الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة
المجاهد الفريق أحمد قايد صالح
قسم: العلوم الدقيقة

Ecole Normale Supérieure
Bou-Saada
Dép. Sciences Exactes

دروس في
الاهتزازات و الأمواج

المقياس: الاهتزازات و الأمواج

المستوى: السنة الثانية علوم دقيقة (متوسط، ثانوي)

الاستاذ: صحراوي توفيق

الرتبة: أستاذ محاضر –ب- المدرسة العليا للأساتذة - بوسعادة

السنة الجامعية : 2021-2022

جدول المحتويات

مقدمة عامة:

تتذبذب أشياء عديدة أو تهتز مثل جسم متصل عند نهاية نابض، وشوكة رنانة و رقاص الساعة، و النواس البسيط، والمسطرة البلاستيكية عندما تمسك بقوة من عبر حافة طاولة ويتم ضربها برشاقة، و أوتار القيتار أو البيانو، والعنكبوت يتحسس فريسته بوساطة اهتزازات شبكته، والسيارات تهتز للأعلى والأسفل عندما تمر على ممهل، والبنايات والجسور تهتز عندما تمر بالقرب منها أو عليها الشاحنات. في الحقيقة لأن المواد الصلبة مرنة فإن معظم الاشياء تهتز عندما تزود بقوة أو نبضة. وتحدث الاهتزازات الكهربائية في أنظمة الراديو والتلفزيون. وعلى المستوى الذري تهتز الذرات ضمن الجزيئة و تهتز ذرات المادة الصلبة حول مواضع اتزانها الثابتة نسبيا.

ترتبط الاهتزازات والحركة الموجية بعضها بالبعض، فالأمواج سواء كانت، أمواج البحر، أمواج على وتر، أمواج الزلازل او أمواج الصوت في الهواء يكون لها مصدرها للاهتزاز. في حالة الصوت ليس فقط المصدر هو الشيء المهتز ولكن كذلك المتحسس (طبلة الأذن أو المايكروفون). وفي حقيقة الامر الوسط الذي تتقدم خلاله الموجة يهتز (مثل الهواء بالنسبة لأمواج الصوت). سندرس في المحور الأول الحركة الاهتزازية في الأنظمة الميكانيكية و الأنظمة الكهربائية، ونقارن بين الحركة التوافقية البسيطة والحركة الدائرية، ونستعرض الاهتزازات في ستة فصول و هي كالتالي:

الفصل الأول: عموميات حول الحركة الاهتزازية

الفصل الثاني: تحليل فورييه للحركة الاهتزازية.

الفصل الثالث: الاهتزازات الحرة الغير المخمدة ذات درجة واحدة من الحرية.

الفصل الثالث: الاهتزازات الحرة الغير المخمدة ذات درجة واحدة من الحرية.

الفصل الرابع: الاهتزازات الحرة المتخامدة للأنظمة ذات درجة واحدة من الحرية.

الفصل الخامس: الاهتزازات القسرية لنظام ذي درجة حرية واحدة.

الفصل السادس: الحركة الاهتزازية لأنظمة متعددة درجات الحرية.

أما في المحور الثاني فسوف نركز على حركة الامواج، ونقوم بدراسة الامواج العرضية في وتر، وندرس تراكب الامواج، ظاهرة الانعكاس، التجاوب، و سنتناول امواج الصوت لكي نحسب انطلاق الامواج الصوتية وشدة أمواج الصوت، و ندرس الأمواج الصوتية المستقرة، الخفقان، ونطلع على تأثير دوبلر.

هذه المطبوعة مخصصة لطلاب السنة ثانية علوم دقيقة بالمدارس العليا للأساتذة، و التي يتضمن موضوعها الاهتزازات و الأمواج، يتوزع الحجم الزمني الأسبوعي كما يلي:

1سا و 30 د (Cours): الدروس.

1سا و 30 د (Travaux Dirigés): أعمال موجهة.

45 د (Travaux Pratiques): الأعمال التطبيقية.

المحور الأول: الاهتزازات الميكانيكية

الفصل الأول: عموميات حول الحركة الاهتزازية

1 الحركة الاهتزازية

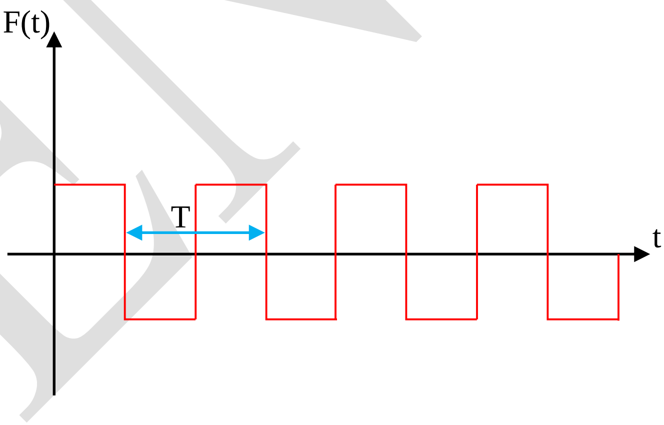
مقدمة

في هذا الفصل سنحاول دراسة نوع من أنواع الحركة، مثل حركة الشوكة الرنانة (Tuning Fork) عندما نجري تجربة معامل الرنين، حركة النواس البسيط (Pendulum) او حركة اوتار الة الكمان (Violin String). وهي عبارة عن حركة توافقية بسيطة، يتم من خلالها التعرف على سرعة وتسارع الجسيم، ونتعرف على ما يسمى السعة (Amplitude)، التردد (التواتر) (Frequensy) ونتعرف كذلك على ما يدعى زاوية الطور (Phase Angle)، الزمن الدوري (Periodic Time). وغيرها من الصفات والخواص التي تلازم الحركة التوافقية البسيطة.

1.1 الحركة الدورية

هي حركة يعود فيها الجسم إلى موقع محدد بعد فترة زمنية ثابتة، مثل حركة القمر حول الأرض، حركة الأرض حول الشمس، حركة الجزيئات في المواد الصلبة تتذبذب حول موضع اتزانها في حركة دورية مستمرة.

- نقول عن دالة F(t) (الشكل 1.I) أنها دورية إذا كانت تحقق المعادلة التالية $F(t+T) = F(t)$ حيث T دورها.



الشكل1.1: F(t) دالة دورية

2.1 الحركة التوافقية البسيطة:

نقول عن جسم ما انه يؤدي حركة توافقية بسيطة إذا كانت إزاحته x معطاة بدلالة الزمن بالعلاقة التالية:

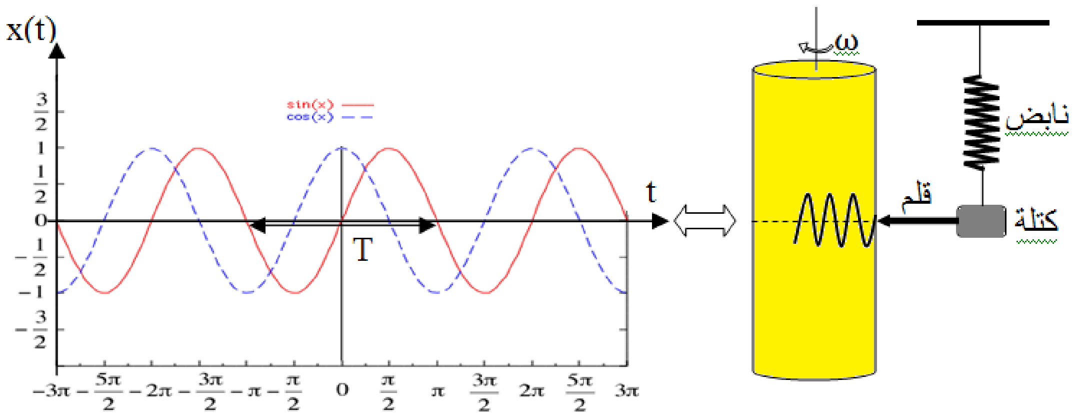
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

و يمكن تعريفها أيضا بالعلاقة:

$$x(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)$$

حيث:

- A سعة الحركة Amplitude.
- (ωt+φ) زاوية الطور Phase Angle.
- φ الطور الابتدائي أي قيمة زاوية الطور في اللحظة t=0.
- ω نبض الحركة.
- تتكرر دالة الـ cos (أو دالة الـ sin) كلما ازدادت الزاوية بمقدار 2π و منه الدور هو T=2π [s] و النبض ω=1[rad/s].



الشكل2.1 : دالة الـ cos (او دالة الـ sin).

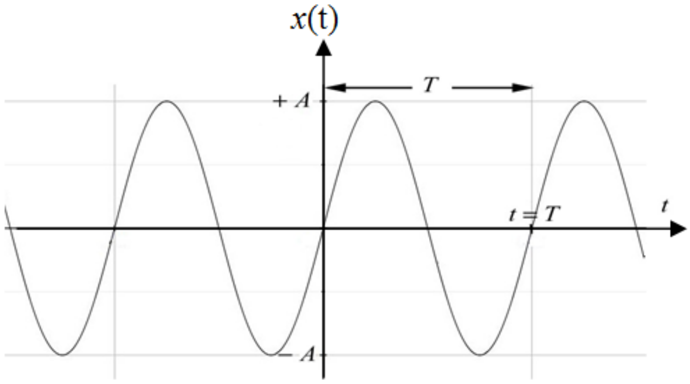
1.2.1 الزمن الدوري

يعرف الزمن الدوري على انه الزمن الذي يستغرقه الجسيم عندما يتحرك من النقطة x=A إلى النقطة x=-A ثم يعود مرة أخرى إلى نفس النقطة x=A. و عندئذ نقول أن الجسيم عمل دورة كاملة. ويمكن ملاحظة أن الزمن الذي يستغرقه الجسيم في الحركة من النقطة x=A إلى النقطة x=0 يساوي الزمن الذي يستغرقه في الحركة من x=0 إلى x=-A.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ [s]$$

2.2.1 سعة الاهتزاز

هي أقصى إزاحة يصل إليها الجسم المهتز من موضع الاتزان (x=±A)، أو هي المسافة بين نقطتين في مسار حركة الجسم تكون سرعته في إحداهما أقصاها وفي الأخرى منعدمة وتقاس بـ m.



الشكل3.1: دالة جيبية بسيطة

3.2.1 النبض (التواتر الزاوي)

هو عدد الاهتزازات الكلية التي يقوم بها الجسيم المهتز خلال زمن مقداره 2π ثانية و يقاس بوحدة (rad/s) حيث:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \left[\frac{rad}{s}\right]$$

4.2.1 التردد

يعرف التردد، و يرمز له بالرمز f، على انه عدد الدورات الكاملة المنجزة من طرف الجسيم خلال وحدة الزمن أي أن:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \; [Hz]$$

5.2.1 الطور الابتدائي

يرمز للطور الابتدائي بالرمز φ، وتسمى الزاوية $(\omega t+\varphi)$ زاوية الطور (Phase Angle) وتحدّد قيمة الطور الابتدائي من موقع وسرعة الجسم عند بدء الحركة نسبة إلى محور القياس، فقيمة الثابت φ تتغيّر إذا تغيّر اتجاه محور القياس لأن موقع وسرعة الجسم هي كميات متجهة تعتمد إشارتها على اتجاه محور القياس.

6.2.1 سرعة الحركة التوافقية

إذا كانت إزاحة الجسيم المتحرك تكتب بالشكل : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ فان:

$$v(t) = \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

- و هذا يعني أن سرعة الجسيم المتحرك على تربيع في الطور مع الإزاحة $x(t)$.

7.2.1 تسارع الحركة التوافقية

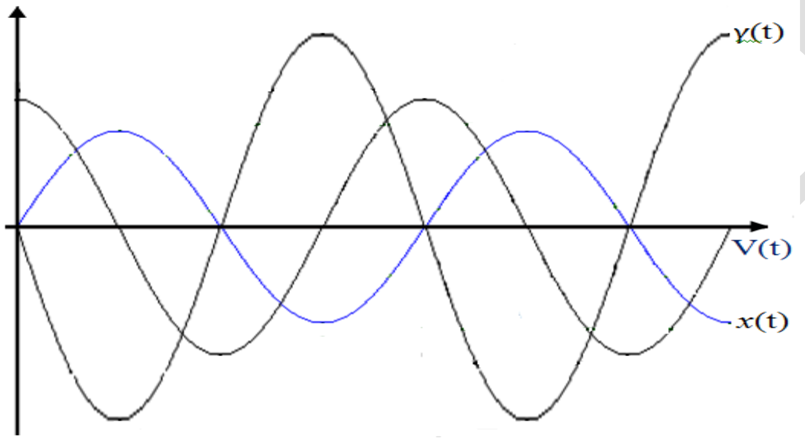
يكتب تارع الجسيم المتحرك وفق المعادلة التالية:

$$\gamma(t) = \ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

- من خلال ما سبق نلاحظ أن تسارع الحركة الجيبية يتناسب مع الإزاحة x(t) ويعاكسها.

ملاحظة: سرعة و تسارع الحركة التوافقية البسيطة عبارة عن دالتين جيبيتين لهما نفس النبض ω و نفس الدور T.



الشكل4.1: إزاحة، سرعة و تسارع الحركة التوافقية بسيطة

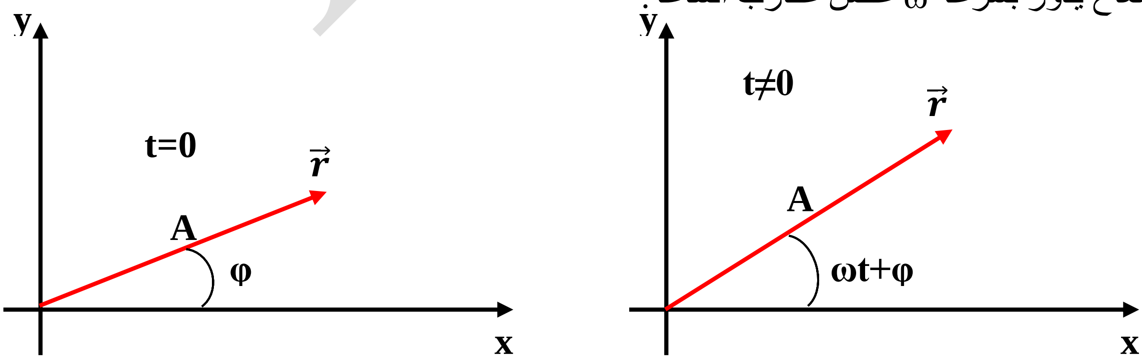
3.1 التمثيل الشعاعي للحركة التوافقية

1.3.1 تمثيل فرينل (الشعاع الدوار)

نقوم باختيار معلم (oxy)، ثم نمثل الحركة الجيبية بشعاع طويلته تساوي سعة الحركة و زاويته θ بحيث.

$\theta=\varphi \quad \rightarrow \quad t=0$ و $\theta=\omega t+\varphi \quad \rightarrow \quad t\neq 0$

و هذا الشعاع يدور بسرعة ω عكس عقارب الساعة.



الشكل5.1: تمثيل فرينل للحركة التوافقية

2.3.1 التمثيل العقدي للحركة التوافقية (الأعداد المركبة)

النقطة $M(x,y)$ يمكن تمثيلها في المستوي العقدي بعدد عقدي Z حيث: $Z = x+iy$ مع $i^2 = 1$.

$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ و $y(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$ ومنه:

$Z = A\cos(\omega t+\varphi) + i\,A\sin(\omega t+\varphi)$

باستعمال معادلة اويلر: $\begin{cases}\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}\end{cases}$ نحصل على

$Z = x+iy = A\,e^{i(\omega t+\varphi)}$ طويلته $|Z| = A = \sqrt{x^2+y^2}$

و عمدة Z: $\cos\theta = \frac{x}{A}$ و $\sin\theta = \frac{y}{A}$

$e^{i\omega t}$. $Z = x+iy = A\,e^{i(\omega t+\varphi)} = A\,e^{i\varphi}$ يسمى $\Lambda = e^{i\varphi}A$ سعة عقدية و $e^{i\omega t}$ يسمى حد الاهتزاز.

3.3.1 القوى في الحركة التوافقية البسيطة

باستعمال المبدأ الأساسي للتحريك: $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

في حالة جملة لها بعد واحد: $F(x) = m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}$

بالنسبة للحركة الجيبية $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2\,x(t)$

و منه $F(x) = -m\omega^2\,x(t)$ نضع $F(x) = -k\,x(t)$

حيث $k=m\omega^2$ يسمى ثابت المرونة وحدته [N/m].

نلاحظ أن القوة متناسبة مع الانتقال (الإزاحة) ومعاكسة له فهي تمثل قوة إرجاع (Restoring force)

4.3.1 الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة

1.4.3.1 الطاقة الحركية

تعرف الطاقة الحركية لجسيم يخضع لحركة سرعتها v بالعلاقة:

$$T = E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

في الحركة التوافقية لدينا عبارة الإزاحة تكتب على الشكل:

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

و منه: $\dot{x} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

نعوض قيمة السرعة في العلاقة السابقة للطاقة الحركية نحصل على:

$$T = E_C = \frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2[1-cos^2(\omega t+\varphi)]$$

$$T = \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - A^2cos^2(\omega t+\varphi)]$$

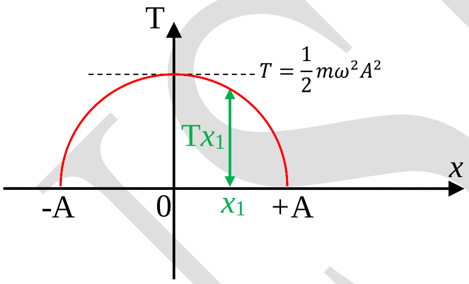
$$T = \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2(t)]$$

- الطاقة الحركية T تكون عظمى عندما يكون $x(t) = 0$.

$$T = T_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \ \rightarrow x(t) = 0$$

- و تكون الطاقة الحركية معدومة عند نهايتي الاهتزاز $(x(t)= \pm A)$.

$$T = 0 \ \rightarrow x(t) = \pm A$$



الشكل6.1: الطاقة الحركية للحركة التوافقية

2.4.3.1 الطاقة اللآمنة

للوصول إلى عبارة الطاقة الكامنة نستعمل العلاقة التالية:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

في الحركة الجيبية $F(x) = -k\,x(t)$ و منه بعد التعويض

$$\frac{dU}{dx} = k.x \ \rightarrow \ U = \int_0^x k.x\,dx \ \rightarrow \ U = \frac{1}{2}k.x^2$$

$$U = \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

- عندما تكون: $x(t) = 0 \ \rightarrow U = 0$

- و عندما تكون: $x(t) = \pm A \ \rightarrow \ U = U_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$

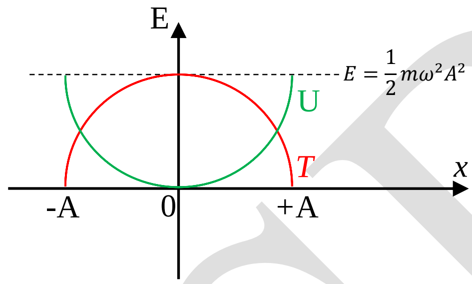
3.4.3.1 الطاقة الكلية

نعلم ان الطاقة الكلية للحركة تعطى بالعلاقة التالية:

$$E = T + U$$

و منه:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2(t)] + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = cte$$



الشكل7.1: الطاقة الكلية للحركة التوافقية

ملاحظة هامة: أثناء اهتزازة واحدة يوجد تبادل بين الطاقة الكامنة والطاقة الحركية، فعندما يبتعد الجسم عن وضع التوازن تزداد الطاقة الكامنة على حساب الطاقة الحركية ويحصل العكس عندما يعود الجسم إلى وضع التوازن.

4.1 تداخل الحركات التوافقية

1.4.1 جمع حركتان جيبيتان لهما نفس الاتجاه و نفس التواتر

ليكن لدينا حركتان من الشكل:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \vec{r_1}$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \vec{r_2}$$

تداخل حركتين:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \vec{r}$$

2.4.1 استعمال تمثيل فرينل

الزاوية التي يصنعها $\vec{r_1}$ مع $\vec{r_2}$ هي:

$$(\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

و بالتالي فطول شعاع المحصلة $\vec{r}$ يبقى ثابتا، و يدور بسرعة زاوية ثابتة ω. و منه فان الشعاع $\vec{r}$ ينشئ حركة توافقية جديدة سعتها A (طويلة $\vec{r}$)، و تواترها الزاوي ω و منه:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- لإيجاد السعة A نستعمل العلاقة التي تعطي محصلة شعاعين:

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2}$$

نقوم بالإسقاط على المحورين oy' و oy' فنحصل على المعادلات التالية حيث:

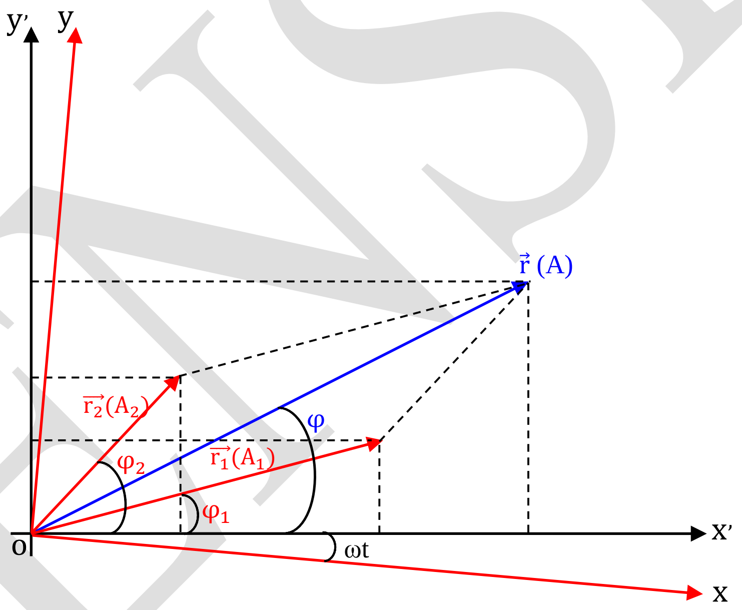
$$\begin{cases} A cos\varphi = A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2 \ldots\ldots 1 \\ A sin\varphi = A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2 \ldots\ldots 2 \end{cases}$$

بتربيع 1 و2 و الجمع طرف إلى طرف نجد:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

- ولإيجاد زاوية الطور (الطور الابتدائي) φ، نقوم بقسمة المعادلة 2 السابقة على المعادلة 1 فنجد:

$$tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$



الشكل8.1: تمثيل فرينل لحركتين لهما نفس الاتجاه و التواتر الزاوي

3.4.1 الطريقة المثلثية

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi)$$

بعد النشر و التبسيط نجد:

السعة A:

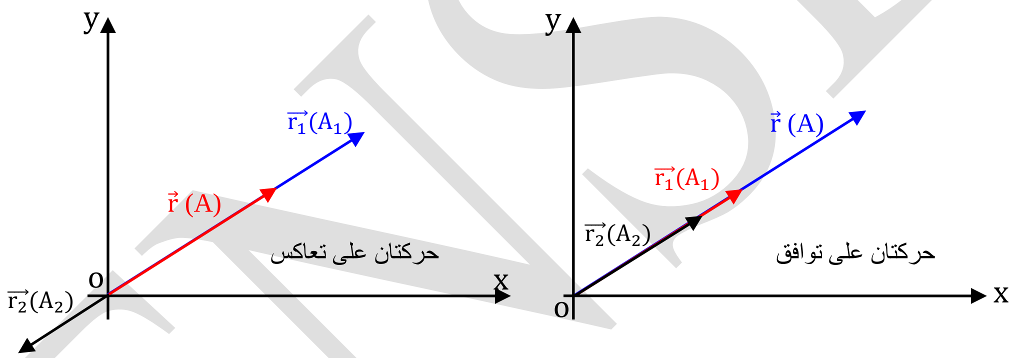
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

زاوية الطور φ:

$$tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$

حالات خاصة:

- حركتان على توافق في الطور $(\varphi_2 - \varphi_1 = 0)$: $A = A_1 + A_2$.
- حركتان على تعاكس في الطور $(\varphi_2 - \varphi_1 = \pi)$: $A = |A_1 - A_2|$.
- حركتان على ترابع في الطور $(\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2})$: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$



الشكل9.1: تمثيل فرينل لحركتين لهما نفس الاتجاه و التواتر الزاوي (على توافق، على تعاكس)

خلاصة: جمع حركتين أو مجموعة من الحركات الجيبية لها نفس الاتجاه و نفس التواتر الزاوي هو عبارة عن حركة جيبية لها نفس التواتر.

4.4.1 جمع حركتان جيبيتان لهما نفس الاتجاه وتواترات مختلفة

ليكن لدينا حركتان من الشكل:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \vec{r_1}$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \vec{r_2}$$

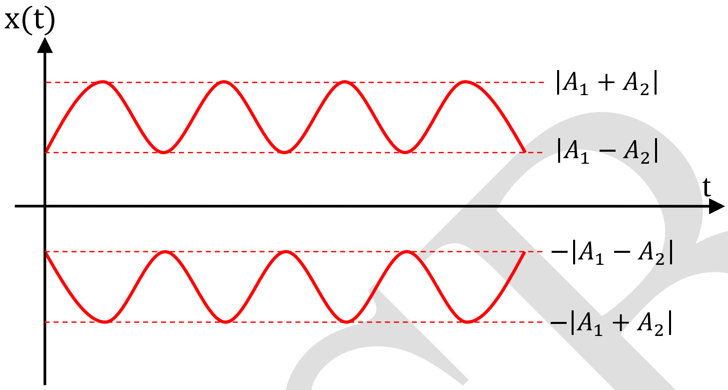
- الزوايا التي يصنعها كل من $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ هي دالة للزمن ليست ثابتة، و بالتالي فشعاع المحصلة $\vec{r}$ ليست له طويلة ثابتة ولا يدور بسرعة زاوية ثابتة.
- فالحركة الناتجة إذن ليست توافقية لكن يمكن مع ذلك حساب طويلة شعاع المحصلة الذي يساوي:

$$A(t)=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]}$$

- بما أن دالة الـ cos محصورة بين 1- و 1+ فان السعة A(t) محصورة بين قيمتين:

$$|A_1-A_2|<A(t)<|A_1+A_2|$$

- ظاهرة اهتزاز السعة بين $|A_1+A_2|$ و $|A_1-A_2|$ تسمى ظاهرة تعديل السعة (تكييف السعة).



الشكل10.1: ظاهرة تعديل السعة

حالة خاصة: لتعديل السعة نفرض الحركات الاهتزازية التالية:

$$x_1(\mathrm{t})=\mathrm{A}\cos(\omega_1\mathrm{t})$$

$$\omega_1=\omega$$

$$x_2(\mathrm{t})=\mathrm{B}\cos(\omega_2\mathrm{t})$$

$$\omega_2=\omega+\Delta\omega$$

$$x_3(\mathrm{t})=\mathrm{B}\cos(\omega_3\mathrm{t})$$

$$\omega_3=\omega-\Delta\omega$$

باستعمال التمثيل العقدي

$$x(t)=x_1(\mathrm{t})+x_2(\mathrm{t})+x_3(\mathrm{t})$$

$$x(t)=Ae^{i\omega t}+Be^{i(\omega+\Delta\omega)t}+Be^{i(\omega-\Delta\omega)t}$$

$$x(t)=e^{i\omega t}\left[A+B\left(e^{i\Delta\omega t}+e^{i(-\Delta\omega)t}\right)\right]$$

$$x(t)=A\left[1+\frac{2B}{A}\cos(\Delta\omega t)\right]e^{i\omega t}$$

بالرجوع إلى التمثيل المثلثي

$$x(t)=A\left[1+\frac{2B}{A}\cos(\Delta\omega t)\right]\cos(\omega t)=A(t)\cos(\omega t)$$

في هذه الحالة أيضا لدينا ظاهرة تعديل السعة حيث:

- $\frac{2B}{A}$ درجة تعديل السعة.
- $\Delta\omega$ نبض التعديل.
- ω نبض الحركة الحاملة.

التعديل: هو عملية تقنية لعلم الإرسال يتم بتأثير اهتزازة تواترها صغير $\Delta\omega$ في اهتزازة تواترها عال "كبير" ω، و يؤدي ذلك الى تغير في عبارة السعة.

1.4.4.1 ظاهرة النبضات (الخفقان)

هي ظاهرة تغير سعة الدالة بصورة توافقية، وتنتج عن تداخل حركتين جيبيتين توافقيتين متساويتين في السعة ومختلفتين قليلا في التواتر الزاوي. تظهر النبضات مثلا عند إطلاق إشارتين صوتيتين من منبع واحد. ندرس فيمايلي حالة مبسطة تتساوى فيها زاويتا الطور.

$$x_1(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cos(\omega_1 \mathrm{t})$$

$$x_2(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cos(\omega_2 \mathrm{t})$$

حيث: $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ اي $\omega_1 \cong \omega_2$

محصله هاتين الحركتين هي:

$$x(t) = x_1(\mathrm{t}) + x_2(\mathrm{t}) = \mathrm{A}[\cos(\omega_1 \mathrm{t}) + \cos(\omega_2 \mathrm{t})]$$

باستعمال العلاقة الرياضية:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ومنه:

$$x(t) = 2\mathrm{A}\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

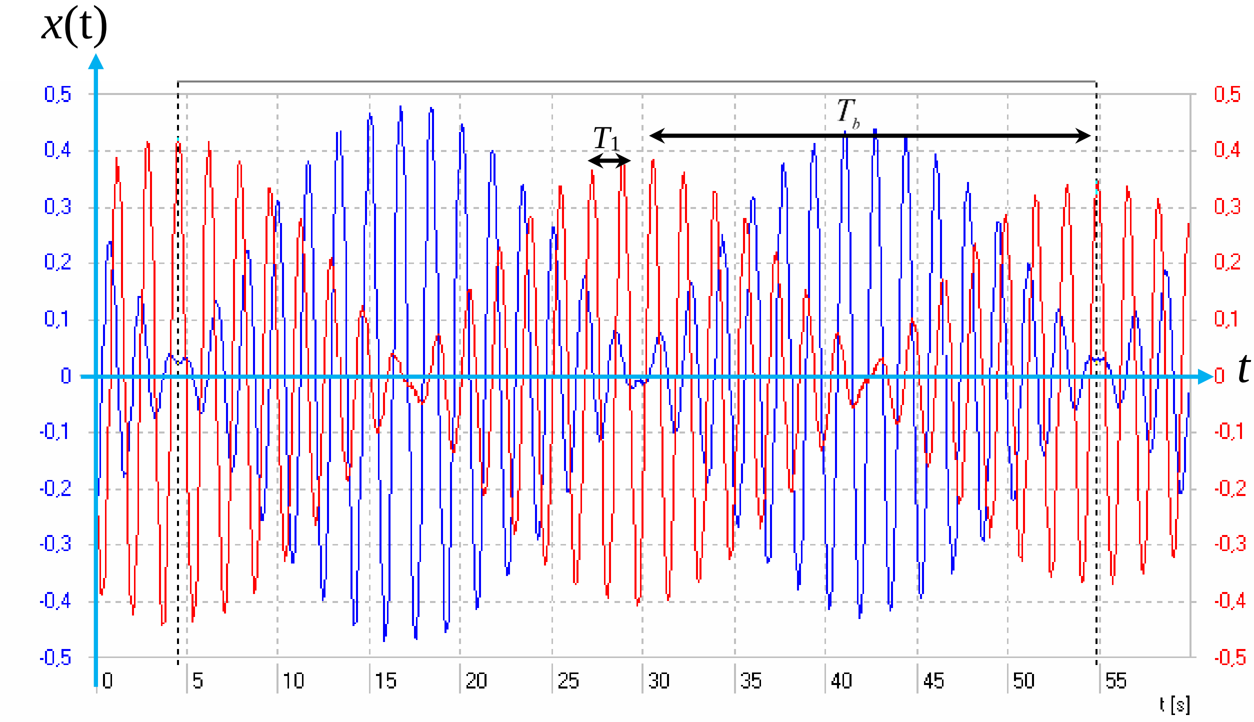
نضع: $\overline{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ حيث $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$

فتصبح معادلة الحركة من الشكل:

$$x(t) = 2\mathrm{A}\cos\overline{\omega}t\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

- رياضيا المحصلة هي حاصل ضرب دالتين جيبيتين $x_1(\mathrm{t})$ و $x_2(\mathrm{t})$. الدالة الأولى تواترها $\overline{\omega}$ و دورها $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2}$ (دور الحركة). الدالة الثانية تواترها $T_2 = \frac{2\pi}{\Delta\omega/2}$.
- الفاصل الزمني الذي يوصل مرور السعة بقيمتين عظيمتين T_b نسميه دور الخفقان (النبضات)

$$T_b = \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



الشكل 11.1: ظاهرة الخفقان

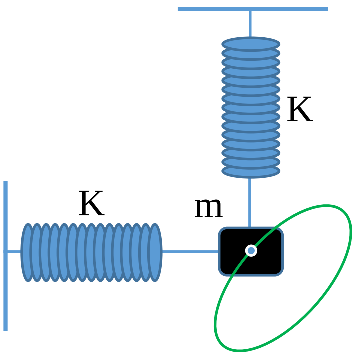
5.4.1 تداخل حركتين متعامدتين لهما نفس التواتر

لتكن لدينا الحركة الأولى على المحور الافقي كمايلي:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

والحركة الثانية على المحور العمودي:

$$y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$



الشكل 12.1: تداخل حركتين متعامدتين

حيث φ فرق الطور بين $x(t)$ و $y(t)$ فتكون الحركة المحصلة كمايلي:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos\omega t\cos\omega - B\sin\omega t\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{x}{A} \\ \sin\omega t = \dfrac{B\cos\omega t\cos\varphi - y}{B\sin\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{x}{A} \\ \sin\omega t = \dfrac{B\frac{x}{A}\cos\varphi - y}{B\sin\varphi} \end{cases}$$

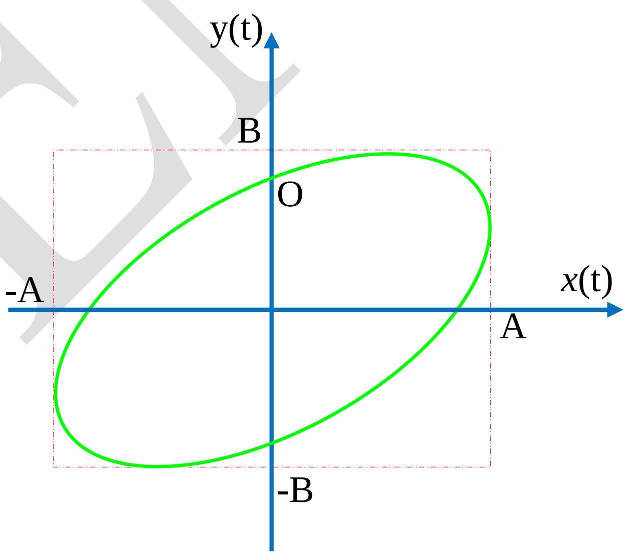
$$\begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{x}{A} \quad \ldots\ldots.1 \\ \sin\omega t = \dfrac{B\,x\cos\varphi - Ay}{AB\sin\varphi} \ldots\ldots.2 \end{cases}$$

$$1^2 + 2^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{B^2x^2\cos^2\varphi + A^2y^2 - 2ABxy\cos\varphi}{A^2B^2\sin^2\varphi}$$

بعد النشر والتبسيط نحصل على:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots *$$

المعادلة * هي معادلة قطع ناقص يقع داخل مستطيل ابعاده (2A ,2B).



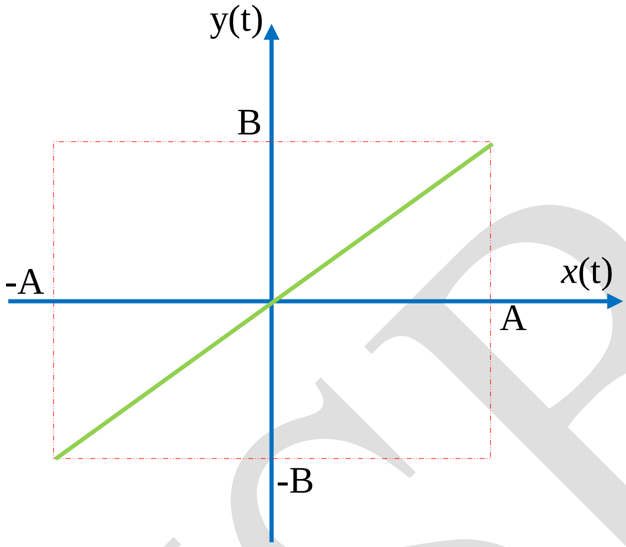
الشكل 13.1 : تداخل حركتين متعامدتين (حلقة لوساجو)

حالات خاصة:

- فرق الطور: $\varphi = 0$

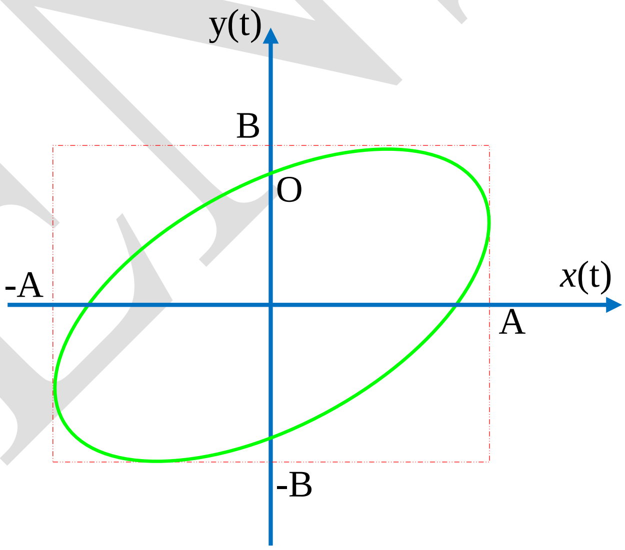
تصبح المعادلة : $\left(\frac{x}{A}-\frac{Y}{B}\right)^2 = 0 \leftrightarrow y = \frac{B}{A}x$

وهي معادلة مستقيم ميله $\frac{B}{A}$ موجب.



- فرق الطور: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

تصبح المعادلة * معادلة قطع ناقص ميله موجب.

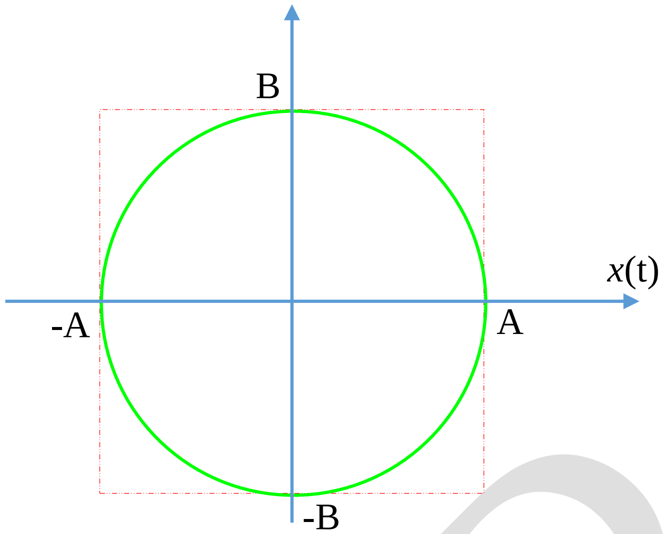


- فرق الطور: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

تصبح المعادلة * كمايلي : $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2} = 1$

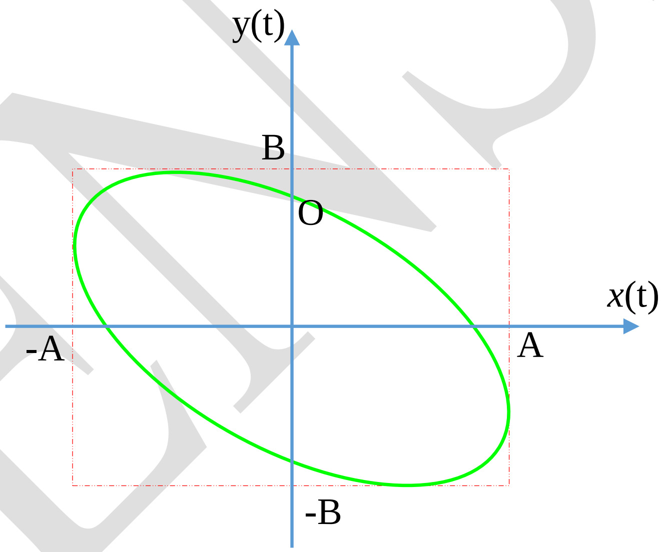
وهي معادلة قطع ناقص قائم.

اذا كان $A = B$ يتحول القطع الناقص الى دائرة.



- فرق الطور: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

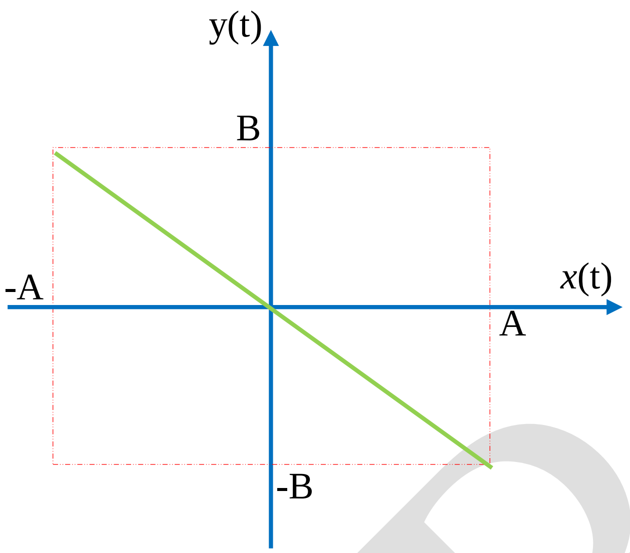
تصبح المعادلة * معادلة قطع ناقص ميله سالب.



- فرق الطور: $\varphi = \pi$

تصبح المعادلة : $\left(\frac{x}{A} + \frac{Y}{B}\right)^2 = 0 \leftrightarrow y = -\frac{B}{A}x$

وهي معادلة مستقيم ميله $\frac{-B}{A}$ سالب.



تمارين الفصل الأول:

التمرين الأول:

اكتب الدوال التالية كعبارة او مجموع لدوال cosinus و sinus

1- $x = 2\cos(5t+\pi/6)$

2- $x = 3\sin 4\pi(t-0.125)$

التمرين الثاني:

تعرف تحركات نقطة مادية ما بالدوال التالية:

1- $x = -2\cos 5\pi t + 3\sin 5\pi t$

2- $x = 3\cos 10t - 2\sin 10t$

اكتب كل معادلة على شكل دالة cosinus

التمرين الثالث:

يعرف موضع نقطة مادية على مستقيم موجه بدلالة الدوال التالية:

1- $x = 5\cos(25t+\pi/6)$

2- $x = 2\cos 5\pi(t-0.05)$

3- $x=5\cos 3\pi t$

4- $x=3\sin(10t-\pi/4)$

5- $x=-4\sin\pi(2t+0.25)$

حيث x وحدتها Cm و t وحدتها S و الطور ب Rad

احسب:

1- السعة

2- الطور الابتدائي، التواتر الزاوي، التردد و الدور الزمني.

3- عبارة السرعة و التسارع بدلالة الزمن.

4- القيم القصوى للسرعة و التسارع.

5- ارسم الدوال $x(t)$ في التمثيل الكارتيزي.

التمرين الرابع:

نظام له حركة توافقية جيبية ذات تردد $f=500Hz$ و سعة $A=1mm$، إذا افترضنا أن النظام متأخر بـ $1/4000$ s بالنسبة إلى معلم متحرك (له نفس A و T

1- اكتب معادلة $a(t), v(t), x(t)$ بدلالة cosinus

2- مثل كل من $a(t), v(t), x(t)$ ا- تمثيل شعاعي

ب- تمثيل كارتيزي

التمرين الخامس:

لنفترض لدينا نظام يتحرك بصيغة جيبية ذات تردد $f=10Hz$ وسعة حركته $A=3cm$، مع العلم انه في اللحظة الابتدائية $t=0$ كانت الإزاحة $x=2cm$ والسرعة سالبة.

- ماهي معادلة الحركة لهذا النظام؟

التمرين السادس:

محرك كهربائي يدور بسرعة 3600 دورة في الثانية مما يؤدي إلى اهتزاز قاعدته بحركة توافقية بسيطة ذات سعة مقدارها $0.5m$ ناتجة عن عدم تمركز محور دورانها.

1- احسب القيمة العظمى لتسارع قاعدة المحرك.

2- إذا كانت كتلة المحرك تساوي $100kg$، فاحسب القيمة العظمى للقوة التي يطبقها المحرك على الأرضية

التمرين السابع:

اوجد صيغة عامة لدور الحركة الاهتزازية باستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة ثم اوجد الطاقة الحركية T في حالة الحركة الجيبية، وبرهن أن القيمتين الوسطيتين للطاقة الحركية والطاقة الكامنة بالنسبة لهزاز توافقي متساويتان.

الفصل الثاني: تحليل فورييه للحركة الاهتزازية

2 تحليل فورييه

1.2 سلاسل فورييه

لتكن الدالة f(x) دالة دورية في المجال π– الى π+، تمتلك عدد محدود من النقاط الصغرى و العظمى، و للتكامل $\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|dx$ قيمة منتهية. تحت هذه الشروط يمكن كتابة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ldots \ldots .1$$

حيث a_0، a_n و b_n تسمى معاملات فورييه.

2.2 حساب المعاملات a_0، a_n و b_n

لإيجاد المعامل a_n نضرب المعادلة 1 في cosmx و نجري التكامل في المجال [-π, +π]

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)cosmxdx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} cosmxdx$$

$$+ \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx \cos mx\, dx + \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin nx \cos mx\, dx$$

إذا كان n≠m فان كل التكاملات تساوي الصفر (0)

إذا كان n=m فان:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)cosmxdx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} cosnxdx$$

$$+ \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos^2 nx + \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin nx \cos nx\, dx$$

لدينا
$$\begin{cases} \cos 2nx = cox^2 nx - sin^2 nx \\ \cos 2nx = 2cos^2 nx - 1 \\ cox^2 nx = \frac{cox2nx+1}{2} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} a_n \cos^2 nx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{cos2nx + 1}{2} dx = a_n \pi$$

و منه النتيجة تصبح كمايلي:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)cosnxdx = a_n \pi$$

إذا تصبح:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).cosnx.dx$$

ولإيجاد المعاملات b_n نضرب المعادلة 1 في sinnx و نجري التكامل في المجال [-π, +π]، نجد في الأخير.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).sinnx.dx$$

و لإيجاد المعامل a_0 نجري التكامل مباشرة في المجال [-π, +π]

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)cosnxdx = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{a_0}{2}dx = a_0\pi$$

ومنه $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).dx$

ملاحظات:

- $\frac{a_0}{2}$ تمثل القيمة الوسطى للدالة للدالة f(x) خلال الدور.
- إذا كانت الدالة f(x) دالة فردية كل معاملات a_n تساوي الصفر (0) بما في ذلك a_0.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}(b_n \sin nx)$$

- إذا كانت الدالة f(x) دالة زوجية كل معاملات b_n تساوي الصفر (0).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos nx)$$

3.2 عبارة معاملات فوريبه في حالة الزمن المتحول

نضع:

$$\begin{cases} x \to \omega t \\ f(x) \to f(t) \\ -\pi \le x \le +\pi, \\ -\frac{\pi}{\omega} \le t \le +\frac{\pi}{\omega}, \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x).cosnx.dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t).cosn\omega t.d\omega t = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t).cosn\omega t.dt$$

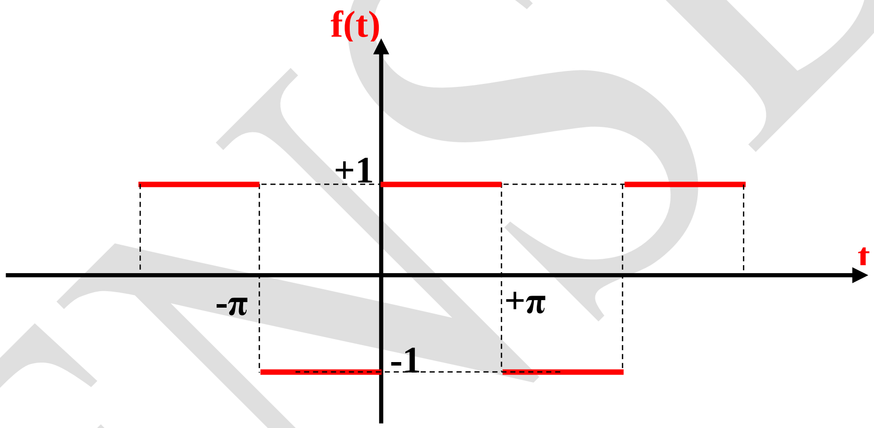
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t).cosn\omega t.dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t).sinn\omega t.dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t).dt$$

الدالة المربعة: هي دالة غير مستقرة قيمتها +1 خلال نصف الدور و-1 خلال نصف الدور الأخر.

$$f(t)\begin{cases} -1\,,\ -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ +1\,,\ 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$



الشكل 1.2: الدالة المربعة

يلاحظ من البيان أن الدالة $f(x)$ دالة فردية إذن معاملات a_n و a_0 تساوي الصفر (0).

حساب معاملات b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t).sinn\omega t.dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -sinn\omega t\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -sinnt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sinnt\,dt = \frac{1}{n\pi}[cosnt]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}[cosnt]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[2 - 2cosn\pi]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[1 - cosn\pi]$$

$$b_n = \begin{cases} 0\,, & si\ n = 2p \text{ زوجي} \\ \dfrac{4}{n\pi}\,, & si\ n = 2p+1 \text{ فردي} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{p=0}^{n=\infty} \left(\frac{4}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1) \right)$$

4.2 الصيغة العقدية لسلاسل فورييه

باستعمال معادلات اويلر :
$$\begin{cases} \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \end{cases}$$

في نشر فورييه:
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = a_n \left(\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_n}{2} \left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right)$$

$$= e^{in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + e^{-in\omega t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right)$$

$$= e^{in\omega t} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) + e^{-in\omega t} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right)$$

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}$$

حيث c_n و c_{-n} عددان مركبان مترافقان و بالتالي الصيغة العقدية لنشر فورييه

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} \right)$$

بوضع : $c_0 = \frac{a_0}{2}$ القيمة الوسطية لـ $f(t)$.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(c_n e^{in\omega t} \right)$$

- حساب معاملات C_n

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_0^T f(t) cosn\omega t dt - \frac{2}{T}\int_0^T if(t) sinn\omega t dt \right]$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)(cosn\omega t - isinn\omega t)dt$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

- نظرية باسوفال أو نظرية الطاقة

لتكن لدينا ظاهرة فيزيائية معينة $f(t)$ (تيار متناوب مثلا)

القيمة الفعالة هي: $f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$

حيث القيمة المتوسطة لهذه الدالة هي:

$$f_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

تمارين الفصل الثاني:

التمرين الاول:

اوجد الرسم البياني ونشر بواسطة فوريبه للدوال التالية:

1- $F(t) = \begin{cases} -t\ ; -2\leq t\leq 0 \\ +t\ ; 0\leq t\leq 2 \end{cases}$

2- $F(t) = \begin{cases} +t\ ; 0\leq t\leq 2 \\ -t+4\ ; 0\leq t\leq 4 \end{cases}$

3- $F(t) = t^2\ ; -\pi\leq t\leq \pi$

4- $F(t) = t^2\ ; 0\leq t\leq 2\pi$

التمرين الثاني:

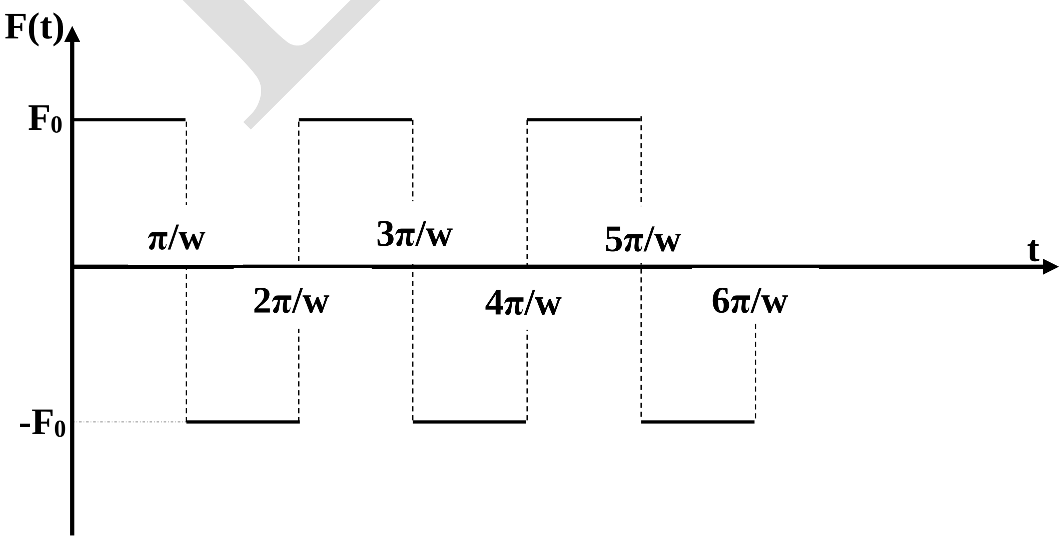
جسم كتلته m يخضع إلى القوة المبينة في الشكل ادناه.

1- اكتب معادلة حركة الجسم باستعمال متسلسلات فوربيه.

2- تأكد أن حلها يكتب كمايلي:

$x(t) = a + bt + A\sin wt + b\sin 3wt + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

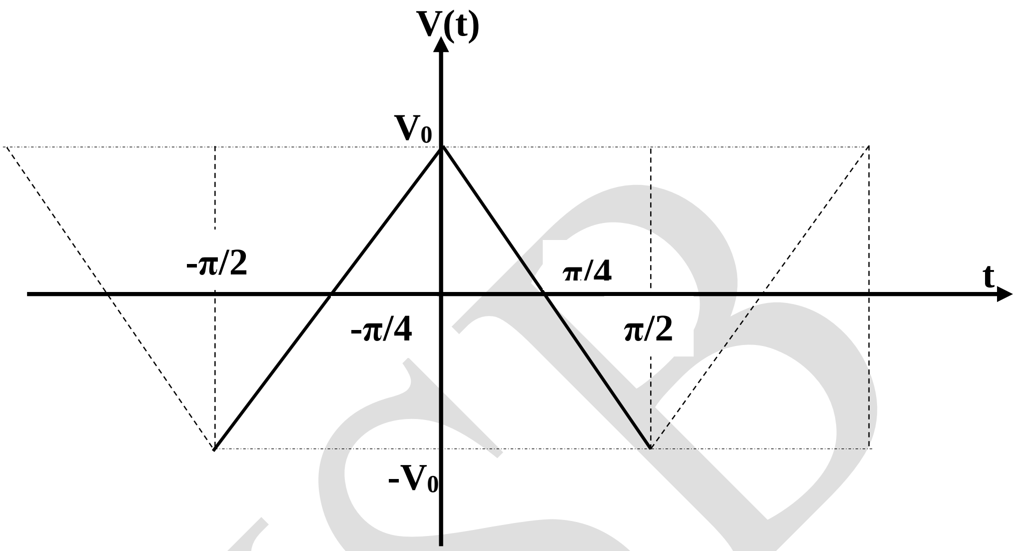
حيث a و b ثابتان اختياريان.



التمرين الثالث:

فرق جهد بهيئة إشارة دورية مثلثية (الشكل المقابل).

- اوجد عبارة التيار المار عبر المكثفة باستعمال نشر فورييه في صيغته الحقيقية و العقدية.
-



الفصل الثالث: الاهتزازات الحرة الغير المخمدة ذات درجة واحدة من الحرية

3. الاهتزازات الحرة الغير المخمدة

1.3 الإحداثيات المعممة

- يمكن تعيين موضع نقطة مادية m تعيينا كاملا في الفضاء بثلاث إحداثيات وقد تكون هذه الإحداثيات كارتيزية أو اسطوانية أو كروية، ونحتاج إلى إحداثيتان فقط إذا كانت النقطة المادية مقيدة الحركة في مستو أو سطح ثابت. بينما إذا كانت تتحرك على خط مستقيم أو منحني فعندئذ يكفي إحداثي معمم واحد.
- في حالة منظومة متكونة من N جسيم نحتاج بصورة عامة إلى 3N من الإحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في أن، أما إذا فرضت قيود على المنظومة فنحتاج إلى عدد من الإحداثيات اقل من 3N.

مثلا إذا كان الجسيم عبارة عن جسم صلب لابد من توفر 6 إحداثيات معممة لتحديد موضعه تحديدا كاملا.

- 3 إحداثيات لمركز ثقله
- بالإضافة إلى 3 أخرى تتمثل في زوايا اويلر للميلان.

ويتطلب بصورة عامة أصغر عدد معين n لتعيين الشكل العام للمنظومة وسوف نرمز لهذه الإحداثيات بالرموز

$$q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots\dots\dots\dots q_n(t)$$

والتي تسمى الإحداثيات معممة.

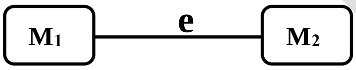
2.3 درجة الحرية

هي عدد الإحداثيات المعممة المستقلة " التي لا تشمل الزمن".

الإحداثيات المعممة لهذا النظام هي 6 إحداثيات معممة $M_1 \rightarrow (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1)$ و $M_2 \rightarrow (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)$ و

العلاقة التي تربط بين الإحداثيات المعممة

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



فعدد درجات الحرية d=N-n حيث:

n : هو عدد العلاقات (المعادلات) التي تربط بين الإحداثيات المعممة.

N : هو عدد الإحداثيات المعممة.

في هذه الحالة عدد درجات الحرية هو: d=6-1=5

- مشتقات الاحداثيات المعممة تسمى السرعات المعممة.

الإحداثيات $\quad q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots\dots\dots\dots q_n(t)$

السرعات $\quad \dot{q_1}(t), \dot{q_2}(t), \dot{q_3}(t), \dots\dots\dots\dots \dot{q_n}(t)$

3.3 الاهتزازات الحرة غير المخمدة

مقدمة:

الاهتزازات الحرة غير المخمدة هي تلك الاهتزازات الناتجة عن إزاحة النظام عن وضع توازنه، أو اكتساب إحدى نقاطه المادية سرعة ابتدائية ثم نتركه يهتز بحرية دون أي قوة خارجية. نهتم في هذا الفصل بدراسة الأنظمة التي يكون فيها فقدان الطاقة بسبب التخامد الضعيف (غير المخمد) أثناء الاهتزاز بحيث يمكن اعتبارها أنظمة محافظة بصورة تقريبية.

1.3.3 اشتقاق المعادلة التفاضلية للحركة الحرة غير المخمدة

لاشتقاق المعادلة التفاضلية لحركة هنالك عدة طرق أهمها:

- طريقة الاتزان.
- طريقة لاغرانج.
- طريقة انحفاظ الطاقة.

- طريقة الاتزان:

نعتمد على استخدام قانون نيوتن الثاني للحركة لاشتقاق المعادلة التفاضلية للنظام.

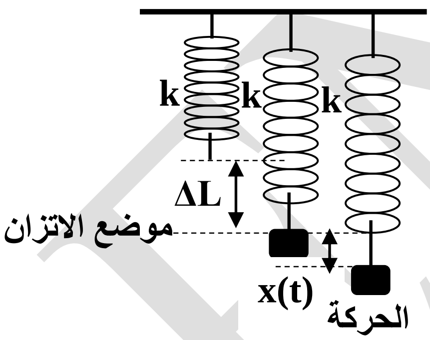
مثال1: نظام ميكانيكي: نابض-كتلة (m) (قوى الاحتكاك مهملة).

m: مقدار الكتلة kg

k: ثابت مرونة النابض N/m

L_0: الطول الابتدائي للنابض m

ΔL: استطالة النابض تحت تأثير الكتلة.



الشكل 1.3: حركة كتلة معلقة بنابض

- بعد تعليق الكتلة نختار موضع الاتزان الذي يكون في مستوي نهاية النابض وهو في حالة سكون ونحدد اتجاها موجبا للحركة.

طريقة نيوتن "المبدأ الأساسي للتحريك يعطى بالعلاقة التالية:

- حركة انسحابية $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{\gamma}$
- حركة دورانية $\sum \mu(F) = J\ddot{\theta}$

- في حالة السكون: تؤثر على الكتلة قوتان هما قوة الثقل وقوة شد الخيط ومنه.

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \vec{0} \rightarrow m\vec{g} + k.\overrightarrow{\Delta L} = \vec{0}$$

الإسقاط على محور الحركة نجد: $mg + k.\Delta L = 0$

- في حالة الحركة:

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = m\vec{\gamma} = m\ddot{x} \rightarrow mg - k.(\Delta L + x) = m\ddot{x}$$

$$mg - k.\Delta L - kx = m\ddot{x} \;\rightarrow\; \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية لحركة غير متخامدة لنظام لها درجة واحدة من الحرية، تكتب على الشكل التالي بدلالة الإحداثيات المعممة.

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

حيث q(t) يمكن أن تكون إزاحة حركة انسحابية x(t) أو حركة دورانية θ(t) أو اهتزاز شحنة كهربائية q(t) أو ضغط هوائي p(t) ....

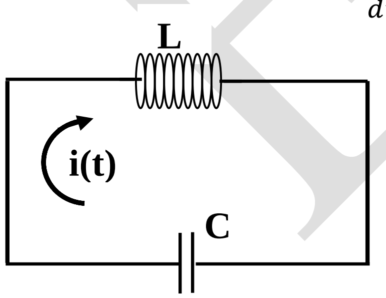
يسمى النبض الطبيعي للحركة $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و دورها $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

مثال2: نظام كهربائي: دارة (L,C)، في هذه الحالة نفرض أن المقاومة الداخلية للوشيعة L مهملة.

في النظام الكهربائي نستعمل الطريقة المكافئة لقانون نيوتن وهي طريقة كيرشوف (مجموع فروق الجهد في دارة مغلقة يساوي الصفر).

- إذا كان هناك شحنة ابتدائية في الدارة فان: $V_L + V_C = 0$

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 0$$



نشتق بالنسبة إلى t: $L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = 0$

و منه: $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة الحرة غير المخمدة حيث:

النبض الطبيعي: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ و الدور الطبيعي في هذه الحالة هو $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ملاحظة: يمكن التعبير عن المعادلة السابقة بواسطة الشحنة الكهربائية. $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}$

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 0 \;\rightarrow L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}q(t) = 0 \rightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

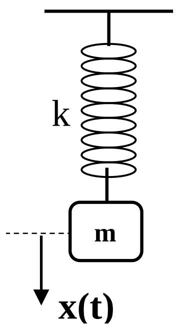
ملاحظة: في كلا النظامين الكهربائي و الميكانيكي نلاحظ أن ω_0 و T_0 هما دالتان لخصائص النظام لا يتعلقان بمقدار سعة الاهتزاز و لا بالشروط الابتدائية.

- طريقة لاغرانج:

طريقة معممة طورها لاغرانج بالاعتماد على الطاقة الحركية والطاقة الكامنة. بالنسبة لنظام يخضع لحركة حرة غير مخمدة تأخذ معادلة لاغرانج الشكل التالي:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

q_i إحداثي معمم و L دالة لاغرانج حيث : $L = T - U$



مثال1: نظام ميكانيكي: نابض- كتلة (m) (قوى الاحتكاك مهملة).

لدينا إحداثي معمم واحد x(t) يعبر عن حركة النظام.

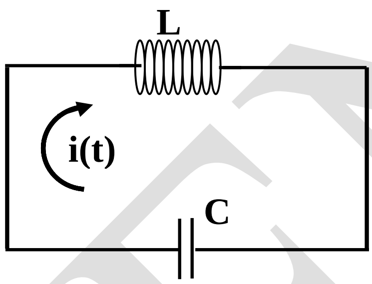
الطاقة الحركية : $T=\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$

الطاقة الكامنة: $U=\frac{1}{2}\;x^2$

دالة لاغرانج : $L=T-U=\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2-\frac{1}{2}\,k\,x^2$

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \rightarrow m\ddot{x}+kx=0 \rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة.



مثال2: نظام كهربائي (L,C) نهمل المقاومة الداخلية للنظام.

الطاقة الحركية: $\mathrm{T}=\frac{1}{2}\;\mathrm{i}^2=\frac{1}{2}L\dot{q}^2$

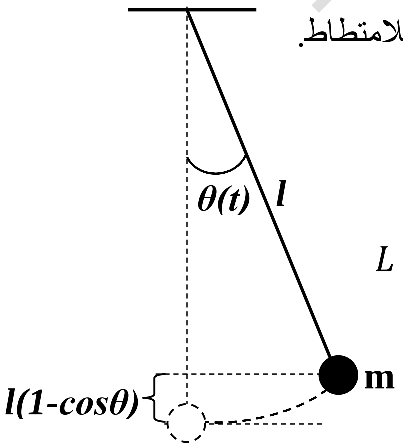
الطاقة الكامنة : $\mathrm{U}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{c}\;\mathrm{q}^2$

دالة لاغرانج : $L=T-U=\frac{1}{2}\mathrm{L}\dot{\mathrm{q}}^2-\frac{1}{2C}\;\mathrm{q}^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \rightarrow L\,\ddot{q}+\frac{1}{c}q=0 \rightarrow \ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة.

مثال3: نظام ميكانيكي (نواس بسيط)



يتكون النواس من كتلة نقطية m وخيط طوله l مهمل الكتلة و غير قابل للامتطاط.

الطاقة الحركية: $T=\frac{1}{2}\;\dot{v}^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

الطاقة الكامنة : $U=mgl\,(1-cos\theta)$

دالة لاغرانج : $L=T-U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-cos\theta)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \rightarrow ml^2\ddot{\theta}+mglsin\theta=0$$

عند الاهتزاز بزوايا صغيرة يكون $\sin\theta\approx\theta$ ومنه:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

وهي وهي المعادلة التفاضلية للحركة حيث:

النبض الطبيعي: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{l}$ و الدور الطبيعي في هذه الحالة هو $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- طريقة انحفاظ الطاقة:

تعتمد هذه الطريقة على مبدأ انحفاظ الطاقة، إذ يبقى مقدار الطاقة الكلية للنظام محافظ أي ثابتا في أي لحظة زمنية، فإذا عبرنا عن الطاقة الكلية بدلالة الطاقة الحركية والطاقة الكامنة يكون.

$$E = T + U$$

حيث:

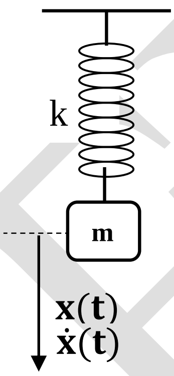
E: الطاقة الكلية للنظام T : الطاقة الحركية U: الطاقة الكامنة

نأخذ المشتقة الأولى للمعادلة السابقة بالنسبة للزمن. $\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$

ومنها يتم إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة.

مثال: نظام ميكانيكي (كتلة- نابض)

نجد الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنظام مقارنة مع وضع الاتزان.



الطاقة الحركية : $T = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$

الطاقة الكامنة: $U = \frac{1}{2}\ \ x^2$

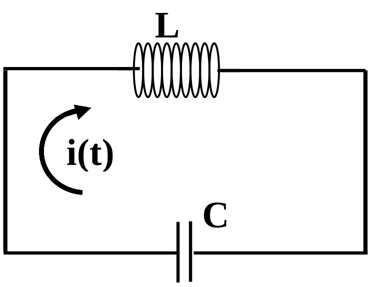
الطاقة الكلية للنظام : $E = T + U = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,\dot{\mathrm{x}}^2 + \frac{1}{2}\,k\,\mathrm{x}^2$

المشتقة الأولى للطاقة الكلية:

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = 0 \rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة.

مثال: نظام كهربائي (L,C) نهمل المقاومة الداخلية للنظام.



الطاقة الحركية: $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,L\,\mathrm{i}^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$

الطاقة الكامنة : $\mathrm{U} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,\mathrm{q}^2$

دالة الكلية للنظام : $E = T + U = \frac{1}{2}\mathrm{L}\dot{\mathrm{q}}^2 - \frac{1}{2C}\,\mathrm{q}^2$

نشتق بالنسبة للزمن. $\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow L\dot{q}\,\ddot{q} + \frac{1}{c}q\dot{q} = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة.

2.3.3 حل المعادلة التفاضلية

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q=0 \ldots\ldots *$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بمعاملات ثابتة وبدون طرف ثان. لغرض حل هذه المعادلة نفرض أن الحل يكون على الشكل التالي:

$$q(t)=Ae^{rt} \to \ \ddot{q}=Ar^2e^{rt}$$

نعوض في المعادلة * السابقة نجد:

$$Ar^2e^{rt}+\omega_0^2Are^{rt}=0 \to r^2+\omega_0^2=0 \to r^2=-\omega_0^2 \to r_{1,2}=\pm i\omega_0$$

و منه:

$$q(t)=A_1e^{i\omega_0 t}+A_2e^{-i\omega_0 t}$$

وهذا الحل يمكن أن يكتب على الشكل التالي:

$$q(t)=A\,cos\omega_0 t+B\,sin\omega_0 t$$

أو على الشكل:

$$q(t)=C\,cos(\omega_0 t+\varphi)$$

حيث

$$C=\sqrt{A^2+B^2}$$

ملاحظة: الثوابت A_1 وB_1، A وB او C و φ يتم تحديدها من الشروط الابتدائية.

تمارين الفصل الثالث:

التمرين الأول:

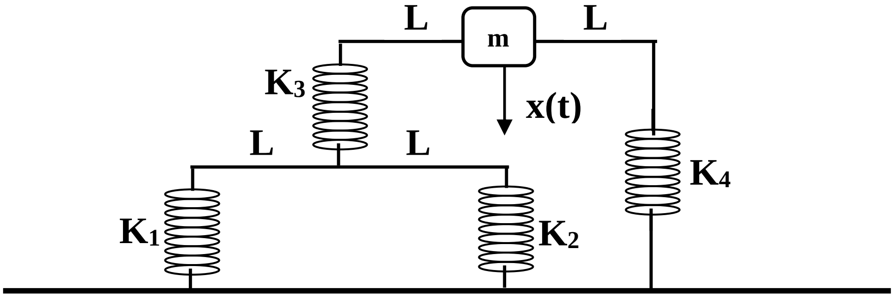
نعلق كتلة m=1kg في نابض شاقولي، فنلاحظ انه يستطيل في حالة السكون بمقدار 0.1m. الكتلة الموجودة في حالة الاتزان نعطيها حركة نحو الأعلى، فتبدأ تهتز بسعة 0.005m، بإهمال قوى الاحتكاك.

1- اوجد ثابت مرونة النابض K.
2- اوجد معادلة الحركة، واحسب دورها.
3- ماهي عبارة الإزاحة x(t) بدلالة الزمن؟
4- اوجد عبارة السرعة والتسارع في هذه الحالة.

التمرين الثاني:

نظام مهتز يتكون من كتلة m متصلة بذراعين وأربعة نوابض كما في الشكل المقابل، فإذا افترضنا أن الكتلة تتحرك باتجاه عمودي فقط، مع إهمال كتلة الذراعين.

- اوجد التواتر الطبيعي للنظام (النبض).



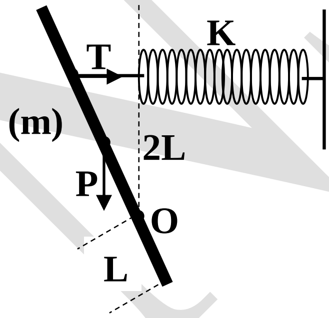
التمرين الثالث:

نظام مهتز يتكون من ساق كتلتها m وطولها L4 تدور حول محور يمر بالنقطة O بدون احتكاك.

- عند وضع التوازن تكون الساق في الوضعية الشاقولية (والنابض في حالة راحة)، نزيح الساق عن وضع توازنها بزاوية θ ثم نتركها حرة لحالها.

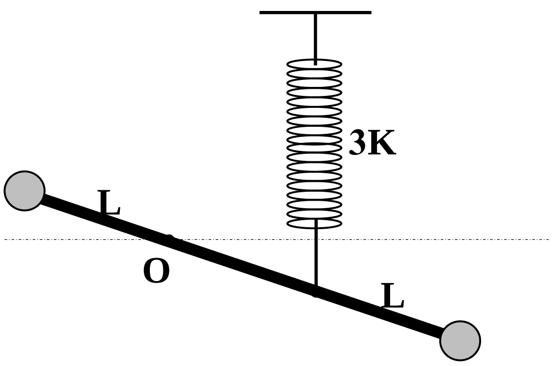
1- اوجد المعادلة التفاضلية للحركة مستعملا المبدأ الأساسي للتحريك في الحركة الدورانية.

2- ماهي الشروط الواجب توفرها حتى يخضع النظام إلى حركة اهتزازية توافقية.



التمرين الرابع:

النظام المهتز يتكون من ساق مهملة الكتلة طولها 2L ونابض ثابت مرونته 3K، وكتلتين نقطيتين مثبتتين في حافتي الساق كما يوضحه الشكل المقابل. عند وضع التوازن تكون الساق في الوضعية الأفقية.



نزيح الجملة عن وضع توازنها بزاوية θ ثم نتركها حرة لحالها.

1- عبر عن قيمة الطاقة الكامنة U بدلالة θ.
2- ماهي الشروط الواجب توفرها في وضع التوازن.
3- بسط عبارة الطاقة الكامنة U في هذه الحالة.
4- اوجد عبارة الطاقة الحركية T.
5- استنتج عبارة دالة لاغرانج.
6- اوجد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة لاغرانج.

التمرين الخامس:

يتكون النظام المهتز من كتلتين نقطيتين معلقتين في نهايتي ساق طويلة وكتلة نقطية ثالثة معلقة في ساق قصيرة معلقة عموديا بالساق الطويلة وثلاثة نوابض مرنة كما يوضحه الشكل المقابل. تأخذ الساق الطويلة الوضعية الشاقولية عند التوازن. نزيح الجملة عن وضع توازنها بزاوية θ ثم نتركها حرة لحالها.

1- اوجد عبارة الطاقة الكامنة U بدلالة θ.
2- ماهو الشرط الواجب توفرها عند وضع التوازن.
3- بسط عبارة الطاقة الكامنة U.
4- اوجد عبارة الطاقة الحركية T.
5- اوجد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة.
6- احسب التواتر الزاوي للحركة.

الفصل الرابع: الاهتزازات الحرة المتخامدة للأنظمة ذات درجة واحدة من الحرية

4. الاهتزازات الحرة المخمدة

تمهيد:

هي تلك الاهتزازات التي تتناقص سعتها مع مرور الزمن حتى تنعدم وذلك بسبب تبدد طاقتها نتيجة تأثير قوى التخامد أو الاحتكاك عليها. وهناك أنواع من التخامد نذكر منها:

1- **التخامد اللزوجي**: يظهر عند حركة الأجسام بسرعة معتدلة في مائع، ويتناسب مقدار القوة المقاومة للحركة طرديا مع السرعة وتزداد قيمتها بازدياد لزوجة المائع وكثافته.

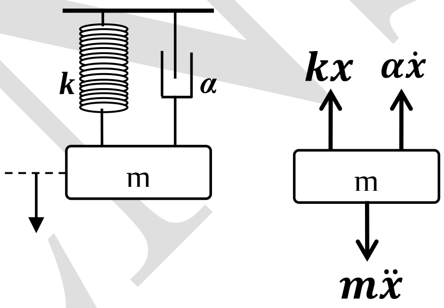
2- **التخامد الصلب (تخامد كولومب)**: يظهر عند انزلاق سطحين جافين او جسمين صلبين على بعضهما البعض ومقداره ثابت في اغلب الأحيان.

التخامد اللزوجي للاهتزازات الحرة: يعتبر التخامد اللزوجي أكثر الأنواع بساطة في التحليل الرياضي و يتم تمثيل قوة التخامد كدالة للسرعة وفق العلاقة التالية: $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$

حيث: α ثابت التخامد اللزوجي [Ns/m].

نعتبر أن الهزاز التوافقي (K.m) يتحرك داخل مائع معين بحيث تولد لزوجة هذا المائع قوة احتكاك تساوي:

$$F = -\alpha\dot{x}$$



الشكل 1.4: حركة كتلة معلقة بنابض تخضع الى تخامد لزوجي.

- طريقة نيوتن:

هناك ثلاثة قوى تؤثر على الكتلة المتحركة اثناء الاهتزاز:

- قوة القصور (قوة العطالة).
- قوة التخامد وهي دالة للسرعة.
- قوة النابض وهي دالة للإزاحة.

تظهر هذه القوى في المعادلة التفاضلية للحركة وفق طريقة الاتزان

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - kx(t) \Rightarrow m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

- **طريقة لاغرانج:**

يمكن اشتقاق المعادلة التفاضلية للحركة وفق طريقة لاغرانج بتطبيق المعادلة:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F(t)$$

النظام الميكانيكي يتكون من كتلة ومخمد ونابض.

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x} - \frac{1}{2}kx^2 \qquad /F = -\alpha\dot{x}$$

ومنه بعد التعويض نجد:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = -\alpha\dot{x}(t) \Rightarrow m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

و يمكن ان نكتب معادلة لاغرانج كالتالي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

حيث D دالة التبدد (fonction de dissipation)

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$$

$$F = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = -\alpha\dot{q}$$

يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل: $\ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

او على الشكل المعمم التالي: $\ddot{q}(t) + 2\lambda\,\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$

هذه المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تعبر عن حركة النظام المهتز بصورة حرة مخمدة، وعند مقارنة المعادلتين الاخيرتين نجد:

$\lambda = \frac{\alpha}{2m}[\mathrm{s}]$ معامل التخامد.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ النبض الذاتي (الطبيعي).

$\xi = \frac{\lambda}{\omega_0}$ نسبة التخامد.

1.1.4 حل المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\ddot{q} + 2\lambda\,\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية بمعاملات ثابتة وبدون طرف ثان. نفرض ان الحل الرياضي لهذه المعادلة يكون على الشكل التالي:

$$q(t) = Ae^{rt} \Rightarrow \dot{q} = rAe^{rt} \Rightarrow \ddot{q} = r^2Ae^{rt}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

و هي المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية مميزها يكون على الشكل التالي:

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$$

يعتمد الحل الناتج على العلاقة بين قيمتي λ و ω_0 وهناك ثلاث حالات:

الحالة الأولى: تخامد ضعيف $\Delta' < 0 \rightarrow \lambda < \omega_0$

ينتج في هذه الحالة حلين مركبين:

$$r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda - i\omega_a$$

$$r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda + i\omega_a$$

حيث: $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ هو التواتر الطبيعي الزاوي للاهتزازات المتخامدة، و منه دور الحركة المخمدة (شبه الدور) يكون على الشكل:

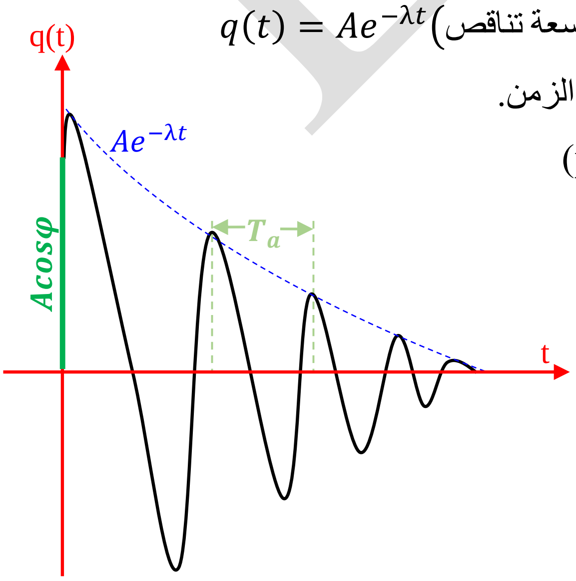
$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0^2\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

يعطى حل المعادلة التفاضلية على الشكل: $q(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$

$$q(t) = A_1e^{(-\lambda + i\omega_a)t} + A_2e^{(-\lambda - i\omega_a)t} = A_1e^{-\lambda t}e^{i\omega_a t} + A_2e^{-\lambda t}e^{-i\omega_a t}$$

$$q(t) = e^{-\lambda t}(A_1e^{i\omega_a t} + A_2e^{-i\omega_a t})$$

$$q(t) = \underbrace{Ae^{-\lambda t}}_{\text{السعة تناقص}}\ \underbrace{\cos(\omega_a t + \varphi)}_{\text{الاهتزاز حد}}$$



يمثل الشكل التالي الشكل البياني للحركة المتخامدة بدلالة الزمن.

نوع الحركة: حركة شبه دورية (pseudo periodique)

الحالة الثانية: تخامد حرج $\Delta' = 0 \rightarrow \lambda = \omega_0$

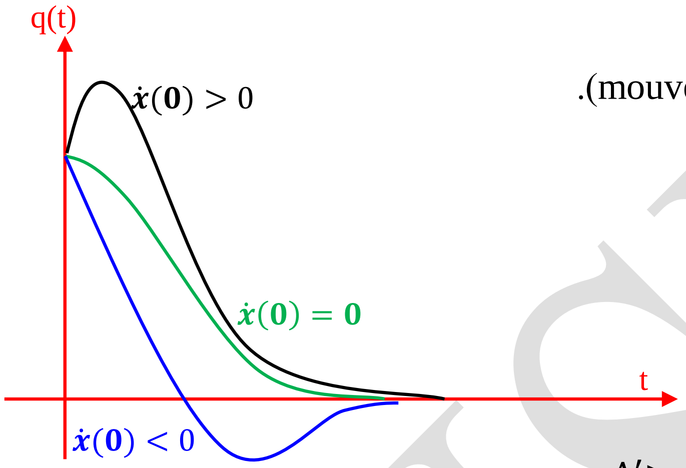
$$\lambda = \lambda_c = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \lambda_c = \frac{\alpha_C}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha_c = 2\sqrt{km}$$

ينتج في هذه الحالة حلا مضاعف: $r_1 = r_2 = -\lambda$

و منه يصبح حل المعادلة التفاضلية: $q(t) = (_1 + A_2 t)e^{-\lambda t}$

الدالة q(t) لا تتضمن حدا اهتزازيا وبالتالي فالكتلة m لا تؤدي الى حركة اهتزازية وانما الى تناقص سعة الحركة حتى تنعدم دون اي اهتزاز.

نوع الحركة: حركة حرجة (mouvement critique).



الحالة الثالثة: تخامد ثقيل $\Delta' > 0 \rightarrow \lambda > \omega_0$

ينتج في هذه الحالة حلين حقيقيين:

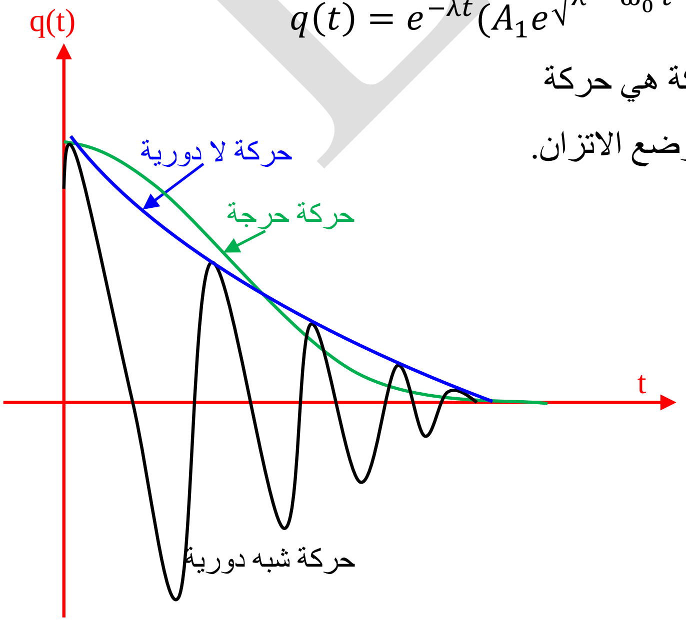
$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

ومنه حل المعادلة التفاضلية يكون على الشكل:

$$q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t})$$

هنا كذلك ليس لدينا حدا اهتزازيا وبالتالي فالحركة هي حركة لا دورية تتناقص مع الزمن وتعود الكتلة الى موضع الاتزان.



2.4.1 التناقص اللوغارتمي:

هي طريق عملية وبسيطة نسبيا لإيجاد التخامد في النظام الديناميكي، ويتم هذا من خلال تحديد نسبة تناقص سعة اهتزازاته الحرة المتخامدة، ويعرف التناقص اللوغارتمي بأنه اللوغاريتم الطبيعي للنسبة بين اي سعتين متتاليتين يفصلهما زمن دوري واحد T_a.

نأخذ حلا لاهتزازات النظام وفق العلاقة:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$$

تعطى قيمة التناقص اللوغارتمي وفق العلاقة التالية:

$$\delta = lin\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = lin\frac{Ae^{-\lambda t_1}\cos(\omega_a t_1 + \varphi)}{Ae^{-\lambda t_2}\cos(\omega_a t_2 + \varphi)} = lin.e^{\lambda(t_2-t_1)}.\frac{\cos(\omega_a t_1 + \varphi)}{\cos(\omega_a t_2 + \varphi)}$$

بما ان: $T_2=T_1+T_a$ فان قيمتي الجيب تمام متساويتان و منه:

$$\delta = lin.e^{\lambda(t_2-t_1)} = lin.e^{\lambda T_a}$$

$$\delta = \lambda.T_a$$

و لدينا مما سبق نسبة التخامد: $\xi = \frac{\lambda}{\omega_0} \Rightarrow T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\delta = \lambda.T_a \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \ldots\ldots..2$$

ومن خلال العلاقة الاخيرة يمكن ايجاد نسبة التخامد ξ من خلال التناقص اللوغارتمي.

اما اذا اخذنا النسبة بين ازاحتين يفصل بينهما زمن يعادل عدة ازمنة دورية $n\ T_a$ يكون $T_2=T_1+nT_a$ ومنه

$$\delta = \frac{2n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

تبين العلاقة (2) ان السعة تتناقص بصورة أكبر مع تزايد التخامد في النظام، وهي تستخدم عمليا لإيجاد مقداري ξ و α في الانظمة المهتزة.

3.4.1 حساب الطاقة المتبددة خلال دور واحد

ليكن لدينا نظام يؤدي حركة اهتزازية شبه دورية بتواتر ω_a وزمن دوري T_a. ونفرض ان هذا النظام يغذى بطاقة خارجية بحيث تبقى سعة الاهتزازات ثابتة في المقدار اي:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$$

ومنه تكون السرعة: $\dot{x}(t) = -A\omega_a\sin(\omega_a t + \varphi)$

لحساب الطاقة المتبددة (الضائعة) ΔE نقوم بحساب العمل الذي تنجزه قوة التخامد خلال دورة واحدة:

$$\delta W = \int_t^{t+T_a} F(x)\, dx = \int_t^{t+T_a} -\alpha\dot{x}\, dx$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \dot{x}dt$$

نعوض قيمة dx نجد:

$$\delta W = \int_t^{t+T_a} -\alpha\dot{x}\, dx = \int_t^{t+T_a} -\alpha\dot{x}^2\, dt = \int_t^{t+T_a} -\alpha[-A\omega_a \sin(\omega_a t + \varphi)]^2 dt$$

$$\delta W = -\alpha A^2 {\omega_a}^2 \int_t^{t+T_a} sin^2(\omega_a t + \varphi)dt$$

$$= -\alpha A^2 {\omega_a}^2 \int_t^{t+T_a} \frac{1 + cos2(\omega_a t + \varphi)}{2} dt$$

$$\delta W = \Delta E = -\alpha A^2 \pi \omega_a$$

ومنه يصبح:

$$\delta W = \Delta E = -2\pi m\lambda A^2 \pi\omega_a \qquad / \; \alpha = 2m\lambda$$

و هذا مقدار العمل الذي يوافق الطاقة المفقودة خلال دورة واحدة بسبب تأثير قوة التخامد اللزوجي و يلاحظ ان الطاقة المتبددة (الضائعة) تتناسب طرديا مع مقدار معامل التخامد α ومربع سعة الاهتزاز A^2 للنظام المهتز.

4.4.1 معامل الجودة

يمثل قدرة النظام على تخزين الطاقة حيث:

$$Q = 2\pi \frac{\text{الطاقة العظمى المخزنة}}{\text{الطاقة المتبددة خلال } Ta}$$

$$E_{max} = T_{max} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mA^2 {\omega_a}^2$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} mA^2 {\omega_a}^2}{\alpha A^2 \pi\omega_a} = \frac{m\omega_a}{\alpha} = \frac{\omega_a}{2\lambda}$$

مثال: دراسة الدارة الكهربائية RLC على التسلسل

طريقة كيرشوف: $V_R + V_L + V_C = 0 \Rightarrow R_1 i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt + ri = 0$

بما ان $i = \frac{dq}{dt}$ فان: $(R_1 + r)\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$

نضع $R = R_1 + r$ فتصبح المعادلة السابقة كالتالي:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0 \Rightarrow \ddot{q}+\frac{L}{R}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$

بالمطابقة مع المعادلة:

$$\ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2q=0$$

نجد: $\lambda=\frac{R}{2L}[s]$ معامل التخامد و $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ النبض الطبيعي.

الحل الرياضي المقترح لحل هذه المعادلة هو:

$$q(t)=Ae^{rt} \Rightarrow \dot{q}=rAe^{rt} \Rightarrow \ddot{q}=r^2Ae^{rt}$$

بعد الاشتقاق والتعويض نجد:

$$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$$

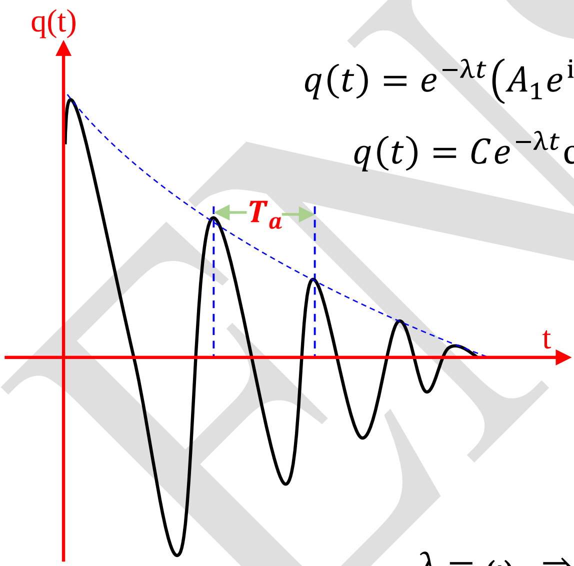
الحالة الاولى: تخامد ضعيف $\lambda<\omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L}<\sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$

في هذه الحالة: $r_{1,2}=-\lambda\pm i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}=-\lambda\pm i\omega_a$

الحل يكون في هذه الحالة من الشكل:

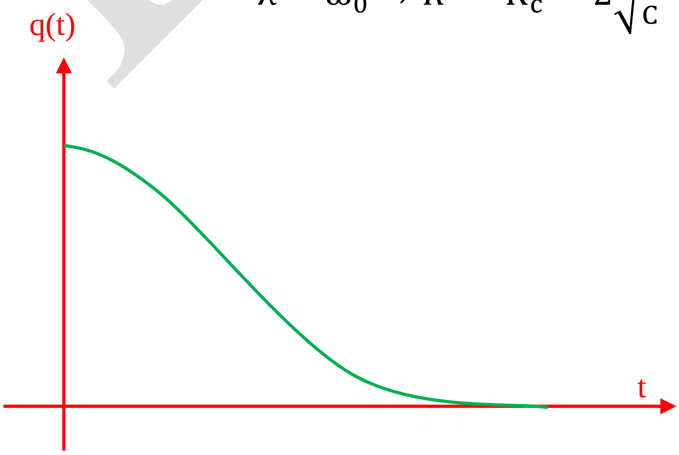
$$q(t)=e^{-\lambda t}\left(A_1e^{i\omega_at}+A_2e^{-i\omega_at}\right)$$

$$q(t)=Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_at+\varphi)$$



الحالة الثانية: تخامد حرج $\lambda=\omega_0 \Rightarrow R=R_c=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

و هي القيمة الحرجة للمقاومة

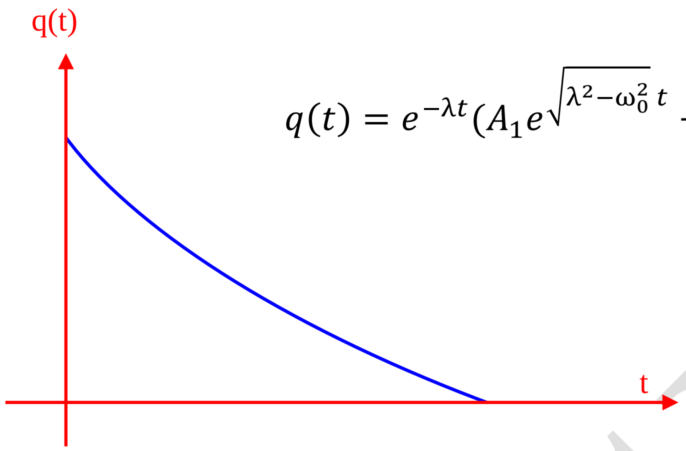


الحالة الثالثة: تخامد ثقيل $\lambda > \omega_0 \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

في هذه الحالة للمعادلة حلين حقيقيين: $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

ومنه حل المعادلة التفاضلية يكون على الشكل:

$$q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t})$$



مثال: نحقق دارة كهربائية RLC على التسلسل لمقاومة R=100Ω و H $L=10^{-3}$ و $C=10^{-3}\mu F$ و التي كانت مشحونة ابتدائيا بفرق جهد مقداره 100V التيار الابتدائي معدوم و تغلق القاطعة عند t=0.

1. هل يؤدي هذا النظام حركة اهتزازية.
2. في حالة الاهتزاز ماهي قيمة شبه النبض.
3. ماهي عبارة فرق الجهد بين طرفي المكثفة C.

الحل:

1. لدينا مما سبق: معامل التخامد $\lambda = \frac{R}{2L} = 5.10^4\Omega/H$ و $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^6\text{rad/s}$ النبض الطبيعي.

نلاحظ ان: $\lambda < \omega_0$ و منه النظام يؤدي حركة اهتزازية شبه دورية.

2. شبه النبض: $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \approx \omega_0 = 10^6\text{rad/s}$
3. لدينا مما سبق:

$$q(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$V_C(0) = V_0\cos(\varphi) = 100V \Rightarrow cos\varphi = 1 \Rightarrow V_0 = 100V$$

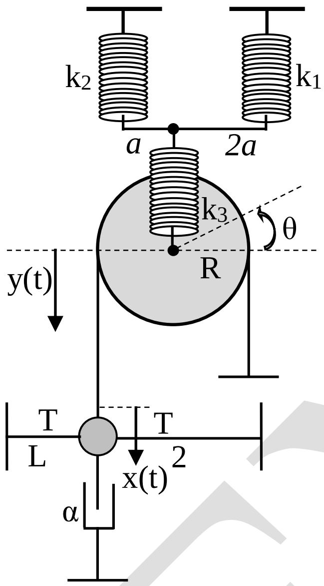
$$V_C(t) = 100\, e^{-5.10^4 t}\cos(10^6 t)$$

تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول:

قرص كتلته m_1 ونصف قطره R معلق في نهايته نابض k_3 يتصل من الاعلى بذراع ونابضين k_1 و k_2 كما هو موضح في الشكل. يتحرك القرص بصورة انسحابية عمودية $y(t)$ وحركة دورانية $\theta(t)$ حول مركزه، ويلتف حول محيطه خيط يتصل بالكتلة m_2 المرتبطة بوترين ومخمد. فإذا افترضنا لغرض تبسيط الحل:

- حركة الذراع العلوي والكتلة m_2 بإزاحات صغيرة.
- تحافظ قوة الشد الابتدائية T_0 في كل من الوترين على مقدارها اثناء الحركة.
- اهمال كتل الذراع، الخيط، الوترين والنوابض.
- اهمال تأثير الاحتكاك.



$K_1 = k.\ \ k_2 = 2k.\ \ k_3 = 6k.\ \ m_1 = (8/3)m.$

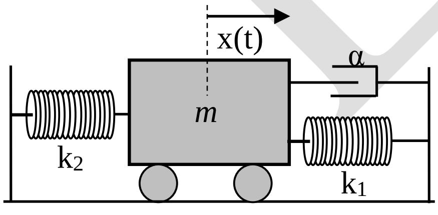
$m_2 = m.\ \ \alpha = \sqrt{km}.\ \ T_0 = kL$

المطلوب:

- تبسيط النظام وإيجاد علاقة الإحداثيات ببعضها.
- اشتقاق معادلة الحركة بدلالة الاحداثي $x(t)$.
- تحديد نوع التخامد وطبيعة الحركة.

التمرين الثاني:

عربة كتلتها m تتحرك على سطح افقي بدون احتكاك وترتبط بنابضين ومخمد كما في الشكل في حالة السكون كان النابض الاول k_1 محتفظا بطوله الطبيعي وبدون قوة توتر ابتدائية، في حين كان النابض الثاني k_2 منضغط بمقدار ثابت A_0. فإذا كان معامل التخامد معلوم $\alpha=2\sqrt{km}$.



- اشتق معادلة الحركة للعربة.
- ايجاد الحل $x(t)$ الذي يعبر عن حركة الكتلة بدلالة الزمن.
- حدد الموضع الذي تتوقف فيه الكتلة m عن الحركة.

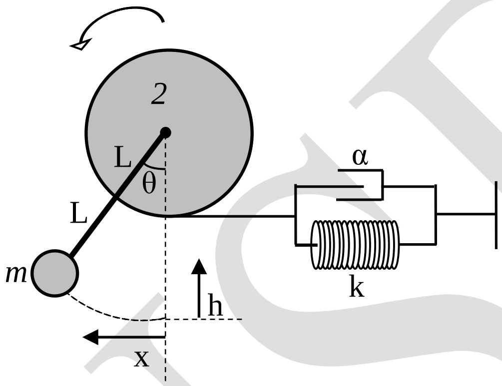
التمرين الثالث:

في الشكل المقابل، النظام يهتز حول مهتز ثابت يمر بمركز القرص، الساق ذات كتلة مهملة معلقة في نهايتها كتلة m، في وضع التوازن تكون الساق في الوضعية الافقية، نزيح النظام بزاوية θ عن وضع توازنه ثم نتركه حرا.

- عبر عن الطاقة الكامنة U للنظام بدلالة θ.

- اوجد شرط التوازن واثبت ان تشوه النابض الابتدائي x_0 معدوم.
- بسط عبارة U في هذه الحالة (من خلال شرط التوازن).
- اعط عبارة الطاقة الحركية T للنظام.
- اوجد عبارة لاغرانج، واشتق المعادلة التفاضلية للحركة.
- ماهو الشرط اللازم توفره حتى يخضع النظام الى حركة شبه دورية.
- احسب القيمة العظمى التي من اجلها تبقى الحركة شبه دورية.

$k=4N/M$. $m=0,1Kg$. $L=0,5m$. $g=10m/s^2$. $J=(1/2)MR^2$



الفصل الخامس: الاهتزازات القسرية لنظام ذي درجة حرية واحدة

5. الاهتزازات القسرية

تمهيد:

تظهر الاهتزازات القسرية في المنظومات الديناميكية المختلفة نتيجة تسليط اشارة توافقية قسرية عليها وهذه الاشارة تكون على شكل قوة خارجية دورية او ازاحة دورية.

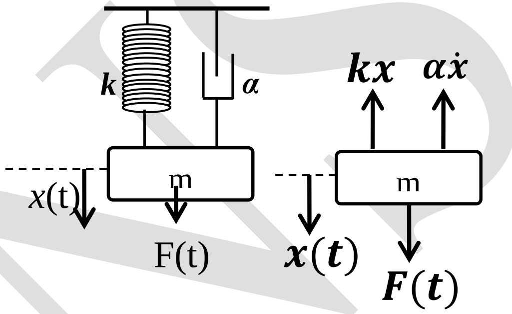
تكتب المعادلة التفاضلية للاهتزازات القسرية التوافقية على النحو التالي بصيغتها المعممة:

$$a\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + cq(t) = F(t)$$

حيث: F(t) هي قوة الاثارة الدورية (قوة خارجية دورية).

1.5 الاهتزازات القسرية بتأثير قوة خارجية دورية

إذا اثرت قوة خارجية دورية توافقية F(t) على كتلة نظام ميكانيكي ذو درجة حرية واحدة كما في الشكل.



الشكل 1.5: حركة اهتزازية قسرية

وكانت قوة الاثارة التوافقية كالتالي:

$$F(t) = F_0 \, cos\Omega t \;\Rightarrow F(t) = F_0 \, e^{i\Omega t}$$

حيث: F_0 هي سعة الاثارة.

Ω: هو التواتر الزاوي للإثارة.

تكون المعادلة التفاضلية لحركة النظام كمايلي:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \, e^{i\Omega t}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية وبطرف ثان غير منعدم ومعاملات ثابتة.

2.5 حل المعادلة التفاضلية

حلها يتكون من شقين هما:

الحل العام x_h حل المعادلة بدون طرف ثان اي:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

الحل الخاص x_p حل المعادلة بوجود الطرف الثان. ومنه الحل يكون: **$x(t)=x_h+x_p$**

ايجاد الحل العام x_h

لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \Rightarrow \ \ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

وحلها يتضمن ثلاث حالات:

تخامد خفيف: $\lambda < \omega_0$ حركة اهتزازية شبه دورية

$$x_h(t) = Ae^{-\lambda t}\ \cos(\omega_a t + \varphi)$$

تخامد حرج: $\lambda = \omega_0$ حركة حرجة لا دورية

$$x_h(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\lambda t}$$

تخامد ثقيل: $\lambda > \omega_0$ حركة لا دورية

$$q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}$$

ايجاد الحل الخاص x_p

$$m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = F_0\ e^{i\Omega t} \ldots\ldots\ldots 1$$

لإيجاد الحل الخاص نفرض ان الحل الرياضي يأخذ الشكل التالي:

$$x_p = A.\,e^{i(\Omega t+\varphi)} \Rightarrow \ \dot{x} = iAe^{i(\Omega t+\varphi)} \Rightarrow \ddot{x} = -A^2 e^{i(\Omega t+\varphi)}$$

و التعويض في المعادلة السابقة:

$$(-m\Omega^2 + i\alpha\Omega + k)Ae^{i(\Omega t+\varphi)} = F_0\ e^{i\Omega t}$$

بالقسمة على $e^{i(\Omega t+\varphi)}$ نجد: $(-m\Omega^2 + i\alpha\Omega + k)A = F_0\ e^{-i\varphi} \Rightarrow (-m\Omega^2 + i\alpha\Omega +$
$k)A = F_0(cos\varphi + isin\varphi)$

بعد المطابقة نجد:

$$\begin{cases} cos\varphi = \dfrac{A}{F_0}(k - m\Omega^2) \\[2ex] \sin\varphi = -\dfrac{A}{F_0}(\alpha\Omega) \end{cases}$$

نستعمل العلاقة الرياضية التالية: $sin^2 + cos^2 = 1$

ومنه:

$$\frac{A^2}{F^2}(k - m\Omega^2)^2 + \frac{A^2}{F_0}(\alpha\Omega)^2 = 1$$

$$A(\Omega) = \sqrt{\frac{F_0^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}}$$

A : هي سعة الحركة القسرية.

فرق الطور φ:

$$tg\varphi = \frac{-\alpha\Omega}{k - m\Omega^2} \Rightarrow \varphi = arctg(\frac{-\alpha\Omega}{k - m\Omega^2})$$

ملاحظة: نلاحظ ان اشارة φ سالبة بمعنى ان الحركة القسرية للنظام متأخرة عن الاثارة الخارجية F(t) بزاوية طور مقدارها φ.

يصبح الحل الخاص x_p كمايلي:

$$x_p = \sqrt{\frac{F_0^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}} e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كانت الاثارة الخارجية التوافقية لها الشكل التالي:

$F(t) = F_0\, cos\Omega t$ او $F(t) = F_0\, sin\Omega t$

فان الحل الخاص يكون:

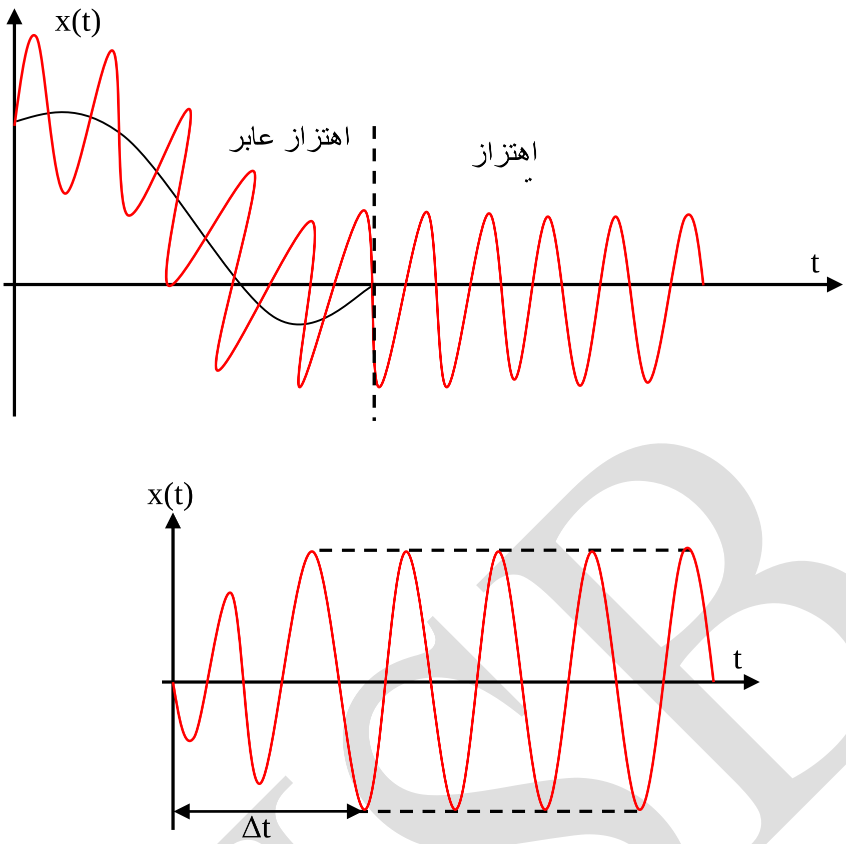
$$x_p = \sqrt{\frac{F_0^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}} \cos(\Omega t + \varphi)$$

او $x_p = \sqrt{\frac{F_0^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (\alpha\Omega)^2}} sin(\Omega t + \varphi)$

على الترتيب.

- يتكون الحل x(t) من جزأين الاول x_h يمثل الاهتزازات الحرة المتخامدة للنظام بتواتر ω_a الناتجة عن وضعية النظام من ازاحة و سرعة في اللحظة t=0. وهي التي تتناقص مع الزمن حتى تتلاشى بعد انقضاء زمن كاف. والثاني x_p يمثل الاهتزاز القسري بتواتر Ω وسعة ثابتة A(Ω) وهو النظام الدائم.
- بعد زمن معين يزول الاهتزاز العابر وتصبح الحركة الكلية:

$$x(t) = x_p(t)$$



الشكل 2.5: المنحنى البياني للحركة الاهتزازية القسرية

3.5 مناقشة العوامل المؤثرة على سعة الاهتزاز القسري

وجدنا ان الحركة الاهتزازية التوافقية تتواصل بسعة ثابتة A وتواتر Ω مادامت القوة F تؤثر على الكتلة m، ونلاحظ من خلال معادلة السعة A ان مقدار السعة يتغير بدلالة F_0، m، k و Ω.

$$A(\Omega)=\sqrt{\frac{F_0^2}{(\mathrm{k}-\mathrm{m}\Omega^2)^2+(\alpha\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega)=\frac{F_0}{\sqrt{(1-\frac{m}{k}\Omega^2)^2+(\frac{\alpha}{k}\Omega)^2}}$$

نضع : $A_0=\frac{\mathrm{F_0}}{\mathrm{k}}$ ، $\omega_0=\frac{k}{\mathrm{m}}$ ،

$$\frac{\alpha}{k}=\frac{\alpha}{\mathrm{m}}.\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}=2\lambda\frac{1}{\omega_0^2}=2\xi\frac{1}{\omega_0}$$

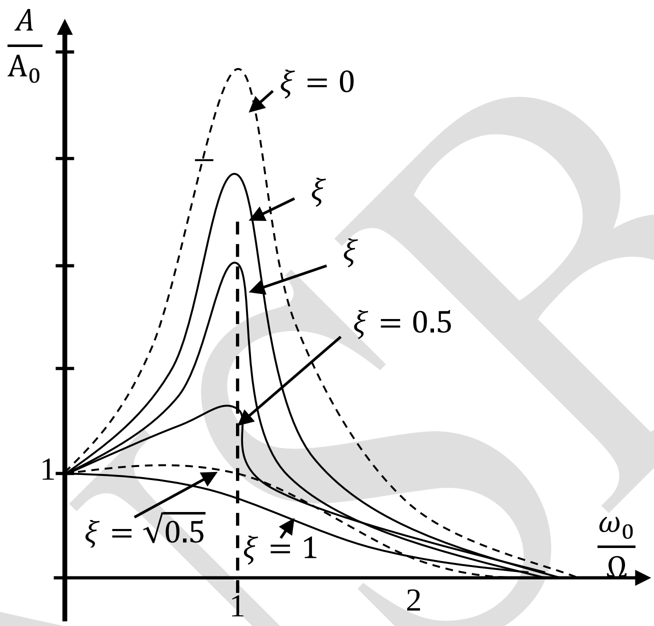
يصبح لدينا:

$$\frac{A(\Omega)}{F_0/k}=\frac{A}{A_0}\frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{\Omega}{\omega_0})^2)^2+(2\xi\frac{\Omega}{\omega})^2}}$$

ونفس الشئ بالنسبة الى الطور φ:

$$tg\varphi = \frac{-2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\Omega}{\omega_0})^2}$$

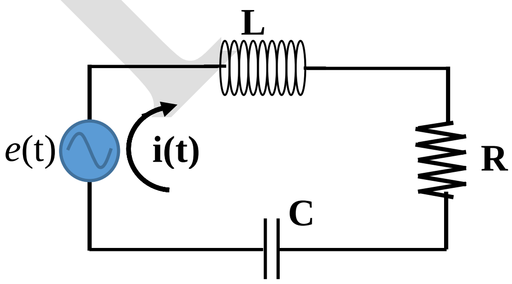
نلاحظ من خلال معادلة السعة A السابقة ان السعة A اصبحت تتناسب طرديا مع A_0 (اي مع سعة القوة الخارجية F_0) وتتغير لاخطيا بزيادة مقدار Ω وتتناقص بزيادة نسبة التخامد ξ.



الشكل 3.5: علاقة $\frac{A}{A_0}$ بدلالة $\frac{\omega_0}{\Omega}$

4.5 الاهتزازات القسرية لنظام كهربائي

دارة كهربائية تتكون من وشيعة L ومقاومة R ومكثفة C على التسلسل مربوطة بمولد للذبذبات e(t) كما هو موضح في الشكل:



نأخذ قيمة ذبذبة توافقية لفارق جهد الاثارة : $e(t) = E_0\, e^{i\Omega t}$ تكون معادلة فروق الجهد للدارة وفق قانون كيرشوف.

$$V_R + V_L + V_C = e(t) \quad \ldots\ldots *$$

$$* \Rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e(t)$$

$$\Rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e(t)$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$\Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

ويتم حل هذه المعادلة بنفس الطريق السابقة: $q(t) = q_h + q_p$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

نأخذ : $q(t) = A\, e^{i(\Omega t+\varphi)}$ لإيجاد الحل الخاص.

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة السابقة تنتج سعة الذبذبات القسرية.

$$A = \frac{E_0}{(\frac{1}{C} - L\Omega^2)^2 + (R\Omega)^2}$$

بضرب البسط والمقام في C واعادة كتابتها تصبح المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{(1-(\frac{\Omega}{\omega_0})^2)^2 + (2\xi\frac{\Omega}{\omega_0})^2}$$

حيث : $A_0 = \mathrm{CE}_0$ ، $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$ و $\xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}$

في التطبيقات العملية قياس فارق الجهد بين طرفي المكثف في دارة كهربائية يعطى بالشكل: $V_C = \frac{1}{C}\,q(t) \Rightarrow V_C = V\, e^{i(\Omega t+\varphi)}$ و منه تصبح العلاقة:

$$\frac{V}{E_0} = \frac{1}{(1-(\frac{\Omega}{\omega_0})^2)^2+(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0})^2}$$

$$tg\varphi = -\frac{R\Omega}{\frac{1}{C} - L\Omega^2} = -\frac{2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\Omega}{\omega_0})^2}$$

في موقع الرنين تكون السعة وزاوية الطور الابتدائي:

$$A_r = \frac{E_0}{\omega_0} = \frac{CE_0}{2\xi}$$

$$\frac{V_r}{E_0} = \frac{1}{2\xi} = -\frac{\pi}{2}$$

5.5 ظاهرة الرنين ومعامل الجودة

يحصل الرنين عندما يتطابق تواتر الاثارة Ω مع التواتر الطبيعي للنظام ω_0 هذه النظرية ذات اهمية نظرية وتطبيقية كبيرة، اذ تزداد سعة الاهتزازات القسرية للنظام بشكل حاد يؤدي في بعض الحالات الى تجاوز حدود المرونة وتحطم النظام المهتز.

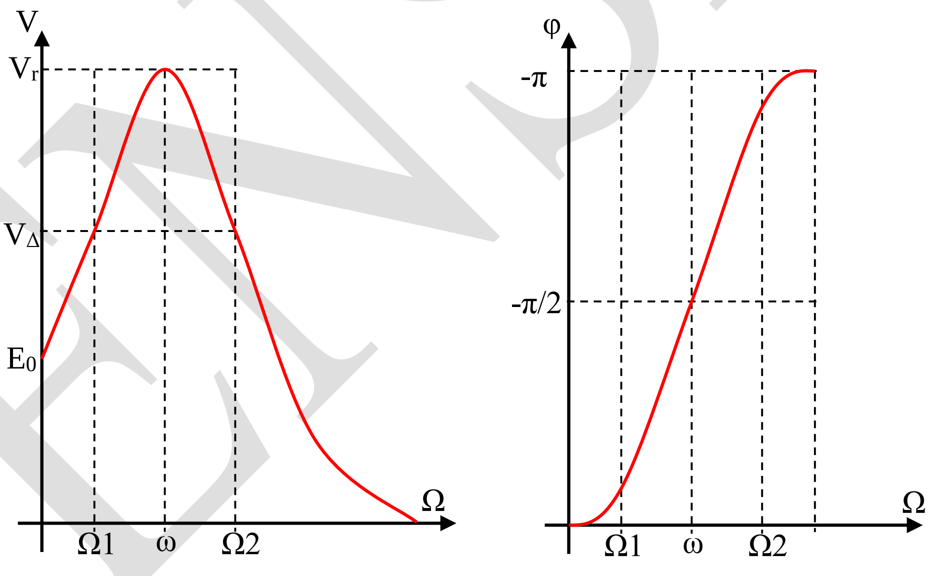
يتبين من خلال السعة ان السعة تكون قيمة عظمى عندما يكون $\Omega = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ ، عندما تصبح قيم التخامد $\xi \geq \sqrt{0.5}$ (المنحنى البياني) تتناقص السعة و منه يكون:

$$\frac{V_R}{E_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad . \quad \frac{A}{F_0/K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

الحالات التي تكون فيها قيم التخامد صغيرة، يمكن اهمال ξ^2 في العلاقتين السابقتين ومنه:

$$\frac{A}{F_0/K} = \frac{1}{2\xi} \quad و \quad \frac{V_R}{E_0} = \frac{1}{2\xi}$$

هذه القيمة التقريبية تستخدم لإيجاد معامل الجودة Q، حيث تعبر عن ظاهرة تكبير السعة في موقع الرنين، وتزداد قيمة معامل الجودة بازدياد مقدار السعة العظمى.



الشكل 4.5: علاقة كل من φ و V بدلالة Ω

يتم ايجاد معامل الجودة Q بقسمة فارق الجهد في موقع الرنين V_r على فارق جهد المدخل E_0، وبذلك تعبر Q على تضخيم الدارة الكهربائية لإشارة الدخول:

$$Q = \frac{V_r}{E_0} = \frac{1}{2\xi}$$

والطريق الثانية لإيجاد معامل الجودة نبدأ بقسمة V_r على $\sqrt{2}$ ينتج قيمة للسعة V_Δ ($\frac{V_r}{\sqrt{2}} = V_\Delta$) تعطي تواترين على المنحنى البياني هما Ω_1 و Ω_2 ومنه:

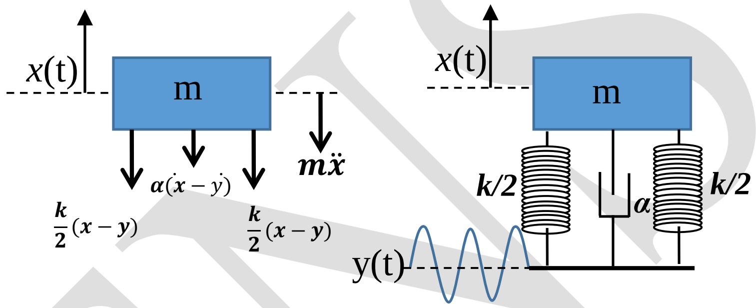
$$Q = \frac{\omega_0}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}$$

$$\xi = \frac{\Delta\Omega}{2\omega_0} = \frac{1}{2Q}$$

$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ تسمى "مدى الامرار"

6.5 الاهتزازات القسرية بتأثير حركة المسند

يهتز النظام بتأثير حركة الذبذبية الدورية لمسنده او احدى نقاطه مثال ذلك اهتزاز البنايات بتأثير الزلازل الارضية والذبذبات التي يحس بها ركاب السيارات اثناء تحركها على الطرق، ولغرض دراسة هذا النوع من الاهتزازات نأخذ نوعا مبسط يتمثل بكتلة تستند الى نابض ومخمد مثبتين على سطح مستو يتحرك حركة ذبذبية بتواتر اثارة Ω كما يبين الشكل.



الشكل 4.5: اهتزازات قسرية بتأثير حركة المسند

يمثل $x(t)$ الحركة الانسحابية الاهتزازية لكتلة النظام، والاحداثي $y(t)$ اهتزازات المسند باتجاه عمودي.

لغرض الحل الرياضي نفرض ان: $x(t)>y(t)$ ونشتق المعادلة التفاضلية لحركة الكتلة m.

$$m\ddot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

بإعادة ترتيب الحدود تصبح المعادلة على الشكل التالي:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = \alpha\dot{y} + ky$$

يتضح من هذه المعادلة ان قوى الاثارة المسببة لاهتزاز m تنتقل لها من خلال المخمد والنابض.

نضع : $$y(t) = B\,e^{i\Omega t}$$

ومنه تصبح المعادلة السابقة كمايلي:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = (i\Omega\alpha + k)Be^{i\Omega t}$$

معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية بطرف ثان غير منعدم، ومنه الحل يتكون من جزأين: $x(t)=x_h+x_p$

لإيجاد الحل الخاص نأخذ: $x_P(t) = A\,e^{i(\Omega t+\varphi)}$ بعد الاشتقاق نعوض في المعادلة الرئيسية.

$$[(k-m\Omega^2)A+i(\alpha\Omega)A]e^{i(\Omega t+\varphi)}=[kB+i(\alpha\Omega)B]e^{i(\Omega t)}$$

بالقسمة على $e^{i(\Omega t+\varphi)}$ نجد:

$$[(k-m\Omega^2)+i(\alpha\Omega)]A=[kB+i(\alpha\Omega)B](cos\varphi-isin\varphi)$$

ومنه ينتج لدينا:

$$\begin{cases}(k-m\Omega^2)A=[kcos\varphi-(\alpha\Omega)sin\varphi]B\\ (\alpha\Omega)A=[(\alpha\Omega)cos\varphi-ksin\varphi]B\end{cases}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2=\frac{k^2+(\alpha\Omega)^2}{(k-m\Omega^2)^2+(\alpha\Omega)^2}$$

$$\left|\frac{A}{B}\right|=\sqrt{\frac{k^2+(\alpha\Omega)^2}{(k-m\Omega^2)^2+(\alpha\Omega)^2}}$$

وهي سعة الاهتزاز القسري.

اما زاوية الطور فهي تنتج كمايلي:

$$tag\ \varphi=\frac{-\alpha m\Omega^2}{k(k-m\Omega^2)^2+(\alpha\Omega)^2}$$

7.5 العوامل المؤثرة على سعة الاهتزاز القسري

من خلال المعادلة السابقة لسعة الاهتزاز القسري تصبح المعادلة:

$$\left|\frac{A}{B}\right|=\sqrt{\frac{1+(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0})^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$tag\ \varphi=\frac{-2\xi\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

يبين الشكل البياني التالي سعة الاهتزاز القسري A وزاوية الطور φ بدلالة تواتر الاثارة Ω عند دراسة هاتين المعادلتين بالارتباط مع الشكل نجد ان سعة الاهتزاز القسري تتساوى مع سعة اهتزاز المسند، وتكون بنفس اتجاهها.

- بالنسبة للتواترات الصغيرة: $\left|\frac{A}{B}\right| \to 1 \qquad \Omega \to 0,$.
- بالنسبة للتواترات العالية: $\left|\frac{A}{B}\right| \to 0 \qquad \Omega \to \infty,$.
- عندما يكون: $\Omega = \omega_0$

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \sqrt{\frac{1+4\xi^2}{4\xi^2}}$$

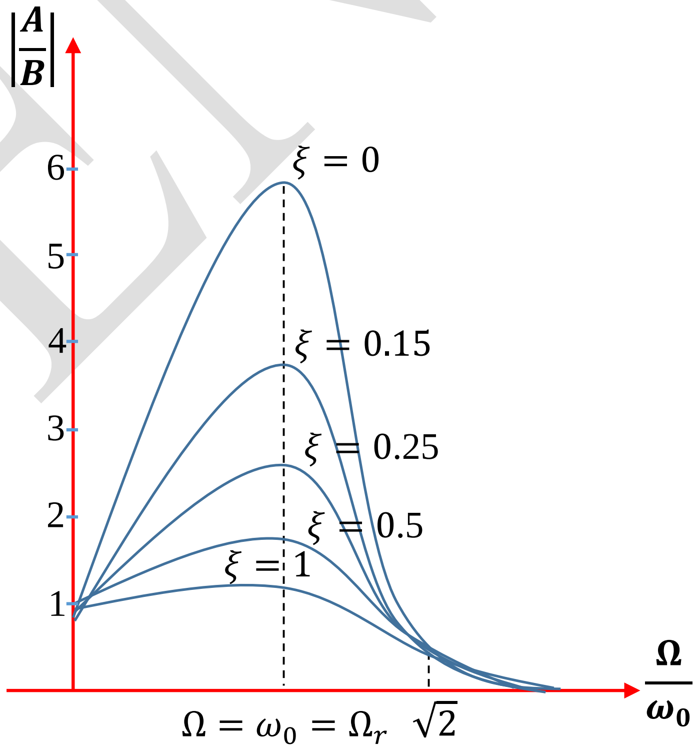
- عند الرنين: $\Omega = \omega_0$

$$tag\ \varphi = \frac{-1}{2\xi}$$

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \sqrt{\frac{1+4\xi^2}{4\xi^2}}$$

من خلال الرسم نلاحظ انه عندما يكون $\left|\frac{A}{B}\right| = 1$ توجد قيمتين لـ Ω:

$$\frac{1+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega = \sqrt{2}\,\omega_0 \end{cases}$$



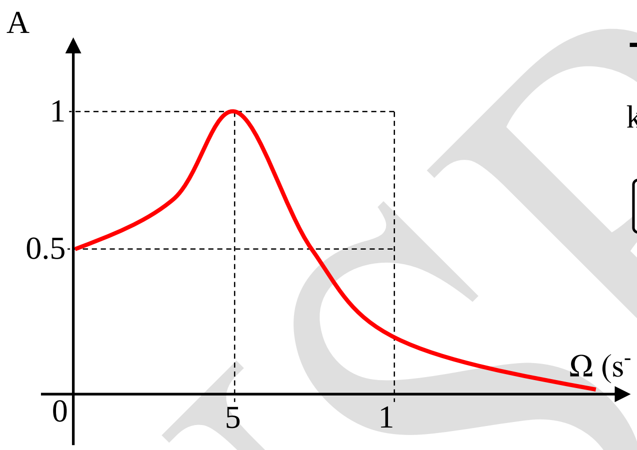
الشكل 5.5: علاقة السعة بالنبض

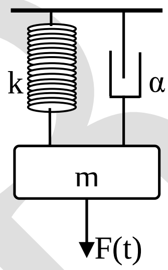
تمارين الفصل الخامس:

التمرين الأول:

نظام ميكانيكي يتكون من كتلة و نابض و مخمد و تؤثر عليه قوة خارجية توافقية مقدارها $F(t)= 10\sin\Omega t$ فإذا اعطيت سعة الاهتزاز القسري A للكتلة و تواتر الاثارة الخارجية Ω بيانيا كما هو موضح في الشكل المقابل.

- جد مستعينا بالرسم البياني قيم عناصر النظام الميكانيكي (A_0، m ،k و α)



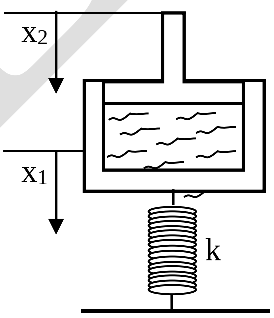


التمرين الثاني:

مكبس يتحرك داخل اسطوانة حركة انسحابية توافقية ($x_2(t$ كما هو موضح في الشكل، مكن اعتباره مخمدا معامله α، فإذا كانت الكتلة الكلية المهتزة توافق m و احداثي حركتها الاهتزازية الانسحابية ($x_1(t$.

- اوجد النموذج الاهتزازي المبسط للنظام.
- اشتقاق سعة الاهتزاز القسري A للكتلة الكلية اذا كان:

$$x_1(t) = A\, e^{i(\Omega t+\varphi)}\,. \qquad x_2(t) = B\, e^{i(\Omega t+\varphi)}$$

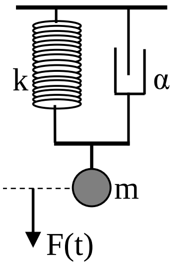


التمرين الثالث:

نظام ميكانيكي يتكون من كتلة و نابض و مخمد و تؤثر عليه قوة خارجية توافقية افقية مقدارها $F(t)= F_0\sin\Omega t$ حيث Ω نبض الاثارة كما هو موضح في الشكل.

- عبر عن الطاقة الكامنة U للنظام بدلالة x.

- اوجد شرط التوازن، ثم بسط عبارة U في هذه الحالة (من خلال شرط التوازن).

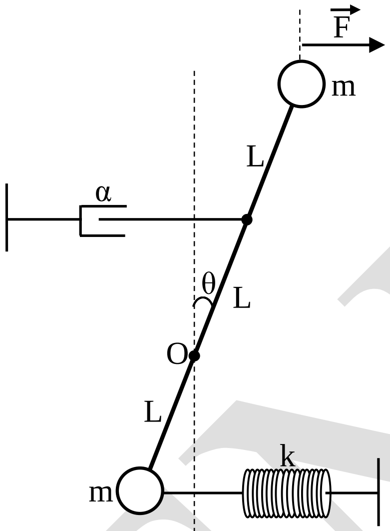


- اعط عبارة الطاقة الحركية T للنظام.
- اوجد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق معادلة لاغرانج.
- ماهو الشرط اللازم توفره حتى يخضع النظام الى حركة شبه دورية.
- احسب السعة A و الطور الابتدائي φ.

التمرين الرابع:

نظام ميكانيكي يتكون من كتلتين تفصل بينهما ساق مهملة الكتلة طولها (الساق) L3، و نابض و مخمد تؤثر على احدى الكتلتين قوة خارجية توافقية مقدارها $F(t)= F_0 \sin \Omega t$ كما هو موضح في الشكل ادناه.

- اوجد عبارة الطاقة الكامنة U للنظام.
- اوجد شرط التوازن، ثم بسط عبارة U.
- اعط عبارة الطاقة الحركية T للنظام.
- اوجد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق معادلة لاغرانج.



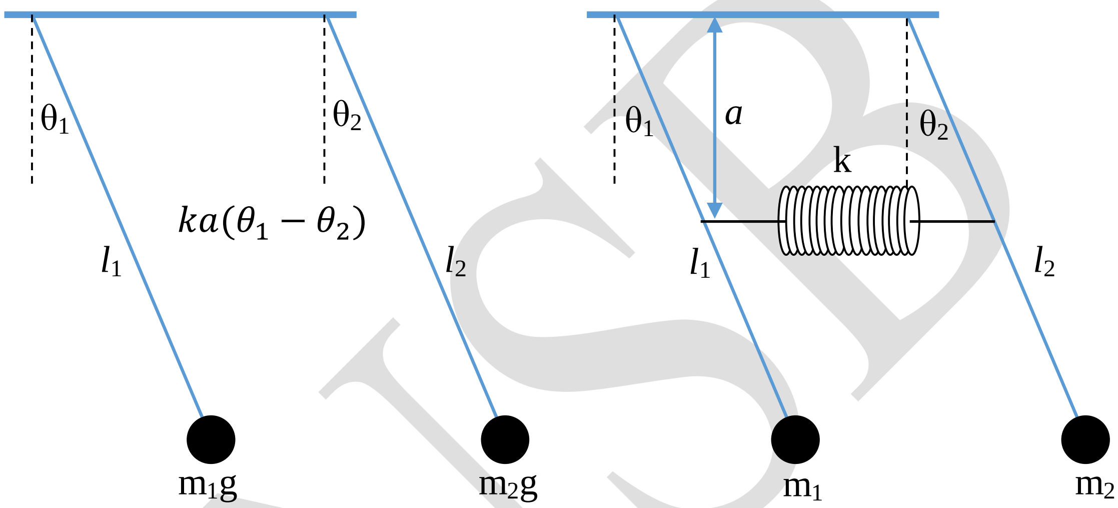
6. الأنظمة ذات درجتين من الحرية

هي الأنظمة التي تمكن من وصف تطورها في الزمن بواسطة احداثيين q_1 و q_2.

1.6. دراسة الاهتزازات الحرة لنواسين مترابطين

a: البعد بين محور الدوران و نقطة تعليق النابض.

درجتا الحرية: $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ حيث: $\theta_1(t) > \theta_2(t)$.



الشكل 1.6: النواسان المترابطان

طريقة لاغرانج

الطاقة الحركية للنظام:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

الطاقة الكامنة:

$$U = \frac{1}{2}Ka^2(sin\theta_1 - sin\theta_2)^2 + m_1 g(l_1 - l_1 cos\theta) + m_2 g(l_2 - l_2 cos\theta)$$

و بالتعويض عن الجيب تمام و تجب تمام: $sin\theta_2 \approx \theta_2$. $sin\theta_1 \approx \theta_1$. $cos\theta_2 \approx 1 - \frac{\theta_2}{2}$.

$cos\theta_1 \approx 1 - \frac{\theta_1}{2}$ نجد:

$$U = \frac{1}{2}Ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}m_1 g l_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 \theta_2^2$$

دالة لاغرانج: $\mathcal{L} = T - U$ ومنه المعادلتان التفاضليتان للحركة وفق طريق لاغرانج هما:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2}\right) = 0 \end{cases}$$

بعد الاشتقاق و التعويض في المعادلات السابقة نحصل على:

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \theta_1 + K a^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \theta_2 + K a^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

او على الشكل:

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 g l_1 + K a^2)\theta_1 - K a^2 \theta_2 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (m_2 g l_2 + K a^2)\theta_2 - K a^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

2.6 إيجاد التواترين الطبيعيين

لغرض التبسيط نعتمد نواسين متماثلين و منه:

$$l_1 = l_2 = l\,. \qquad m_1 = m_2 = m$$

نعوض هذه القيم في المعادلتين التفاضليتين للحركة (المعادلتين السابقتين).

$$\begin{cases} m l^2 \ddot{\theta}_1 + m g l \theta_1 + K a^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ m l^2 \ddot{\theta}_2 + m g l \theta_2 + K a^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

لايجاد التواترين الطبيعيين ω1 و ω2 نقترح الحل الرياضي التالي.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *$$

بالتعويض في المعادلتين السابقتين نجد:

$$\begin{cases} (-\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2) A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) - ka^2 A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 \\ (-\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2) A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) - ka^2 A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = 0 \end{cases}$$

في حالة اهتزاز النظام بأحد تواتريه الطبيعيين تتساوى زاويتا الطور $\varphi_1 = \varphi_2$ لهذا النظام.

ومنه تصبح المعادلات السابقة كمايلي:

$$\begin{cases} (-\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2) A_1 - ka^2 A_2 = 0 \ldots\ldots\ldots 1 \\ -ka^2 A_1 + (-\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2) A_2 = 0 \ldots\ldots .2 \end{cases}$$

يمكن كتابة المعادلتين السابقتين على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

يلاحظ من خلال ما سبق تماثل المصفوفة حول محوريها، و هذه الصفة تنتج من تشابه النواسين المترابطين (تماثل النظام الميكانيكي المهتز حول محوره العمودي).

$$(-\omega^2 l^2 m + mgl + ka^2)^2 - (ka^2)^2 = 0$$

ومنها نحصل على مقداري التواترين:

التواتر الزاوي الأول: $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

التواتر الزاوي الثاني: $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$

3.6 إيجاد النمطين الأساسيين للحركة

تعريف:

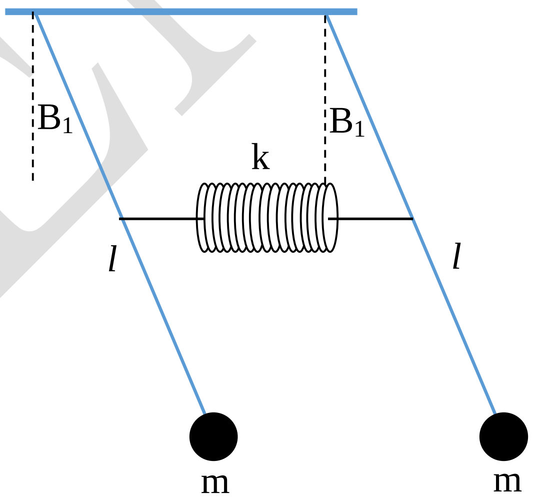
يعرف النمط لكونه الحالة التي تؤدي فيها عناصر النظام اهتزازات توافقية بسيطة بتواتر موحد، و هو يساوي احد التوترين الطبيعيين.

- لإيجاد النمط الأساسي الأول للحركة نأخذ المعادلة 1 و 2 السابقة و نعوض $\omega=\omega_1$ فينتج لدينا:

$$1 \Rightarrow (-mgl + mgl + ka^2)A_1 - ka^2 A_2 = 0$$

$$1 \Rightarrow A_1 = A_2 = B_1$$

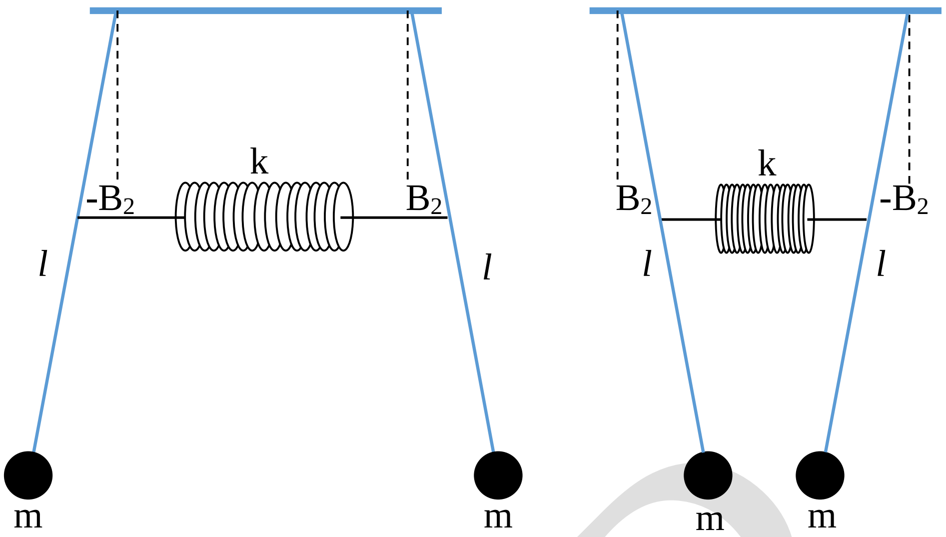
في هذه الحالة النواسان يهتزان بنفس التواتر $\omega_0=\omega_1$ و بنفس السعة B_1 ولا يحدث للنابض أي تغير اثناء الحركة.



- اما النمط الأساسي الثاني للحركة فيتم ايجاده بتعويض $\omega=\omega_2$ في احدى المعادلتين السابقتين 1 او 2

فنجد : $1 \Rightarrow A_1 = -A_2 = B_2$

في هذا النمط يهتز النواسان بنفس التواتر $\omega 2$ و بنفس فرق الطور φ و بسعتين متعاكستين $A_1 = -A_2$



4.6 حل معادلتي الحركة

يتكون الحل الذي يعبر عن حركة النظام للحالة العامة من تداخل حركتين جيبيتين كل منهما تعبر عن أحد النمطين الأساسيين و منه:

$$\begin{cases}\theta_1 = A_{11}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \theta_2 = A_{21}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

حيث:

φ_1 ، A_{11} و A_{12} تمثل الطور و سعة الاهتزاز في التواتر الطبيعي الأول، و φ_2، A_{21} و A_{22} تمثل الطور و سعة الاهتزاز في التواتر الطبيعي الثاني.

النمط الأول : $A_{11} = A_{21} = B_1$

النمط الثاني : $A_{12} = -A_{22} = B_2$

نعوض في المعادلة السابقة فنجد:

$$\begin{cases}\theta_1 = B_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1) + B_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \theta_2 = B_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1) - B_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\Delta$$

الثوابت B_1، B_2 و φ_1، φ_2 يتم إيجاد مقاديرها من تطبيق الشروط الابتدائية.

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1 = B_1\omega_1\, cos(\omega_1 t+\varphi_1) + B_2\,\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \dot{\theta}_2 = B_1\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) - B_2\,\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

تطبيق الشروط الابتدائية، نأخذ مثلا: $t = 0 \Rightarrow \begin{cases}\theta_1 = \theta_0. \quad \theta_2 = 0\\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0\end{cases}$

$$\begin{cases}\theta_1 = \theta_0 \Rightarrow B_1\sin(\varphi_1) + B_2\sin(\varphi_2) = \theta_0\\ \theta_2 = 0 \Rightarrow B_1\sin(\varphi_1) - B_2\sin(\varphi_2) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1 = 0 \Rightarrow B_1\omega_1\, cos(\varphi_1) + B_2\,\omega_2\cos(\varphi_2) = 0\\ \dot{\theta}_2 = 0 \Rightarrow B_1\omega_1\cos(\varphi_1) - B_2\,\omega_2\cos(\varphi_2) = 0\end{cases}$$

من خلال هذه المعادلات الأربعة ينتج لدينا:

$$\begin{cases}B_1 = B_2 = \dfrac{\theta_0}{2}\\ \varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

بالتعويض في المعادلتين السابقتين (Δ) نجد الحل الذي يعبر عن حركة النواسين بدلالة الزمن.

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases}\theta_1 = \dfrac{\theta_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \dfrac{\theta_0}{2}\cos(\omega_2 t)\\ \theta_2 = \dfrac{\theta_0}{2}\cos(\omega_1 t) - \dfrac{\theta_0}{2}\cos(\omega_2 t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_1 = \dfrac{\theta_0}{2}[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]\\ \theta_2 = \dfrac{\theta_0}{2}[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_1 = \theta_0\, cos\left(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t.cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\\ \theta_2 = \theta_0\, sin\left(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t.sin\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\end{cases}$$

في الحالة التي يكون فيها التواترات الزاويان مختلفين قليلا يكون:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

يكون صغيرا أيضا و ينتج عن الدالتين ظاهرة الخفقان (النبضات) كما يبين الشكل المقابل. حيث يتم تبادل الطاقة بين النواسين و انتقالهما اثناء الحركة من نواس الى اخر و يهتز كل نواس بتواتر ω مساو الى معدل التواترين الطبيعيين و بزمن دوري مقداره T.

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$$

$$T = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$$

اما تواتر الخفقان فهو Ω، و الزمن الدوري T_b و مقدارهما:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$T_b = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

تمارين الفصل السادس:

التمرين الأول:

ليكن لدينا الاهتزاز الحر لنظام ذو درجتي حرية الموضح في الشكل المقابل. الذي يتكون من كتلتين m_1 و m_2 و نابضين ثابت مرونتيهما k_1 و k_2.

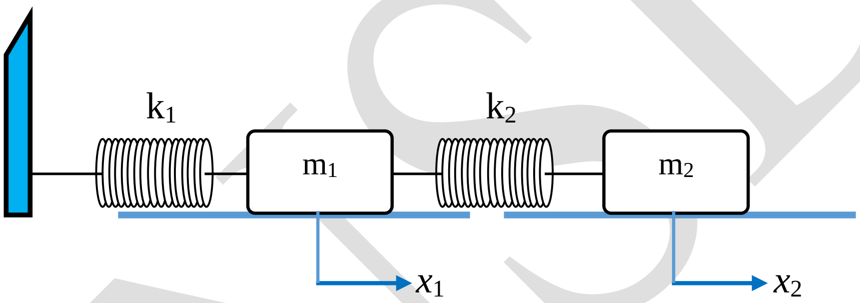
1- اوجدعبارة الطاقة الحركية لهذا النظام.

2- اوجد عبارة الطاقة الكامنة U.

3- استنتج عبارة دالة لاغرانج.

4- اوجد معادلتي الحركة حيث: $k_1 = k_2 = k$ ،$m_1 = \frac{m_2}{2} = m$.

5- اوجد التواترين الطبيعيين للحركة.

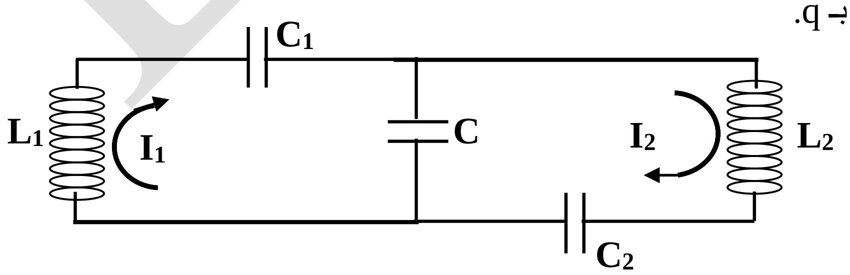


التمرين الثاني:

ليكن لدينا التركيب التجريبي الموضح في الشكل المقابل. الذي يتكون من دارة كهربائية LC مربوطة بواسطة مكثفة C مع دارة أخرى LC حيث: $C_1 = C_2 = C$ ،$L_1 = L_2 = L$.

1- اوجد معادلتي الاهتزاز لكل من $q_1(t)$ و $q_2(t)$.

2- اوجد التواترين الطبيعيين للحركة، ثم اعط الحل العام علما ان في اللحظة $t = 0$ كانت C1 فقط مشحونة بـ q.



التمرين الثالث:

ليكن لدينا التركيب الموضح في الشكل. الذي يتكون من دولابان متماثلان (كتلة M، نصف القطر R)، يدوران بدون احتكاك على المستوي الافقي. θ_1 و θ_2 زاويتا الازاحة عن وضع التوازن للدولابين. في حالة الراحة $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$ لا يحدث تشوه للنابضين.

1- اوجدعبارة الطاقة الحركية لهذا النظام T.

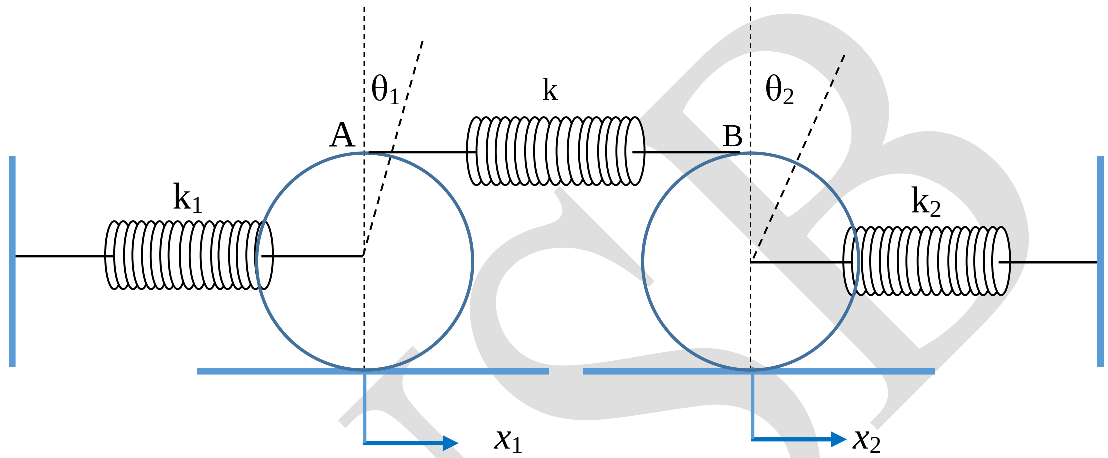
2- اوجد عبارة الطاقة الكامنة U.

3- استنتج عبارة دالة لاغرانج $\mathcal{L}$، بدلالة x_1 و x_2.

4- اوجد عبارة معادلتي الحركة، و استنتج التواترين الطبيعيين حيث: $k_1 = k_2 = \acute{k} \neq k$.

5- اكتب دالة لاغرانج على الشكل:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \omega_0^2(x_1^2 + x_2^2 - 2kx_1x_2)]$$



المحور الثاني: الأمواج الميكانيكية

1. الامـــــواج

1.1 عموميات

تعتبر أمواج الماء التي تتشكل عند سقوط أي جسم صلب في بركة ماء ساكنة مثالا بسيطا وواضحا للأمواج التي تظهر في مجالات شتى في الطبيعة. فهناك الأمواج الصوتية التي تبدأ في الأوتار الصوتية للإنسان عندما يتكلم فتنتشر بواسطة ذرات الهواء المجاورة لتصل لأذن المستمع او شخص يضرب على وتر العود، وهناك الأمواج الكهرومغناطيسية (الضوء) كالتي تصدر عن هوائي محطة إرسال ناقلة برامج الإذاعة والتلفاز، وغيرها . وفي كل الحالات فهناك مصدر للموجة. أما ضرورة وجود وسط ناقل (ذرات الهواء أو مادة وتر العود) فتعتمد على نوع الموجة، فبعضها لا ينتقل من نقطة لأخرى إلا إذا وجد من يحملها وتدعى أمواجا ميكانيكية (mechanical waves) ، وهناك أمواج لا تحتاج لوسط ناقل هي الأمواج الكهرومغناطيسية (electromagnetic waves) وتنتج عن اهتزاز مجال كهربائي وآخر مغناطيسي.

2.1 تعريف الموجة

الحركة الموجية: هي الحركة التي يصنعها الجسم المهتز على جانبي موضع سكونه او اتزانه الأصلي، مثل حركة البندول البسيط .أو هي الاضطراب أو الحركة التي تحدث في الوسط عندما يتحرك كل جزء من أجزائه حركة اهتزازية تسري بالتتابع من نقطة إلى أخرى. وتسمى الحركة الاهتزازية في أنقى صورها بالحركة التوافقية البسيطة.

الموجة: هي انتشار لاضطراب أو تشوه في وسط مادي مرن مصحوب بانتقال للطاقة دون حدوث انتقال للمادة، و ينتقل من نقطة الى بقية نقاط الوسط بسرعة ثابتة V، نسميها سرعة الانتشار. قد تكون الامواج ذات بعد واحد مثل موجة تنتشر في حبل، او ذات بعدين كالأمواج المائية، او ثلاثة ابعاد كالأمواج الصوتية. و تنقسم الى:

- **الأمواج العرضية:** هي الأمواج التي يكون فيها منحى التموج متعامدا مع منحى انتشار الموجة مثل موجات الماء او موجة اهتزاز الحبل، وتكون على شكل قمه وقاع. تنتقل الموجات العرضية (المستعرضة) في الوسط المرن (مثل الجسم الصلب والسطح الحر للسائل) الذي تتوافر بين جزيئاته قوى تماسك كافية ليتمكن الجزيء المهتز من تحريك الجزيئات المجاورة له باتجاه عمودي على اتجاه انتشار الموجة.

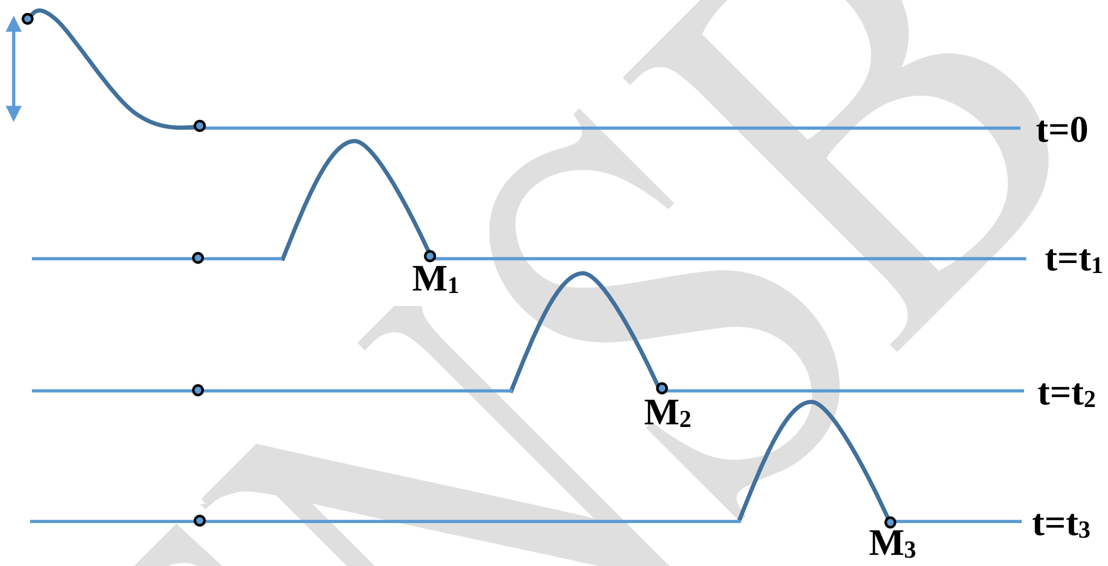
- **الأمواج الطولية:** يكون منحى التموج موافقا لمنحى الانتشار في الأمواج الطولية مثل امواج النابض وامواج الصوت. تنتقل في الأوساط المختلفة (صلب وسائل وغاز) لأنها لا تحتاج إلى قوى تماسك كبيرة بين الجزيئات.

2.2 خصائص الموجة

1.2.2 سرعة انتشار الموجة

ينتشر الاضطراب المكون للموجة بسرعة ثابتة، مثلا لو أخذنا ثلاثة نقاط على مستوى الحبل المستعمل في التجربة (شكل المقابل) والتي هي M_1, M_2, M_3 و الزمنة التي يصل فيها الاضطراب الى هاته النقاط هي t_1, t_2, t_1 فنجد ان:

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overline{M_2M_3}}{t_3 - t_2} = cont = v$$



الشكل 1.7: الأمواج المنتشرة على مستوى الحبل

نستنتج أن سرعة انتشار موجة v هي النسبة بين المسافة d التي تقطعها الموجة و المدة الزمنية اللازمة لقطع هذه المسافة، ونعبر عنها كمايلي:

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

d: هي المسافة التي وصلت اليها مقدمة الموجة.

Δt: هي المدة الزمنية المستغرقة.

v: سرعة الانتشار و تحسب بـ m/s.

ملاحظات:

- تختلف سرعة انتشار الاضطراب المنتج للموجة باختلاف الوسط.
- ينتشر الاضطراب العرضي في وسط ما، بغير السرعة الثابتة التي ينتشر بها الاضطراب الطولي في الوسط نفسه.

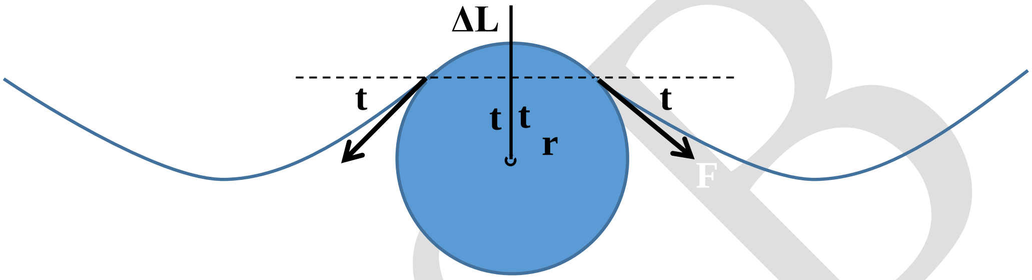
- سرعة الانتشار لا تتعلق، لا بشكل ولا بسعة الاضطراب بشرط ان لا يكون التشوه كبير جدا، وبالعكس فإن سرعة الانتشار تتعلق بطبيعة وحالة الوسط المادي ويعبر عنها بدلالة قوة الشد و الكثافة الطولية للكتلة.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

F: قوة الشد ويعبر عنها بالنيوتن N.

ρ: الكتلة الطولية وحدتها Kg/m.

حيث: $m=\rho\Delta L$



- كما يمكن التعبير عن سرعة انتشار موجة ميكانيكية (صوتية مثلا) في غاز بالعلاقة التالية:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

P: ضغط الغاز وحدته الباسكال.

γ: بدون وحدة ثابت $\gamma = 1.4$.

ρ: الكتلة الحجمية للغاز وحدتها $[Kg/m^3]$ $\rho = \frac{m}{V}$.

وإذا كان الوسط صلبا تصبح السرعة:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

حيث Y يمثل معامل يانغ للمرونة.

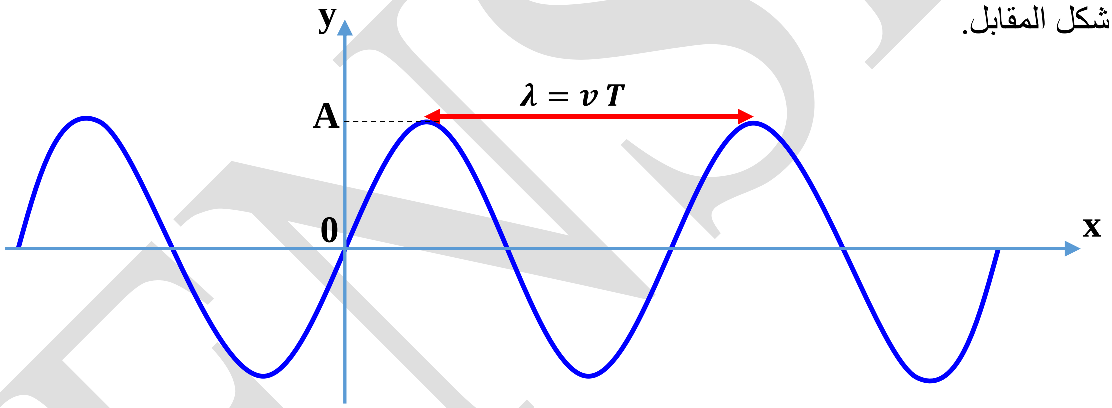
ونلاحظ من العلاقات السابقة أن سرعة انتشار الصوت في أي وسط تعتمد على خواصه فقط.

ونعطي في الجدول التالي سرعة انتشار الصوت في أوساط مختلفة.

المادة	السرعة (m/s)	المادة	السرعة (m/s)
الهواء (0°)	331	الرصاص	1190
الهواء (20°)	343	النحاس	3810
الهيدروجين	1330	الالمنيوم	5000
الماء المقطر	1486	الفولاذ	5170
ماء البحر	1519	زجاج بايركس	5200

2.2.2 طول الموجة

هو المسافة التي تقطعها الحركة الاهتزازية في دور واحد وتعتبر أقصر مسافة تربط بين نقطتين متوافقتين انظر شكل المقابل.



نحسب الطول الموجي بالعلاقة التالية:

$$\lambda = v.T = \frac{v}{f}$$

هذه العلاقة تبين أن طول الموجة λ الذي يميز انتشار ظاهرة اهتزازية يرتبط في آن واحد بالدور T او التردد f ثابت يميز الاهتزاز لوحده و الثابت v الذي يميز الوسط الذي ينشأ فيه الانتشار.

3.2 الانتشار الحر للأمواج العرضية في وتر

نأخذ لهذا الغرض نموذج انتشار الاهتزازات الحرة غير المخمدة في وتر متجانس مشدود من طرفيه بقوة شد ابتدائية. للحصول على المعادلة التي تصف اهتزازات أي نقطة من وسط تنتشر فيه موجة ما نكتب أولا معادلة الاهتزازات للمنبع S الذي نفترض أنه يهتز بشكل بسيط وفق العلاقة التالية:

$$y_s = A\sin(\omega t)$$

حيث ترتبط السرعة الزاوية ω بدور الحركة T و ترددها f بالعلاقتين المعروفتين:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

ومن ثم نكتب معادلة اهتزازات أي نقطة من الوسط مثل p في الشكل التالي. التي تبعد مسافة x عن المنبع، بملاحظة أنها ستتحرك مثل S تماما. أي حركة اهتزازية بسيطة، لكن متأخرة عنها بزمن يساوي المدة اللازمة للحركة لتصل إليها من هناك، أي أن:

$$y_p = A\sin[\omega(t - \acute{t})]$$

عندئذ يكون الزمن اللازم لها لتنتقل من S الى p هو:

$$\acute{t} = \frac{x}{v}$$

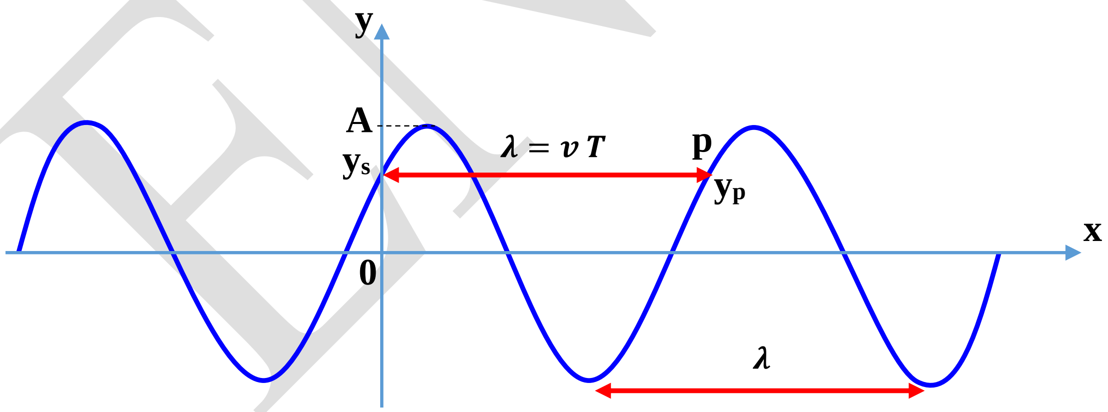
أي ان:

$$y_p = A\sin[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)]$$

$$y_p = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{v.T}\right)$$

$v.T$ هي المسافة التي تقطعها الموجة خلال دور كامل لاهتزازة أي نقطة من الوسط. ونسمي هذه المسافة طول الموجة λ و منه:

$$\lambda = v.T$$



نلاحظ من خلال الشكل السابق ان طول الموجة يساوي المسافة الفاصلة بين أي نقطتين متتاليتين تتحركان بنفس الشكل والاتجاه في كل لحظة.

نسمي المقدار $\frac{2\pi}{\lambda}$ العدد الموجي، و نرمز له بالرمز κ حيث:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

نعوض في المعادلة السابقة نجد:

$$y_p = A\sin(\omega t - \kappa x)$$

تسمى هذه العلاقة بالمعادلة الموجية المنتشرة في الوسط، أي أنها تصف حركة أي ذرة منه في أي لحظة من الزمن.

بما ان الشكل العام لحركة اهتزازية بسيطة هو:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

بالمقارنة بين المعادلتين الأخيرتين نلاحظ ان، κx يمثل فرق الطور بين نقطتين. و يمكن الاستفادة من هاته النتيجة لمعرفة حركة نقطة من وسط مهتز بمقارنتها مع منبع الاهتزازات (أو أي نقطة أخرى من الوسط). فإذا كان فرق الطور يساوي عددا زوجيا من π عندئذ تصير معادلة المنبع و النقطة متكافئتين تماما، أي أنه إذا كانت سعة واحدة أكبر ما يمكن فستكون الثانية كذلك، وإذا كانت سعة الأولى معدومة تكون الثانية مثلها، وهكذا دواليك ونقول في هذه الحالة إن الحركتين متوافقتين بالطور. أما إذا كان فرق الطور يساوي عددا فرديا من π عندئذ تكون سعتاهما متعاكستين دوما ونقول إنهما متعاكستين في الطور. فاذا كانت إحداهما في لحظة ما A_1 تكون سعة الثانية A_2، وتتحرك كل واحدة بعكس الأخرى دوما. ولربط مفهوم فرق الطور بمعادلة الحركة الموجية لنقطة نفترض أن أمواجا تنتشر في وسط متجانس وتصل لنقطتين تقعان في الموضعين x_1 و x_2. عندئذ نكتب المعادلة الموجية بالشكل:

$$y_1 = A\sin(\omega t - \kappa x_1)$$

$$y_2 = A\sin(\omega t - \kappa x_2)$$

فيكون فرق الطور بينهما كمايلي:

$$\Delta\varphi = \kappa(x_2 - x_1) = \kappa\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

فحتى تكونا متوافقتين في الطور يجب أن يكون:

$$\Delta\varphi = 2n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

أي يجب أن يكون:

$$\Delta x = n\lambda$$

أي عندما تكون المسافة بين النقطتين تساوي عددا صحيحا من طول الموجة.

أما عندما تكون النقطتان متعاكستين في الطور، أي أن:

$$\Delta\varphi = (2n+1)\pi \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

أي أنه عندما تكون المسافة الفاصلة بينهما تساوي عددا فرديا من نصف طول الموجة فإنهما تتحركان باتجاهين متعاكسين دوما.

4.2 تركيب الأمواج (مبدأ التراكب)

لو أمسك شخصان بحبل مشدود بينهما وقام كل واحد بهز الطرف الذي يمسك به للأعلى والأسفل، فكيف تتحرك أي نقطة من الحبل عندما تصلها الموجتان المتولدتان في هذه الحالة؟ إن الإجابة على هذا السؤال هو ما يسمى مبدأ التراكب .وينص على أن السعة الكلية لنقطة من وسط تنتشر فيه عدة أمواج عرضية فقط (أو طولية فقط) في أي لحظة من الزمن هي حاصل الجمع لسعات الاهتزازات الواصلة إليها من كل موجة .ويكتب هذا المبدأ رياضيا بفرض أن سعة موجة أولى هي y_1 و سعة الموجة الثانية y_2، عندئذ تكون السعة الكلية y_1+y_2. وسنعتبر في هذه الفقرة الحالة الخاصة عندما تكون هناك موجتان عرضيتان تنتشران على نفس الخط بنفس التردد والسعة ولكن باختلاف بالطور بمقدار φ. أي:

$$y_1 = A\sin(\omega t - \kappa x)$$

$$y_2 = A\sin(\omega t - \kappa x - \varphi)$$

عندئذ تكون الموجة الكلية المؤثرة على النقطة المعتبرة هي:

$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t - \kappa x) + A\sin(\omega t - \kappa x - \varphi)$$

$$y_T = \left[2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\sin(\omega t - \kappa x - \frac{\varphi}{2})$$

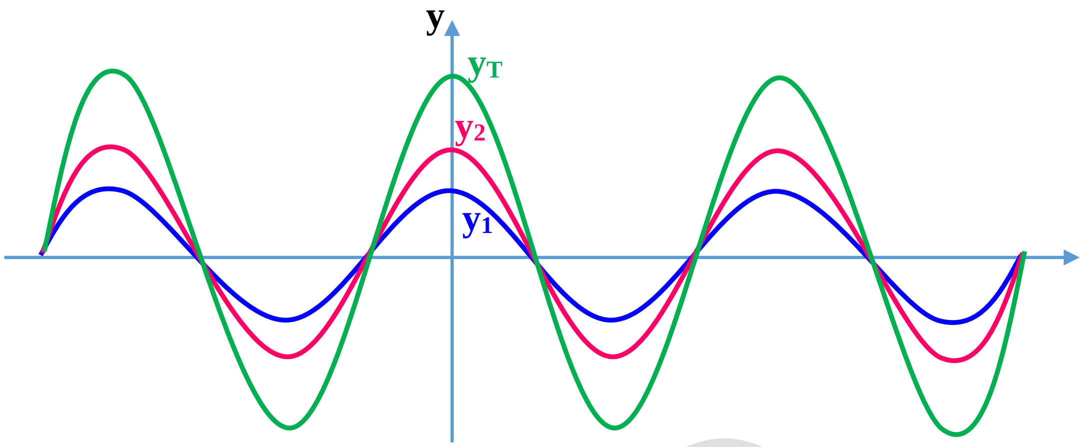
و يمكن ان نكتب:

$$y_T = A_{max}\sin(\omega t - \kappa x - \frac{\varphi}{2})$$

حيث:

$$A_{max} = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

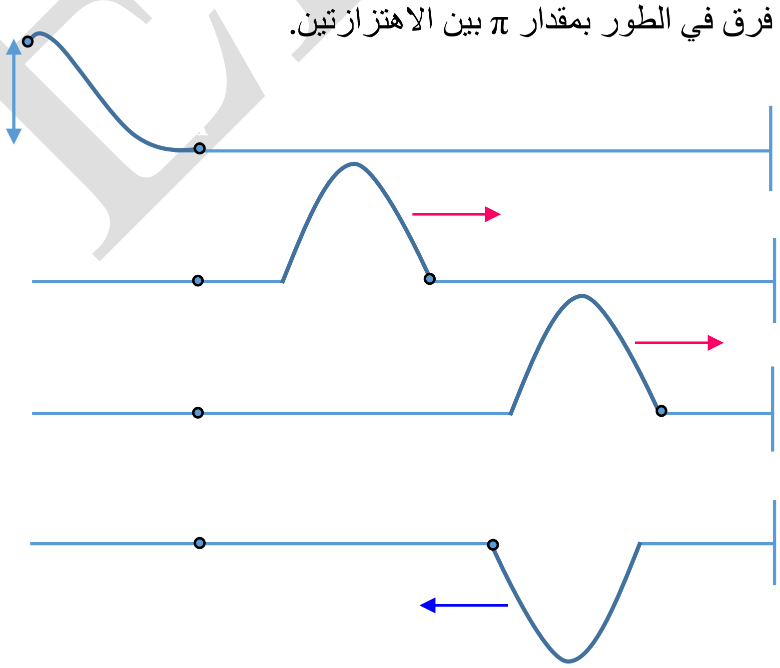
ونلاحظ أن الحركة الناتجة هي اهتزازية بسيطة لكن سعتها تعتمد على الزاوية φ فيمكن أن تكون أكبر ما يمكن إذا كانت $\varphi = 2n\pi$ ونقول إن الموجتين المتداخلتين متوافقتان بالطور، أي أن اهتزازتيهما الواصلتين لنقطة ما تتحركان بنفس الشكل وفي نفس الاتجاه دوما. أو يمكن أن تكون $A_{max} = 0$ إذا كانت $\varphi = (2n+1)\pi$ ونقول إن الموجتين متعاكستان بالطور. الشكل التالي يمثل موجتين متوافقتين بالطور بسعتين مختلفتين.



الشكل 2.7: تراكب الامواج

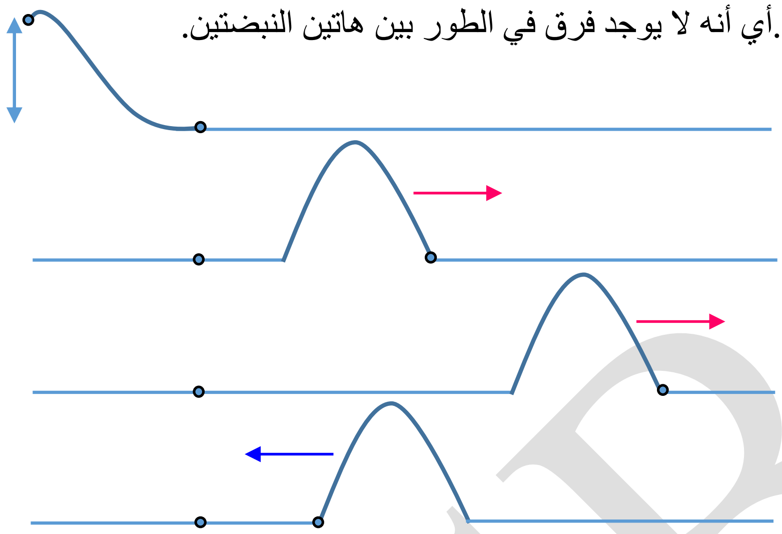
5.2 الانعكاس والأمواج المستقرة

لو أمسكنا بطرف حبل مربوط بالحائط ومشدود بقوة ما، ثم قمنا بهزه من طرفه الآخر بشكل متواصل إما باليد أو بواسطة رنانة كهربائية مثلا، عندئذ تنتشر موجة على امتداده إلى أن تصل لطرفه المثبت بالحائط فتنعكس عنه وترتد بالاتجاه المعاكس لتتداخل مع الموجة الأصلية. وتشاهد نفس الظاهرة عند انتشار أمواج دائرية في بحيرة ماء عندما تصل لمانع أو حاجز فتنعكس عنه وتتداخل الأمواج القادمة مع المرتدة بشكل جميل وأخاذ. وفي كلا الحالتين يأخذ الوسط شكلا ثابتا متميزا إذ تهتز أجزاء منه بسعة كبيرة بينما تبقى نقاط أخرى ساكنة تماما. ويطلق على هذا المنظر اسم أمواج مستقرة. ويمكن فهم ظاهرة انعكاس الأمواج بمتابعة نبضة تنتشر على امتداد الحبل لليمين، كما في الشكل المقابل فعندما تصل النبضة للحائط تؤثر على الحبل بقوة للأعلى فيرد عليها بقوة للأسفل مما يولد نبضة معاكسة تتحرك لليسار. ونلاحظ من الشكل أن شكل النبضة لا يتغير لكنها تصير مقلوبة. فهناك فرق في الطور بمقدار π بين الاهتزازتين.



الشكل 3.7: انعكاس الأمواج المستقرة على الحبل مشدود

وبنفس الشكل نتابع حركة نبضة تنتشر على امتداد حبل نهايته حرة، كما في الشكل اسفله. فنلاحظ أن وصولها لآخر الحبل يدفعه للأعلى مسافة معينة وعندما يعود لوضعه الأصلي يولد نبضة مضادة غير مقلوبة لكنها تتحرك بالاتجاه المعاكس .أي أنه لا يوجد فرق في الطور بين هاتين النبضتين.



الشكل 4.7: انعكاس الأمواج المستقرة على الحبل نهايته حرة

لنفترض الآن أن موجة تنتشر في الحبل نحو اليمين لتصل لنهايته المربوطة بالحائط فتتولد عندها موجة منعكسة تتحرك لليسار وتتداخل مع الأولى مشكلة أمواجا مستقرة. ويمكن الحصول على المعادلة التي تصف هذه الأمواج بفرض أن الأولى تكتب بالشكل:

$$y_1 = A\sin(\omega t - \kappa x)$$

بينما تنتشر الموجة المنعكسة باتجاه محور السينات السالب وتكتب بالشكل:

$$y_2 = -A\sin(\omega t + \kappa x)$$

حيث أضفنا الإشارة السالبة لأنها تختلف عن الموجة الأولى بالطور بمقدار π. فإذا وصلت هاتان الموجتان لنفس النقطة من الوسط المهتز تصير معادلة الحركة لها:

$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t - \kappa x) + A\sin(\omega t + \kappa x)$$

بعد النشر و التبسيط نجد:

$$y_T = -[2A\sin(\kappa x)]cos\omega t$$

او نكتب على الشكل:

$$y_T = A(x)\ cos\omega t$$

حيث:

$$A(x) = -2A\sin(\kappa x)$$

فالنقطة ستتحرك حركة اهتزازية بسرعة زاوية ω كالموجتين الأصليتين تماما، إلا أن سعتها تعتمد على بعدها عن بداية الحبل .فهناك نقاط سعتها العظمى أكبر ما يمكن وتساوي $A(x) = -2A$ إذا كان بعدها عن منبع الاهتزازات يحقق العلاقة:

$$\sin(\kappa x) = \pm 1 \Rightarrow \kappa x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

أي:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

أي أن كل النقاط التي تبعد عن بداية الحبل بهذا المقدار، ستهتز للأعلى والأسفل بسعة 2A وتسمى كل واحدة ذروة.

وبنفس المنطق ستكون هناك نقاط سعتها معدومة دائما لأنها تحقق العلاقة:

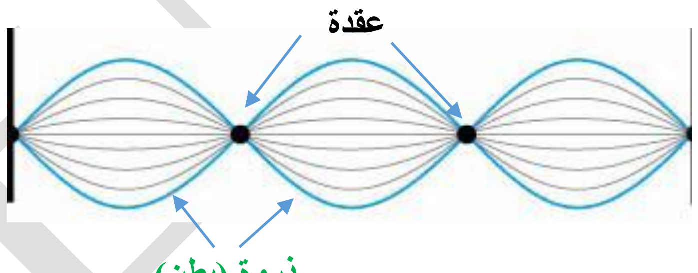
$$\sin(\kappa x) = 0 \Rightarrow \kappa x = 2n \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = 2n$$

أي عندما تكون:

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

أي أن كل النقاط التي تبعد عن بداية الحبل بالمقدار الأخير. ستبقى ساكنة تماما، وتسمى كل واحدة عقدة.

ويوضح الشكل التالي مواضع الذروات والعقد في حبل مشدود.



6.2 التجاوب

سندرس في هذه الفقرة شرط تشكل أمواج مستقرة في حبل طوله L، وكثافته الطولية μ، ومشدود بقوة F في الحالتين التاليتين:

1.6.2 الانعكاس عن نهاية ثابتة

إذا انتشرت موجة في حبل مشدود من طرفيه، فإنها تنعكس عن نهايته الثابتة وتتداخل مع الموجة القادمة من المنبع. فحتى تتشكل أمواج مستقرة في الحبل يجب أن يكون طوله مساويا لعدد صحيح من نصف طول الموجة، أي:

$$L = (n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ويوضح الشكل التالي شكل الحبل من أجل عدة قيم لـ n. وإذا افترضنا أن تردد الحركة الاهتزازية التي تبدأ عند بداية الحبل هي f، عندئذ نكتب طول الموجة:

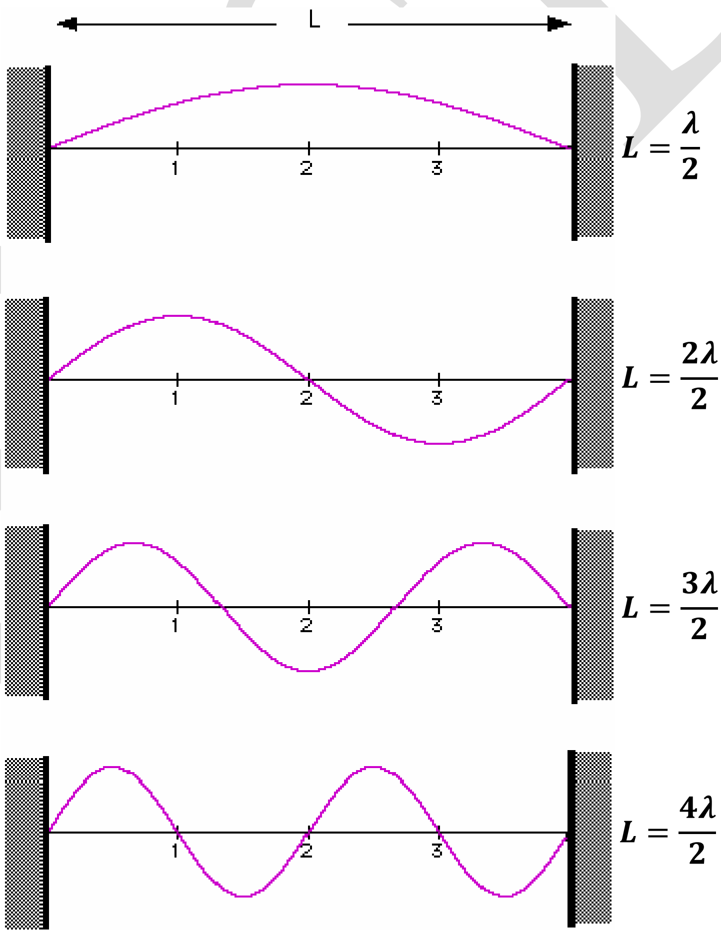
$$\lambda = \frac{v}{f}$$

وبتعويض ذلك في معادلة L نجد:

$$L = (n+1)\frac{v}{2f} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ومنه:

$$f_n = (n+1)\frac{v}{2L}$$



الشكل 5.7: تشكل أمواج مستقرة في الحبل مشدود

أي أنه إذا انتشرت موجة في حبل طوله L فإن الأمواج المستقرة لا تتشكل إلا إذا كان تردد الحركة الاهتزازية من المنبع يحقق المعادلة السابقة، أو إذا غيرنا طول الحبل أو سرعة الانتشار ليتوافق مع التردد المفروض.

ونلاحظ من العلاقة السابقة أن أقل تردد ممكن في حبل مشدود هو:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

ويسمى التردد الأساس ونكتب معادلة f السابقة بالشكل:

$$f_n = (n+1)f_0$$

وتدعى f_n المتوافقات *(harmonics)*.

2.6.2 الانعكاس عن نهاية حرة

نفترض الآن أن الموجة تنتشر في حبل ذو نهاية حرة لتصل لآخره وتنعكس عنها فتتداخل مع الأمواج القادمة وتتشكل أمواج مستقرة. ونلاحظ أن شرط تشكل هذه الأمواج هو أن يكون طول الحبل محققا للعلاقة:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

بعد تعويض λ بما يساويها نجد:

$$L = (2n+1)\frac{v}{4f}$$

ومنه:

$$f_n = (2n+1)\frac{v}{2L}$$

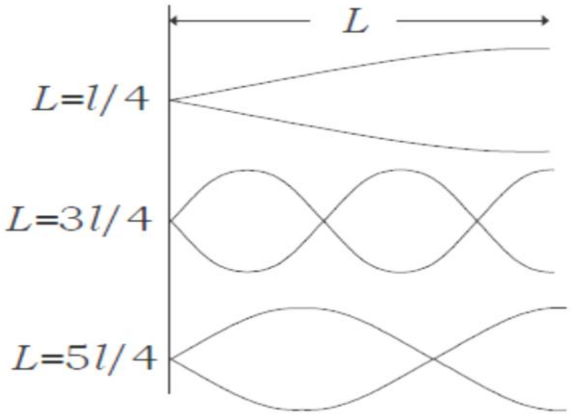
يصبح تردد الأساس في هذه الحالة هو:

$$f_0 = \frac{v}{4L}$$

و المتوافقات هي:

$$f_n = (2n+1)f_0$$

ويوضح الشكل التالي تشكل أمواج مستقرة في حبل مشدود.



الشكل 6.7: تشكل أمواج مستقرة في الحبل نهايته حرة

7.2 الصوت

يعتبر الصوت من أهم أشكال الأمواج الطولية التي نتعامل معها في حياتنا اليومية. وتنتشر الأمواج الصوتية نتيجة تغير الضغط في الهواء مما يسبب تضاغط وتخلخل ذراته بشكل مستمر فتهتز لليمين و اليسار فتنتقل اهتزازات الذرات بشكل طولي من واحدة لأخرى بنفس الاتجاه الذي تنتشر فيه الموجة الصوتية. وتعتمد سرعة الصوت في الهواء بحسب العلاقة على الضغط والكثافة:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

ونظرا لأن الضغط يعتمد على درجة الحرارة فيمكن البرهان أن سرعة الصوت في الغازات تكتب بالشكل:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{m}}$$

حيث:

γ: نسبة الحرارة النوعية للغاز.

R: ثابت الغازات العام و يساوي R=8.314 J/mol.K.

T: درجة حرارة الغاز بالكلفن.

m: فهي الكتلة الجزيئية للغاز وترتبط بكثافته و حجمه و عدد المولات n. $\rho = \frac{nm}{v}$

وتساوي سرعة الصوت في الهواء حوالي 340 m/s تحت الشروط الطبيعية من ضغط جوي واحد 1atm ودرجة حرارة 20°C.

1.7.2 شدة الصوت ومستوى الشدة

وجدنا سابقا أن كل موجة تنتشر تحمل قدرة تتناسب طردا مع مربع سعتها وترددها .ونعرف شدة الموجة I بالقدرة المنتشرة عبر واحدة المساحة، أي أن:

$$I = \frac{p}{A}$$

ووحدتها في النظام الدولي w/m^2.

ويستخدم الحد الأدنى من الشدة ويرمز له بـ I_0 كأساس لمقارنة الأصوات ببعضها حيث نعرف مستوى الشدة بالعلاقة:

$$\beta = 10log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

وتعطى وحدتها بـ "البل" (Bel)، وهذه الوحدة كبيرة، بالمقارنة مع معظم الأصوات الطبيعية، ولذلك تعطى شدة الأصوات عادة ب "الديسبل" (dB). وتتوزع شدة الصوت الصادرة عن منبع في أي وسط متجانس بشكل كروي بتناسب عكسي مع مربع البعد عنه، أي أن شدة الصوت عند نقطة تبعد مسافة r عن منبع شدته I بالعلاقة التالية:

$$I_r = \frac{I}{4\pi r^2}$$

2.7.2 الأمواج الصوتية المستقرة

تتشكل الأمواج الصوتية المستقرة في أي أنبوب هوائي بنفس الطريقة التي تتشكل بحبل مشدود. وهذا ما نسمعه عند العزف على ناي أو في الأبواق الهوائية المعروفة. فإذا افترضنا أن لدينا أنبوبا هوائيا ناي مثلا (طوله L) ونفخنا فيه فإن أمواجا صوتية مستقرة يمكن أن تتشكل فيه، ونميز هنا حالتين:

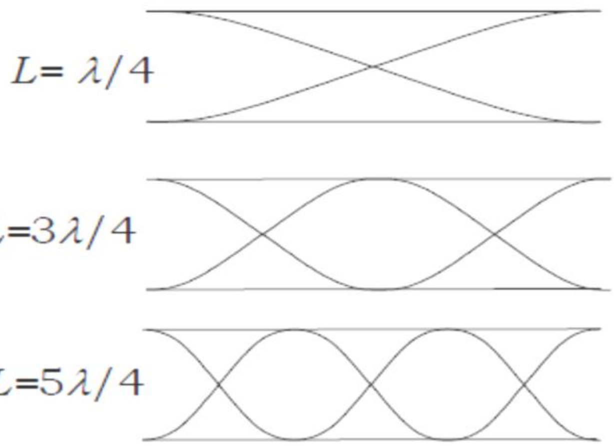
1.2.7.2 الأنبوب مفتوح الطرفين

كما في الشكل المقابل، عندئذ تكون الذرات عند الطرفين حرة الحركة ولذلك تكون سعتها أكبر ما يمكن. ويكون شرط تكون أمواج مستقرة في الأنبوب هو:

$$L = (n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ونحصل على الترددات الممكنة في الأنبوب من العلاقة:

$$f_n = (2n+1)\frac{v}{2L}$$



الشكل 7.7: تشكل أمواج الصوتية في انبوب مفتوح الطرفين

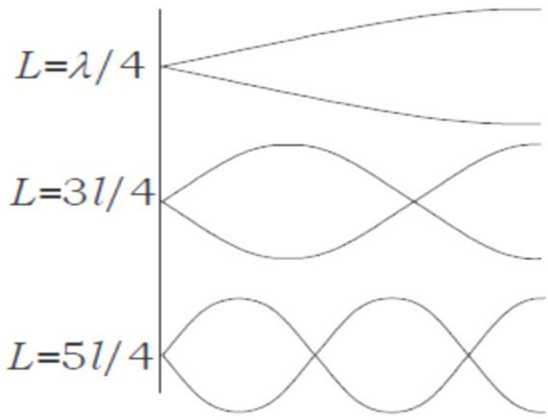
2.2.7.2 الأنبوب مغلق من طرف واحد:

كما هو موضح في الشكل التالي. عندئذ تكون الذرات عند الطرف المغلق محدودة الحركة ولذلك تكون سعتها صفر، أي عندها عقدة .ويكون شرط تكون أمواج مستقرة في الأنبوب هو:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ونحصل على الترددات الممكنة في الأنبوب من العلاقة:

$$f_n = (2n+1)\frac{v}{4L}$$



الشكل 8.7: تشكل أمواج الصوتية في انبوب مفتوح من طرف واحد

8.2 الخفقان

من المعروف لكل من يستمع للراديو أن هناك بعض المحطات التي يصعب سماعها بوضوح سبب تغير شدة الصوت صعودا وهبوطا باستمرار وبشكل دوري واضح .ويمكن تعليل هذه الظاهرة بأنه تداخل بين موجتين صوتيتين متقاربتين بالتردد .فإذا افترضنا أن موجتين تصلان لنفس النقطة من الشكل:

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t)$$
$$y_2 = A\sin(\omega_2 t)$$

وتكون الموجة الكلية عند تلك النقطة:

$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin(\omega_2 t) + A\sin(\omega_1 t)$$
$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin(\omega_2 t) + A\sin(\omega_1 t)$$

وبفرض أن $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$ بحيث أن $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ و $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ تؤول المعادلة السابقة الى:

$$y_T = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] sin\omega t$$

او تكتب على الشكل:

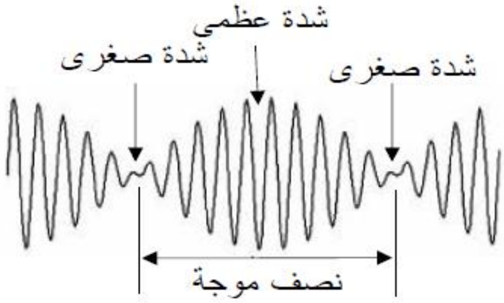
$$y_T = A(t)\, sin\omega t$$

حيث:

$$A(t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

فالحركة الكلية اهتزازية إلا أن سعتها تتغير مع الزمن مما يغير من شدتها، كما في الشكل الموالي. ونلاحظ من الشكل ايضا أن شدة الصوت تصير أكبر ما يمكن (أو أصغر ما يمكن) مرتين خلال كل نصف موجة، أي أن تردد الخفقان هو ضعف تردد الغلاف والمساوي إلى $\frac{\Delta\omega}{2}$ ولذا نعرف تردد الخفقان *(beat frequency)* بالعلاقة:

$$\omega_{beat} = \omega_1 - \omega_2$$



الشكل 9.7: منحنى بياني يوضح حالة الخفقان

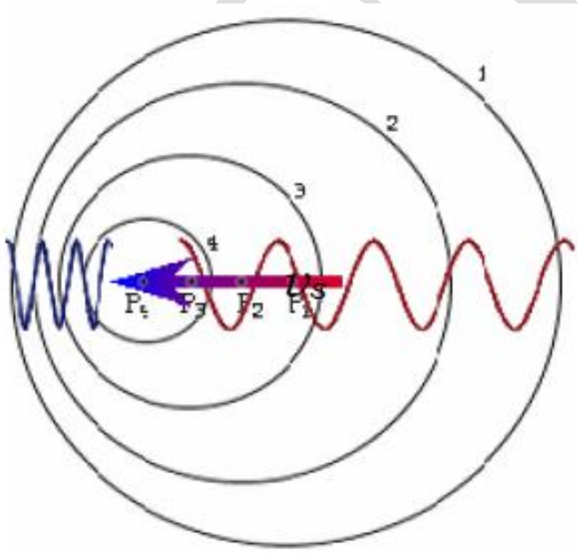
9.2 تأثير دوبلر

تعتمد سرعة الصوت على خصائص الوسط الذي تنتشر فيه بغض النظر عن طبيعة المصدر و نوعه. إلا أن حركة منبع الصوت أو المستمع تؤثر على ما نسمعه بشكل واضح. مثلا كل من استمع إلى صوت الطائرة ينتبه لتغير شدة صوتها عندما تقترب منه وعندما تبتعد عنه. ويمكن تفسير هذه الظاهرة التي تسمى تأثير دوبلر بفرض أن لدينا منبعا صوتيا يقترب من مستمع ساكن بسرعة v_s مصدرا صوتا تردده f فخلال دور كامل يكون المنبع قد تحرك مسافة $x = v_s T$ ويكون طول الموجة الواصل للمستمع عندئذ هو:

$$\lambda' = \lambda - v_s T = vT - v_s T \Longrightarrow \lambda' = (v - v_s)T$$

ومن ثم يكون التردد المسموع هو:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_s} f$$



وبنفس الطريقة نستنتج أنه لو كان المصدر يبتعد عن المستمع لكانت المسافة التي يقطعها خلال دور واحد هي x، لكن طول الموجة الواصل للمستمع يصبح:

$$\lambda' = \lambda + v_s T = vT + v_s T \Longrightarrow \lambda' = (v + v_s)T$$

ومنه التردد المسموع:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v + v_s} f$$

ومن جهة أخرى، إذا تحرك المستمع بسرعة v_L نحو منبع صوتي ساكن يصدر صوتا تردده f فإن سرعة الصوت بالنسبة للمستمع تكون:

$$v' = v + v_L$$

ولذلك يسمع صوتا طول موجته λ إلا أن تردده يعطى بالعلاقة:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_L}{\lambda} \Rightarrow f' = \frac{v + v_L}{v} f$$

وإذا تحرك المستمع بعيدا عن المنبع تؤول العلاقة السابقة إلى:

$$f' = \frac{v - v_L}{v} f$$

ويمكن اختصار النتائج السابقة بكتابة التردد المسموع في الحالة العامة لحركة كل من المنبع والمستمع بالشكل:

$$f' = \frac{v \pm v_L}{v \mp v_S} f$$

حيث نعتبر الإشارة الموجبة عندما يقترب المستمع أو يبتعد المنبع، والإشارة السالبة عندما يبتعد المستمع أو يقترب المنبع. يجب الانتباه إلى أن حركة المنبع تؤدي لتغيير طول موجة الصوت المسموع، بينما تؤدي حركة المستمع لتغيير تردده.

تمارين الفصل السابع:

التمرين الأول:

تعطى معادلة موجة كما يلي:

$$y(x,t) = 10 \sin \pi \ (2t - 0.01x)$$

حيث y و x بالسنتيمتر cm و t بالثانية s.

1- أحسب قيم طول الموجة، التواتر (التردد) و سرعة انتشار الموجة.

2- سرعة و تسارع نقطة مادية واقعة على طريق الموجة عند $x = 2 \ \text{cm}$ عند اللحظة $t = 0.05\,\text{s}$.

التمرين الثاني:

تنتشر موجة وفق خط مستقيم، بسرعة $v = 350 \ \text{m/s}$. إذا كان التردد $f = 500 \ \text{Hz}$ و السعة العظمى cm $a = 5$.

1- أكتب معادلة هذه الموجة.

2- أحسب المسافة Δx الفاصلة بين نقطتين، بينهما فرق في الطور يساوي $60°$.

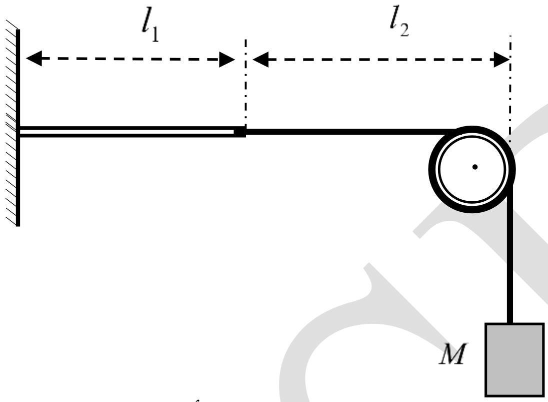
3- أحسب فرق الطور $\Delta\varphi$ ، بين انتقالين لنفس الموقع، بينهما فارق زمني يساوي 10^{-3}s.

التمرين الثالث:

حبلان مصنوعان من نفس المادة. أوجد النسبة v_2/v_1 بين سرعتي انتشار موجة عرضية على طولي الحبلين، إذا كان قطر الحبل 1 يساوي ضعف قطر الحبل 2، و يخضع لتوتر شدته نصف نظيره في الحبل2

التمرين الرابع:

حبل من الألمنيوم طوله $l_1 = 60\ \text{cm}$ ومساحة مقطعه $A = 10^{-2}\ \text{cm}^{-2}$ يثبت في حبل من حديد له نفس مساحة المقطع. يربط الحبل المركب بمكعب كتلته $M = 10\ \text{kg}$ وفق الشكل أدناه، حيث $l_2 = 86.6$. يتم إحداث أمواج عرضية بواسطة منبع خارجي ذو تردد متغير.



1- أوجد أصغر قيمة لتردد المنبع الخارجي، تمكن من الحصول على أمواج مستقرة، بحيث تكون نقطة اتصال الحبلين عبارة عن عقدة.

2- أوجد عدد العقد التي تظهر عند هذا التردد.

المعطيات:

الكتلة الحجمية للألمنيوم $\rho_{Al} = 2.60\ \text{g/cm}^3$.

الكتلة الحجمية للحديد $\rho_{Fe} = 7.80\ \text{g/cm}^3$.

التمرين الخامس:

يتم تغيير ارتفاع عمود من الهواء، عن طريق تغيير مستوى الماء في قاع أنبوب. نضع إبرة رنانة مباشرة فوق النهاية المفتوحة. عندما يشرع مستوى الماء في الهبوط، يتم سماع أول رنين لما يكون ارتفاع عمود الهواء $h_1 = 18.9\ \text{cm}$ ، ثم يليه رنين ثاني عند $h_2 = 57.5\ \text{cm}$. إذا كانت قيمة سرعة الصوت في الهواء $v = 340\ \text{m/s}$.

- أوجد تردد الإبرة الرنانة.

التمرين السادس:

يصل الصوت الصادر عن منبع، إلى نقطة معينة من الفضاء بشدة I_1.

- أوجد الزيادة في الشدة بالديسيبل dB عند نفس النقطة في حالة وضع منبع صوتي ثاني مماثل للأول إلى جانبه.

التمرين السابع:

مكبر صوت استطاعته $0.8\ W$ ، نعتبره منبع نقطي يصدر الصوت في كل الاتجاهات.

- أوجد المسافة الفاصلة بين مكبر الصوت و نقطة من الفضاء حيث تكون الشدة مقابلة للقيمة $85\ dB$.

المراجع المعتمدة

بالعربية

1- فريدريك ج. بوش، دافيد ا. جيرد، اساسيات الفيزياء، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر.

2- هشام جبر، نظرية الاهتزازات و الأمواج الميكانيكية، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، 2006.

3- طاهر تربدار، ترجمة، الاهتزازات، الانتشار والانتثار، ديوان المطبوعات الجامعية، 1979.

4- محمد حسن احمد سنادة، مقدمة في العلوم- اساسيات الفيزياء، منشورات جامعة السودان، 2008.

5- عبد الكاظم ماجود، دراسة في النظرية الاهتزازية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

6- حمدادو نصرالدين، الاهتزازات و الأمواج – دروس، المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني، وهران، 2007.

7- محمد قيصرون ميرزا، مبادئ الفيزياء الجامعية – الميكانيك و خواص المادة، جامعة البحرين، 2006.

بالأجنبية

8- H. Djelouah, Vibrations et Ondes Mécaniques-Cours & Exercices, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Année Universitaire 2011-2012.

9- Clarence W. de Silva, Vibration and Shock Handbook, Taylor & Francis Group, LLC, 2005 .

10- Thomson William, theory of vibration applications, george Allen et Unwin, London, 1981.

11- Mathieu J. P, vibration et phenomenes de vibrations, Maison, Paris, 1974.

مواقع

https://www.physics-pdf.com/2019/03/Book-Basics-of-waves-in-physics-pdf.html

https://www.researchgate.net/publication/330508083

https://www.researchgate.net/publication/325158021