tau)}}{Ce^{-\lambda t}}=\frac{1}{e} \qquad 1.86$$

وبالتبسيط ، نحصل على عبارة ثابت الزمن:

1.87 $$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

الدارة **RLC**



لتكن الدارة RLC مع سعة لها شحنة ابتدائية q_0، المطلوب إيجاد تغير الشحنة في قطبي السعة بدلالة الزمن

لدينا:

مجموع التوترات في الخلية يساوي صفر :

1.88 $$v_R + v_L + v_c = 0$$

1.89 $$Ri + L\frac{di}{dt} + v_c = 0$$

$$q = Cv_c, i = C\dot{v}_c$$

1.90 $$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

1.91 $$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

حيث $\lambda = \frac{R}{2L}$ و $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

تماثلات ميكانيكية - كهربائية

المعادلة 90.1 تشبه في شكلها معادلة النظام نابض - كتلة ، فقط لدينا الشحنة q بدل الانتقال x، والوشيعة بدل كتلة، والمقاومة جهاز التخامد، والسعة بدل الصلابة. ويمكننا عمل مماثلة بين النظم المهتزة الكهربائية والميكانيكية وتوسيع هذه المماثلة ، زيادة على المركبات، إلى الطاقات وكذلك القوانين الفيزيائية التي تحكم تغيراتها.
الجدول 2.1 يلخص جزءا من هذه المماثلات.

نظام ميكانيكي	نظام كهربائي
كتلة m	وشيعة L
نابضk	مكثفة (1/C)
جهاز إخماد α	مقاومة R
موضع x	شحنة q
سرعة v	شدة i
نيوتن: $\sum(\mathrm{F} - \mathrm{m}\gamma) = 0$	كيرشوف : $\sum \mathrm{u_i} = 0$
(عزم J) قوة F	توتر V
طاقة حركية $E_c=(1/2)\ mv^2$	طاقة مغناطيسية $E_L=(1/2)\ Li^2$
طاقة كامنة $E_p=(1/2\ kx^2)$	طاقة كهربائية $E_c=(1/2)\ q^2/C$

أمثلة:

1) المطلوب إيجاد تغير التوتر بين قطبي السعة بدلالة الزمن للدارة RLC المتسلسلة، نعطي :

C=0.5μF ،L=5mH ،R=50Ω

بالنسبة للحالة التي يكون فيها: $R=50\Omega$، $L=5\ 10^{-3}H$، $C=0.5\ 10^{-6}F$

لدينا: $\lambda= 5\ 10^3\ s^{-1}$، $\omega_0=2\ 10^4$ rd/s

نستنتج عامل النوعية: Q=2

بما أن: $\omega_0 > \lambda$ (Q>0.5)، إذا الحل هو شبه دوري:

$$v_c = V_m e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

مع نبض شبه دوري: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 19365 rd/s$

وشبه دور: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0.32 ms$

2) النظام كتلة- نابض متخامد:

ليكن النظام المكون من جهاز إخماد ذو ثابت α (الشكل 1.23)، وكتلة نقطية m، ونابض ذو صلابة k ، المطلوب إيجاد معادلة الحركة، لدينا: α= 15 Ns/m، m=250g، k= 100N/m

معادلة الحركة هي (1.73):

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

حيث $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

بالتعويض بالقيم المعطاة للكتلة، ثابت التخامد و ثابت الصلابة نجد:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0.25}} = 20 rd/s \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} = 30 s^{-1}$$

بما أن $\lambda > \omega_0$ ، فالحركة لا دورية و الحل هو (1.77):

$$x(t) = a_1 e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + a_2 e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

3.8.1دراسة طاقوية:

في حالة اهتزازات متخامدة لنظام كتلة نابض، لدينا

1.92 $$x = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t)$$

عبارة السرعة إذا كان $\lambda \ll \omega$:

1.93 $$\dot{x} = -\big(\lambda\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\big)Ce^{-\lambda t} \simeq -\omega\sin(\omega t)Ce^{-\lambda t}$$

وفي هذه الحالة، الطاقة الكلية لهذا النظام هي:

1.94 $$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kC^2e^{-2\lambda t}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2C^2e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega t)$$

لدينا: $m\omega^2 = k$

1.95 $$E = \frac{1}{2}kC^2 e^{-2\lambda t}$$

عند اللحظة t :

1.96 $$E(t=0) = E_0 = \frac{1}{2}kC^2$$

1.97 الطاقة هي إذا: $E = E_0 e^{-2\lambda t}$

بالنسبة للحظة: t=1/2λ لدينا:

$$\frac{E}{E_0} = e^{-1}$$

وعند اللحظة: t= τ ، لدينا تناقص للطاقة بالنسبة للطاقة الابتدائية هي:

1.98 $$\frac{E}{E_0} = e^{-2}$$

7.8.1 دراسة الاحتكاك الصلب:

ليكن النظام الآتي حيث تخضع الكتلة m ، حركتها في المستوى، إلى قوة احتكاك صلب f_α. نفترض أن الكتلة، عند اللحظة t=0 ، تبتعد عن وضعية توازنها بالمسافة X_m، وأنها تترك بدون سرعة ابتدائية.

قوة الاحتكاك الصلب f_α لها طويلة ثابتة واتجاه معاكس لاتجاه الحركة. معادلة الحركة تكتب إذا كالآتي:

1.99 $$m\ddot{x} = -kx \pm f_\alpha$$

بالنسبة لنصف الدور الأول، المعادلة هي:

1.100 $$m\ddot{x} = -kx + f_\alpha$$

1.101 $$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{f_\alpha}{k}\right) = 0$$

1.102 $$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_\alpha}{k}$$

$$x = a\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{f_\alpha}{k} \tag{1.103}$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار الظروف الابتدائية x(0)= Xm و v(0)=0، لدينا إذا:

$$a\cos\varphi + \frac{f_\alpha}{k} = X_m \tag{1.104}$$

و $$-\omega_0 a\sin\varphi = 0 \tag{1.105}$$

إذا: $$x = \left(X_m - \frac{f_\alpha}{k}\right)\cos\omega_0 t + \frac{f_\alpha}{k} \tag{1.106}$$

في نهاية نصف الدور الأول، الفاصلة X سالبة:

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = -\left(X_m - 2\frac{f_\alpha}{k}\right) \tag{1.107}$$

السعة نقصت بالمقدار $2f$

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = 2f - X_m \tag{1.108}$$

بالنسبة لنصف الدور الثاني، المعادلة هي:

$$m\ddot{x} = -kx - f_\alpha \tag{1.109}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{f_\alpha}{k} \tag{1.110}$$

$$x = a'\cos\left(\omega_0 t + \varphi'\right) - \frac{f_\alpha}{k} \tag{1.111}$$

علما بأن الحركة في هذه الحالة بدأت في اللحظة t=T/2 ، حيث الوضعية الابتدائية:

$$-\left(X_m - 2f\right) \tag{1.112}$$

والسرعة الابتدائية : v=0

ومنه نستنتج قيم الثابتين 'a و 'ϕ:

$$a' = -\left(X_m - 3f\right) \tag{1.113}$$

1.114

$$\varphi' = 0 \quad و \quad a' = \left(X_m - 3f\right)$$

ومنه:

$$x=\left(X_m-3f\right)\cos\omega t-f \qquad 1.115$$

ومنه قيمة الاستطالة عند x=T : $\left(X_m-4f\right)$

وبهذا نقصت السعة خلال نصف الدور الثاني بمقدار $2f$

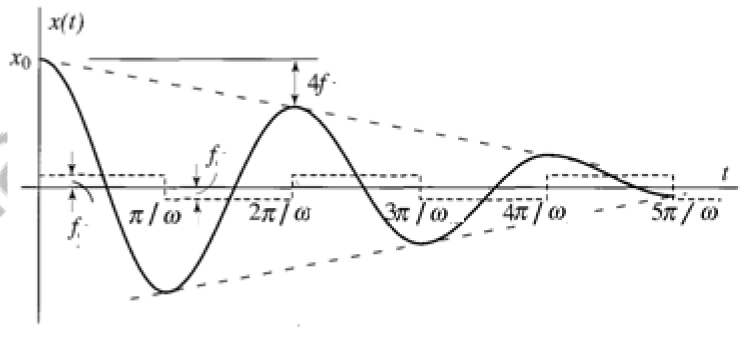
لدينا تناقص ثابت خلال كل نصف دور، وبهذا النقصان الدوري يكون بمقدار $4f$

عكس الاحتكاك اللزج، منحنى تناقص السعة ليس أسي بل خطي، وكذلك فإن توقف الحركة يمكن أن يحدث خارج موضع التوازن الابتدائي بالنسبة لوضعية قصوى حيث قوة الاحتكاك أكبر من قوة الإرجاع النابض.

$$f_\alpha \geq k\left(X_m-2nf\right) \qquad 1.116$$

حيث n هو عدد نصف الأدوار

$$n\geq\frac{1}{2}\left(\frac{X_m}{f}-1\right) \qquad 1.117$$



الشكل 29.1

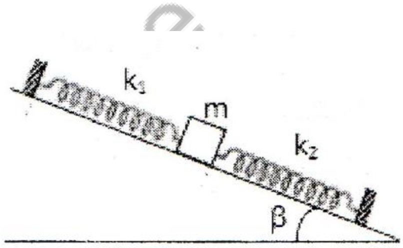
تمارين إضافية:

التمرين الأول:

ليكن النظام الميكانيكي المكون من كتلة ونابضين على سطح مائل.

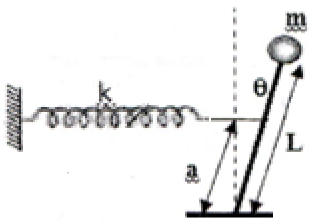
1) المطلوب إيجاد تشوه النابضين عند التوازن
2) نحرك الكتلة عن موضع توازنها، أوجد معادلة حركة الكتلة.

في الشكل التالي لدينا قضيب كتلته مهملة وفي طرفه كتلة نقطية m، هذا القضيب مرتبط من طرفه الثابت بنابض صلابته k، عند التوازن القضيب عمودي والنابض حر، المطلوب إيجاد معادلة حركة هذا النظام وشروط الاهتزاز.



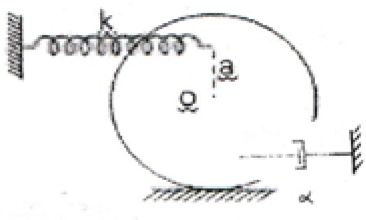
التمرين الثاني:

في الشكل التالي لدينا قضيب كتلته مهملة، في طرفه كتلة نقطية m ، هذا النظام مرتبط بطرف ثابت بواسطة نابض صلابته k ، عند التوازن القضيب، القضيب عمودي و النابض حر، المطلوب إيجاد معادلة حركة هذا النظام وشروط الاهتزاز.



التمرين 3:

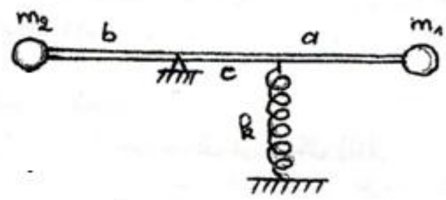
أسطوانة كتلتها M ونصف قطرها r مرتبطة بطرف ثابت بواسطة نابض صلابته k. الأسطوانة تتدحرج بدون الانزلاق على مستو أفقي. المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الصغيرة للأسطوانة.



التمرين 4:

لدينا قضيبا ذا كتلة مهملة ، في طرفيه الكتلتين m_1 و m_2 . المطلوب:

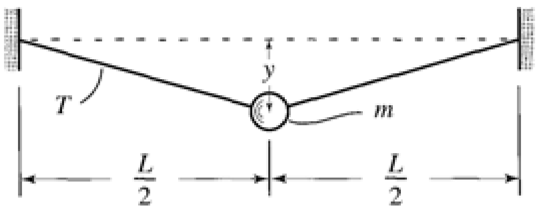
1) إيجاد تمدد النابض عند التوازن، علما بأن القضيب أفقي.
2) إيجاد معادلة الحركة، واستنتاج دور الاهتزازات الصغيرة.



التمرين 5:

يتم تعليق كتلة m بواسطة خيط غير قابل للتمدد، خاضع لتوتر من المفروض أن يكون ثابتا بالنسبة للاهتزازات الصغيرة.

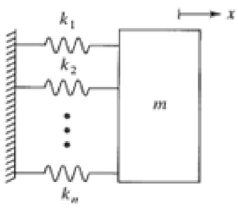
المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الصغيرة للكتلة.



المطلوب إيجاد صلابة النابض المكافئ بالنسبة لكل تركيب للنوابض في الشكل التالي:

التمرين 6

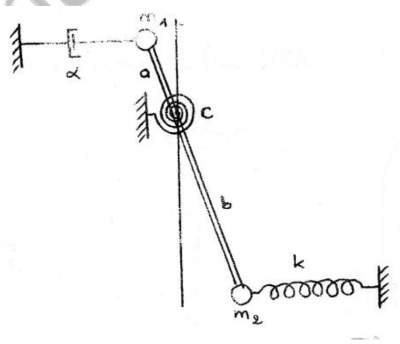
أوجد بالنسبة للأنظمة في الشكلين صلابة النابض المكافئ



أ) النوابض مركبة على التسلسل ب) النوابض مركبة على التوازي

التمرين 7:

ليكن النظام الميكانيكي المبين في الشكل التالي، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضليه التي تحكم تغير الزاوية θ، واستنتاج الشرط الضروري لوجود اهتزازات للنظام الشبه دوري.



الفصل الثاني: الاهتزازات القسرية

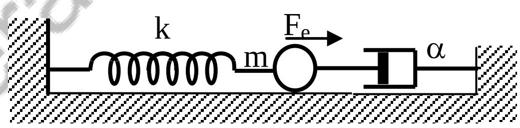
1.2 المقدمة:

كما رأينا سابقا، اهتزازات هزاز تتناقص مع الزمن لأن الطاقة تتبدد في المحيط. و للحفاظ على اهتزاز ما، يجب تعويض الطاقة الضائعة منه بطاقة مضافة إلى الهزاز. وهناك أمثلة كثيرة نراها في حياتنا اليومية، فمثلا، يستعمل الطفل في الأرجوحة ساقيه لزيادة سعة حركته الاهتزازية. نلاحظ أن الهزاز الذي تأثر عليه قوة جيبية ذات تواتر مناسب، تصبح حركته كبيرة جدا. هذه الظاهرة ذات استجابة قوية لتواتر معين يسمى "رنين" ، الذي يمكن أن يكون هداما، لأنه يؤدي إلى إتلاف المركبات الميكانيكية، أم يمكن استعماله لكشف وتفخيم الإشارات الضعيفة أو كذلك في التصوير الطبي.

2.2. الاهتزازات القسرية المتخامدة

1.2.2 معادلة الحركة

لنأخذ نموذج الهزاز المتخامد نابض- كتلة المحرض من قوة F_e خارجية عن النظام



الشكل 2.1

عند تطبيق مبدأ نيوتن للحركة، نحصل على:

$$F_e(t) - \alpha\dot{x} - kx = m\ddot{x} \qquad 2.1$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_e(t) \qquad 2.2$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e(t)}{m} \qquad 2.3$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad 2.4$$

نحصل على معادلة من النوع 2.1 مع:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad f(t) = \frac{F_e(t)}{m} \qquad 2.5$$

بصفة عامة، الهزاز التوافقي القسري يخضع للمعادلة التفاضلية التالية:

:

$$\ddot{s} + 2\lambda\dot{s} + \omega_0^2 s = f\ (t) \qquad 2.6$$

حيث f هي دالة ناتجة عن التحريض

المعادلة 2.1 هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة، حلها هو تطابق الحل المتجانس وحل الخاص:

$$s = s_h + s_p \qquad 2.7$$

حيث s_h حل للمعادلة المتجانسة:

$$\ddot{s} + 2\lambda\dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \qquad 2.8$$

و s_p حل خاص للمعادلة 2.6

عبارة الحل المتجانس تعتمد على قيمة عامل النوعية Q حيث نميز ثلاث أنظمة: النظام اللادوري($Q<1/2$)، والنظام الحرج ($Q=1/2$) ، والنظام شبه الدوري ($Q>1/2$). في كل حالة من هذه الحالات، تتناقص سعة الحركة أسيا وتصبح مهملة بعد حقبة من الزمن. وبعد فترة الانتقال $[0\ t_r]$، حيث لدينا تطابق الحل المتجانس والحل الخاص، يسود نظام دائم حيث الحل الخاص يصبح حلا دائما.

من المعتاد إهمال الجزء الانتقالي للحل العام المعطى من المعادلة والتركيز على الاستجابة في النظام الدائم فقط، ويتوقف ذلك على قيمة نسبة التخامد. إذا كان النظام ذو تخامد كبير نسبيا، فالطرف يعمل على اختفاء الاستجابة الانتقالية بسرعة كبيرة، ربما في جزء من الثانية، أما إذا كان نظام ذو تخامد طفيف (α صغير جدا)، فالجزء الانتقالي من الحل يمكن أن يدوم طويلا كي يكون مهما وغير مهمل. قرار إهمال الجزء الانتقالي من الحل يعتمد كذلك على التطبيق.

من أجل $t>tr$ $\qquad s=sp$

الآن، الحل الدائم يتوقف على شكل دالة التحريض. و الإثارات التوافقية مصدر شائع للقوة الخارجية المطبقة على الآلات والبنى. زيادة على ذلك، نظرية فوريي تدل على أن العديد من دوال التحريض يمكن التعبير عنها بسلسلة لانهائية من الحدود التوافقية. و بما أن معادلات الحركة هنا خطية، فمعرفة استجابة الحدود الفردية للسلسلة يسمح بتمثيل الاستجابة العامة كمجموع استجابات الحدود الفردية، إنه مبدأ التطابق. بهذه الطريقة، معرفة الاستجابة لتوافقي واحدة يسمح بحساب الاستجابة لتشويشات ذات طبيعة دورية، بتطبيق سلسلة فوريي أو حساب الاستجابة لتشويشات ذات طبيعة لا دورية باستعمال تحويل لابلاس.

ندرس استجابة (الحل الدائم) للنظام عند تحريض توافقي:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_e t) \qquad 2.9$$

(بالنسبة للنموذج كتلة- نابض (الشكل 2.1) و باعتبار المعادلات 2.4 و2.6 ، لدينا: $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$

نبين في هذه الحالة أن الاستجابة جيبية

2.10 $$s(t) = S_m \cos\left(\omega_e t - \varphi_e\right)$$

حيث S_m هي سعة الاستجابة و φ_e هو فرق الطور مع التحريض.

لتحديد S_m و φ_e ، نعوض في 4.2 و1.2 باستعمال الترميز المركب:

2.11 $$\bar{s}\left(t\right) = \bar{S}_m e^{i\omega_e t}$$

حيث السعة المركبة هي: $\bar{S}_m = S_m e^{-i\varphi}$

وبالتعويض في العلاقة، نحصل على:

2.12 $$\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i2\lambda\omega_e\right)\bar{S}_m e^{i\omega_e t} = f_0 e^{i\omega_e t}$$

2.13 $$\bar{S}_m = \frac{f_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i2\lambda\omega_e\right)}$$

2.14 $$S_m = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}}$$

2.15 $$\varphi_e = arctg\left(\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right)$$

بحيث:

2.16 $$s(t) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}} \cos\left(\omega_e t - arctg\left(\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right)\right)$$

الاستجابة لتحريض توافقي في النظام الحقيقي هي كذلك توافقية وتواتر الاستجابة هو نفسه تواتر التحريض، لكن سعة الاستجابة تختلف عن سعة التحريض، والاستجابة لها تأخر على التحريض.

نلاحظ أن الاستجابة لها تغير زمني s(t) وتغير تواتري $s(\omega_e)$

2.2.2 الاستجابة بدلالة التواتر:

سعة وطور النظام الدائم يتوقفان على نبض التحريض ω_e

دراسة تغير السعة $S_m(\omega_e)$

البحث عن حد أقصى يمر عبر إلغاء قيمة المشتقة : $\frac{dS_m}{d\,\omega_e}=0$

نحصل حينها على:

$$\frac{-4\omega_e\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)+8\lambda^2\omega_e}{\left(\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\lambda^2{\omega_e}^2\right)^{3/2}}=0 \quad 2.17$$

$$-4\omega_e\left(2\lambda^2-\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)\right)=0 \quad 2.18$$

2.19

$$2\lambda^2-\omega_0^2+\omega_e^2=0$$

$$\omega_e^2=\omega_0^2-2\lambda^2 \quad 2.20$$

نميز إذا حالتين:

إذا كان: $\omega_0 \geq \lambda\sqrt{2}$

المنحنى له حد أقصى بالنسبة للنبض ω_e يسمى نبض الرنين:

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}=\omega_0\sqrt{1-\frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}}$$

$$\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \quad 2.21$$

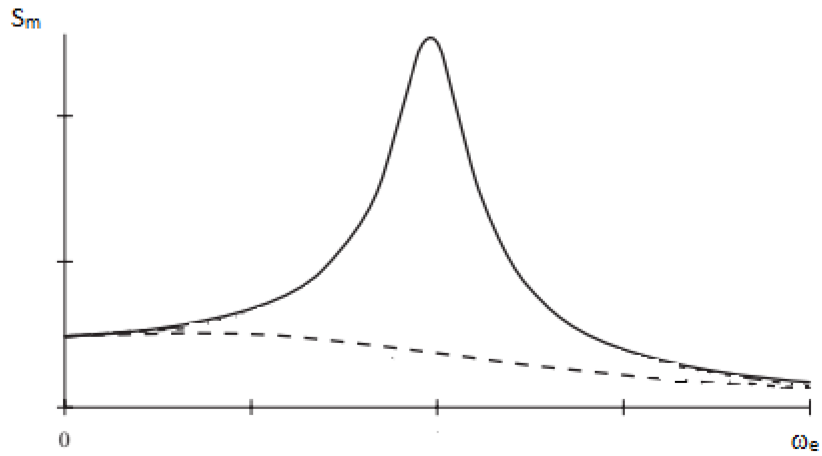
نعوض في العبارة S_m قيمة ω_e بالحد $\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$ ،

فنحصل على السعة الموافقة:

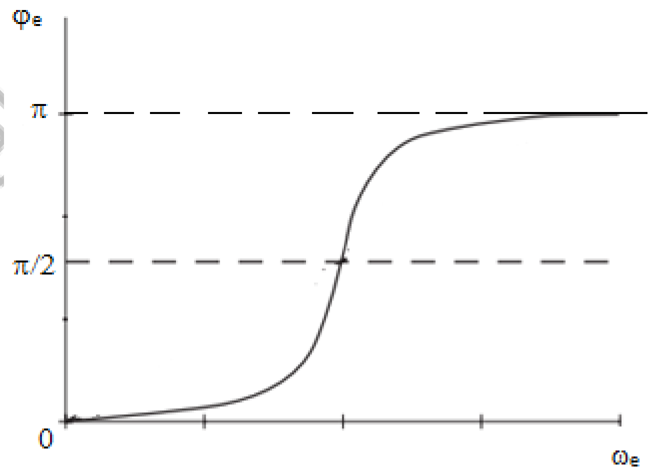
$$S_{Max}=\frac{f_0}{2\lambda\sqrt{\left(\omega_0^2-\lambda^2\right)}} \quad 2.22$$

إذا كان $\omega_0 < \lambda\sqrt{2}$

المنحنى يتناقص على طول الفترة ω_e ، لا نلاحظ رنينا.



الشكل 2.2 منحنى سعة دالة تواتر التحريض، خط متصل $\omega_0 \geq \lambda\sqrt{2}$ ، خط متقطع $\omega_0 < \lambda\sqrt{2}$



الشكل 2.3 منحنى تغيرفرق الطور بدلالة تواتر التحريض

الطور φ_e يتغير بين 0 و π مما يدل على أن الاستجابة متأخرة بالنسبة للتحريض.

عند تواتر منخفض، الاستجابة والتحريض تقريبا على التوافق، وعند تواتر عال هما على التعاكس، بينما عند $\omega_e = \omega_0$، هما على التربيع.

عموما، يمكن كتابة النتائج السابقة بدلالة عامل النوعية Q. لدينا إذا:

شرط الرنين $\omega_0 \geq \lambda\sqrt{2}$ يوافق عامل نوعية $Q \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

نبض الرنين هو:

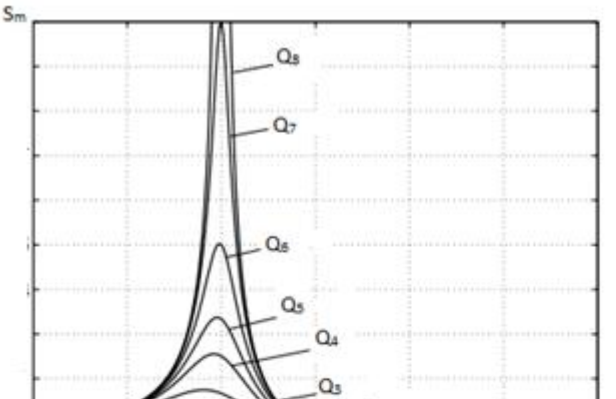
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}} \qquad 2.23$$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

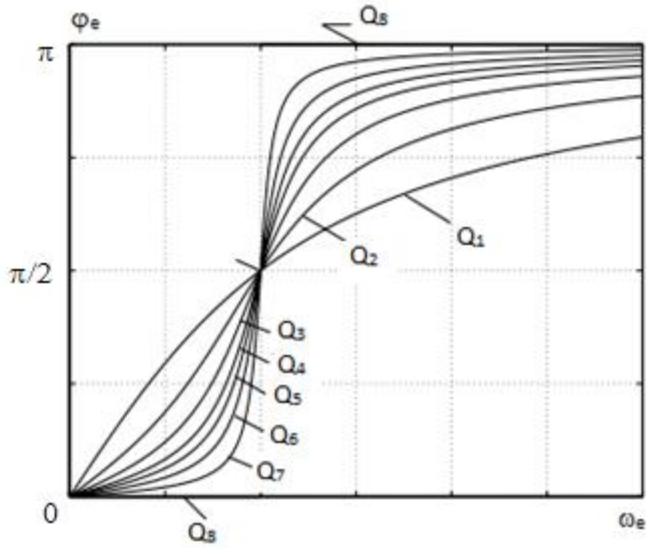
في حالة نظام الشكل 1.2، السعة القصوى هي:

$$S_{Max} = \frac{F_0}{k}\frac{Q}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}} \qquad 2.24$$

دالة الاستجابة تتوقف على تواتر التحريض، وكذلك على الوسائط المتغيرة للنظام (النبض الذاتي و معامل التخامد أو بأختصار عامل الجودة Q). بتحديد Q لدينا تغيرات السعة و فرق الطور الاستجابة بدلالة تواتر التحريض، وبتغيير وسيط النظام Q ، يمكن إنشاء عائلة من المنحنيات السابقة.



الشكل 2.4 : عائلة منحنيات السعة بدلالة ω_e لقيم متزايدة للعامل Q

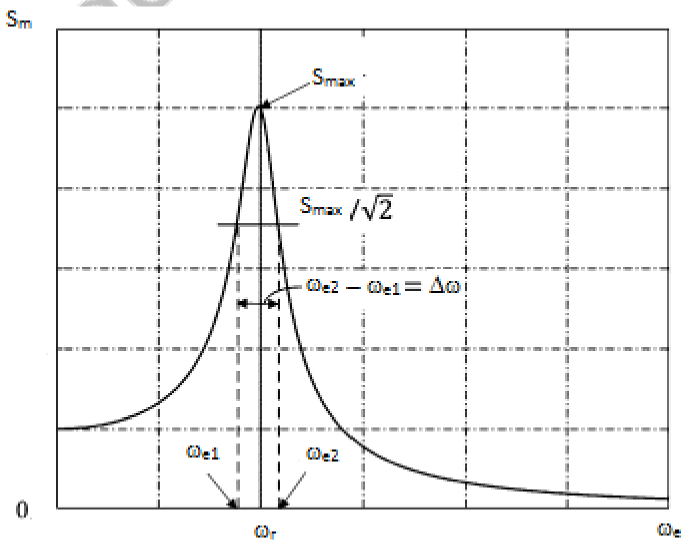


الشكل 2.5 : عائلة منحنيات للطور بدلالة ω_e لقيم متزايدة للعامل Q

3.2.2 شريط العبور

نعرف شريط العبور على أنه مجال التواترات بحيث السعة تقص عن السعة القصوى بعامل $\sqrt{2}$: $S_m / S_{\max} \geq 1/\sqrt{2}$

وبما أن القدرة متناسبة مع مربع السعة، هذه النسبة توافق تناقص القدرة من قيمتها القصوى الى نصفها: $\frac{P}{P_{Max}} \geq \frac{1}{2}$



الشكل 2.6

في الشكل 2.6، الفاصل $\Delta\omega_e = \omega_{e2} - \omega_{e1}$ يمثل عرض شريط العبور. لقيمة كبيرة لعامل النوعية ، نبين أن (شاهد الدليل في ما يأتي)، شريط العبور يعطى بالعلاقة :

$$\Delta\omega_e = \frac{\omega_0}{Q} \qquad 2.25$$

طريقة شريط العبور، المسماة أحيانا طريقة نصف القدرة، هي أحد التقنيات العملية لتحديد كمية التخامد في النظام . في هذه التقنية، يتم تحديد عامل التخامد إنطلاقا من التواترات القطع ω_{e1} و ω_{e2}.

الدليل

يمكننا كتابة السعة 13.2 بالشكل التالي:

$$S_m=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\lambda^2\omega_e^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^4\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}\right)^2+\omega_0^4\frac{4\lambda^2}{\omega_0^2}\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}}}=\frac{f_0}{\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}}}$$

و بتعريف النبض المصغر r: $r=\omega_e/\omega_0$

$$S_m=\frac{f_0}{\omega_0^2\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\frac{1}{Q^2}r^2}}=\frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\frac{1}{Q^2}r^2}} \qquad 2.26$$

في فاصل شريط العبور $[\omega_1\ \omega_2]$، لدينا: $S\geq\frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}$

لعامل Q عال بصفة كافية، المعادلة 24.2 تعطي:

$$S_{\max}\approx\frac{F_0}{k}Q \qquad 2.27$$

وباستعمال المعادلات 2.25 و 2.26 و 2.27، نحصل على :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\frac{1}{Q^2}r^2}}\geq\frac{Q}{\sqrt{2}} \qquad 2.28$$

$$0 \geq r^4 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right) r^2 - \frac{2}{Q^2} + 1 \quad 2.29$$

النبضين المختصرين r_1 و r_2 الموافقين :

$$r^4 - \left(2 - \frac{1}{Q^2}\right) r^2 + \frac{2}{Q^2} + 1 = 0 \quad 2\text{-}30$$

ومنه

$$r_{1,2}^2 = 1 \pm \frac{1}{Q} \quad 2\text{-}31$$

$$r_1 = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = \left(1 + \frac{1}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 2\text{-}32$$

لدينا كذلك:

$$Q >> \quad r_1 \approx \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \quad r_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \quad 2\text{-}33$$

لدينا:

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{Q} \quad 2\text{-}34$$

بما أن:

$$r_1 = \frac{\omega_{e1}}{\omega_0}, \quad r_2 = \frac{\omega_{e2}}{\omega_0}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{\omega_{e2} - \omega_{e1}}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega_e}{\omega_0} \quad 2\text{-}35$$

من المعادلتين 2.34 و2.35 ، نستخرج قيمة شريط العبور:

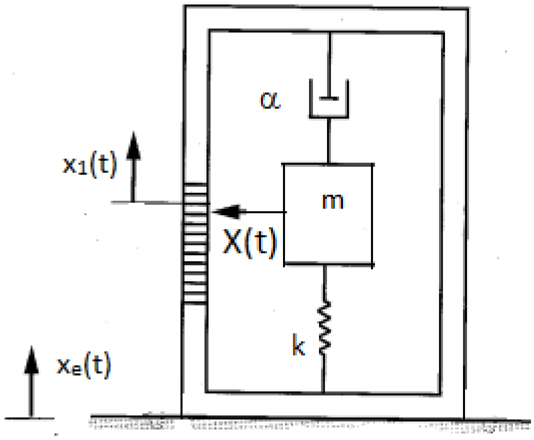
$$\Delta\omega_e = \frac{\omega_0}{Q} \quad 2\text{-}36$$

4.2.2

أمثلة عملية:

1) جهاز القياس: جهاز قياس حركة الأرض (سيسمومتر) وجهاز قياس التسارع (أكسيليرومتر)

نموذج جهاز قياس الاهتزازات (الفيبرومتر) ممثل في الشكل 2.7، حيث إنتقال الكتلة يقاس بالنسبة للقاعدة بالمتغير النسبي **X(t)**.



الشكل 2.7

بالنسبة للمرجع الثابت Ox ، معادلة نيوتن تكتب على الشكل:

:

$$-k\left(x_1-x_e\right)-\alpha\left(\dot{x}_1-\dot{x}_e\right)=m\ddot{x}_1 \quad 2.37$$

نقوم باستبدال المتغير x_1 بالمتغير X

$$X=x_1-x_e$$

حيث X تمثل الحركة النسبية للكتلة بالنسبة للأرض وهو المتغير القابل للقياس لأن كل جهاز قياس مرتبط بالأرض.

من المعادلة 2.38 ، نستخرج ما يلي:

$$\ddot{x}_1=\ddot{X}+\ddot{x}_e \quad 2.39$$

والمعادلة 2.37، تكتب حينذاك:

$$-kX-\alpha\dot{X}=m\left(\ddot{X}+\ddot{x}_e\right) \quad 2.40$$

$$\ddot{X}+\frac{\alpha}{m}\dot{X}+\frac{k}{m}X=-\ddot{x}_e \quad 2.41$$

لانتقال جيبي:

$$x_e=A_e\sin\omega_e t$$

نحصل على:

2.42
$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \omega_e^2 A_e \sin \omega_e t$$

2.43
$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0 X = \omega_e^2 A_e \sin \omega_e t$$

المعادلة الناتجة من النوع 2.5، وحلها (المعادلة 2.10):

2.44
$$X(t) = C_m \cos(\omega_e t + \varphi_e)$$

حيث السعة والطور هما (أنظر المعادلتين 2.14 و2.15):

2.45
$$C_m = \frac{\omega_e^2 A_e}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}}$$

و

$$\varphi_e = -arctg\,(\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2})$$

نكتب هاتان المعادلتين بدلالة النبض المختصر، فنحصل على:

2.46
$$C_m = \frac{\omega_e^2 A_e}{\omega_e^2\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_e^2} - 1\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_e^2}}}$$

2.47
$$\varphi_e = arctg\left(\frac{2\lambda}{\omega_e\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_e^2}\right)}\right)$$

وباختيار مناسب لقيمة كل من الكتلة والصلابة النابض، بحيث:

$\omega_0 \ll \omega_e\ (\frac{\omega_0^2}{\omega_e^2} \ll 1)$ وكذلك $\frac{4\lambda^2}{\omega_e^2} \ll 1$

نحصل على : $C_m \simeq A_e$ 2.48

وبذلك القيمة المقاسة C_m تمثل سعة الهزة A_e

يمكننا إذا استعمال هذا الجهاز لقياس سعة هزة أرضية : سيسمومتر، واستعماله كذلك، مع اختيارمناسب للكتلة ولصلابة النابض، لقياس تسارع النظام: أكسيليرومتر.

نذكر أن قيمة التسارع هي:

$$\ddot{x}_e = \omega_e^2 A_e \sin \omega_e t \qquad 2.49$$

إذا تم اختيار المركبات k وm بحيث: $\omega_0 \gg \omega_e$

المعادلة 2.46 تصبح كما يلي:

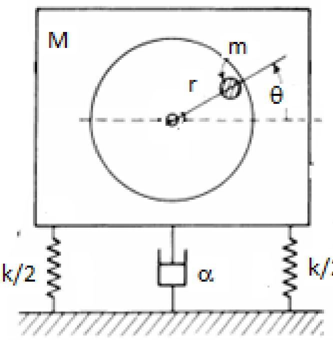
$$C_m \approx \frac{\omega_e^2 A_e}{\omega_0^2} \qquad 2.50$$

قياس C_m يسمح باستنتاج سعة التسارع $\omega_e^2 A_e$

$$\omega_e^2 A_e = \omega_0^2 C_m \qquad 2.51$$

2) أنظمة ذات كتل دوارة لا متوازنة:

عدة أنظمة هندسية تخضع لتحريضات توافقية، من خلال كتل دوارة في حالة لا توازن . أمثلة شائعة، منها مثلا آلة غسيل حيث الثياب موزعة بطريقة غير منتظمة ، مع مفعول الكتلة الدوارة غير المتوازنة التي تطبق قوة توافقية تؤدي إلى اهتزاز جسم الآلة.



الشكل 2.8

قوة التحريض هي قوة طاردة ناتجة عن الدوران، مع سرعة زاوية ω_e للكتلة m.

$$\vec{F}_e = m\omega_e^2 r \vec{e}_N \qquad 2.52$$

المركبة النشطة تبعا لمحور Oy هي:

$$F_{ey} = m\omega_e^2 r \sin\theta \qquad 2.53$$

بما أن $\theta = \omega t$ ، إذا:

$$F_{ey} = m\omega_e^2 r \sin \omega t \qquad 2.54$$

بتطبيق قانون نيوتن على جسم الآلة

$$M\ddot{y} = -\frac{k}{2}y - \frac{k}{2}y - \alpha\dot{y} + F_{ey} \qquad 2.55$$

$$M\ddot{y} = -\frac{k}{2}y - \frac{k}{2}y - \alpha\dot{y} + m\omega_e^2 r \sin \omega_e t \qquad 2.56$$

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_e^2 C_e \sin \omega_e t \qquad 2.57$$

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_e^2 C_e \sin \omega_e t \qquad 2.58$$

إرتقال الآلة هو إذا:

$$y = Y_m \sin(\omega_e t + \varphi) \qquad 2.59$$

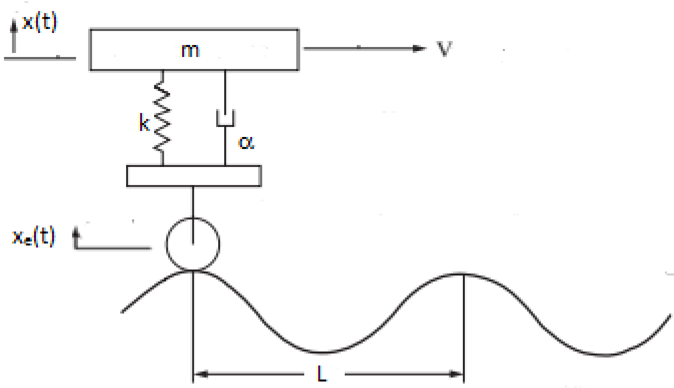
$$Y_m = \frac{\omega_e{}^2 C_e}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_e{}^2}} \qquad 2.60$$

مع:

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right) \qquad 2.61$$

3) حركة مركبة على طريق مموج:

الشكل 2.9 يمثل نموذج بسيط لحركة مركبة على طريق مموج. نريد دراسة اهتزاز هيكلها



الشكل 2.9

عند التوازن، لدينا $\vec{F}_k + \vec{P} = \vec{0}$

بالإسقاط على المحور Oy: $kx_0 - mg = 0$

النابض منضغط بطول x_0 : $x_0 = \dfrac{mg}{k}$

الدراسة الديناميكية: بتطبيق قانون نيوتن على هيكل السيارة، لدينا:

$$\vec{F}_k + \vec{F}_\alpha + \vec{P} = m\vec{\gamma} \qquad 2.62$$

$$-k\left(x - x_0 - x_e\right) - \alpha\left(\dot{x} - \dot{x}_e\right) - mg = m\ddot{x} \qquad 2.63$$

في حالة التوازن:

$$-k\left(x - x_e\right) - \alpha\left(\dot{x} - \dot{x}_e\right) = m\ddot{x} \qquad 2.64$$

ومنه:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_e + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_e \qquad 2.65$$

معادلة تموج الطريق هي:

$$x_e = C\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \qquad 2.66$$

علما بأن المركبة تتحرك بسرعة ثابتة v: و $x = vt$ ، لدينا إذا:

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}C\sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right)+\frac{\alpha}{m}\frac{2\pi v}{L}C\cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) \qquad 2.67$$

عبارة الطرف الثاني يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\frac{k}{m}C\sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right)+\frac{\alpha}{m}\frac{2\pi v}{L}C\cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right)=A_e\sin\left(\frac{2\pi v}{L}t+\varphi\right)$$

مع: $A_e=\frac{C}{m}\sqrt{k^2+\left(\frac{2\pi v\,\alpha}{L}\right)^2}$ 2.68

و $tg\,\varphi=\left(\frac{2\pi v\,\alpha}{kL}\right)$

وشكل المعادلة 2.67 يصبح:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=A_e\sin\left(\omega_e t+\varphi\right) \qquad 2.69$$

حيث

$$\lambda=\frac{\alpha}{2m}\ ,\ \omega_0^2=\frac{k}{m}\ ,\ \omega_e=\frac{2\pi v}{L}$$

الحل الدائم المعادلة 2.65 طبقا لمعادلات 2.10 2.14 و 2.15 للدراسة النظرية هو:

$$x=X_m\sin\left(\omega_e t+\varphi_e\right)$$

مع:

$$\Delta\varphi=\varphi_e-\varphi=-arctg\left(\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}\right) \qquad X_m=\frac{\omega_e^2C_e}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\lambda^2\omega_e^2}} \qquad 2.70$$

آداة تعليق السيارة، لتفادي التأرجح، يتم اختيارها بحيث يكون عامل النوعية $Q=\frac{\omega_0}{2\lambda}=\frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

أقل من $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3.2 الاهتزازات القسرية غير المتخامدة:

لنعد إلى النظام كتلة ـ نابض الذي في الشكل 2.1 ،وبإهمال التخامد نحصل على:

$$F_e(t)-kx=m\ddot{x} \tag{2.71}$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}F_e(t) \tag{2.72}$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\sin(\omega_e t) \tag{2.73}$$

$$f_0=\frac{F_e}{m}$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=f_0\sin(\omega_e t) \tag{2.74}$$

الحل العام عبارة عن تطابق للحل المتجانس والحل الخاص:

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t) \tag{2.75}$$

الحل المتجانس هو الحل في حالة نظام حر:

$$x_h(t)=X_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0) \tag{2.76}$$

الحل الخاص عندما يكون $\omega_e\neq\omega_0$

$$x_p(t)=X_m\sin(\omega_e t-\varphi) \tag{2.77}$$

باستعمال الترميز المركب:

$$\bar{x}(t)=\bar{X}_m e^{i\omega_e t}\quad \text{avec } \bar{X}_m=X_m e^{i\varphi} \tag{2.78}$$

وبالتعويض في المعادلة:

$$-\omega_e^2\bar{X}_m e^{i\omega_e t}+\omega_0^2\bar{X}_m e^{i\omega_e t}=f_0 e^{i\omega_e t} \tag{2.79}$$

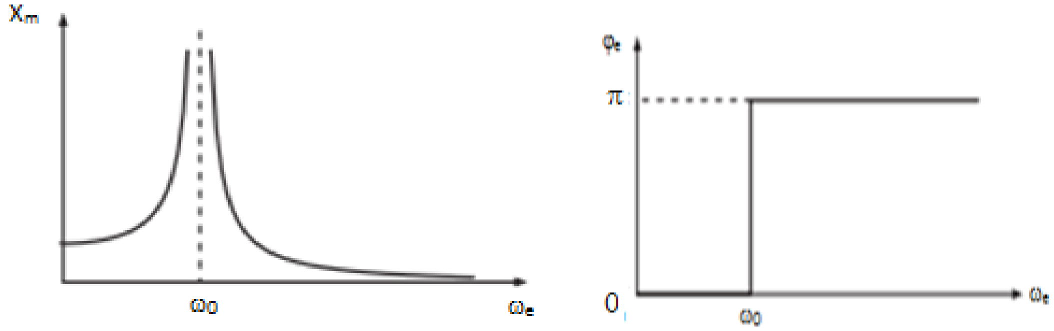
ومنه

$$\bar{X}_m=\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega_e^2} \tag{2.80}$$

نستنتج أن:

$$X_m=\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega_e^2}\quad \text{et } \varphi=0 \text{ pour } \omega_0>\omega_e \tag{2.81}$$

$$X_m = \frac{f_0}{\omega_e^2 - \omega_0^2} \quad \text{et } \varphi = \pi \quad \text{pour } \omega_0 < \omega_e$$



a b

الشكل 2.10 (a) السعة X_m (b) الطور الابتدائي φ_e

وبهذا الحل العام يكتب بالشكل:

$$x(t) = X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \sin(\omega_e t) \qquad 2.82$$

علما بأن X_0 و φ_0 يتم تحديدها من الشروط الابتدائية.

شكل الحل العام يتوقف على القيم النسبية لتواتر وسعة كل من الحلين المتجانس والخاص . عند تواتر عال، سعة الحل الخاص تصبح مهملة والحل يتم اختصاره إلى الحل المتجانس، ونستعيد بذلك النظام الحر.

إذا كانت التواترات الذاتية والمحرضة متقاربة $\omega_e \approx \omega_0$ نحصل على ظاهرة النبضات:

في حالة الشروط الابتدائية الآتية: $x(0) = 0$ و $\dot{x}(0) = 0$ ، فالحل العام يصبح:

$$x(0) = X_0 \sin(\varphi_0) = 0$$

لدينا إذا: $\varphi_0 = 0$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 X_0 \cos(\varphi_0) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \omega_e \qquad 2.83$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$X_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \frac{\omega_e}{\omega_0} \qquad 2.84$$

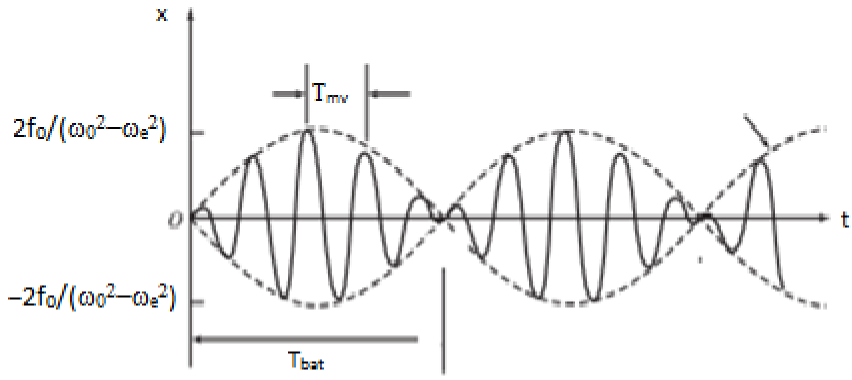
مع $\omega_e \approx \omega_0$

$$X_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \tag{2.85}$$

والحل هو :

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\left(\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_e t)\right) \tag{2.86}$$

$$x(t) = \frac{2 f_0}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\cos\left(\frac{\omega_e - \omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_e + \omega_0}{2}t\right) \tag{2.87}$$



الشكل 2.11

دور كل من الخفقان T_b و الحركة T_{mv} هما على التوالي:

$$T_b = \frac{2\pi}{|\omega_e - \omega_0|}, \quad T_{mv} = \frac{4\pi}{\omega_e + \omega_0} \tag{2.88}$$

الحل الخاص من أجل $\omega_e = \omega_0$

الحل السابق لا يصلح إلا إذا كان $\omega_e \neq \omega_0$ ، في حالة ما إذا كان نبض التحريض يوافق التواتر الطبيعي للنظام،

تصبح سعة الحل الخاص كبيرة بغير تحديد، لدينا إذا ظاهرة الرنين من أجل $\omega_e = \omega_0$

نبين في هذه الحالة بأن الحل يأخذ الشكل: $x_p(t) = X_m t \sin(\omega_0 t + \varphi)$ الذي يكتب بالترميز المركب:

$$\bar{x}(t) = \bar{X}_m t e^{i\omega_0 t} \quad \text{avec } \bar{X}_m = X_m e^{i\varphi}$$

وبالتعويض في المعادلة:

2.89
$$-\omega_0^2\bar{X}_m te^{i\omega_0 t}+2i\omega_0\bar{X}_m e^{i\omega_0 t}+\omega_0^2\bar{X}_m te^{i\omega_0 t}=f_0e^{i\omega_0 t}$$

$$\bar{X}_m=\frac{f_0}{2i\omega_0}=-i\frac{f_0}{2\omega_0}$$

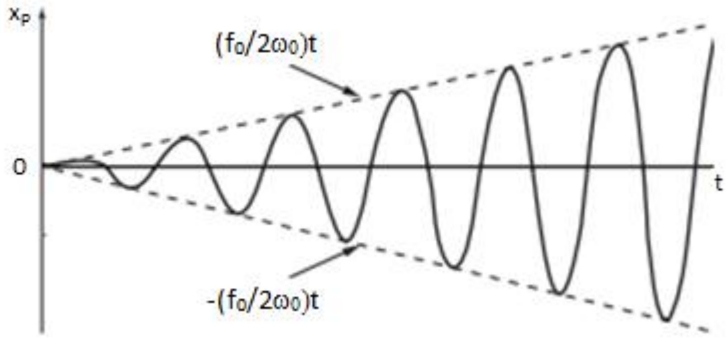
السعة والطور هما إذا:

2.90
$$X_m=\frac{f_0}{2\omega_0}\quad \text{et}\quad \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

والحل الخاص هو:

2.91
$$x_p(t)=\frac{f_0}{2\omega_0}t\sin\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{f_0}{2\omega_0}t\cos(\omega_0 t)$$

الحل الخاص هو دالة شبه توافقية سعتها متزايدة خطيا (الشكل 2.11)



الشكل2.11: الحل الخاص x_p . السعة تتزايد بغير تحديد، إنها ظاهرة الرنين.

والحل العام هو :

2.92
$$x(t)=X_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)-\frac{f_0}{2\omega_0}t\cos(\omega_0 t)$$

4.2 مفهوم الممانعة:

الممانعة هي قياس استجابة أي بنية أو دارة عند خضوعها لتحريض توافقي . وهي تسمح بربط التوترات والتيارات في الدارات الكهربائية والقوى بالسرعات في الأنظمة الميكانيكية.

في دارة كهربائية، الممانعة تعرف على أنها نسبة التوتر الخاضع لمركب من الدارة بالتيار المار به:

2.93
$$Z=\frac{U}{I}$$

وهو شكل من قانون أوم لكنه معمم على مختلف المركبات.

المركب الخاضع لتوتر جيبي $u = U_m \sin \omega t$ له استجابة دائمة من التيار هي $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

بالترميز المركب: $\bar{e} = E_m e^{i\omega t}$ و $\bar{i} = I_m e^{i(\omega t+\varphi)}$

في حالة مقاومة، لدينا إذا: $\bar{u}_R = R\bar{i}$

ممانعة المقاومة هي إذا: $Z_R = \frac{\bar{u}_R}{\bar{i}} = R$ 2.94

في حالة وشيعة $\bar{u}_L = L\frac{d\bar{i}}{dt} = iL\omega\bar{i}_L$

الممانعة المركبة للوشيعة هي: $Z_L = \frac{\bar{u}_L}{\bar{i}_L} = iL\omega$ 2.95

في حالة سعة مكثفة، لدينا $\bar{i}_c = C\frac{d\bar{u}_C}{dt} = iC\omega\bar{u}_c$

ممانعة السعة هي: $Z_C = \frac{\bar{u}_c}{\bar{i}_c} = \frac{1}{iC\omega}$ 2.96

في حالة دارة RLC على التسلسل، لدينا:

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \tag{2.97}$$

$$\bar{e} = RI_m e^{i\omega t} + iL\omega I_m e^{i\omega t} + \frac{i}{C\omega} I_m e^{i\omega t} \tag{2.98}$$

$$\bar{e} = \left(R + iL\omega + \frac{i}{C\omega}\right) I_m e^{i\omega t} \tag{2.99}$$

$$\bar{e} = \left(R + iL\omega + \frac{i}{C\omega}\right)\bar{i}\ ,\quad \bar{e} = \bar{Z}_T\,\bar{i}$$

بما أن المركبات على التسلسل، فالممانعة الكلية هي مجموع الممانعات:

$$\bar{Z}_T = \left(R + iL\omega + \frac{i}{C\omega}\right) = \left(\bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C\right) \tag{2.100}$$

بالتناظر مع المثال الكهربائي، الممانعة الميكانيكية تعرف على أنها القوة اللازمة لإنتاج سرعة وحدة في الهزاز:

$$Z_{mec} = \frac{F}{v} \tag{2.101}$$

من أجل حركة توافقية

$$\bar{v}=\frac{d\bar{x}}{dt}\quad\Rightarrow\quad\bar{x}=\int\bar{v}dt=\int\bar{V}_m e^{i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}\bar{V}_m e^{i\omega t}$$

$$\bar{x}=\frac{1}{i\omega}\bar{v}\tag{2.102}$$

عبارة التسارع هي:

$$\bar{\gamma}=\frac{d\bar{v}}{dt}=i\omega\bar{V}_m e^{i\omega t}\tag{2.103}$$

$$\bar{\gamma}=i\omega\bar{v}\tag{2.104}$$

نعرف الممانعة المرنة لنابض:

$$\bar{Z}_k=\frac{F_k}{v}=\frac{k\bar{x}}{\bar{v}}=\frac{k}{i\omega}\tag{2-105}$$

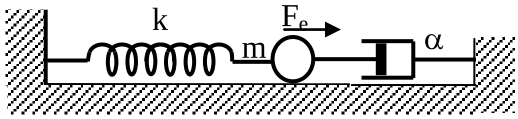
و الممانعة لكتلة

$$\bar{Z}_m=\frac{F_m}{v}=\frac{m\bar{\gamma}}{\bar{v}}=\frac{mi\omega\bar{v}}{\bar{v}}=i\omega m\tag{2-106}$$

و ممانعة جهاز التخامد:

$$\bar{Z}_\alpha=\frac{F_\alpha}{v}=\frac{\alpha\bar{v}}{\bar{v}}=\alpha\tag{2-107}$$

ليكن الهزاز الميكانيكي للشكل 2.1:



و المعادلة التفاضلية 2.2:

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=F_e$$

يمكننا إعادة كتابة هذه العلاقة باعتبار السرعة كمتغير، على الشكل:

$$F_e=m\frac{dv}{dt}+\alpha v+k\int vdt\tag{2.108}$$

في حالة تحريض توافقي: $F_e=F_m e^{i\omega t}$ ، تكون الاستجابة الدائمة توافقية : $v=V_m e^{i\omega t}$

لدينا إذا: $\frac{dv}{dt}=i\,\omega v$ و $\int vdt=\frac{1}{i\,\omega}v$

$$F_e = mi\omega v + \alpha v + k\frac{1}{i\omega}v = \left(i\omega m + \alpha + \frac{k}{i\omega}\right)v \qquad 2.109$$

علما بأن: $Z_{mec} = \frac{F}{v}$

نحدد إذا الممانعة الميكانيكية الكلية للنظام:

$$\bar{Z}_T = i\omega m + \alpha + \frac{k}{i\omega} \qquad 2.110$$

هي مجموع ممانعات الكتلة، جهاز التخامد و النابض.