الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الإخوة منتوري قسنطينة

دروس

رياضـــــــــيات2

- المصفوفات و المحددات
- جمل المعادلات الخطية
- التكاملات
- المعادلات التفاضلية
- الدوال المتعددة المتغيرات

لطلبة السنة الأولى ليسانس
(علوم التكنولوجيا، علوم المادة، هندسة النقل،...)

إعداد: ركاب صورية، بوشقوف مسعودة وعرعار نورية

السنة الجامعية : 2016-2017

الفهـــــــــــــــرس

rekkabsoraya@yahoo.fr

rekkabsoraya@yahoo.fr

مـــــــــــدخل

أيها الطالب:

حتى نتمكن من معالجة أية مسألة كانت، من المفروض إحضار الأدوات اللازمة لذلك ثم تعلم طرق استعمالها.

انطلاقا من هذه المنهجية، وحتى يتم تأهيلك للتعامل مع المسائل العلمية والتي تحتاج لأدوات رياضية، قمنا بتعريفك على مختلف تلك الأدوات في مطبوعة "دروس رياضيات1" وها نحن نضع بين يديك مطبوعة "دروس رياضيات2" التي تتضمن تقنيات الحساب.

وبما أنه لا تكاد تخلو أية مسألة في ميدان العلوم والتكنولوجيا من جمل المعادلات الخطية وكذا المعادلات التفاضلية فسنهتم تحديدا بهما. غير أن حلهما يحتاج للتطرق لمحورين أخرين: فحل جمل المعادلات الخطية يعتمد على المصفوفات والمحددات، أما حل المعادلات التفاضلية فهو مرتبط بحساب التكاملات.

وعليه وتماشيا مع البرنامج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي تم التطرق للمحاور الأربعة المذكورة سابقا، إضافة إلى محور الدوال المتعددة المتغيرات (التي تعتبر هي الدوال الشائعة في العالم الحقيقي) وكذا التكامل الثنائي والتكامل الثلاثي في الفصل الخامس.

وأخيرا، وإذ نقدم هذه المطبوعة فإننا نقبل النقد والملاحظات والإرشادات الصادقة، ولذلك نكون شاكرين لو أرسلت هذه الارشادات إلينا حتى يمكننا مستقبلا تلافي أي خطأ نكون قد وقعنا فيه.

الأستاذة: ص. ركاب

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الأول:

المصفوفات والمحددات

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الأول:

المصفوفات والمحددات

Matrices et déterminants

1-1 المصفوفات

تعريف

ليكن m و n عددين طبيعيين غير معدومين.

نسمي **مصفوفة** matrice $m\times n$ عناصر الحقل IK $(IK=IR$ أو $IK=IC)$ المرتبة في جدول يحتوي على صفوف (m سطر و n عمود) والمحصورة بين قوسين أو حاضنتين من الشكل :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ أو } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

- نرمز للمصفوفة بالحروف $\mathrm{A},\mathrm{B},C,\ldots$ أو $\mathrm{A}=(a_{ij})$ حيث $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.
- نسمي العنصر a_{ij} **معامل** coefficient المصفوفة وهو يقع في السطر i والعمود j.
- إذا كانت المصفوفة تحتوي على m سطر و n عمود نقول أنها ذات **بعد** dimension أو **رتبة** ordre أو **مقاس** taille $m\times n$.
- نرمز إلى مجموعة المصفوفات $m\times n$ ومعاملات من IK بـ $M_{m,n}(IK)$.

مثال1

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & i & 4 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة 2×4 حيث $a_{22}=2$ و $a_{14}=\sqrt{2}$.

$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 7 \\ \sqrt{3} & \pi \end{pmatrix}$ هي مصفوفة 3×2 حيث $a_{32}=\pi$ و $a_{21}=-5$.

مثال2

المصفوفة 2×3 والتي عناصرها تحقق المعادلة التالية : $a_{ij}=i^2-j$ هي

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

1-1-1 مصفوفات خاصة

- نقول أن A **مصفوفة صفرية** matrice nulle إذا كان جميع عناصرها مساوية للصفر أي

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=0$$

- نقول أن A **مصفوفة مربعة** $n\times n$ matrice carrée إذا كان عدد أسطرها m مساوي لعدد أعمدتها n. حينئذ نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة ذات العناصر من IK $n\times n$ بـ $M_n(IK)$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

العناصر $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ تشكل **قطر رئيسي** diagonale principale.

- نقول أن A **مصفوفة مثلثية علوية** $n\times n$ matrice triangulaire supérieure إذا كانت جميع العناصر التي تقع تحت القطر الرئيسي معدومة. أي $\forall i>j,\ a_{ij}=0$. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- نقول أن A **مصفوفة مثلثية سفلية** $n\times n$ matrice triangulaire inférieure إذا كانت جميع العناصر التي تقع فوق القطر الرئيسي معدومة. أي $\forall i<j,\ a_{ij}=0$. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- نقول أن A **مصفوفة قطرية** $n\times n$ matrice diagonale إذا كانت مثلثية سفلية ومثلثية علوية أي جميع عناصرها معدومة ما عدا عناصر القطر الرئيسي. أي $\forall i\neq j,\ a_{ij}=0$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(يمكن لبعض عناصر القطر الرئيسي أن تكون معدومة)

- نقول أن A **مصفوفة واحدية** $n\times n$ matrice identité إذا كانت مصفوفة قطرية وجميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 و نرمز لها بالرمز I_n. أي

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- نسمي **مصفوفة سطر** $1\times m$ matrice ligne أو **شعاع أفقي** vecteur ligne المصفوفة التي تحتوي على سطر واحد. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

- نسمي **مصفوفة عمود** $n\times 1$ matrice colonne أو **شعاع عمودي** vecteur colonne المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين

نقول أن المصفوفة $A=(a_{ij})$ مساوية للمصفوفة $B=(b_{ij})$ إذا وفقط إذا كانا لهما نفس عدد الأسطر m ونفس عدد الأعمدة n والعناصر المتقابلة متساوية أي $a_{ij}=b_{ij}$ من أجل $1\le j\le n$, $1\le i\le m$.

مثال

إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ فإن $A\neq B$ لأن $a_{12}\neq b_{12}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

2-1-1 عمليات على المصفوفات

1- الجمع

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times n$ و$B=(b_{ij})$ مصفوفة $m\times n$، جمع المصفوفتين A و B هو مصفوفة C $m\times n$ ذات العناصر (c_{ij}) حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ من أجل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}.......c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}.......c_{2n} \\ .. & \\ c_{m1} & c_{m2}.......c_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}..........a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}..........a_{2n}+b_{2n} \\ ..... & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}.........a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

لكن $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ غير معرف.

2- الضرب بسلمية

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times n$ و ليكن العدد λ $(\lambda\in IR$ أو $\lambda\in IC)$ ضرب المصفوفة A بالعدد λ هو مصفوفة $m\times n$ ذات العناصر (b_{ij}) حيث $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ أي

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ....\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ....\lambda a_{2n} \\ .... & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ......\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال1

لتكن $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ فان $2A=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -10 \end{pmatrix}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال2

لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ أحسب $3A+B$.

الحل

$$3A+B=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 1 & -7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -7\\ 13 & 20 & -10\end{pmatrix}$$

ملاحظة 1

المصفوفة $A\times(-1)$ والتي نرمز لها بالرمز $-A$ تمكننا من تعريف الفرق بين مصفوفتين A و B اللتين لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة بالشكل:

$$A-B=A+(-1)\times B$$

مثال

لتكن المصفوفتان $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ فإن نظيرة B هي $-B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

والفرق بين A و B هو $A-B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

خواص

ليكن A و B و C مصفوفات ذات نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة ، ولتكن λ و λ' عددين حقيقيين أو مركبين. لدينا الخواص التالية:

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
4. $(\lambda+\lambda')A=\lambda A+\lambda' A$
5. $\lambda(\lambda' A)=(\lambda\lambda')A$
6. $1.A=A$

مثال

لتكن $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. ولتكن X مصفوفة 2×2 تحقق $2X+3A=B$ ، عين المصفوفة X.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الحل

باستعمال الملاحظة1 فإن $2X = B - 3A$ وبضرب المصفوفتين $2X$ و $B - 3A$ بالعدد $\frac{1}{2}$ نجد

$X = \frac{1}{2}(B - 3A)$ ومنه $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ وبالتالي $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3- الجداء

- **جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود**

لتكن $V = (v_j)$ مصفوفة سطر $1 \times n$ أو شعاع أفقي ولتكن $W = (w_i)$ مصفوفة عمود $n \times 1$ أو شعاع عمودي. جداء الشعاع V بالشعاع W هو مصفوفة 1×1 أي تحتوي على معامل واحد على الشكل:

$$VW = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots v_n w_n)$$

مثال1

ليكن $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفة 1×3 و $W = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة 3×1 . فإن

$$\begin{aligned} VW &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= ((-1)\times 5 + 2 \times (-1) + (-3)\times 0) \\ &= (-7) \end{aligned}$$

مثال2

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0)$$

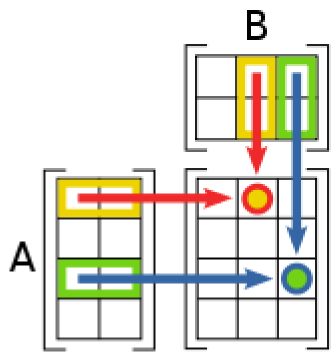
هذا الجداء هو في الحقيقة الجداء السلمي أما المساواة الأخيرة فتبين أن الشعاعين $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ متعامدين.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- **جداء مصفوفتين**

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times r$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفة $r\times n$، جداء المصفوفة A بالمصفوفة B هو مصفوفة C $m\times n$ ذات العناصر (c_{ij}) حيث $c_{ij}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$ $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

أي أننا نحصل على جداء مصفوفتين بضرب كل سطر من المصفوفة الأولى بأعمدة المصفوفة الثانية.



مثال1

لتكن $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ مصفوفة 3×2 و $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ مصفوفة 3×3 فإن عدد أعمدة A هو 3 فهو يساوي عدد أسطر B أي يمكن حساب الجداء AB ونحصل على مصفوفة 3×2

$$AB=\begin{pmatrix}2\times 2+3\times 1+1\times(-1) & 2\times 0+3\times 0+1\times 1\\(-1)\times 2+2\times 1+2\times(-1) & (-1)\times 0+2\times 0+2\times 1\\0\times 2+1\times 1+0\times(-1) & 0\times 0+1\times 0+0\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\-2&2\\1&0\end{pmatrix}$$

مثال2

لتكن $B=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ مصفوفة عمود 3×1 و $A=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-2&1&3\end{pmatrix}$ مصفوفة 2×3 فإن عدد أعمدة A هو 3 فهو يساوي عدد أسطر B أي يمكن حساب الجداء AB ونحصل على مصفوفة عمود 2×1.

$$AB=\begin{pmatrix}2\times 1+0\times(-2)+(-3)\times 3\\(-2)\times 1+1\times(-2)+3\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملاحظات

- لكي يكون الجداء AB معرفا يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.
- الضرب ليس تبديلي أي عامة $AB \neq BA$. فعلا
مثلا: لتكن $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ فان $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- الضرب تجميعي أي $(AB)C = A(BC)$.
- الضرب توزيعي على الجمع أي $A(B+C) = AB + AC$.
- لتكن A مصفوفة $m \times n$، فإن $AI_n = I_m A = A$.

4- المنقول

لتكن A مصفوفة $m \times n$. منقول المصفوفة A هي مصفوفة $n \times m$ نرمز لها بـ A^T حيث أسطرها هي أعمدة A وأعمدتها هي أسطر A.

مثال

لتكن $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة 3×4 فإن $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة 3×4.

ولتكن $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ مصفوفة 2×3 فإن $B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة 3×2.

خواص

لتكن A و B مصفوفتين لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة ، وليكن λ عددا حقيقيا أو مركبا.
لدينا الخواص التالية:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(A^T)^T = A$

rekkabsoraya@yahoo.fr

5- المقلوب

لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$، نقول أن المصفوفة A **عكوسة** أو **قابلة للقلب** inversible إذا وجدت مصفوفة مربعة B $n\times n$ حيث: $AB=BA=I_n$. عندئذ نسمي B **مقلوب** أو **معكوس** A inverse و نرمز لها بالرمز A^{-1}.

مثال1

لتكن $E=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$ و $F=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}$ مصفوفتين مربعتين. نريد أن نبين أن المصفوفة E تقبل مقلوب F. لنجري الجداء $E\times F$ التي هي مصفوفة مربعة ذات سطرين.

$$EF=\begin{pmatrix}1\times4+3\times(-1)&1\times(-3)+3\times1\\1\times4+4\times(-1)&1\times(-3)+4\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

إذن المصفوفة E عكوسة تقبل مقلوب $F=E^{-1}$.

مثال2

أحسب A^{-1} حيث $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$.

الحل

A مصفوفة 2×2 ومنه فإن A^{-1} إن وجدت يجب أن تكون مصفوفة 2×2.

نفرض $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ و هي تحقق $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ أي

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+5c&2b+5d\\a+3c&b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+5c=1\\2b+5d=0\\a+3c=0\\b+3d=1\end{cases}\Rightarrow a=3\wedge c=-1\wedge b=2\wedge d=-5$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

خواص

- لتكن $A,B\in M_n(IR)$، إذا كان A و B عكوسين فإن AB عكوسة و لدينا $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- لتكن $A\in M_n(IR)$، إذا كانت A عكوسة فإن A^T عكوسة و لدينا $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

2-1 المحددات

تعريف

المحدد هو تطبيق معرف من $M_n(IR)$ مجموعة المصفوفات المربعة $n\times n$ نحو IR ترفق بكل مصفوفة $A=(a_{ij})$ مربعة $n\times n$ عددا حقيقيا نرمز له بالرمز $\det A$.

حساب محدد 2×2:

لتكن $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(IR)$. فإن

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

مثال

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\times 3-1\times 1=5$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3\end{vmatrix}=4\times 3-(-1)\times 1=13$$

حساب محدد $n\times n$:

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n\times n$ فإن $\det A$ معطى بالعبارة التالية:

(نشر بالنسبة للعمود j) $$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$ أو

(نشر بالنسبة للسطر i) $$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

حيث M_{ij} هو المحدد الناتج بحذف السطر i و العمود j للمصفوفة A.

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملاحظات

- قيمة محدد مصفوفة $n\times n$ لا تتغير إذا استعملنا أي عبارة نشر بالنسبة لأي سطر أو لأي عمود.
- عبارة النشر بالنسبة لأي سطر أو لأي عمود ترجع حساب محدد $n\times n$ إلى حساب n من المحددات $(n-1)\times(n-1)$. بواسطة التراجع المتناقص حيث نتوصل هكذا إلى حساب $n!$ من المحددات 1×1.
- محدد 1×1 هو من الشكل $\det(a)=a$.

مراحل حساب محدد

لحساب $\det A$ نتبع الخطوات التالية:

1. نختار سطر أو عمود يستحسن اختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من العناصر المعدومة.
2. نضع إشارة فوق كل عنصر من السطر (أو العمود) المختار وذلك بالتناوب (مرة – ومرة +) متجهين أفقيا أو عموديا ومبتدئين دوما بإعطاء العنصر الموجود في السطر الأول والعمود الأول الإشارة +.
3. نضرب كل عنصر من السطر (أو العمود) المختار بالمحدد الناتج بحذف السطر والعمود أين يقع ذلك العنصر مع مراعاة الإشارة الممنوحة سابقا.
4. نجمع كل الجداءات المتحصل عليها.

حساب محدد 3×3:

لتكن $A\in M_3(IR)$.

باستعمال السطر الأول:

$$\det A=\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

أو باستعمال العمود الثاني:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \overset{-}{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \overset{+}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \overset{-}{a_{32}} & a_{33}\end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

$$\begin{vmatrix}3&0&0\\2&0&-4\\2&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-4\\1&0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2&-4\\2&0\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-4\\1&0\end{vmatrix}=12$$

$$\begin{vmatrix}2&3&2\\-2&-1&0\\-4&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2&-1\\-4&3\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2&3\\-2&-1\end{vmatrix}$$

$$=2((-2)\times 3-(-4)\times(-1))+5(2\times(-1)-(-2)\times 3)=2(-10)+5(4)=0$$

لتسهيل عملية حساب المحددات نعتمد على الخواص التالية

خواص

لتكن $A,B\in M_n(IK)$ فإن :

- إذا كانت A مصفوفة قطرية فإن $\det A=a_{11}.a_{22}\,........a_{nn}$.
- $\det I_n=1$.
- $\det(A^T)=\det A$.
- $\det BA=\det AB=\det A.\det B$
- $\det(A+B)\neq\det A+\det B$ بصفة عامة.
- $\det(\lambda A)\neq\lambda\det A$ بصفة عامة من أجل $\lambda\in IR$.
- $\det(\lambda A)=\det((\lambda I_n)A)=\det(\lambda I_n)\det A=\lambda^n\det A$.
- $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$ إذا كانت A عكوسة.
- إذا بادلنا سطرين (أو عمودين) فإن إشارة المحدد تتغير.

مثلا: $\begin{vmatrix}3&0&0\\2&0&-4\\2&1&0\end{vmatrix}=12$ فإنه بمبادلة السطرين الأول و الثالث نجد: $\begin{vmatrix}2&1&0\\2&0&-4\\3&0&0\end{vmatrix}=-12$

- إذا احتوت مصفوفة على سطر (أو عمود) جميع عناصره معدومة فإن قيمة محددها صفر.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثلا: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ دون حساب لأن جميع عناصر العمود الثاني معدومة.

- إذا احتوت مصفوفة على سطرين (أو عمودين) متماثلين فإن قيمة محددها صفر.

مثلا: $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 8 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ لأن العمودين الثاني و الرابع متماثلان.

- إذا ضربنا جميع عناصر سطر (أو عمود) بعدد α فإن قيمة المحدد تضرب بـ α.

مثلا: إذا كان $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$ فإن $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24$.

إيجاد مقلوب مصفوفة

لتكن $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{IK})$ حيث $\det \mathrm{A} \neq 0$. يمكننا حساب A^{-1} مقلوب المصفوفة A كما يلي:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} (Com\mathrm{A})^T$$

حيث $1 \leq ij \leq n$ $Com\mathrm{A} = (c_{ij})$ و $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ و M_{ij} هو المحدد الناتج بحذف السطر i و العمود j المصفوفة A.

مراحل حساب مقلوب مصفوفة

لحساب مقلوب مصفوفة مربعة A نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب $\det \mathrm{A}$.
2. إذا كان $\det \mathrm{A} = 0$ نقول أن A لا تقبل مقلوب ونتوقف. أما إذا $\det \mathrm{A} \neq 0$ نتابع إلى الخطوة 3
3. نحسب M_{ij} المحددات الناتجة بحذف السطر i والعمود j لـ A.
4. نضيف إشارات بالتناوب لتشكيل $Com\mathrm{A}$.
5. نحسب المنقول $(Com\mathrm{A})^T$.
6. نقسم كل معاملات $(Com\mathrm{A})^T$ على $\det \mathrm{A}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

أحسب إذا أمكن مقلوب المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

الحل

نحسب أولا $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3(1-3) = -6$$

بما أن $\det A \neq 0$ إذن A قابلة للقلب و $A^{-1} = \dfrac{(Com\ A)^T}{\det A}$

حيث $Com\ A = (c_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $\forall i,j = 1,2,3$

$$Com\ A = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ، $M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ، $M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$ ، $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9$ ، $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 16$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$ ، $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$ ، $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

و منه $Com\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -3 & 9 & -16 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (Com\ A)^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -3 \\ -2 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}(ComA)^{T}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -3/2 & 1/2\\ 1/3 & 8/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

3-1 المصفوفات والتطبيقات الخطية

سوف نرى أنه توجد علاقة وثيقة بين المصفوفات و التطبيقات الخطية. نرفق لمصفوفة تطبيقا خطيا و بالعكس، من أجل تطبيق خطي كيفي وأساسين لفضاءي البدء والوصول كيفيين نرفق مصفوفة.

المصفوفة المرافقة أو المشاركة لتطبيق خطي

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ذو بعد منته n. وليكن $\{v_1,v_2,....,v_n\}$ أساسا في E.

ليكن F فضاء شعاعي على الحقل K ذو بعد منته m. ولتكن $\{w_1,w_2,.....,w_m\}$ أساسا في F.

إذا كان f تطبيقا خطيا من E نحو F فإن

$$f:E\to F\Rightarrow\begin{cases}f(v_1)\in F\Rightarrow f(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+....+a_{m1}w_m\\ f(v_2)\in F\Rightarrow f(v_2)=a_{12}w_1+a_{22}w_2+....+a_{m2}w_m\\ \vdots\\ f(v_n)\in F\Rightarrow f(v_n)=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+....+a_{mn}w_m\end{cases}$$

المركبات a_{ij} يمكن تمثيلها في مصفوفة $m\times n$ كالتالي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2)\ldots & f(v_n)\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \mathrm{M}(f)= & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow w_1\\ \leftarrow w_2\\ \vdots\\ \leftarrow w_m\end{array}\end{array}$$

أي مصفوفة عناصر أعمدتها هي مركبات صور الأشعة $\{v_1,v_2,....,v_n\}$ بواسطة التطبيق f في الأساس $\{w_1,w_2,.....,w_m\}$.

نسميها **المصفوفة المرافقة** أو **المشاركة** لـ f matrice associée ونرمز لها بالرمز $\mathrm{M}(f)$.

ملاحظات

- إذا كان $f:E\to F$ تطبيقا خطيا فإن $\mathrm{M}(f)$ هي مصفوفة $\dim F\times\dim E$.
- معاملات المصفوفة المرافقة لـ $f:E\to F$ تتعلق باختيار أساس E و **أساس** F.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال1

ليكن التطبيق الخطي $f: IR^2 \to IR^3$ حيث $(x,y) \mapsto (x-y, 2x+y, x+3y)$.

عين $\mathrm{M}(f)$ المصفوفة المرافقة لـ f وفق الأساسين النظاميين لـ IR^2 و IR^3.

الحل

$\mathrm{M}(f)$ هي مصفوفة 3×2. أعمدتها هي مركبات صور الأساس النظامي لـ IR^2 وهو $\{(1,0),(0,1)\}$ بواسطة التطبيق f وفق الأساس النظامي لـ IR^3 وهو $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

$$f(1,0)=(1,2,1)=1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)$$

$$f(0,1)=(-1,1,3)=-1(1,0,0)+1(0,1,0)+3(0,0,1)$$

$$\Rightarrow \mathrm{M}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

مثال2

ليكن التطبيق الخطي $g: IR^2 \to IR^3$ حيث $(x,y) \mapsto (x+y, x-y, x+y)$.

عين $\mathrm{M}(g)$ المصفوفة المرافقة لـ g وفق الأساسين $\{(1,1),(1,-1)\}$ و $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ لـ IR^2 و IR^3 على الترتيب.

الحل

$\mathrm{M}(g)$ هي مصفوفة 3×2. أعمدتها هي مركبات صور الأساس النظامي لـ IR^2 وهو $\{(1,1),(1,-1)\}$ بواسطة التطبيق g وفق الأساس النظامي لـ IR^3 وهو $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

$$g(1,1)=(2,0,2)=0(1,1,0)+2(1,0,1)+0(0,1,1)$$

$$g(1,-1)=(0,2,0)=1(1,1,0)-1(1,0,1)+1(0,1,1)$$

$$\Rightarrow \mathrm{M}(g)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ملاحظات

- المصفوفة المرافقة للتطبيق الصفري هي المصفوفة الصفرية.
- المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي هي مصفوفة الوحدة.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- المصفوفة المرافقة للتطبيق $(f+g)$ هي مجموع المصفوفة المرافقة للتطبيق f و المصفوفة المرافقة للتطبيق g. أي

$$\mathrm{M}(f+g)=\mathrm{M}(f)+\mathrm{M}(g)$$

- المصفوفة المرافقة للتطبيق λf هي المصفوفة الناتجة من ضرب المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالسلمية λ. أي

$$\mathrm{M}(\lambda f)=\lambda \mathrm{M}(f)$$

- المصفوفة المرافقة للتطبيق $f o g$ هي المصفوفة الناتجة من جداء المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالمصفوفة المرافقة للتطبيق g. أي

$$\mathrm{M}(f o g)=\mathrm{M}(f).\mathrm{M}(g)$$

- المصفوفة المرافقة للتطبيق f تكون تقبل مقلوب إذا وفقط إذا كان التطبيق f تقابلي.
- إذا كانت المصفوفة A تقبل مقلوبا و هي مرافقة للتطبيق f فإن A^{-1} هي المصفوفة المرافقة للتطبيق f^{-1}. أي

$$(\mathrm{M}(f))^{-1}=\mathrm{M}\left(f^{-1}\right)$$

التطبيق الخطي المرافق لمصفوفة

لتكن $\mathrm{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ مصفوفة $m\times n$ وليكن E و F فضاءين شعاعيين حيث $\dim E=n$ و $\dim F=m$ و $\{v_1,v_2,....,v_n\}$ أساسا في E و $\{w_1,w_2,.....,w_m\}$ أساسا في F.

نسمي التطبيق الخطي $f:E\to F$ **تطبيقا خطيا مرافقا للمصفوفة** $\mathrm{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ إذا كان $f(v_j)=a_{1j}w_1+a_{2j}w_2+\ldots+a_{mj}w_m$ من أجل كل $1\le j\le n$. و نرمز له بـ f_{A}.

مثال

لتكن $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

نعتبر الفضاء الشعاعي IR^2 وأساسه النظامي $\{e_1,e_2\}$ والفضاء الشعاعي IR^3 وأساسه النظامي $\{e_1,e_2,e_3\}$.

يوجد تطبيق خطي وحيد $f_{\mathrm{A}}:\mathrm{IR}^3\to \mathrm{IR}^2$ حيث

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\begin{cases} f_A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (2,0) \\ f_A(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 = (1,1) \\ f_A(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 = (-1,1) \end{cases}$$

ليكن $(x,y,z) \in IR^3$

$$\begin{aligned} f_A(x,y,z) &= f_A(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= x\, f_A(e_1) + y\, f_A(e_2) + z\, f_A(e_3) \\ &= x(2,0) + y(1,1) + z(-1,1) \end{aligned}$$

ومنه

$$f_A(x,y,z) = (2x + y - z \;,\; y + z)$$

4-1 مصفوفة العبور

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته n مزود بأساسين $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ و $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$. نسمي **مصفوفة العبور** matrice de passage من الأساس B_1 نحو الأساس B_2 المصفوفة المربعة $n \times n$ حيث يتكون العمود رقم j من مركبات الشعاع w_j في الأساس B_2.

أي أن أعمدة مصفوفة العبور من B_1 نحو B_2 هي مركبات أشعة الأساس الجديد B_2 بدلالة أشعة الأساس القديم B_1. ونرمز لها بالرمز P_{B_1,B_2}.

مثال

ليكن الفضاء الشعاعي IR^2 مزود بأساسين $B_1 = \{v_1, v_2\}$ و $B_2 = \{w_1, w_2\}$ حيث

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

عين مصفوفة العبور من الأساس B_1 نحو الأساس B_2.

الحل

نكتب $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ في الأساس $B_1 = \{v_1, v_2\}$.

نفرض أن α و β مركبات w_1 في B_1. أي

$$w_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

إذن

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$w_1 = -v_1 + 2v_2$$

وبنفس الطريقة نبحث عن مركبات

$$w_2 = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

إذن

$$w_1 = v_1 + 4v_2$$

ومنه مصفوفة العبور هي:

$$P_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ملاحظة

مصفوفة العبور P_{B_1,B_2} من الأساس B_1 نحو الأساس B_2 في الفضاء E هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي المطابق Id_E المعرف من الفضاء E مزودا بالأساس B_1 نحو نفس الفضاء E لكنه مزودا بالأساس B_2. أي

$$P_{B_1,B_2} = M_{B_1,B_2}(Id_E)$$

خواص

1. مصفوفة العبور من الأساس B_1 نحو الأساس B_2 قابلة للقلب ومقلوبها هي مصفوفة العبور من الأساس B_2 نحو الأساس B_1. أي

$$P_{B_1,B_2} = (P_{B_2,B_1})^{-1}$$

2. إذا كانت B_1، B_2 و B_3 ثلاث أساسات في نفس الفضاء، فإن

$$P_{B_1,B_3} = P_{B_1,B_2} \times P_{B_2,B_3}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الثاني:

جمل المعادلات الخطية

rekkabsoraya@yahoo.fr

جمل المعادلات الخطية

Systèmes d'équations linéaires

1-2 عموميات

تعريف

نسمي **جملة** m **معادلات خطية** بـ n **مجاهيل** système de m équations à n inconnues كل قائمة لـ m معادلات خطية بـ n مجاهيل. على الشكل العام:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

العناصر a_{ij} حيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، هي معاملات الجملة و هي معطاة. الدليل الأول i يرمز إلى رقم السطر و الدليل الثاني j يرمز إلى رقم العمود.

العناصر b_i حيث $1 \leq i \leq m$، تشكل الطرف الثاني للجملة و هي أيضا معطاة.

العناصر x_j حيث $1 \leq j \leq n$، هي مجاهيل الجملة .

أمثلة

- معادلة خطية بمجهولين من الشكل: $a_1x + a_2y = b$ ، هي معادلة مستقيم في المستوي.
- جملة معادلتين بمجهولين من الشكل: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases}$.
- جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل من الشكل : $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$.

الشكل المصفوفي للجمل

لتكن (S) جملة m معادلات خطية بـ n مجاهيل على الشكل العام:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

بوضع معاملات الجملة a_{ij} حيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، في مصفوفة $m \times n$. أي

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

والمجاهيل x_j $1 \le j \le n$، في مصفوفة عمود $n \times 1$ أو شعاع عمودي X. أي

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

وعناصر الطرف الثاني b_i $1 \le i \le m$، في مصفوفة عمود $m \times 1$ أو شعاع عمودي B. أي

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

فإنه يمكننا كتابة الجملة (S) على **الشكل المصفوفي** forme matricielle :

$$AX=B$$

مثال

لتكن (S) جملة معادلتين بمجهولين على الشكل:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 5x+7y=-3 \end{cases}$$

بوضع

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$، $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

فإن الجملة (S) تكتب على الشكل المصفوفي $AX=B$.

ملاحظة

عند كتابة جملة على الشكل المصفوفي احترام ترتيب المتغيرات والمعادلات.

مثال

لتكن (S) جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل على الشكل:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\begin{cases} 3u-2w+4v=-7 \\ 5v-3w=16 \\ w+2u=6 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة (S) هو $\begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \\ v \end{pmatrix}$.

أو على الشكل المصفوفي $\begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

أي أن تغيير ترتيب المجاهيل يؤدي إلى تغيير في مصفوفة المعاملات.

2-2 دراسة مجموعة الحلول

تعريف

نسمي **حل** solution جملة معادلات خطية القائمة لـ $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ بحيث إذا عوضنا x_1 بـ s_1 و x_2 بـ s_2...الخ، في جملة المعادلات الخطية تتحقق المساويات.

مثال

الجملة:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

تقبل $(-18,-6,1)$ حلا أي $x_1 = -18$ ، $x_2 = -6$ ، $x_3 = 1$.

في حين $(7,2,0)$ يحقق المعادلة الأولى فقط. هو إذن ليس حلا للجملة.

ملاحظة1

البحث عن الثنائية (x, y) التي تحقق عدة معادلات من نفس النمط هو البحث عن نقاط تقاطع عدة مستقيمات.

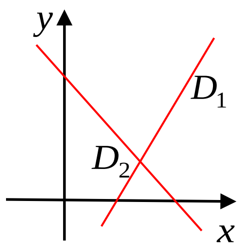
مثلا النقطة (x, y) هي ضمن تقاطع مستقيمين D_1 و D_2 ذي المعادلتين $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ و $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ على الترتيب إذا كانت حلا للجملة:

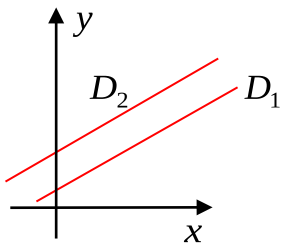
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

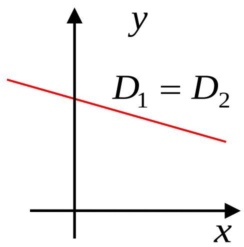
هناك ثلاث احتمالات:

rekkabsoraya@yahoo.fr

1. المستقيمان D_1 و D_2 يتقاطعان في نقطة واحدة. إذن الجملة تقبل حلا وحيدا.
2. المستقيمان D_1 و D_2 متوازيان. إذن الجملة لا تقبل حلولا.
3. المستقيمان D_1 و D_2 منطبقان. إذن الجملة تقبل ما لا نهاية من الحلول.







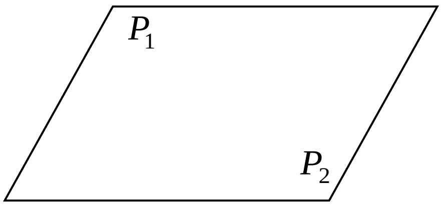
ملاحظة2

معادلة خطية بثلاث مجاهيل x، y و z هي معادلة مستوي في الفضاء.

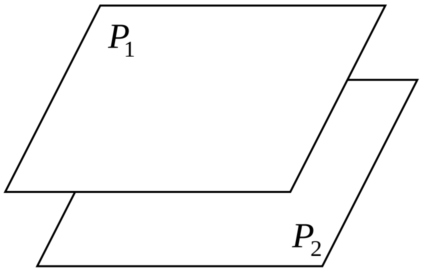
لتكن ثلاث جمل بمعادلتين وثلاث مجاهيل على الشكل:

$$3)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-y-z=1 \end{cases} \qquad 1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-y-z=-1 \end{cases}$$

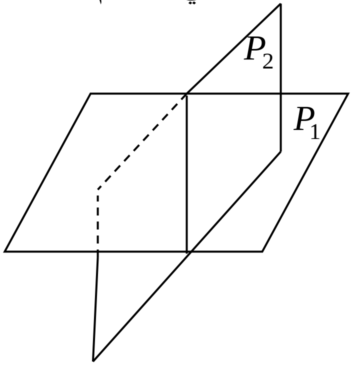
معادلتي الجملة الأولى تمثلان نفس المستوي. إذن مجموعة الحلول هي ذلك المستوي.



معادلتي الجملة الثانية تمثلان مستويين متوازيين. إذن مجموعة الحلول خالية.



معادلتي الجملة الثالثة تمثل مستويين يتقاطعان في مستقيم.



rekkabsoraya@yahoo.fr

يمكن لجملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل أن تقبل حلا وحيدا (بصفة عامة، تتقاطع ثلاث مستويات في نقطة من الفضاء)

نظرية

لتكن (S) جملة n معادلات خطية بـ m مجاهيل على الشكل المصفوفي: $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$. فإن الجملة (S) لا تقبل حلولا أو تقبل حلا وحيدا أو تقبل ما لا نهاية من الحلول.

2-3 طرق حل جملة معادلات خطية

2-3-1 طريقة كرامر Cramer

لتكن (S) جملة n معادلات خطية بـ n مجاهيل على الشكل المصفوفي: $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$. حيث

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}،\quad \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- إذا كان $\det \mathrm{A}=0$: فإن الجملة لا تقبل حلولا أو تقبل ما لا نهاية من الحلول.
- إذا كان $\det \mathrm{A}\neq 0$: فإن الجملة تقبل حلا وحيدا معطى بـ:

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ حيث } x_j=\frac{\Delta_j}{\det \mathrm{A}} \text{ من أجل } 1\leq j\leq n$$

حيث Δ_j هو محدد المصفوفة الناتجة من استبدال العمود j بالطرف الثاني B في المصفوفة A . أي

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}،\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ و هكذا...}$$

مثال1

باستعمال طريقة كرامر حل الجملة:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

الحل

الشكل المصفوفي للجملة هو $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ أي $AX = B$

حساب محدد مصفوفة المعاملات A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

بما أن محدد مصفوفة المعاملات غير معدوم فإن الجملة تقبل حلا وحيدا معطى بـ

$$x = \frac{\Delta_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

و

$$y = \frac{\Delta_2}{-3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

و منه الحل هو $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

مثال2

باستعمال طريقة كرامر حل الجملة التالية

$$\begin{cases} 3u + w - 2 = 0 \\ u - w - 3v = 0 \\ v + u + 3w = 0 \end{cases}$$

الحل

بترتيب المعاملات و المتغيرات نجد الجملة على الشكل العام:

$$\begin{cases} 3u + w = 2 \\ u - 3v - w = 0 \\ u + v + 3w = 0 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة هو

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باختيار السطر الأول $\det A$ حساب

$$\det A = 3\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = -20$$

$\det A \neq 0$ فان الجملة تقبل حلا وحيدا معطى بـ

$$. X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} / u = \frac{\Delta_1}{\det A}, v = \frac{\Delta_2}{\det A}, w = \frac{\Delta_3}{\det A}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow u = \frac{4}{5}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow v = \frac{2}{5}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow w = \frac{-2}{5}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

2-3-2 طريقة المقلوب

لتكن (S) جملة n معادلات خطية بـ n مجاهيل على الشكل المصفوفي: $AX = B$. حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}، X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- إذا كان $\det A = 0$: فإن الجملة لا تقبل حلول أو تقبل ما لا نهاية من الحلول.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- إذا كان $\det A \neq 0$: فإن الجملة تقبل حلا وحيدا معطى بـ:

$$X = A^{-1}B$$

مثال

باستعمال طريقة المقلوب حل الجملة:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

الحل

الشكل المصفوفي للجملة هو $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ أي $AX = B$

حساب محدد مصفوفة المعاملات A

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

بما أن محدد مصفوفة المعاملات غير معدوم فإن الجملة تقبل حلا وحيدا معطى بـ $X = A^{-1}B$

حساب A^{-1} بالعلاقة $A^{-1} = \dfrac{(ComA)^T}{\det A}$ وبما أن $ComA = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{pmatrix}$ حيث M_{ij} هو

المحدد الناتج بحذف السطر i والعمود j من $\det A$ إذن $ComA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ومنه

$(ComA)^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ أي $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -5/9 \end{pmatrix}$ وبالتالي حل الجملة هو

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -5/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ملاحظات

- لا يمكننا استعمال طريقتي كرامر أو المقلوب إلا لحل جمل n معادلات خطية بـ n مجاهيل.
- في حالة الجملة لا تقبل حلا وحيدا، فإنه باستعمال طرقتي كرامر أو المقلوب لا يمكننا تحديد فيما إذا كانت تقبل ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل حلولا.

rekkabsoraya@yahoo.fr

لا بد لنا إذن من التعرف على طريقة أخرى يمكننا استعمالها لحل أي نوع من الجمل الخطية سواء كان عدد المعادلات يساوي، أقل أو أكبر من عدد المجاهيل.

كما أنه في حالة الجملة لا تقبل حلا وحيدا يمكننا تحديد فيما إذا كانت لا تقبل حلولا أو تقبل ما لا نهاية من الحلول. وهي طريقة قوص.

2-3-3 طريقة قوص

مثال تمهيدي

لتكن الجملة التالية:

$$\begin{cases} x+y+z=2 & L_1 \\ -7y-z=5 & L_2 \\ 2z=4 & L_3 \end{cases}$$

وهي جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل على شكل يسمى "مدرج".

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة L_3 تعطي $z=2$. وبالتعويض في المعادلة الثانية L_2 نحصل على $y=-1$

وفي النهاية بالتعويض بقيمتي y و z في المعادلة الأولى L_1 نجد $x=1$.

بمعنى أنه إذا توصلنا إلى كتابة أي جملة على الشكل المدرج، نتمكن من حل المعادلة الأخيرة ثم صعودا بالتتابع حل بقية المعادلات. إنه مبدأ **طريقة قوص** méthode du pivot de Gauss.

مراحل طريقة قوص

تستعمل طريقة قوص لحل أي نوع من الجمل الخطية على الشكل العام:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 & L_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m & L_m \end{cases}$$

حسب المرحلتين التاليتين:

المرحلة الأولي:

نقوم بعمليات أولية على الأسطر (المعادلات) L_i وهي:

1. تغيير ترتيب سطرين (معادلتين). $(i\neq j)\ \ L_i \leftarrow L_j$
2. ضرب سطر(معادلة) بعدد غير معدوم. $(\lambda\neq 0)\ \ L_i \leftarrow \lambda L_i$
3. إضافة سطر(معادلة) إلى سطر(معادلة) آخر. $(\lambda\neq 0)\wedge(i\neq j)\ \ L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$

حتى نتوصل إلى جملة مكافئة (أي لها نفس مجموعة الحلول) على شكل مدرج:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$(S')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & L_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 & L_2 \\ \ddots \quad \vdots & \vdots \\ \alpha_{mn}x_n = \beta_m & L_m \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

نحل الجملة المدرجة (S'). وذلك بدءا من المعادلة الأخيرة L_m حيث نستخرج قيمة x_m ثم بالتعويض في L_{m-1} نحصل على قيمة x_{m-1} و هكذا صعودا و بالتتالي نتابع حتى نحصل على x_1 من L_1.

مثال

باستعمال طريقة قوص حل الجملة:

$$(S)\begin{cases} x + y + 7z = -1 & L_1 \\ 2x - y + 5z = -5 & L_2 \\ -x - 3y - 9z = -5 & L_3 \end{cases}$$

الحل

نحول الجملة إلى شكل مدرج باستعمال العمليات الأولية كالتالي:

نحذف x من المعادلتين الثانية والثالثة وذلك باستعمال المعادلة الأولى:

$$(S)\begin{cases} x + y + 7z = -1 & L_1 \\ -3y - 9z = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - 2z = -6 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

نجعل معامل y في المعادلة الثانية يساوي 1:

$$(S)\begin{cases} x + y + 7z = -1 & L_1 \\ y + 3z = 1 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ -2y - 2z = -6 & L_3 \end{cases}$$

نحذف y من المعادلة الثالثة وذلك باستعمال المعادلة الثانية:

$$(S)\begin{cases} x + y + 7z = -1 & L_1 \\ y + 3z = 1 & L_2 \\ 4z = -4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

من L_3 نجد: $z = -1$ وبالتعويض في L_2 نجد $y = 4$ وأخيرا بالتعويض في L_1 نجد $x = 2$.

ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا $(2, 4, -1)$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

كيفية تحديد مجموعة الحلول

خلال وضع جملة على الشكل المدرج قد نصادف نوعين من المعادلات:

- إذا ظهرت معادلة من النوع $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$ حيث $b \neq 0$. إذن في هذه الحالة الجملة لا تقبل حلولا.
- وإذا لم تظهر معادلة من النوع السابق، لكن ظهرت معادلة من النوع $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$، نحذفها ونتابع حتى نتوصل إلى جملة من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \quad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{ir}x_r + \ldots + a_{in}x_n & = b_i \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

حيث أن المعاملات الموجودة في بداية جميع الأسطر ليست معدومة ونسمي المتغيرات الموالية لها **متغيرات أساسية** inconnues principales أما بقية المتغيرات (إن وجدت) فتسمى **متغيرات ثانوية** inconnues secondaires.

هناك حالتين:

1. إما، لا توجد متغيرات ثانوية وفي هذه الحالة الجملة تقبل حلا وحيدا. يتم تعيينه إبتداء من السطر الأخير ثم بالتعويض بالقيم المحسوبة صعودا حتى السطر الأول.
2. أو توجد متغيرات ثانوية. وفي هذه الحالة يتم تحويلها إلى الطرف الثاني حتى نحصل على جملة من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s & = b_1 - a_{1(s+1)}x_{s+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \quad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{ir}x_r + \ldots + a_{is}x_s & = b_i - a_{i(s+1)}x_{s+1} - \ldots - a_{in}x_n \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{ms}x_s = b_m - a_{m(s-1)}x_{s+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

نحلها صعودا من المعادلة الأخيرة كما سبق ورأينا لكن هذه المرة بدلالة المتغيرات الثانوية.

بما أن المتغيرات الثانوية هي كيفية نستنتج أنه من أجل كل اختيار لقيم المتغيرات الثانوية نحصل على قيم جديدة للمتغيرات الأساسية ومنه فالجملة تقبل ما لانهاية من الحلول.

مثال1

باستعمال طريقة قوص حل الجملة:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$(S)\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ 3x+2y-z=5 & L_2 \\ 2x+4y+10z=5 & L_3 \end{cases}$$

الحل

نحذف x من L_2 و L_3:

$$(S)\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ -y-4z=2 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ 2y+8z=3 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

نجعل معامل y في L_2 يساوي 1:

$$(S)\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ y+4z=-2 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ 2y+8z=3 & L_3 \end{cases}$$

نحذف y من L_3:

$$(S)\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ y+4z=-2 & L_2 \\ 0=7 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

حسب L_3 الجملة لا تقبل حلولا.

مثال2

باستعمال طريقة قوص حل الجملة:

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 & L_1 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 & L_2 \\ 2x_1-x_2-10x_3+13x_4=-2 & L_3 \end{cases}$$

الحل

نحذف x من L_2 و L_3:

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 & L_1 \\ -x_2-4x_3+5x_4=-2 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ -3x_2-12x_3+15x_4=-6 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

نجعل معامل y في L_2 يساوي 1:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 & L_1 \\ x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ -3x_2 - 12x_3 + 15x_4 = -6 & L_3 \end{cases}$$

نحذف y من L_3:

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 & L_1 \\ x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2 & L_2 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

نحذف السطر L_3 من الجملة:

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 & L_1 \\ x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2 & L_2 \end{cases}$$

نحول المتغيرات الثانوية x_3 و x_4 إلى الطرف الثاني:

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - x_3 + x_4 & L_1 \\ x_2 = 2 - 4x_3 + 5x_4 & L_2 \end{cases}$$

من السطر L_2 نجد $x_2 = 2 - 4x_3 + 5x_4$ و بالتعويض في السطر L_1 نجد $x_1 = 3x_3 - 4x_4$ أي أن

الجملة تقبل ما لا نهاية من الحلول من الشكل $\begin{pmatrix} 3x_3 - 4x_4 \\ 2 - 4x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ حيث x_3 و x_4 أعداد كيفية من IR .

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الثالث:

التكاملات

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الثالث:

التكاملات

Les intégrales

1-3 التكامل غير المعرف

تعريف1

لتكن f دالة مستمرة على مجال I من IR. نسمي **دالة أصلية** لـ f primitive de f على I، كل دالة F قابلة للاشتقاق على I وتحقق:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

مثال

- $F : x \mapsto \ln x$ هي دالة أصلية لـ $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على IR_+^* لأن: $\forall x \in IR_+^*, F'(x) = f(x)$.
- $F : x \mapsto 2 + \ln x$ هي أيضا دالة أصلية لـ $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على IR_+^* لأن: $\forall x \in IR_+^*, F'(x) = f(x)$.

نتيجة

إذا كان F تابع أصلي لـ f على مجال I فإن f يقبل ما لا نهاية من التوابع الأصلية من الشكل $F + C$ حيث C ثابت حقيقي.

تعريف2

لتكن f دالة مستمرة على مجال I من IR. نسمي **تكامل غير معرف** لـ f intégrale indéfinie على I، مجموعة كل الدوال الأصلية لـ f على I ونرمز له بالرمز:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{حيث} \quad \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

خواص

ليكن f و g تابعان مستمران على مجال I. فإن:

1. $\int f'(x)dx = f(x) + C$
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

rekkabsoraya@yahoo.fr

علاقة التكامل بالاشتقاق تلهمنا طرقا وتقنيات لحساب التكاملات مستنبطة من الاشتقاق.

2-3 طرق حساب التكاملات

1-2-3 مباشرة بقراءة معكوسة لجدول اشتقاق الدوال الشهيرة نتمكن من الحصول على الجدول التالي:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	C
$x^{\alpha}\ \ (\alpha \in IR/\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
e^{x}	$e^{x}+c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$a^{x}\ \ (a>0\ \ ,\ a\neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a}a^{x}+c$

2-2-3 تحويل تكامل مجموع إلى مجموع تكاملات. (نتيجة لمشتقة المجموع)

ليكن f و g تابعان مستمران على مجال I. فإن

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

مثال

$$\int \left(e^{x}+\cos x\right)dx = \int e^{x}dx + \int \cos x\,dx = e^{x} + \sin x + C$$

3-2-3 اخراج أو إدخال ثابت على التكامل. (نتيجة لاشتقاق ثابت في دالة)

ليكن f تابعا مستمرا على مجال I. وليكن α عددا حقيقيا فإن:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\int (\alpha f)(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

مثال

$$\int \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}dx = \sqrt{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \sqrt{2}\arctan x + C$$

4-2-3 تقنية التكامل بالتجزئة. (نتيجة لمشتقة الجداء)

ليكن f و g تابعان قابلان للاشتقاق على مجال I بحيث $f'g$ و $g'f$ مستمران فإن

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ملاحظات

1) في بعض الأحيان نضطر إلى استعمال التكامل بالتجزئة عدة مرات.

مثال

لحساب : $I(x) = \int x^2 e^x dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة نضع

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$$

ومنه

$$I(x) = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

لحساب : $J(x) = \int xe^x dx$ نستعمل مرة ثانية التكامل بالتجزئة نضع

$$f_1(x) = x \Rightarrow f_1'(x) = 1$$

$$g_1'(x) = e^x \Rightarrow g_1(x) = e^x$$

ومنه

$$J(x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

بالتعويض في عبارة I نجد

$$I(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C_0$$

2) إن اختيار f و g' ليس عشوائي. فمثلا

rekkabsoraya@yahoo.fr

أ. لحساب : $\int P_n(x)e^x dx$ أو $\int P_n(x)\cos x\, dx$ أو $\int P_n(x)\sin x\, dx$ حيث $P(x)$ هو كثير حدود من الدرجة n. نستعمل التكامل بالتجزئة n مرة ويكون الاختيار في كل مرة وفي كل حالة كالتالي:

$$\begin{matrix} f(x)=P_n(x) \\ g'(x)=e^x \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} f(x)=P_n(x) \\ g'(x)=\cos x \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} f(x)=P_n(x) \\ g'(x)=\sin x \end{matrix}$$

مثال

لحساب : $I(x)=\int x^2\cos x\, dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة نضع

$$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$$
$$g'(x)=\cos x \Rightarrow g(x)=\sin x$$

ومنه

$$I(x)=x^2\sin x-2\int x\sin x\, dx$$

لحساب : $J(x)=\int x\sin x\, dx$ نستعمل مرة ثانية التكامل بالتجزئة نضع

$$f_1(x)=x \Rightarrow f_1'(x)=1$$
$$g_1'(x)=\sin x \Rightarrow g_1(x)=-\cos x$$

ومنه

$$J(x)=-x\cos x+\int \cos x\, dx=-x\cos x+\sin x+C$$

بالتعويض في عبارة I نجد

$$I_1(x)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C_0$$

ب. لحساب: $\int P_n(x)\ln x\, dx$ أو $\int P_n(x)\arccos x\, dx$ أو $\int P_n(x)\arcsin x\, dx$ أو $\int P_n(x)\arctan x\, dx$ حيث $P(x)$ هو كثير حدود من الدرجة n.

نستعمل التكامل بالتجزئة مرة واحدة فقط ويجب أن يكون الاختيار في كل حالة كالتالي:

$$\begin{matrix} f(x)=\ln x \\ g'(x)=P_n(x) \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} f(x)=\arccos x \\ g'(x)=P_n(x) \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} f(x)=\arcsin x \\ g'(x)=P_n(x) \end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix} f(x)=\arctan x \\ g'(x)=P_n(x) \end{matrix}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لحساب: $I(x)=\int \ln x\,dx$ نجري التكامل بالتجزئة مرة واحدة. نضع

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x$$

ومنه

$$I(x)=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

5-2-3 تقنية تحويل المتغير. (نتيجة مشتقة التركيب)

- لحساب التكامل غير المعرف من الشكل: $\int f(u(x))dx$

أو التكامل المعرف من الشكل: $\int_a^b f(u(x))dx$ نتبع الخطوات التالية:

1. نضع $u(x)=t$ حيث u تابع قابل للاشتقاق ورتيب تماما.
2. نحل المعادلة $u(x)=t$ ونحصل على $x=v(t)$.
3. نحسب $dx=v'(t)dt$.
4. نعوض في التكامل x و dx بدلالة t و dt.
5. نحسب التكامل الناتج غير المعرف $\int f(t)v'(t)dt$ أو المعرف $\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t)dt$
6. نعوض في النتيجة t بدلالة x بالنسبة للتكامل غير المعرف.

مثال

لحساب : $I_1(x)=\int \sin(2x+\pi)dx$ نضع $t=2x+\pi$ إذن $x=\frac{t-\pi}{2}$ ومنه $dx=\frac{1}{2}dt$

بالتعويض في $I_1(x)$ نحصل على التكامل: $I_1(x)=\frac{1}{2}\int \sin t\,dt=\frac{-1}{2}\cos t+C$

نعوض t بدلالة x نجد

$$I_1(x)=\frac{-1}{2}\cos(2x+\pi)+C$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

- لحساب التكامل غير المعرف من الشكل: $\int f(u(x))u'(x)dx$ نتبع الخطوات التالية:

1. نضع $u(x)=t$ حيث u قابل للاشتقاق ورتيب تماما.
2. نحسب $dt=u'(x)dx$.
7. نعوض في التكامل x و dx بدلالة t و dt.
8. نحسب التكامل الناتج غير المعرف $\int f(t)dt$.
9. نعوض في النتيجة t بدلالة x .

مثال

لحساب: $I_1(x)=\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$ نضع $t=\sin x$ إذن $dt=\cos x\,dx$ بالتعويض في $I_1(x)$

نحصل على التكامل: $I_1(x)=\int \sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$ نعوض t بدلالة x نجد

$$I_1(x)=\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$$

ملاحظة

استعمال تحويل متغير يمكننا من الحصول على الجدول التالي:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$u^{\alpha}(x)u'(x)/\alpha\neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan u(x)+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x+c$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c$
$u'(x)\sin u(x)$	$-\cos u(x)+c$
$u'(x)\cos u(x)$	$\sin u(x)+c$

rekkabsoraya@yahoo.fr

3-3 تكامل كثيرات الحدود

ليكن P_n كثير حدود من الدرجة n على الشكل التالي:

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

بالاعتماد على الخواص الخطية للتكامل 1-2-2 و 1-2-3 وكذا: $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ الموجودة بالجدول 1-2-1 فإن:

$$\int P_n(x)dx=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n-1}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$$

مثال

$$\int(2x^2+1)dx=2\int x^2dx+\int dx=\frac{2}{3}x^3+x+C$$

3-4 تكامل الدوال الناطقة

3-4-1 ليكن التكامل من الشكل: $I(x)=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$. حيث P و Q كثيرا حدود.

لحساب $I(x)$ نتبع المراحل التالية:

- **المرحلة الأولى**: مراقبة الدرجة.

إذا كان $\deg(P)<\deg(Q)$ نمر إلى المرحلة الثانية.

وإلا، أي إذا كان $\deg(P)\geq\deg(Q)$ نجري قسمة إقليدية لـ P على Q فنجد:

$$P(x)=H(x)Q(x)+R(x)$$

حيث $H(x)$ و $R(x)$ هما كثيرا حدود و $\deg(R)<\deg(Q)$ ومنه

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int H(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

- لحساب $\int H(x)dx$ أنظر الفقرة 3-3.

- لحساب $\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$ نمر إلى المرحلة الثانية.

- **المرحلة الثانية**: تحليل $Q(x)$ في IR.

حيث نكتب $Q(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى أو من الدرجة الثانية مميزها سالب $(\Delta<0)$. أي

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\alpha_2)^{s_2}\dots(x-\alpha_r)^{s_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\dots\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{m_k}.$$

حيث :

- من أجل كل $1\le i\le r$ فإن α_i هو جذر حقيقي لـ $Q(x)$ و s_i هي درجة تضاعفه.
- من أجل كل $1\le j\le k$ فإن $p_j^2-4q_j<0$.

- **المرحلة الثالثة:** تفكيك $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

نكتب الكسر $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ على شكل مجموع كسور كالتالي:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)}=&\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}\dots+\frac{A_{1s_1}}{(x-\alpha_1)^{s_1}}+\\&\frac{A_{21}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2}\dots+\frac{A_{2s_2}}{(x-\alpha_2)^{s_2}}+\dots\\&+\frac{A_{r1}}{x-\alpha_r}+\frac{A_{r2}}{(x-\alpha_r)^2}\dots+\frac{A_{rs_r}}{(x-\alpha_r)^{s_r}}+\\&\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}\dots+\frac{M_{1m_1}x+N_{1m_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}}+\\&\frac{M_{21}x+N_{21}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_{22}x+N_{22}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}\dots+\frac{M_{2m_1}x+N_{2m_1}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_1}}+\\&\dots+\frac{M_{k1}x+N_{k1}}{x^2+p_kx+q_k}+\frac{M_{k2}x+N_{k2}}{\left(x^2+p_k+q_k\right)^2}+\dots+\frac{M_{km_k}x+N_{km_k}}{\left(x^2+p_kx+q_k\right)^{m_k}}.\end{aligned}$$

حيث A_{ij} و M_{ij} و N_{ij} هي ثوابت نحسبها بتوحيد المقامات ثم المطابقة أو بإعطاء قيم خاصة.

- **المرحلة الرابعة:** المكاملة.

يعود حساب التكامل $I(x)=\displaystyle\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$ إلى حساب تكامل الكسور الناطقة البسيطة من الشكلين :

$I_1(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n}$ و $I_2(x)=\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx$ حيث $n,m\in IN^*$ و $p^2-4q<0$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

3-4-2 حساب التكامل من الشكل: $I_1(x)=\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n}$.

من أجل $n=1$ فإن:

$$I_1(x)=\int \frac{dx}{x-\alpha}=\ln|x-\alpha|+Cte$$

من أجل $n>1$ فإن:

$$I_1(x)=\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n}=\frac{1}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}}+Cte$$

3-4-3 حساب التكامل من الشكل: $I_2(x)=\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ حيث $\Delta=p^2-4q<0$.

نكتب البسط بدلالة مشتقة المقام

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}$$

ومنه

$$I_2(x)=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$I_2(x)=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_3(x)$$

لحساب $I_3(x)=\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ نحاول كتابته على شكل التكامل الشهير: $\int \frac{dt}{t^2+1}$

نضع

$$\beta^2=\frac{-\Delta}{4}=\frac{4q-p^2}{4}$$

ومنه يصبح المقام على الشكل

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\beta^2=\beta^2\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\beta}\right)^2+1\right)$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\Rightarrow I_3(x)=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+p/2}{\beta}\right)^2+1}$$

باستعمال تحويل متغير $t=\frac{x+p/2}{\beta}$ ومنه $dx=\beta dt$ إذن

$$I_3(x)=\frac{1}{\beta}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\beta}\arctan t+C=\frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+p/2}{\beta}\right)+C$$

وبالتعويض في عبارة $I_2(x)$ نجد

$$I_2(x)=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+p/2}{\beta}\right)+C$$

مثال1

لحساب: $I(x)=\int\frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$.

نحلل المقام

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

نفكك الكسر

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}\text{.......................}(*)$$

حساب A: بضرب طرفي $(*)$ بـ $(x-2)$ ثم نضع $x=2$ نجد $A=5$.

حساب B: بضرب طرفي $(*)$ بـ $(x-1)$ ثم نضع $x=1$ نجد $B=-4$.

ومنه

$$I(x)=\int\frac{x+3}{x^2-x-2}dx=5\int\frac{dx}{x-2}-4\int\frac{dx}{x-1}$$

$$I(x)=5\ln|x-2|-4\ln|x-1|+Cte$$

مثال2

حساب: $I(x)=\int\frac{-x+5}{(x^2-x-2)(x-2)}dx$

rekkabsoraya@yahoo.fr

لتحليل المقام نحسب مميز $\left(x^2-x-2\right)$ نجد $\Delta=9$ ومنه فهو يتحلل كالتالي:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

نفكك الكسر على الشكل:

$$\frac{-x+5}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(*)$$

حساب A : نضرب طرفي $(*)$ في $(x-2)^2$ ثم نعوض بـ $x=2$ نجد $A=1$.

حساب C : نضرب طرفي $(*)$ في $(x+1)$ ثم نعوض بـ $x=-1$ نجد $C=\frac{2}{3}$.

حساب B : نعطي قيمة كيفية لـ x تختلف عن جذور المقامات مثلا $x=0$ نجد $B=-\frac{2}{3}$.

$$I(x)=\int\frac{dx}{(x-2)^2}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}$$
$$=\frac{-1}{x-2}-\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|+Cte$$

مثال3

حساب التكامل: $I(x)=\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)(1+x)}dx$

باستعمال القسمة الاقليدية للبسط على المقام بعد نشره

$$\left(x^2+2x+3\right)(x+1)=x^3+3x^2+5x+3$$

نجد

$$\begin{array}{l|l}
x^4+4x^3+11x^2+12x+8 & x^3+3x^2+5x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+3x^3+5x^2+3x} & \quad x+1 \\
x^3+6x^2+9x+8 & \\
\underline{x^3+3x^2+5x+3} & \\
3x^2+4x+5 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)(x+1)}=x+1-\frac{3x^2+4x+5}{\left(x^2+2x+3\right)(x+1)}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$I(x)=\int x\,dx+\int dx-\int \frac{3x^2+4x+5}{(x^2+2x+3)(x+1)}dx\ =\frac{x^2}{2}+x+J(x)$$

حساب $J(x)=\int \frac{3x^2+4x+5}{(x^2+2x+3)(x+1)}dx$:

نلاحظ أن المقام هو على شكله المحلل لأن مميز (x^2+2x+3) هو $\Delta=-8<0$.

نفكك الكسر على الشكل

$$\frac{3x^2+4x+5}{(x^2+2x+3)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+3}.................(*)$$

- حساب A : نضرب طرفي $(*)$ في $(x+1)$ ثم نعوض بـ $x=-1$ نجد $A=2$.
- حساب N : نعوض بقيمة A في $(*)$ ثم نعوض بـ $x=0$ نجد $N=-1$.
- حساب M : نعوض بقيمة A و N في $(*)$ ثم نعوض بـ $x=1$ نجد $M=1$.

ومنه

$$J(x)=2\int \frac{dx}{x+1}+\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx=2|x+1|+K(x)$$

حساب $K(x)=\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$:

نكتب البسط بدلالة مشتقة المقام على الشكل

$$x-1=\frac{1}{2}(2x+2)-2$$

$$\Rightarrow K(x)=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-2\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-2L(x)$$

حساب $L(x)=\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$: نجري تغييرا في شكل المقام كالتالي

$$x^2+2x+3=(x+1)^2+2=2\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\Rightarrow L(x)=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

باستعمال تحويل متغير $t=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$ فإن $dx=\sqrt{2}dt$ بالتعويض في $L(x)$ نجد

$$L(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan t+Cte=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+Cte$$

بالتعويض في $K(x)$ نجد

$$K(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C_0$$

وبالتعويض في $J(x)$ نجد

$$J(x)=2|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

وأخيرا بالتعويض في $I(x)$ نجد

$$I(x)=\frac{x^2}{2}+x+2|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

5-3 تكامل الدوال الأسية والمثلثية

لحساب التكامل من الشكل : $\int e^{kx}\cos px\,dx$ أو من الشكل $\int e^{kx}\sin px\,dx$ حيث $k,p\in IR$

نستعمل التكامل بالتجزئة مرتين والحساب يبين لنا أن التوابع الأصلية لها هي على الشكل:

$$G:x\mapsto e^{kx}(\lambda\cos px+\mu\sin px)$$

لتعيين λ و μ يكفي مقارنة $G'(x)$ مع $e^{kx}\cos px$ أو $e^{kx}\sin px$.

مثال

لحساب: $I=\int e^{-2x}\cos x\,dx$ نستعمل التكامل بالتجزئة. نضع

$$f'(x)=\cos x\Rightarrow f(x)=\sin x$$

$$g(x)=e^{-2x}\Rightarrow g'(x)=-2e^{-2x}$$

ومنه

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$I(x)=e^{-2x}\sin x+2\int e^{-2x}\sin x\,dx$$

لحساب : $J(x)=\int e^{-2x}\sin x\,dx$ نستعمل مرة ثانية التكامل بالتجزئة نضع

$$f_1'(x)=\sin x \Rightarrow f_1(x)=-\cos x$$

$$g_1(x)=e^{-2x} \Rightarrow g_1(x)=-2e^{-2x}$$

ومنه

$$J(x)=-e^{-2x}\cos x-2\int e^{-2x}\cos x\,dx=-e^{-2x}\cos x-2I(x)$$

بالتعويض في عبارة I نجد

$$I(x)=e^{-2x}(\sin x-2\cos x)-4I(x)$$

$$I(x)=\frac{e^{-2x}}{5}(\sin x-2\cos x)+Cte$$

6-3 التكامل المعرف

لتكن f دالة معرفة على مجال $[a,b]$ ولتكن F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

نسمي **تكامل معرف** لـ f intégrale définie de بين a و b المقدار $F(b)-F(a)$ ونرمز له

بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ أو $[F(x)]_a^b$ أي

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

ونسمي العددين a و b **حدود التكامل** bornes d'intégrale.

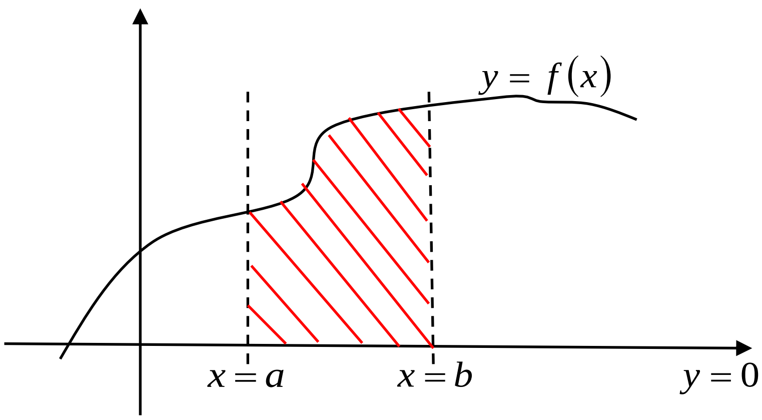
ملاحظات

1. العدد x هو متغير أبكم أي: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=...$.

2. قيمة التكامل المعرف لا تتعلق بـ x.

rekkabsoraya@yahoo.fr

3. يمثل التكامل المعرف $\int_a^b f(x)dx$ هندسيا المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f ومحور الفواصل $y=0$ والمستقيمين ذو المعادلتين $x=a$ و $x=b$.



مثال

- $$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

خواص

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$. فإن:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad / a \le c \le b$

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الرابع:

المعادلات التفاضلية

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الرابع:

المعادلات التفاضلية

Les équations différentielles

4-1 المعادلات التفاضلية العادية

تعريف1

نسمي **معادلة تفاضلية عادية** équation différentielle ordinaire كل علاقة بين المتغير x و التابع المجهول $y=f(x)$ و مشتقاته y' ، y'' ،...، $y^{(n)}$. و نكتب :

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0 \quad \text{أو} \quad F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

مثال

$F=m\dfrac{dV}{dt}$.

تعريف2

نسمي **رتبة** ordre معادلة تفاضلية الرتبة العليا للمشتق الموجود فيها.

مثال

- المعادلة التفاضلية $y'+2y=0$ رتبتها 1.
- المعادلة التفاضلية $y'\left(1+y'^3\right)=5y''+\cos x$ رتبتها 2.

تعريف3

نسمي **حل** solution أو **تكامل** **intégrale** معادلة تفاضلية كل دالة $\varphi: I\rightarrow IR$ قابلة للاشتقاق n مرة تحققها أي:

$$F\left(x,\varphi,\varphi',\ldots,\varphi^{(n)}\right)=0$$

مثال

المعادلة التفاضلية $y'+\dfrac{y}{x}=0$ تقبل مجموعة حلول على الشكل $y=\dfrac{Cte}{x}$ حيث Cte ثابت حقيقي كيفي. منحنياتها متوازية.

لنبحث عن الحل الذي يمر من النقطة $(2,1)$ و هو بالتعويض $y=\dfrac{2}{x}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

ملاحظة

- دون فرض أي شروط ابتدائية نسمي **الحل العام** solution générale مجموعة حلول المعادلة التفاضلية و هو يحتوي على ثوابت كيفية.
- نسمي الحل الذي يمر من (x_0, y_0) **حل خاص** solution particulière للمعادلة التفاضلية وهو يوافق قيم محددة للثوابت.

2-4 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

هي على الشكل العام:

$$y' = f(x,y) \text{ أو } F(x,y,y') = 0$$

1-2-4 المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة

هي على الشكل العام:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

نحصل على حلها العام مباشرة بالتكامل:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = 0$$

مثال

لتكن $xdx + ydy = 0$ حلها العام $\int xdx + \int ydy = 0$ أي $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ ومنه $x^2 + y^2 = C_0$ وهي معادلة مجموعة دوائر مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها C_0.

2-2-4 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

هي على الشكل العام:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

في حالة $M_2(x)N_1(y) \neq 0$ نستطيع تحويلها إلى معادلة ذات متغيرات منفصلة وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $M_2(x)N_1(y)$ فنجد:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة.

مثال

لتكن $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$. لنفصل المتغيرات وذلك بالقسمة على xy نجد

rekkabsoraya@yahoo.fr

$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$ أي $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0$

بالمكاملة نحصل على $\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$ أو $\ln|xy|+x-y=C$

و هو الحل العام للمعادلة المقترحة.

3-2-4 المعادلات التفاضلية المتجانسة

نقول أن المعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$ **متجانسة** homogène إذا كان

$$\forall\lambda\in IR:\ f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$$

بأخذ $\lambda=\frac{1}{x}$ حيث $x\neq 0$ فإن العلاقة السابقة تصبح على الشكل:

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

نلاحظ أن التابع f لا يتعلق مباشرة بالمتغيرين x و y وإنما يتعلق بالنسبة بينهما أي $\frac{y}{x}$.

طريقة الحل:

نضع $u=\frac{y}{x}$ ومنه $y=ux$ وبالتالي $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$y'=f(1,u)=\frac{du}{dx}x+u$ أي $(f(1,u)-u)dx-xdu=0$ و هي معادلة تفاضلية قابلة للفصل.

مثال

لتكن $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

نضع $u=\frac{y}{x}$ ومنه $y=ux$ وبالتالي $y'=\frac{du}{dx}x+u$.

بالتعويض في المعادلة المقترحة نجد $e^{u}+u=\frac{du}{dx}x+u$ أي $e^{u}dx-xdu=0$

و هي معادلة قابلة للفصل إذن نفصل المتغيرات فتصبح

$$\frac{dx}{x}-e^{-u}du=0$$

و هي معادلة منفصلة نحلها بالمكاملة نجد

$$\int\frac{dx}{x}-\int e^{-u}du=0$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

ومنه $\ln|x| + e^{-u} = C$

وبتعويض $u = \dfrac{y}{x}$ نجد الحل العام للمعادلة المقترحة هو $y = -x\ln\left(C - \ln|x|\right)$.

4-2-4 المعادلة الخطية من الرتبة الأولى

هي على الشكل العام:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

حيث P و Q هما دالتان (أو ثابتان) مستمرتان على مجال I معطاتان.

إذا كان: $\forall x \in I, Q(x) = 0$ ، عندئذ نسمي المعادلة:

$$y' + P(x)y = 0$$

معادلة دون طرف ثاني أو متجانسة.

طريقة الحل:

تعتمد على النظرية التالية

نظرية

كل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى يمكن كتابة حلها العام على الشكل:

$$y_G = y_H + y_P$$

حيث y_H هو الحل العام للمعادلة دون طرف ثاني. و y_P هو حل خاص للمعادلة بطرف ثاني.

كيفية إيجاد y_H :

يكفي حل المعادلة دون طرف ثاني: $y' + P(x)y = 0$ أي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

بالمكاملة نجد:

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C$$

$$\Rightarrow y_H = ke^{-\int P(x)dx} \ / \ k \text{ ثابت حقيقي}$$

كيفية إيجاد y_P :

نجعل الثابت k الذي يظهر في عبارة y_H دالة للمتغير x أي

نضع $k = k(x)$ ونفرض أن $y_P = k(x)e^{-\int P(x)dx}$ حلا خاصا للمعادلة بطرف ثاني.

لتعيين $k(x)$ نشتق عبارة y_P ونعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$k(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

ومنه

$$y_P=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

مثال

لتكن $y'-\frac{y}{x}=x$ حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$.

تعيين y_H : الحل العام للمعادلة دون طرف ثاني $y'-\frac{y}{x}=0$. لدينا

$$y'-\frac{y}{x}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0\Rightarrow\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0\Rightarrow\ln|y|-\ln|x|=C$$

$$\Rightarrow y_H=kx\,/\,k\text{ ثابت حقيقي}$$

تعيين y_P : نضع $k=k(x)$ ونفرض $y_P=k(x)x$ حلا خاصا لـ $y'-\frac{y}{x}=x$ ومنه لتعيين $k(x)$

نشتق $y'_P=k'(x)x+k(x)$ ثم نعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد $k'(x)x+k(x)-\frac{k(x)x}{x}=x$

ومنه $k'(x)=1$ إذن $k(x)=x$ وبالتالي $y_P=x^2$.

ومنه $y_G=kx+x^2$ حيث k ثابت حقيقي.

5-2-4 معادلة برنولي

هي على الشكل العام:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n$$

حيث P و Q هما دالتان مستمرتان على مجال I (أو ثابتان) معطاتان و $n>1$.

طريقة الحل:

نحولها إلى معادلة تفاضلية خطية وذلك بقسمة الطرفين على y^n فتصبح على الشكل

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x)$$

نضع $z=y^{-n+1}$ ومنه $\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

بالتعويض ثم ضرب الطرفين في $(-n+1)$ نجد

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية نبحث عن حلها العام كما جاء في الفقرة السابقة ثم نعوض بـ $z=y^{-n+1}$.

مثال

لتكن: $y'+xy=x^3y^3$.

لحلها نقسم الطرفين على y^3 فتصبح $y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3$ نضع $z=y^{-2}$ ومنه $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

وبالتعويض نجد $\frac{1}{-2}\frac{dz}{dx}+xz=x^3$ أي $\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$ وهي معادلة خطية بطرف ثاني حلها العام على الشكل $z_G=z_H+z_P$.

تعيين z_H : الحل العام للمعادلة دون طرف ثاني $\frac{dz}{dx}-2xz=0$. لدينا

$$\frac{dz}{dx}-2xz=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=2xdx\Rightarrow\ln|z|=x^2+C\Rightarrow z_H=ke^{x^2}$$ / kثابت حقيقي

تعيين z_P : نضع $k=k(x)$ ونفرض $z_P=k(x)e^{x^2}$ حلا خاصا للمعادلة بطرف ثاني إذن لإيجاد $k(x)$ نشتق $z'_P=k'(x)e^{x^2}+2xk(x)e^{x^2}$ وبالتعويض في المعادلة بطرف ثاني نجد $k'(x)e^{x^2}=-2x^3$ أي $k(x)=\int-2x^3e^{-x^2}dx$ لحسابها نستعمل التكامل بالتجزئة حيث نضع

$$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$$

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}\Rightarrow g(x)=e^{-x^2}$$

$$k(x)=x^2e^{-x^2}+\int-2xe^{-x^2}dx=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}$$

ومنه $z_P=x^2+1$ و بالتالي $z_G=x^2+1+ke^{x^2}$ حيث kثابت حقيقي.

بالتعويض بـ $z=y^{-2}$ نجد الحل العام للمعادلة المقترحة بالشكل

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+ke^{x^2}}}$$

3-4 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

وهي على الشكل العام:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$ay''+by'+cy=Q(x)$$

حيث a، b و c ثوابت حقيقية و $a\neq 0$، Q دالة مستمرة على مجال I أو ثابتة (معطاة).

إذا كان الطرف الثاني $Q(x)=0$ نسمي المعادلة:

$$ay''+by'+cy=0$$

معادلة متجانسة équation homogène أو **دون طرف ثاني** sans second membre.

طريقة الحل:

تعتمد على النظرية التالية.

نظرية

الحل العام y_G للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بطرف ثاني هو مجموع حل خاص كيفي y_P لهذه المعادلة و الحل العام y_H للمعادلة المتجانسة المرافقة لها $ay''+by'+cy=0$. أي

$$y_G=y_H+y_P$$

كيفية إيجاد y_H : الحل العام لـ $ay''+by'+cy=0$.

نعتمد على النظرية التالية.

نظرية

إذا كان y_1 و y_2 حلين خاصين للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة $ay''+by'+cy=0$ وهما مستقلين خطيا (أي $\frac{y_1}{y_2}\neq Cte$) فإن حلها العام هو من الشكل:

$$y_H=C_1y_1+C_2y_2$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- **لنبحث عن حلين خاصين** y_1 **و** y_2 **:** من الشكل $y=e^{kx}$ حيث k ثابت حقيقي لتعيين قيمته يكفي اشتقاق y مرتين ثم التعويض في المعادلة المتجانسة. أي

$y'=ke^{kx}$ و $y''=k^2e^{kx}$ وبالتعويض في المعادلة دون طرف ثاني أو المتجانسة نجد:

$$\left(ak^2+bk+c\right)e^{kx}=0$$

بما أن $e^{kx}\neq 0$ فإن $ak^2+bk+c=0$.

نسمي المعادلة $ak^2+bk+c=0$ معادلة مميزة مرافقة للمعادلة التفاضلية المتجانسة. حلولها حسب المميز $\Delta=b^2-4ac$. نميز ثلاث حالات

- إذا كان $\Delta>0$: فإن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$k_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ومنه فإن

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

حلان خاصان للمعادلة المتجانسة وهما مستقلان خطيا. فعلا، $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq Cte$ لأن $k_1 \neq k_2$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- إذا كان $\Delta = 0$: فإن المعادلة المميزة تقبل حلا حقيقيا مضاعفا

$$k = \frac{-b}{2a}$$

ومنه فإن

$$y_1 = e^{kx} \quad \text{و} \quad y_2 = xe^{kx}$$

حلان خاصان للمعادلة المتجانسة وهما مستقلان خطيا. فعلا، $\frac{y_2}{y_1} = x \neq Cte$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- إذا كان $\Delta < 0$: فإن المعادلة المميزة تقبل حلين مركبين مترافقين: $k_1 = \alpha + i\beta$ و $k_2 = \alpha - i\beta$. حيث

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

و منه فإن

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{و} \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

حلان خاصان للمعادلة المتجانسة وهما مستقلان خطيا. فعلا، $\frac{y_2}{y_1} = \tan\beta x \neq Cte$.

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$y_H = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

كيفية إيجاد y_P : حل خاص لـ $ay''+by'+cy = Q(x)$. هناك طريقتان طريقة عامة وطريقة خاصة.

الطريقة العامة:

نجعل الثابتين الذين يظهران في عبارة y_H تابعين لـ x أي:

نضع $C_1 = C_1(x)$ و $C_2 = C_2(x)$.

ونفرض أن $y_P = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ هو حل خاص لـ $ay''+by'+cy = Q(x)$.

لتعيين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ يكفي أن نشتق y_P مرتين ثم نعوض في المعادلة بطرف ثاني و أخيرا نتحصل على:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \dfrac{Q(x)}{a} \end{cases}$$

وهي جملة خطية بمتغيرين نحلها بطريقة التعويض.

مثال

لتكن: $y''+4y'+3y = x$. حلها العام من الشكل: $y_G = y_H + y_P$

تعيين y_H : الحل العام لـ $y''+4y'+3y = 0$.

المعادلة المميزة المرافقة لها هي: $k^2 + 4k + 3 = 0$ مميزها $\Delta = 4 > 0$ إذن تقبل جذرين $k_1 = -1$ و $k_2 = -3$ ومنه $y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

تعيين y_P : نضع $C_1 = C_1(x)$ و $C_2 = C_2(x)$.

ونفرض أن $y_P = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-3x}$ هو حل خاص لـ $y''+4y'+3y = x$.

لتعيين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ يكفي أن نحل الجملة:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -C_1'(x)e^{-x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = x \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرفا لطرف نجد: $C'_2(x) = -\dfrac{x}{2}e^{3x}$ ثم بالتعويض في المعادلة (1) نجد $C_1'(x) = \dfrac{x}{2}e^{x}$. نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $C_2(x)$ حيث نضع

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$f(x)=-\frac{x}{2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=e^{3x}\Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$$

$$C_2(x)=-\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{6}\int e^{3x}dx=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right)e^{3x}$$

نستعمل التكامل بالتجزئة مرة ثانية لحساب $C_1(x)$ حيث نضع

$$f(x)=\frac{x}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=e^{x}\Rightarrow g(x)=e^{x}$$

$$C_1(x)=\frac{x}{2}e^{x}-\frac{1}{2}\int e^{x}dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{x}$$

وبالتعويض في $y_P=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-3x}$ نجد $y_P=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$ وبالتالي الحل العام للمعادلة

المقترحة هو $y_G=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

<u>الطريقة الخاصة</u>:

وهي تعتمد على شكل الطرف الثاني $Q(x)$.

- **إذا كان $Q(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$:**

حيث P_n كثير حدود من الدرجة n و λ ثابت حقيقي. نميز ثلاث حالات

الحالة الأولى: λ ليس جذرا للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=\left(A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n\right)e^{\lambda x}$$

الحالة الثانية: λ جذر بسيط للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=x\left(A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n\right)e^{\lambda x}$$

الحالة الثالثة: λ جذر مضاعف للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=x^2\left(A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n\right)e^{\lambda x}$$

ولتعيين الثوابت A_0 ، A_1 ، A_2 ،...، A_n نشتق عبارة y_P مرتين ونعوض في المعادلة بطرف ثاني ثم نطابق.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لتكن: $y''+4y'+3y=x$. حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$.

لقد تم حساب y_H في المثال السابق ووجدنا $y_H=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

تعيين y_P : باستعمال الطريقة الخاصة.

لدينا الطرف الثاني $Q(x)=x$ ويمكن وضعه على الشكل $Q(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ مع $n=1$ و $\lambda=0$.

نلاحظ أن $\lambda=0$ ليس جذرا للمعادلة المميزة ومنه نبحث عن حل خاص من الشكل $y_P=A_0+A_1x$.

لتعيين A_0 و A_1 نشتق y_P مرتين فنجد $y_P'=A_1$ و $y_P''=0$ ثم نعوض في المعادلة بطرف ثاني $y''+4y'+3y=x$ فنحصل على $4A_1+3A_0+3A_1x=x$ وبالمطابقة نجد $A_1=\frac{1}{3}$ و $A_0=-\frac{4}{9}$.

أي $y_P=\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$.

وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو $y_G=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{4}{9}$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- **إذا كان** $Q(x)=P(x)e^{\mu x}\cos wx+R(x)e^{\mu x}\sin wx$ **:**

حيث P و R كثيرا حدود و μ و w ثوابت حقيقية. نميز حالتين.

الحالة الأولى: $(\mu+iw)$ ليس جذرا للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=R_1(x)e^{\mu x}\cos wx+R_2(x)e^{\mu x}\sin wx$$

الحالة الثانية: $(\mu+iw)$ جذر للمعادلة المميزة، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=x\left(R_1(x)e^{\mu x}\cos wx+R_2(x)e^{\mu x}\sin wx\right)$$

حيث R_1 و R_2 كثيرا حدود من الدرجة $\max(\deg P,\deg R)$ لتعيينهما نشتق عبارة y_P مرتين ونعوض في المعادلة بطرف ثاني ثم نطابق.

مثال

لتكن: $y''-2y'+y=3e^{2x}\cos x$. حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$.

تعيين y_H : الحل العام لـ $y''-2y'+y=0$.

المعادلة المميزة المرافقة لها هي: $k^2-2k+1=0$ مميزها $\Delta=0$ إذن تقبل جذر مضاعف $k=1$.

ومنه $y_H=C_1e^x+C_2xe^x$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تعيين y_P:

لدينا الطرف الثاني للمعادلة $Q(x)=3e^{2x}\cos x$ يمكن وضعه على الشكل العام $Q(x)=P(x)e^{\mu x}\cos wx+R(x)e^{\mu x}\sin wx$ مع $w=1$ و $\mu=2$ و $P(x)=3$ و $R(x)=0$.

نلاحظ أن $(\mu+iw=2+i)$ ليس جذرا للمعادلة المميزة وبما أن $\max(\deg P,\deg R)=0$، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_P=R_1e^{2x}\cos x+R_2e^{2x}\sin x$$

حيث R_1 و R_2 ثابتان لتعيينهما نشتق عبارة y_P مرتين نجد

$$y_P'=(2R_1+R_2)e^{2x}\cos x+(2R_2-R_1)e^{2x}\sin x$$

$$y_P''=(3R_1+4R_2)e^{2x}\cos x+(2R_2-4R_1)e^{2x}\sin x$$

ونعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد

$$2R_2e^{2x}\cos x+2R_1e^{2x}\sin x=3e^{2x}\cos x$$

ثم بالمطابقة نجد

$$\begin{cases}2R_2=3\\2R_1=0\end{cases}\Rightarrow R_2=\frac{3}{2}\wedge R_1=0$$

ومنه $y_P=\frac{3}{2}e^{2x}\sin x$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو

$$y_G=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}e^{2x}\sin x$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

- إذا كان $Q(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$:

وإذا كان y_1 حلا خاصا للمعادلة: $ay''+by'+cy=f_1(x)$

وإذا كان y_2 حلا خاصا للمعادلة: $ay''+by'+cy=f_2(x)$

$\ldots$

وإذا كان y_n حلا خاصا للمعادلة: $ay''+by'+cy=f_n(x)$

فإن المعادلة $ay''+by'+cy=Q(x)$ تقبل حلا خاصا من الشكل:

$$y_P=y_1+y_2+\ldots+y_n$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لتكن: $y''+y=e^{2x}+5xe^{-x}-3\sin x$.

حلها العام من الشكل: $y_G=y_H+y_P$

تعيين y_H : الحل العام لـ $y''+y=0$.

المعادلة المميزة المرافقة لها هي: $k^2+1=0$ مميزها $\Delta=-4<0$ إذن تقبل جذرين مركبين جزؤهما الحقيقي $\alpha=0$ أما الجزء التخيلي $\beta=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=1$.

ومنه $y_H=C_1\cos x+C_2\sin x$ حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

تعيين y_P : نبحث عن حل خاص من الشكل $y_P=y_1+y_2+y_3$ حيث y_1، y_2 و y_3 حلول خاصة للمعادلات $y''+y=e^{2x}...(*)$، $y''+y=5xe^{-x}.(**)$ و $y''+y=-3\sin x.(***)$ على الترتيب.

البحث عن y_1:

يمكن وضع الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ على الشكل $Q_1(x)=P_n(x)e^{\lambda x}=e^{2x}$ مع $n=0$ و $\lambda=2$.

نلاحظ أن $\lambda=2$ ليس جذرا للمعادلة المميزة ومنه نبحث عن حل خاص لـ $(*)$ من الشكل $y_1=A_0e^{2x}$. لتعيين A_0 نشتق y_1 مرتين نجد $y_1'=2A_0e^{2x}$ و $y_1''=4A_0e^{2x}$ ثم بالتعويض في $(*)$ و المطابقة نجد $A_0=\frac{1}{5}$ إذن $y_1=\frac{1}{5}e^{2x}$.

البحث عن y_2:

يمكن وضع الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ على الشكل $Q_1(x)=P_n(x)e^{\lambda x}=5xe^{-x}$ مع $n=1$ و $\lambda=-1$.

نلاحظ أن $\lambda=-1$ ليس جذرا للمعادلة المميزة ومنه نبحث عن حل خاص لـ $(**)$ من الشكل $y_2=(A_0+A_1x)e^{-x}$. لتعيين A_0 و A_1 نشتق y_2 مرتين نجد $y_2'=(A_1-A_0-A_1x)e^{-x}$ و $y_2''=(A_0-2A_1+A_1x)e^{2x}$ ثم بالتعويض في $(*)$ و المطابقة نجد

$$\begin{cases}2A_0-2A_1=0\\ 2A_1=5\end{cases}\Rightarrow A_1=A_0=\frac{5}{2}$$

إذن $y_2=\frac{5}{2}(1+x)e^{-x}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

البحث عن y_3 :

يمكن وضع الطرف الثاني للمعادلة $(*)$ على الشكل:

$$Q_1(x) = P(x)e^{\mu x}\cos wx + R(x)e^{\mu x}\sin wx = -3\sin x$$

مع $\mu = 0$ و $w = 1$ و $R(x) = -3$ و $P(x) = 0$. لدينا $\max(\deg P, \deg R) = 0$ ، نبحث عن حل خاص من الشكل:

$$y_3 = x(R_1\cos x + R_2\sin x)$$

حيث R_1 و R_2 ثابتان لتعيينهما نشتق عبارة y_3 مرتين نجد

$$y_3' = (R_2 - xR_1)\sin x + (R_1 + xR_2)\cos x$$

$$y_3'' = (2R_2 - xR_1)\cos x + (-2R_1 + xR_2)\sin x$$

ونعوض في المعادلة بطرف ثاني نجد

$$2R_2\cos x - 2R_1\sin x = -3\sin x$$

ثم بالمطابقة نجد : $R_1 = \frac{3}{2}$ $R_2 = 0 \wedge$. ومنه $y_3 = \frac{3}{2}x\cos x$. أي المعادلة المقترحة تقبل حلا خاصا

$$y_P = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{5}{2}(1+x)e^{-x} + \frac{3}{2}x\cos x$$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المقترحة هو

$$y_G = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{5}{2}(1+x)e^{-x} + \frac{3}{2}x\cos x$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الخامس:

الدوال المتعددة المتغيرات

rekkabsoraya@yahoo.fr

الفصل الخامس:

الدوال المتعددة المتغيرات

Les fonctions à plusieurs variables

تمهيد

في الميدان التطبيقي، نجد أن الدوال بمتغير واحد نادرة في حين الدوال المتعددة المتغيرات هي الشائعة.

مثلا:

- مساحة مستطيل طوله x وعرضه y هي دالة لمتغيرين x و y.
- حجم متوازي مستطيلات أبعاده x و y و z هي دالة لثلاث متغيرات.
- الحرارة و الكثافة في كل نقطة من غرفة بثلاث أبعاد هي دوال بثلاث متغيرات.

1-5 تعريف الدالة المتعددة المتغيرات

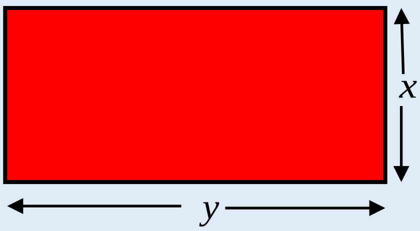
نسمي **دالة حقيقية متعددة المتغيرات** Fonction réelle de plusieurs variables أو بـ n متغيرات حقيقية، كل دالة f معرفة من IR^n نحو IR. أي أنها ترفق بكل عنصر من IR^n قيمة حقيقية على الأكثر:

$$f : IR^n \to IR$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مثال1

$$f : IR^2 \to IR$$
$$(x, y) \to 2(x + y)$$

هي دالة حقيقية لمتغيرين حقيقيين وهي تمثل محيط مستطيل عرضه x وطوله y.



مثال2

$$f : IR^3 \to IR$$
$$(P, V, T) \to PV - nRT$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

هي دالة حقيقية لثلاث متغيرات حقيقية و هي تمثل قانون الغاز المثالي، حيث تمثل n كمية المادة و R ثابت الغازات المثلية و V الحجم و P الضغط و T درجة الحرارة.

1-1-5 مجموعة التعريف

نسمي **مجموعة تعريف** f domaine de définition ، مجموعة النقاط $M=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ من IR^n التي تملك صورة حقيقية بواسطة الدالة المتعددة المتغيرات f . ونرمز لها بـ D_f. أي

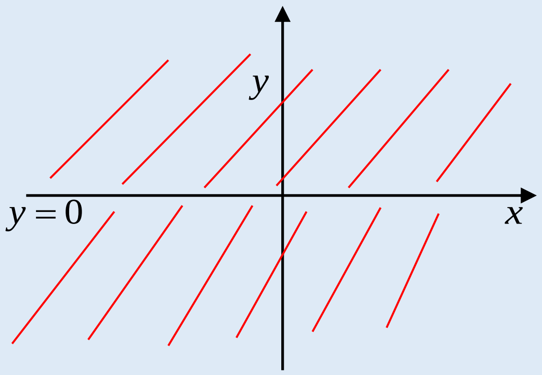
$$D_f=\{M\in IR^n / f(M)\in IR\}\subset IR^n$$

أمثلة

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / y\neq 0\}=IR\times IR^*$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي

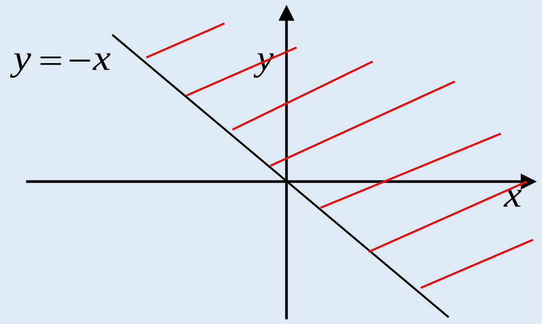


و هي تمثل كل نقاط المستوي ماعدا محور الفواصل $y=0$ (الجزء المشطب بالأحمر).

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / x+y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\geq -x\}$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي



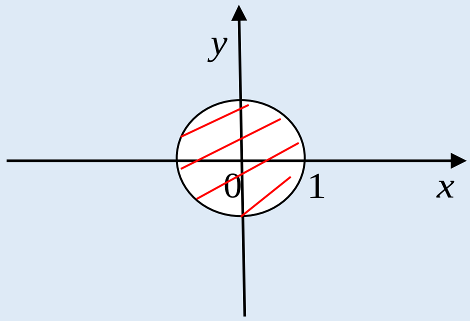
rekkabsoraya@yahoo.fr

وهي تمثل كل نقاط المستوي الواقعة فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ (الجزء المشطب بالأحمر).

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2/1-x^2-y^2\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2/x^2+y^2\leq 1\}$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي



وهي تمثل كل نقاط القرص المغلق الذي مركزه المبدأ $(0,0)$ ونصف قطره يساوي 1 (الجزء المشطب بالأحمر).

تمرين

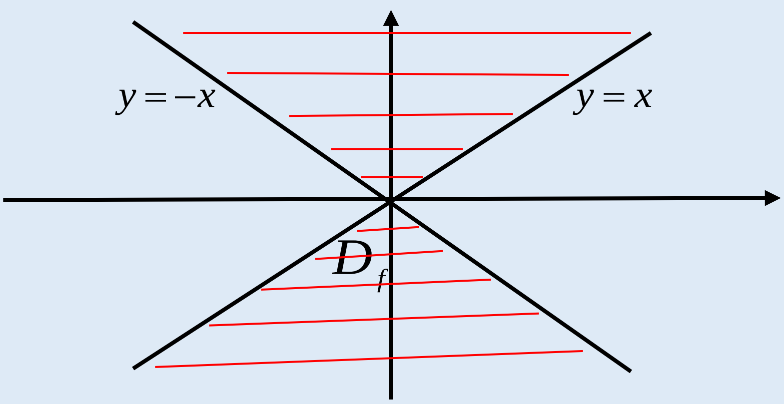
عين ثم مثل بيانيا D_f و D_g مجموعتي تعريف التابعين f و g على الترتيب و المعرفين بالشكل:

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right) \qquad \text{و} \qquad g(x,y)=\sqrt{f(x,y)}$$

الحل

$$D_f=\left\{(x,y)\in IR^2/\frac{x+y}{y-x}>0\right\}$$

$$\frac{x+y}{y-x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y>0\wedge y-x>0\\ \vee\\ x+y<0\wedge y-x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>-x\wedge y>x\\ \vee\\ y<-x\wedge y<x\end{cases}$$



rekkabsoraya@yahoo.fr

$$D_g=\{(x,y)\in IR^2 / f(x,y)\geq 0\}$$

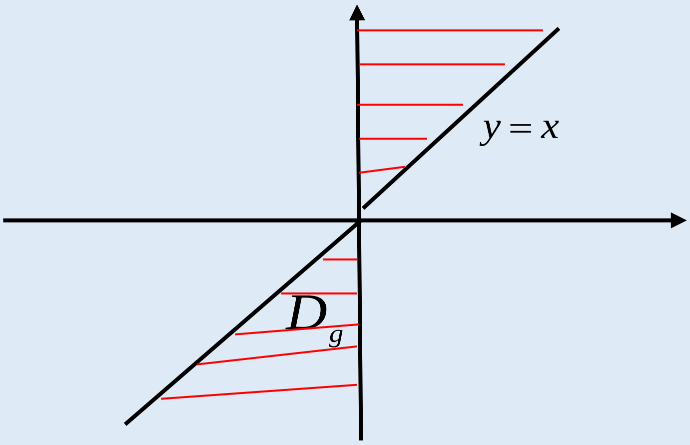
$$f(x,y)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+y}{y-x}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{y+x}{y-x}\geq 1$$

إذا كان $y-x>0$ أي $y>x$ فإن :

$$y+x\geq y-x \Leftrightarrow x\geq 0$$

و إذا كان $y-x<0$ أي $y<x$ فإن :

$$y+x\leq y-x \Leftrightarrow x\leq 0$$



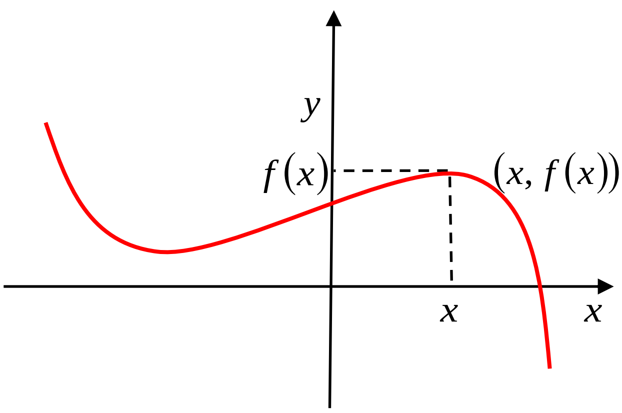
2-1-5 التمثيل الهندسي لدالة حقيقية متعددة المتغيرات

تعريف1

لتكن f دالة حقيقية بـn متغيرات حقيقية. نسمي مجموعة النقاط $(x_1,x_2,\ldots,x_n, f(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ حيث $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ تنتمي إلى D_f **بيان الدالة** f Graphe و نرمز لها بـ G_f. أي

$$G_f=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n, f(x_1,x_2,\ldots,x_n))/(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D_f\}\subset IR^{n+1}$$

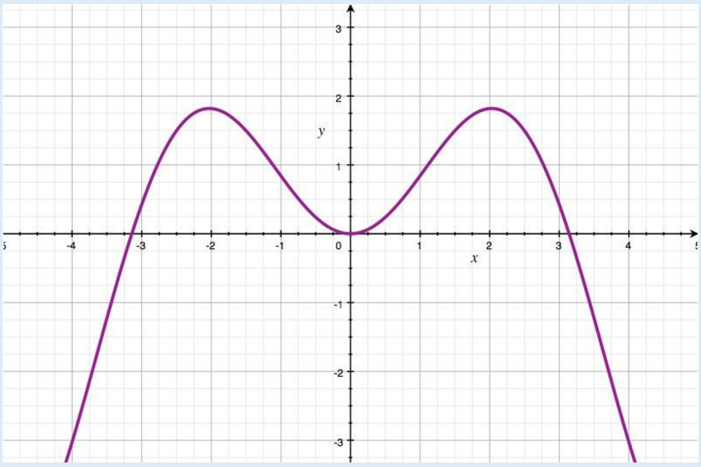
- من أجل $n=1$: نمثل بيان دالة حقيقية بمتغير حقيقي بواسطة منحنى في المستوي IR^2 أي نمثل النقاط ذات الإحداثيات $(x, f(x))$.



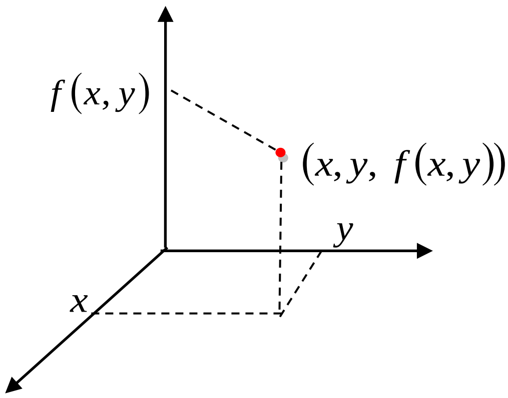
rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

بيان الدالة الحقيقية بمتغير واحد $x \mapsto x\sin x$ نمثله في المستوي IR^2 كالتالي:

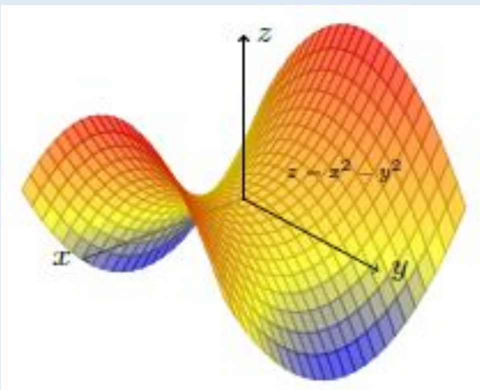


- من أجل $n=2$: نمثل بيان دالة حقيقية بمتغيرين حقيقيين بواسطة مساحة في الفضاء IR^3 أي نمثل النقاط ذات الإحداثيات $(x, y,\ f(x,y))$.



مثال1

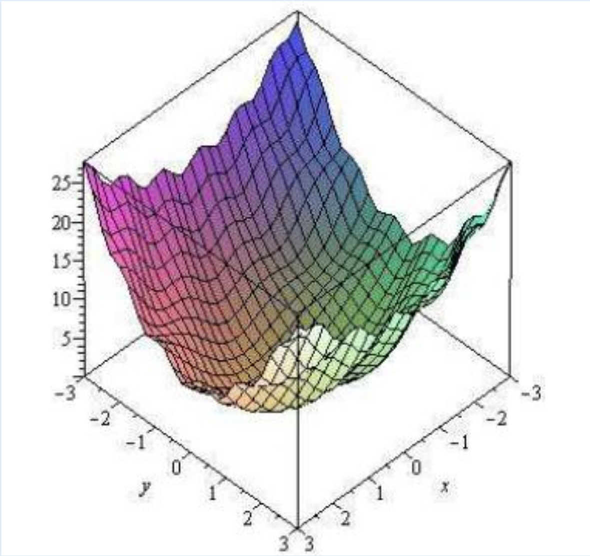
بيان الدالة الحقيقية بمتغيرين f المعرفة بـ$f(x,y)=x^2-y^2$ نمثله في الفضاء IR^3 كالتالي:



rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال2

بيان الدالة الحقيقية بمتغيرين f المعرفة بـ $f(x,y)=x^2+2y^2+\sin 2xy$ نمثله في الفضاء IR^3 كالتالي:



- من أجل $n \geq 3$: لا توجد أية طريقة واضحة لتمثيل بيان دالة حقيقية بثلاث متغيرات أو أكثر. أي من الصعب جدا الحصول على رؤية بيانية لتمثيلها هندسيا.

هناك طريقة أخرى لتمثيل دالة حقيقية بمتغيرين أو بثلاث متغيرات.

تعريف2

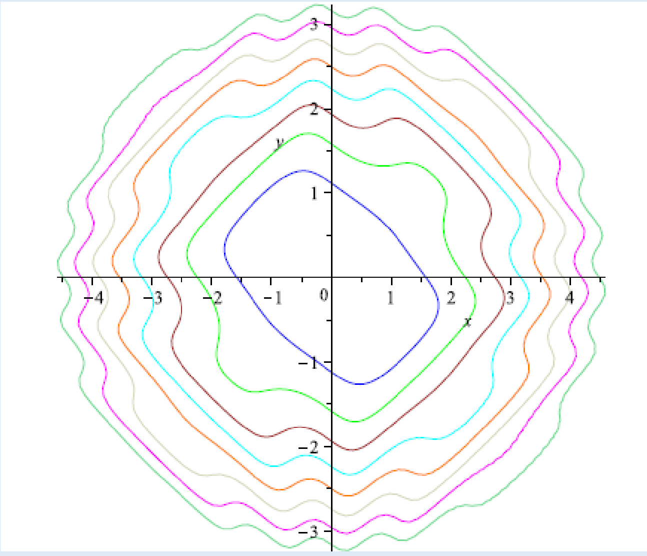
لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين. وليكن k عددا حقيقيا كيفيا. نسمي مجموعة النقاط من D_f التي صورها بواسطة الدالة f تساوي k، **بخط أو منحنى المستوى** k **للدالة** f ligne de niveau و نرمز لها بـ L_f أو C_f. أي

$$L_f=\{(x,y)\in D_f \,/\, f(x,y)=k\}\subset IR^2$$

مثال1

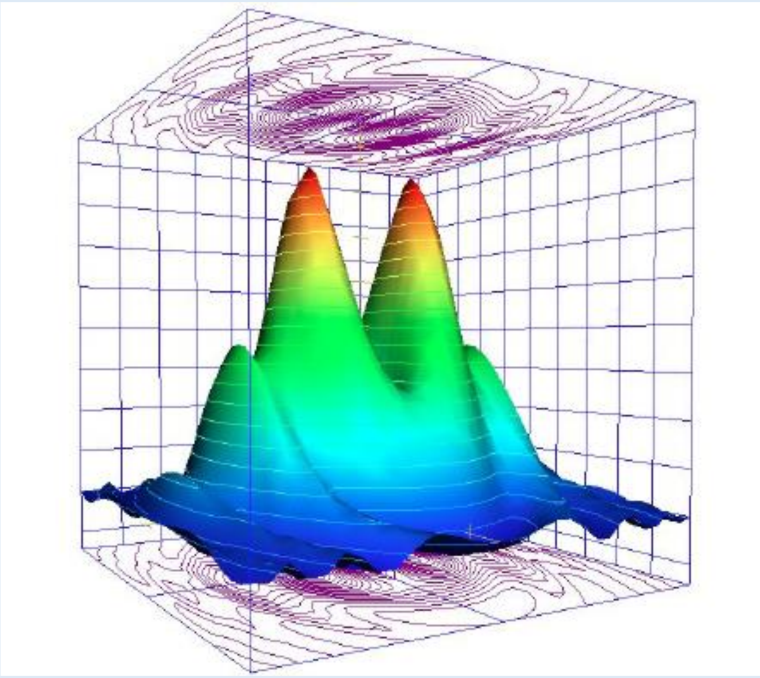
خطوط المستوى $k\in\{0,2.5,\ldots,17.5,20\}$ للدالة الحقيقية بمتغيرين f المعرفة بـ $f(x,y)=x^2+2y^2+\sin 2xy$ نمثله في الفضاء IR^2 كالتالي:

rekkabsoraya@yahoo.fr



مثال2

نمثل بيان الدالة الحقيقية f المعرفة بـ $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(x^2+3y^2\right)}{0.1+x^2+y^2}+\left(x^2+5y^2\right)\dfrac{e^{1-x^2-y^2}}{2}$ في الفضاء IR^3 مع إسقاط منحنيات المستوى على المستويين $z=0$ و $z=9$ كالتالي:



ملاحظة

تبرز منحنيات المستوى عدة حقائق فيزيائية. مثلا:

- على الخرائط الطوبوغرافية تستعمل في تحديد الارتفاع.
- على الخرائط البحرية تبرز العمق.
- على خرائط الأحوال الجوية تربط المناطق المتعادلة في الضغط الجوي...

rekkabsoraya@yahoo.fr

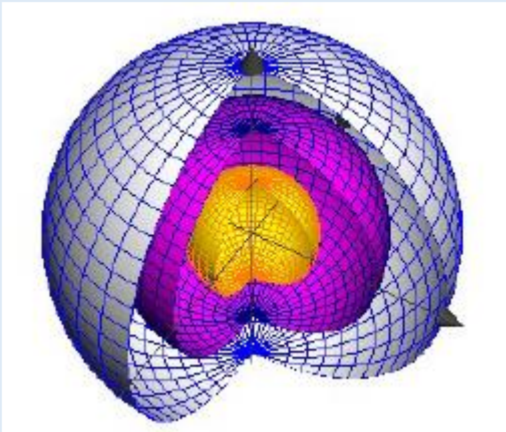
تعريف3

لتكن f دالة حقيقية بثلاث متغيرات. وليكن a عددا حقيقيا كيفيا. نسمي مجموعة النقاط من D_f التي صورها بواسطة الدالة f تساوي a، **بمساحة المستوى** a **للدالة** f و نرمز لها بـ S_a. أي

$$S_a = \{(x,y,z) \in D_f \,/\, f(x,y,z) = a\} \subset IR^3$$

مثال

مساحات المستوى $a \in \{1,2.3\}$ للدالة الحقيقية بثلاث متغيرات f والمعرفة بـ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ نمثلها في الفضاء IR^3 (مع مقطع طولي حتى تتجلى لنا المساحات الداخلية) كالتالي:



5-2 نهاية دالة حقيقية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين ولتكن (a,b) ثنائية من IR^2. نقول أن الدالة f تقبل **نهاية** l limite لما (x,y) تؤول إلى (a,b) إذا كانت قيم $f(x,y)$ تقترب بالقدر الذي نريد من l عندما يقترب (x,y) بالقدر الكافي من (a,b) (ولا يساوي (a,b)). ونكتب

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

أي

$$\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall (x,y) \in D_f : (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon\right)$$

ملاحظة

(x,y) تؤول إلى (a,b) يعني أن x تؤول إلى a و y تؤول إلى b.

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال

لتكن $f: IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y) = 2x + y^2$ فإن $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 2$.

عمليات على النهايات

$$1)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$2)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y).g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y). \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$3)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \alpha f(x,y) = \alpha \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \quad / \alpha \in IR$$

$$4)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \quad / \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$$

3-5 استمرار دالة حقيقية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين ولتكن (a,b) ثنائية من D_f .

- نقول أن الدالة f **مستمرة** continue عند (a,b) إذا كان:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

- نقول أن الدالة f **مستمرة على مجموعة تعريفها** D_f إذا كانت مستمرة عند كل ثنائية (a,b) من D_f .

مثال

الدالة $f: IR^2 \to IR$ المعرفة بـ $f(x,y) = xy$ ، مستمرة عند $(0,0)$. فعلا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

ملاحظات

- نقول أن الدالة f **غير مستمرة** أو **متقطعة** discontinue عند (a,b) إذا كانت $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة أو $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \neq f(a,b)$.
- مساحة دالة غير مستمرة تحتوي حتما على ثقب أو شرخ.
- من خواص النهاية وتعريف الاستمرار، نستنتج أن: مجموع، فرق، جداء وقسمة دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة على مجموعات تعريفها.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- كل كثير حدود هو دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية وكل كسر ناطق (كسر لكثيري حدود) هو دالة مستمرة على مجموعة تعريفه.
- إذا كانت f دالة حقيقية بمتغيرين مستمرة على D_f و g دالة حقيقية بمتغير واحد معرفة ومستمرة على مجموعة صور f فإن الدالة المركبة $h = go\,f$ المعرفة بـ $h(x,y) = g\left(f(x,y)\right)$ مستمرة على D_f.
- كل النتائج السابقة يمكن تعميمها على الدوال الحقيقية المتعددة المتغيرات.

4-5 المشتقات الجزئية

لتكن f دالة حقيقية بـn متغيرات حقيقية وليكن $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ عنصرا من D_f.

من أجل $i = 1, \ldots, n$، نسمي **مشتقة جزئية** لـ f dérivée partielle بالنسبة لـ x_i عند $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ النهاية:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

إن وجدت. عندئذ نرمز لها بـ $f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ أو $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$

1-4-5 المشتقات الجزئية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين ولتكن (a,b) ثنائية من D_f.

- نسمي **مشتقة الجزئية** لـ f بالنسبة لـ x عند (a,b) النهاية:

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

إذا كانت موجودة.

- نسمي **مشتقة الجزئية** لـ f بالنسبة لـ y عند (a,b) النهاية:

$$f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

إذا كانت موجودة.

2-4-5 كيفية حساب مشتقة جزئية بمتغيرين

لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين.

- لحساب $f'_x(x,y)$، نعتبر y ثابت ونشتق اشتقاق عادي بالنسبة لـ x.

rekkabsoraya@yahoo.fr

- لحساب $f'_y(x,y)$ ، نعتبر x ثابت ونشتق اشتقاق عادي بالنسبة لـ y .

مثال1

لتكن $f: IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y)=2x^3y^2$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2y^2 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4x^3y$$

مثال2

لتكن $f: IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2+1} \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

خواص

لتكن f و g دالتان حقيقيتان بـn متغيرات حقيقية و ليكن α عددا حقيقيا. فإن:

1) $$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$

2) $$\frac{\partial(f.g)}{\partial x_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)f(a)$$

3) $$\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(a)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

4) $$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a)-\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

مثال

لتكن $f: IR^3 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y,z)=x\cos y+z\sin y$ فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\cos y \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-x\sin y+z\cos y \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\sin y .$$

5-5 التفاضل

تعريف1

- لتكن f دالة حقيقية بمتغيرين حقيقيين x و y . نسمي **تفاضل** f différentielle ونرمز بـ df للقيمة:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

- لتكن f دالة حقيقية بـn متغيرات حقيقية تقبل مشتقات جزئية مستمرة. نسمي **تفاضل** f ونرمز بـ df للقيمة:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

تعريف2

لتكن f دالة حقيقية بـn متغيرات حقيقية تقبل مشتقات جزئية مستمرة. ولتكن $a \in D_f$. نسمي **تفاضل** f عند a التطبيق الخطي الذي نرمز له بـ df حيث:

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i$$

خواص

ليكن f و g تابعين قابلين للتفاضل عند نقطة a من IR^n. من أجل α و β من IR فإن:

1) $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$

2) $d(\alpha f)(a) = \alpha df(a)$

3) $d(f.g)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$

4) $d(f.g)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$

ملاحظات

ليكن U جزءا من IR^n و $f : U \to IR$

- نقول أن f **قابلة للتفاضل** différentiable على U إذا كانت قابلة للتفاضل عند كل نقطة من U.
- كل دالة قابلة للتفاضل عند نقطة من U تكون مستمرة عندها.

مثال

لتكن $f : IR^2 \to IR$ دالة معرفة بـ $f(x,y) = -18y^2 - 17xy + 6x^2$ فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -17y + 12x \quad و \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -36y - 17x$$

ومنه:

$$df = (-17y + 12x)dx + (-36y - 17x)dy$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

6-5 التكامل الثنائي

تعريف

لتكن الدالة $f:IR^2\rightarrow IR$ وليكن D مجالا مغلقا ومحدودا من IR^2. نسمي ونرمز بـ $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ **للتكامل الثنائي** لـ f intégrale double على D.

خواص

للتكامل الثنائي نفس الخواص الخطية للتكامل البسيط.

ليكن f و g تابعين بمتغيرين مستمرين ومحدودين على مجال D مغلق ومحدود من IR^2. من أجل α و β من IR فإن:

1) $$\iint_D(\alpha f+\beta g)(x,y)dx\,dy=\alpha\iint_D f(x,y)dx\,dy+\beta\iint_D g(x,y)dx\,dy$$

2) $$\forall(x,y)\in D;\ f\geq 0\Rightarrow\iint_D f(x,y)dx\,dy\geq 0$$

3) $$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\iint_{D_1} f(x,y)dx\,dy+\iint_{D_2} f(x,y)dx\,dy\ /\ D=D_1\cup D_2$$

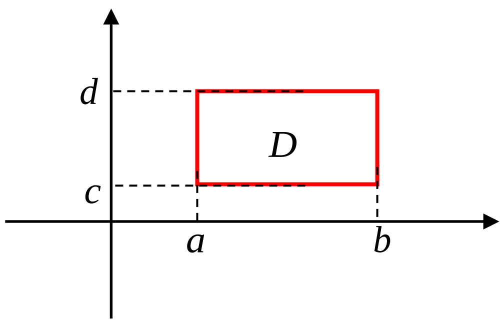
و D_2 و D_1 منفصلين.

كيفية حساب تكامل ثنائي

يتم حساب تكامل ثنائي حسب شكل مجال التكامل D:

- إذا كان D على شكل مستطيل. أي

$$D=[a,b]\times[c,d]$$



فإن:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

مثال

من أجل $D=[0,2]\times[0,1]$ و $f(x,y)=x^2+y$ فإن:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2+y)dy \right) dx = \int_0^2 \left(x^2y+\frac{y^2}{2} \right)_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2+\frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{8}+\frac{1}{2}x \right)_0^2 = \frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$

أو

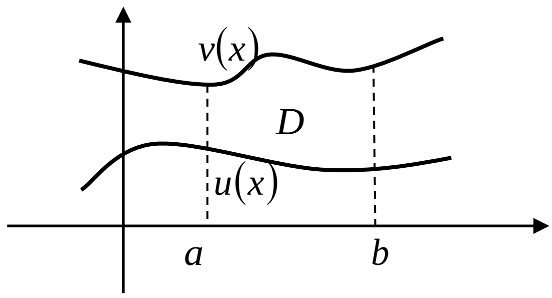
$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+yx \right)_0^2 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3}+2y \right) dy = \left(\frac{8}{3}y+y^2 \right)_0^1 = \frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$

- إذا كان D على شكل بسيط عمودي على $\overrightarrow{ox}$. أي

$$D=[a,b]\times[u(x),v(x)]$$

حيث u و v تابعان مستمران على $[a,b]$ و $\forall x\in[a,b], u(x)<v(x)$.



فإن:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

مثال1

أحسب التكامل الثنائي $\iint_D x^2\,dx\,dy$ حيث : $D=\left\{(x,y)\in IR^2 / 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \sqrt{x}\right\}$

الحل

$$\iint_D x^2\,dx\,dy=\int_0^1 x^2\left(\int_0^{\sqrt{x}}dy\right)dx=\int_0^1 x^2[y]_0^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{7}$$

مثال2

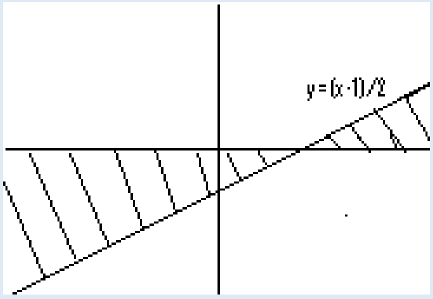
ليكن التابع المعرف على IR^2 بالشكل التالي : $f(x,y)=\sqrt{y(x-2y-1)}$

- أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f ، ثم مثلها بيانيا.
- أحسب التكامل الثنائي التالي $\iint_\Delta \left(2x^2-x\right)e^{xy}\,dx\,dy$ حيث

$$\Delta=\left\{(x,y)\in D_f / 1\le x\le 2\right\}$$

الحل

- $D_f=\left\{(x,y)\in IR^2 / \left(y\ge 0\wedge y\le \frac{x-1}{2}\right)\vee\left(y\le 0\wedge y\ge \frac{x-1}{2}\right)\right\}$



$$\iint_\Delta \left(2x^2-x\right)e^{xy}\,dx\,dy=\int_1^2\left(\left(2x-1\right)\int_0^{\frac{x-1}{2}}xe^{xy}\,dy\right)dx=\int_1^2\left(2x-1\right)\left(e^{\frac{x^2-x}{2}}-1\right)dx$$

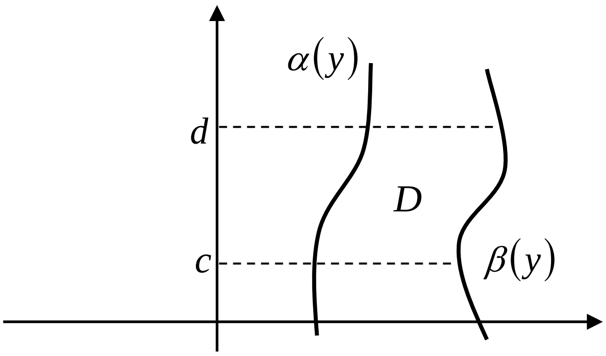
$$=2\int_1^2\left(\frac{2x-1}{2}\right)e^{\frac{x^2-x}{2}}dx-\int_1^2(2x-1)dx=2e-4$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

- إذا كان D على شكل بسيط عمودي على $\vec{oy}$. أي

$$D=[\alpha(y),\beta(y)]\times[c,d]$$

حيث α و β تابعان مستمران على $[c,d]$ و $\forall y\in[c,d],\alpha(y)<\beta(y)$.



فإن:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

في كل حالة من الثلاث حالات السابقة، حولنا التكامل الثنائي إلى تكاملين بسيطين متداخلين حيث تتم المكاملة من الداخل نحو الخارج وفي كل مرة بالنسبة لمتغير واحد واعتبار المتغير الثاني ثابتا.

مثال

أحسب قيمة التكامل الثنائي التالي: $J=\iint_D 2x\,e^{-y}\,dx\,dy$

حيث : $D=\{(x,y)\in IR^2\ /\ x\geq 0, y\leq 1\ ,\ x-y\leq 0\}$.

الحل

لدينا $0\leq y\leq 1 \wedge 0\leq x\leq y$ ومنه

$$J=2\int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^y x dx\right)dy=2\int_0^1\left(x\int_x^1 e^{-y}dy\right)dx$$

$$=-e^{-1}+2\left[-2e^{-1}+1\right]=2-5e^{-1}$$

ملاحظة

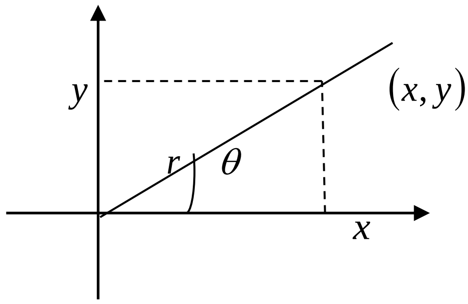
إذا أمكن تمثيل D على شكلين بسيطين (عمودي على $\vec{ox}$ أو عمودي على $\vec{oy}$) فإن قيمة التكامل لا تتغير.

rekkabsoraya@yahoo.fr

تحويل المتغير

ليكن f تابعا بمتغيرين x و y. كل نقطة (x,y) من المستوي IR^2 يمكن تعيينها بواسطة الإحداثيات القطبية (r,θ) كالتالي:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



إذا كان التابع f مستمرا على مجال D مغلقا ومحدودا من IR^2 فإن:

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

مثال1

ليكن التابع f حيث $f: IR^2 \to IR$ و $f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$

عين D_f مجموعة تعريف التابع f ثم باستعمال تحويل متغير، أحسب مساحة الجزء D_f.

الحل

$$D_f = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ 3-x^2-y^2 \geq 0\}$$

$$-x^2-y^2+3=0 \ \Rightarrow \ (x-0)^2+(y-0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

نستعمل الإحداثيات القطبية: $x = r\cos\vartheta \ , \ y = r\sin\vartheta$

و منه D_f يتحول إلى: $D_f = \{(r,\vartheta) \in IR^2 \ / \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq r \leq \sqrt{3}\}$

$$x^2+y^2=3 \ \Rightarrow \ r^2=3$$

و منه: $\iint_{D_f} dx\ dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\,d\vartheta\ dr = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{3}} r\ dr = 2\pi.\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi$

rekkabsoraya@yahoo.fr

7-5 التكامل الثلاثي

لتكن الدالة $f:IR^3 \to IR$ وليكن Δ مجالا مغلقا ومحدودا من IR^3.

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[a,b] \\ y\in[u(x),v(x)] \\ z\in[\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall x\in[a,b];\, u(x)<v(x)$$
$$\forall(x,y)\in[a,b]\times[u(x),v(x)];\, \alpha(x,y)<\beta(x,y)$$

نسمي ونرمز بـ

$$\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)}\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

للتكامل الثلاثي intégrale triple للتابع f على Δ.

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y\in[a,b] \\ x\in[u(y),v(y)] \\ z\in[\alpha(x,y),\beta(x,y)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall y\in[a,b];\, u(y)<v(y)$$
$$\forall(y,x)\in[a,b]\times[u(y),v(y)];\, \alpha(x,y)<\beta(x,y)$$

فإن:

$$\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{u(y)}^{v(y)}\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\right)dy$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} z\in[a,b] \\ x\in[u(z),v(z)] \\ y\in[\alpha(x,z),\beta(x,z)] \end{cases}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall z \in [a,b]; u(z) < v(z)$$
$$\forall (z,x) \in [a,b] \times [u(z), v(z)]; \alpha(x,z) < \beta(x,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{u(z)}^{v(z)} \left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx \right) dz$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} z \in [a,b] \\ y \in [u(z), v(z)] \\ x \in [\alpha(y,z), \beta(y,z)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall z \in [a,b]; u(z) < v(z)$$
$$\forall (z,y) \in [a,b] \times [u(z), v(z)]; \alpha(y,z) < \beta(y,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{u(z)}^{v(z)} \left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

$$(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [a,b] \\ z \in [u(y), v(y)] \\ x \in [\alpha(y,z), \beta(y,z)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall y \in [a,b]; u(y) < v(y)$$
$$\forall (y,z) \in [a,b] \times [u(y), v(y)]; \alpha(y,z) < \beta(y,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{u(y)}^{v(y)} \left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy$$

- **إذا كان** Δ ممثلا على الشكل:

rekkabsoraya@yahoo.fr

$$(x,y,z)\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[a,b] \\ z\in[u(x),v(x)] \\ y\in[\alpha(x,z),\beta(x,z)] \end{cases}$$

حيث u، v، α و β توابع مستمرة بحيث:

$$\forall x\in[a,b];\, u(x)<v(x)$$
$$\forall (x,z)\in[a,b]\times[u(x),v(x)];\, \alpha(x,z)<\beta(x,z)$$

فإن:

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)}\left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)dy\right)dz\right)dx$$

مثال1

ليكن التابع المعرف على IR^2 بالشكل التالي

$$f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}$$

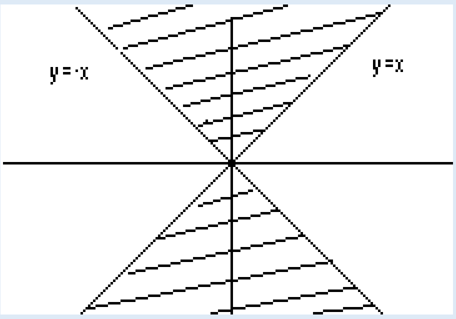
- أوجد مجموعة تعريف التابع f ، ثم مثلها بيانيا.

- أحسب التكامل الثلاثي التالي $\iiint_{\Delta}\left((f(x,y))^2+x^2\right)dx\,dy\,dz$

حيث $\Delta=\left\{(x,y,z)\in IR^3 / 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x \wedge 0\le z\le\sqrt{y}\right\}$

الحل

-
$$D_f=\left\{(x,y)\in IR^2 / y^2-x^2\ge 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in IR^2 / (y-x)(y+x)\ge 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in IR^2 / (y\ge x\wedge y\ge -x)\vee(y\le x\wedge y\le -x)\right\}$$



rekkabsoraya@yahoo.fr

- $$\iiint_{\Delta}\left(\left(f(x,y)\right)^2+x^2\right)dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{\sqrt{y}}y^2dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^x\left(y^{\frac{5}{2}}\right)dy\right)dx=\int_0^1\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}dx=\frac{4}{63}$$

مثال2

أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_D x\ dx\,dy\,dz$ حيث :

$$D=\left\{(x,y,z)\in IR^3/0\le x\le 1,\ 0\le y\le z,\ x\le z\le 2x\right\}$$

الحل

$$\iiint_D x\ dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_x^{2x}\left(\int_0^z x\ dy\right)dz\right)dx=\int_0^1\left(\int_x^{2x}xz\ dz\right)dx=\int_0^1\left(x\left[\frac{1}{2}z^2\right]_x^{2x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x\left[\frac{1}{2}\left(4x^2-x^2\right)\right]\right)dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^3\ dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}\right]_0^1=\frac{3}{8}$$

مثال3

أحسب $I=\iiint_{\Delta}\frac{x}{\sqrt{y-x^2}}dx\,dy\,dz$ ، حيث:

$$\Delta=\left\{(x,y,z)\in IR^3/0\le x\le\sqrt{y}\ ,0\le y\le z^2,1\le z\le 2\right\}$$

الحل

$$I=\int_1^2\left(\int_0^{z^2}\left(\int_0^{\sqrt{y}}\frac{-x}{\sqrt{y-x^2}}dx\right)dy\right)dz=\int_1^2\left(\int_0^{z^2}\left[-\sqrt{y-x^2}\right]_0^{\sqrt{y}}dy\right)dz$$

$$=\int_1^2\left(\int_0^{z^2}\sqrt{y}\ dy\right)dz=\int_1^2\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{z^2}dz=\frac{2}{3}\int_1^2 z^3dz=\frac{1}{6}\left[z^4\right]_1^2=\frac{5}{2}$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

8-5 تطبيقات

عدة قيم فيزيائية تمثل على شكل تكامل ثنائي أو ثلاثي.

1-8-5 حساب المساحة

لإيجاد S_D مساحة surface الجزء D المغلق والمحدود من IR^2 يكفي حساب التكامل الثنائي :

$$S_D = \iint_D dx\,dy$$

مثال1

ليكن التابع f المعرف من IR^2 نحو IR كالتالي $f(x,y)=\sqrt{1-x-y}$

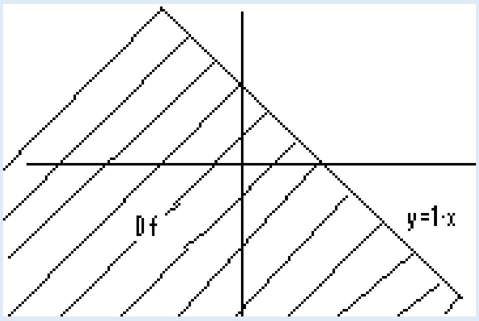
1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f ثم مثلها بيانيا.

2- أحسب مساحة الجزء Δ حيث $\Delta=\{(x,y)\in D_f \,/\, x\geq 0 \wedge y\geq 0\}$.

الحل

-1 $D_f=\{(x,y)\in IR^2 \,/\, 1-x-y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 \,/\, y\leq 1-x\}$

هي مجموعة نقاط المستوي الواقعة تحت المستقيم $y=1-x$.



2- مساحة الجزء Δ.

$$S_\Delta=\iint_\Delta dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}dy\right)dx=\int_0^1(1-x)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)_0^1=\frac{1}{2}$$

مثال2

ليكن التابع f المعرف من IR^2 نحو IR بالشكل: $f(x,y)=\sqrt{1+x-y}$

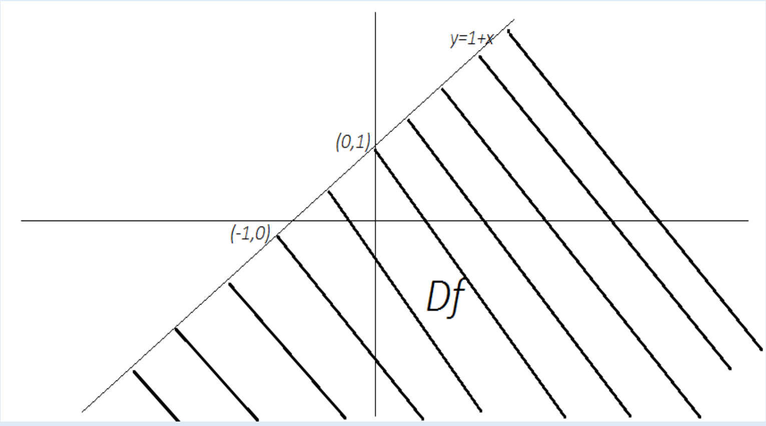
1- عين D_f. ثم مثلها بيانيا.

2- أحسب مساحة الجزء D حيث: $D=\{(x,y)\in D_f \,/\, x\leq 0 \wedge y\geq 0\}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الحل

1) $D_f=\{(x,y)\in IR^2 /1+x-y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\leq 1+x\}$.



2) $D=\{(x,y)\in D_f /-1\leq x\leq 0\wedge 0\leq y\leq 1+x\}$.

$$S_D=\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1+x}dy\right)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

مثال3

ليكن التابع f المعرف من IR^2 نحو IR كالتالي $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

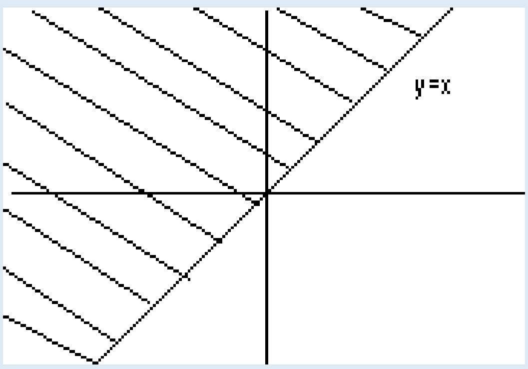
1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f ثم مثلها بيانيا.

2- أحسب مساحة الجزء Δ حيث $\Delta=\{(x,y)\in D_f / x\geq 0\wedge y\leq 1\}$.

الحل

-1 $D_f=\{(x,y)\in IR^2 / y-x\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\geq x\}$

هي مجموعة نقاط المستوي الواقعة فوق المستقيم $y=x$.



rekkabsoraya@yahoo.fr

2- مساحة الجزء Δ.

$$S_\Delta = \iint_\Delta dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 dy \right) dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)_0^1 = \frac{1}{2}$$

مثال4

ليكن التابع $f : IR^2 \to IR$ حيث $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

1- عين D_f مجموعة تعريف f. ماذا تمثل بيانيا؟

2- باستعمال تحويل المتغير، أحسب مساحة D_f.

الحل

1) تعيين D_f مجموعة تعريف f .

$$D_f = \{(x,y) \in IR^2 / 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

و هي تمثل بيانا القرص المغلق الذي مركزه $(0,0)$ و نصف قطره 1.

2) باستعمال تحويل المتغير من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات القطبية

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

فإن:

$$S_{D_f} = \iint_{D_f} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\,dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi$$

2-8-5 حساب الحجم

لإيجاد V_Δ **حجم** volume الجزء Δ المغلق والمحدود من IR^3 يكفي حساب التكامل الثلاثي :

$$\boxed{V_\Delta = \iiint_\Delta dx\,dy\,dz}$$

مثال

أحسب V_Δ، حيث: $\Delta = \{(x,y,z) \in IR^3 / z \leq x \leq 2z\,, 0 \leq y \leq 3 - x,\ 2 \leq z \leq 9\}$.

rekkabsoraya@yahoo.fr

الحل

$$V_\Delta = \int_2^9 \left(\int_z^{2z} \left(\int_0^{3-x} dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_2^9 \left(\int_z^{2z} [y]_0^{3-x} dx \right) dz = \int_2^9 \left(\int_z^{2z} (3-x) dx \right) dz = \int_2^9 \left(3x - \frac{x^2}{2} \right)_z^{2z} dz$$

$$= \int_2^9 \left(3z - \frac{3z^2}{2} \right) dz = \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{z^3}{2} \right)_2^9 = -300$$

rekkabsoraya@yahoo.fr

المراجـــــــــــــــع

rekkabsoraya@yahoo.fr

المراجــــــــــع

[1]دروس مقياس الجبر للسنة الأولى علوم دقيقة. جامعة قسنطينة. السنة الجامعية 1987-1988.

[2]عبد الوهاب بيبي، علي حميدة وفهيم لكحل. الجبر: دروس وتمارين محلولة. الجزء الثاني. 2001. جامعة قسنطينة.

[3]علي حميدة وعبد الوهاب بيبي. التحليل: دروس وتمارين محلولة. الجزء الثالث. 2001. جامعة قسنطينة.

[4]H. Anton and C. Rorres : *Elementary linear Algebra*, Application Version, John Wiley & Sons, Inc, New York, 2000.

[5]A. Bodin : *Intégrales*, basé sur des cours de Guoting Chen et Marc Bourdon.

[6]A. Bodin : *Cours de Mathématiques, M22 Algèbre linéaire*, *Matrices et applications linéaires, d'après un cours de Sophie Chemla de l'Université Pierre et Marie Curie, reprenant des parties d'un cours de H. Lebret et d'une équipe de l'Université de Bordeaux animée par J. Queyrut, relu par V. Combet.* Sciences et technologies, Université Lille 1, Exo7.emath.fr

[7]G. Burmeister : *Notes de cours d'analyse,* prises pendant le semestre de printemps, année 2006-2007.

[8]C. Caignaert : *Intégrales doubles et triples*, *Cours de Spé T.S.I.*, http://c.caignaret.free.fr

[9]R. Dalang and A. Caabouni : *Algèbre linéaire, Aide-mémoire, exercices et applications.*

[10] J. Douchet et B. Zwahlen : *Calcul différentiel et intégral*, *Fonctions réelles d'une ou plusieurs variables réelles.* Presses polytechniques et universitaires romandes. Edition 2007.

[11] J. Douchet : *Analyse*, *Receuil d'exercices et aide-mémoire, vol. 1. Presses polytechniques et universitaires romandes. Deuxième édition*.

[12] H. Fack : *Rappels d'Algèbre linéaire, Equations différentielles linéaires,* DOC'INSA de Mathématiques pour la deuxième année.

[13] D. Farquet : *Le calcul intégral,* Niveau maturité, 2008. daniel.farquet@epfl.ch

[14] G. FICHOU : *Fonction de plusieurs variables,* L2MIEE 2014-2015, Université de Rennes1.

[15] A. Fredet : *Fonctions à plusieurs variables,* année 2007-2008.

[16] F. Geoffriau : *Opération élémentaires sur les matrices,* Agrégation interne de Mathématiques, Département de Mathématiques, Université de la Rochelle, année 2006-2007.

[17] M. Hindry : *Cours de Mathématiques première année (L1),* Université Denis Diderot, Paris 7.

[18] G. Hirsch : *Primitives et intégrales*, Maths54.

[19] T. LAADJ : *Notes de cours du module Fonctions de plusieurs variables,* Troisième année Licence, Algèbre et Cryptographie, Université des Sciences et de la technologie, Houari Boumedienne, Algérie, 2014, Page Web : http://perso.usthb.dz/"tlaadj/

[20] H. Le Dret : *Notes de cours L1-MATH120*, Université Pierre & Marie Curie, la science a Paris, année 2005.

[21] J. Lelong-Ferrand et J.-M. Arnaudiès : *Cours de Mathématiques,* Tome 4 (chapitre 4 et 5), Dunod

[22] T. Liebling : *Algèbre linéaire :une introduction pour ingénieurs.*

[23] G. Ménéxiads : *Les matrices, TERM ES, spécialité Mathématiques,* année 2012-2013.

[24] J.-M. Monier : *Analyse MP*,Dunod, 2004.

[25] S. Pascale : *Outil Mathématiques pour les Sciences, Cours et Exercices,* Portail SI 1ère année, Faculté des Sciences & Techniques, Université de Limoges, 2014-2015. Pascale.senechaud@unilim.fr

[26] D. Pastre : *Résolution des systèmes linéaires, Méthode de Gauss,* Chapitre 1, Méthodes numériques, licence de Mathématiques et licence MASS, UFR de Mathématiques et informatique, Université René Descartes, 2003-2004.

[27] N. Point : *les intégrales,* Version 1, ESCPI, CNAM.

[28] L. Pujo-Menjouet : *Cours d'analyse 3, Fonctions de plusieurs variables,* Licence Sciences, Technologie & Santé, Spécialité Mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon I, France. Pujo@math-lyon1.fr

[29] J. Rappaz. EPFL, section de Mathématique : *Calcul différentiel et intégral, Notes de cours.* Presses polytechniques et universitaires romandes. Edition 2007.

[30] W. Rudin et G. Auliac : *Principes d'analyse Mathématiques,* Edisscience 1995.

[31] L. Thomas : *Algèbre linéaire,* Génie civil & Sciences et Ingénieur de l'Environnement, policopié initial élaboré par E. Bayer Fluckiger et P. Chabloz, Ecole Polytechnique, Fédérale de Lausanne, 2009.

[32] J. P. Truc. *Fonction de plusieurs variables-1-,* Ecole des Pupilles de l'Air, 38332 Saint-Ismier Cedex, année 2008.

[33] B. Tumpach. *Résolution de systèmes linéaires par la méthode du Pivot de Gauss,* Sciences et technologies, Université Lille 1, Exo7.emath.fr

[34] J. Yameogo : *Intégration, Fonction réelle d'une variable réelle, résumé de la séance du 24 février 2010.*

[35] B. Ycart : *Systèmes linéaires*, Licences Sciences et Technologies 1ère année, Mathématiques, Informatique et Mathématiques Appliquée, Université Joseph Fourier, Grenoble 1. France

[36] Commission Romande de mathématiques : *Fundamentum de mathématiques, analyse. Editions du Tricorne, année 2002.*

[37] *Déterminant du rang d'une matrice (complément),* Cinétique chimique, http://cinet.chim.pagesperso-orange.fr

[38] *Méthode du Pivot de Gauss*, http://touteslesmaths.fr