الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد خيضر– بسكرة
كلية العلوم الإقتصاديةوالتجارية وعلوم التسيير
المجلس العلمي للكليـة
رقم: 692 /م.ع.ك. ع.إ.ت/2019

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider –Biskra
Faculté des Sciences Economiques, commerciales et des Sciences de Gestion
Le Conseil Scientifique de La Faculté

مستخرج من محضر اجتماع المجلس العلمي للكلية رقم:2019/02

المنعقد بتاريخ 2019/04/14 (الجلسة الثانية)

في دورة المجلس المنعقدة بتاريخ **الرابع عشر** من شهر **أفريل** ألفين **وتسعة عشر** وعلى الساعة **الثانية مساءً** ،

- **وافق** أعضاء المجلس العلمي على **التقارير الإيجابية** المقدمة من طرف الدكتور: **الحاج عامر** و الدكتور:**عشي عادل** بخصوص المطبوعة المقدمة من طرف الدكتور(ة) :**جبيرات سناء** والمعنونة: " **محاضرات وتطبيقات في مقياس رياضيات المؤسسة** " موجهه لطلبة **السنة الثانية ليسانس**،تخصص: **علوم تجارية وعلوم التسيير** ،تحوي :**173 صفحة** .

بسكرة في: **2019-04-15**

أ.د رئيس المجلس العلمي

أ.د/ مفتاح صالح
جامعة بسكرة – الجزائر
Pr.MEFTAH SALAH
U.BISKRA-ALGERIE

نائب العميد المكلف بما بعد التدرج
والبحث العلمي والعلاقات الخارجية

د.أ/ لخضر مرغاد

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد خيضر – بسكرة –

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير
قسم علوم التسيير

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس L.M.D

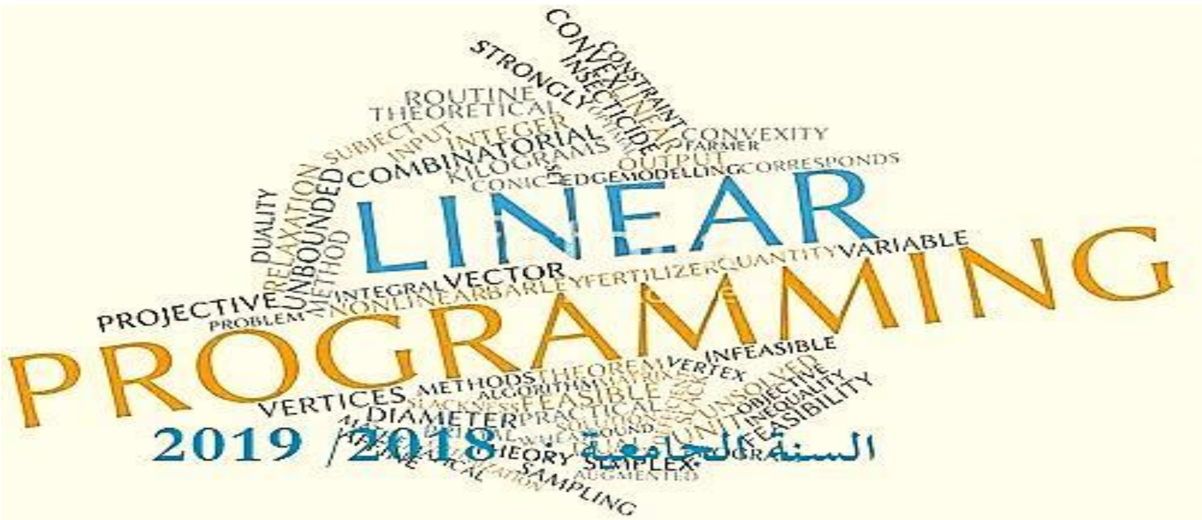
علوم تجارية و علوم التسيير

بعنوان :

محاضرات و تطبيقات في رياضيات المؤسسة

اعداد الدكتورة:

جبيرات سناء



فهرس المحتويات

مقدمة:

بسبب تعقد التركيبة التنظيمية و التسييرية و تشابك الأهداف و الطموحات و ما يرافق ذلك من المخاطر التي تواجهها المؤسسات ، لم يعد متخذ القرار فيها قادرا على تحمل هذه الأعباء بالاعتماد على ما يتمتع من صفات و قدرات موروثة و مؤهلات مكتسبة ، حيث اتجه الفكر التسييري نحو المعطيات الحديثة للإدارة التي تعتمد التفسير العلمي و الكمي للظواهر و المشكلات التي تواجهها المؤسسات في الواقع العملي ، من أجل ترشيد القرار و جعله متماشيا مع ما هو مطروح من تحديات ، على الرغم من أن العديد من المتغيرات يصعب السيطرة عليها و اخضاعها للطرق العلمية و تحليلها و التعامل معها على أساس رقمي ، لأنها ترتبط بالعنصر البشري و العوامل المؤثرة فيه.

وضمن هذا السياق، نجد أن رياضيات المؤسسة كتطبيق علمي للطرق الرياضية في حل مختلف المشاكل التسييرية و الاقتصادية التي تواجه متخذ القرار و القابلة للتكميم بالدرجة الأولى، اذ أن الأصل فيها هو بناء نماذج لتصوير المشكلات الواقعية ثم حلها و اختيار الحلول البديلة و بعدها اختيار الحل الأمثل و تطبيقه على أرض الواقع. و بذلك نستطيع القول أن، رياضيات المؤسسة تعتبر أداة مهمة تقدم وصفا دقيقا للظواهر الاقتصادية و تحديدا للمشكلة المراد دراستها اذا تم بناء نموذج رياضي و تهيئة بياناته بشكل صحيح يساعد على الوصول الى القرار الأنسب الواجب اتخاذه. وفي هذا الصدد نحصي مجموعة من النماذج نذكر منها نموذج البرمجة الخطية، نموذج النقل و نموذج البرمجة غير الخطية ، و هي النماذج التي تم تناولها في هذه المطبوعة الموجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم تجارية وعلوم التسيير و المعدة وفق البرنامج الوزاري الجديد، بحيث اعتمدنا البساطة و الوضوح في اخراج هذه المادة من خلال الابتعاد عن البراهين الرياضية التي تثقل كاهل الطالب غير المتخصص في الرياضيات من جهة ، و ربط المفاهيم و القواعد النظرية بأمثلة تطبيقية و مجموعة من التمارين المحلولة من جهة أخرى. هدفنا في ذلك اتقان الطالب لاستخدام بعض النماذج الرياضية في حل المشكلات للوصول الى أحسن الوضعيات الممكنة في ظل ما هو متاح.

وصف المقياس:

بغرض تغطية مضامين المطبوعة ،فقد تأطرت مكوناتها في قسمين حيث ضم القسم الاول و المتعلق بالمحاضرات على سبعة فصول ، أوله مدخل للبرمجة الخطية الذي يشكل خلفية نظرية لها ،تسهل للطالب الولوج الى الفصل الثاني الموسوم بصياغة النموذج الرياضي لتطبيقات البرمجة الخطية ، أما الفصل الثالث و الرابع فقد أوضحا على التوالي طريقتي الرسم البياني و السمبلاكس في ايجاد الحل الأمثل للبرامج الخطية ، في حين طرح الفصل الخامس فكرتي الثنائية و تحليل الحساسية من خلال مساهمتهما في ايجاد الحل الأمثل و مدى قدرته على الحفاظ على أمثليته في حالة حصول أي تغير في مكونات البرنامج الخطي ، كما تناول الفصل السادس نموذج النقل باعتباره من الحالات الخاصة للبرمجة الخطية الهادفة للوصول الى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية، أما الفصل السابع فقد خصص للبرمجة غير الخطية كإحدى البرامج الرياضية المهمة المطبقة في المجالي الاقتصادي و التسييري. مع العلم ، أن

كل فصل من هذه الفصول كان متبوعا بملخص يعرض بشكل مركز و دقيق ما يجب على الطالب اكتسابه من هذا الفصل.

أما القسم الثاني الخاص بالتطبيقات ، فقد تم تقسيمه حسب محتويات القسم الأول ، بحيث اشتمل على تمارين محلولة في قالب سهل و بسيط مراعاة لإمكانات الطالب ، وسلسلة تمارين مقترحة من أجل مساعدته على ترسيخ و فهم النماذج المعروضة في مختلف الفصول وأن لا يبقي خياله حبيس الأمثلة و المسائل النظرية ، مع ضرورة الاستعانة بمختلف المراجع المتوفرة في مكتبة الكلية و عبر شبكة الانترنت والتي تتناول تلك النماذج بشكل معمق و مفصل ، لأن هذه المطبوعة أخذت بعين الاعتبار مدة 15 أسبوع على الأكثر في تلقي المادة ، مما جعلنا نركز على الأساسيات و نتجنب التفاصيل.

في الأخير، أرجو أن أكون قد وفقت بتقديم الأحسن و أن تكون هذه المطبوعة عونا لأبنائنا الطلبة و مرجعا يستوفون منها معلوماتهم و احتياجاتهم في مجال النماذج الرياضية المطبقة في المجال الاقتصادي و التسييري، و أن تلقى اهتماما من زملائنا الأساتذة بتقديم الانتقادات البناءة الكفيلة بتحسينها مستقبلا.

أهداف المقياس:

ينتظر من الطالب بعد اكمال تدريس هذا المقياس أن يكون قادرا على:

- ✓ نمذجة المشاكل التسييرية و الاقتصادية كمشكلة تخطيط الانتاج، الخلط، التسويق....الخ.
- ✓ ايجاد الحل الأمثل بيانيا لنماذج البرمجة الخطية ذات المتغيرين.
- ✓ ايجاد الحل الأمثل بالطريقة المبسطة لجميع أنواع البرامج الخطية.
- ✓ التفسير الاقتصادي لمكونات الحل الأمثل.
- ✓ بناء و تفسير البرامج الثنائية للبرامج الأصلية.
- ✓ اجراء تحليل ما بعد الأمثلية في حالة تغير مكونات البرنامج الخطي.
- ✓ التعبير الرياضي وحل كل أنواع مسائل النقل لاتخاذ القرار الأمثل.
- ✓ ايجاد أمثلية الحل لكل حالات البرمجة غير الخطية.

القســــــم الأول:

محاضــرات في رياضيــــات المؤسســــــة

الفصل الأول: مدخل للبرمجة الخطية

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- فهم متطلبات تطبيق البرمجة الخطية في المشاكل الادارية.
- تحديد بنية وصيغ نموذج البرمجة الخطية.
- فهم الافتراضات الأساسية لنموذج البرمجة الخطية.
- ادراك استخدامات البرمجة الخطية.

محتوى الفصل:

I . طبيعة البرمجة الخطية

1.تاريخ البرمجة الخطية.

2.مفهوم و بنية البرمجة الخطية.

3.فرضيات البرمجة الخطية.

4.متطلبات البرمجة الخطية.

II: صيغ ، تطبيقات وخطوات البرمجة الخطية

1.صيغ البرمجة الخطية.

2..تطبيقات البرمجة الخطية.

3.خطوات استخدام البرمجة الخطية.

III.تقييم أسلوب البرمجة الخطية.

الملخص

تمهيد:

تعتبر البرمجة الخطية من أكثر الأساليب الرياضية استخداما و أهمية في القرارات التسييرية المختلفة، لأن فائدتها تكمن في قدرتها على التعبير رياضيا عن كثير من المشكلات التسييرية و ايجاد الحل الأمثل للصيغة الرياضية و الذي سيعد أساسا لاتخاذ القرار الرشيد . لهذا سنحاول من خلال هذا الفصل اعطاء فكرة عن مفهوم وطبيعة البرمجة الخطية ، وتطورها، و مجالات تطبيقها بالإضافة الى مراحل استخدامها، ومزاياها و محدداتها.

I . طبيعة البرمجة الخطية:

1. تاريخ البرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية من أهم التطورات العلمية التي توصل اليها الانسان في النصف الثاني من القرن العشرين ، حيث مكنت متخذ القرار من النظر الى المشاكل الادارية بشكل علمي و بمنظور يختلف عن الطريقة التي كانت تعالج بها الأمور من قبل مما نتج عن ذلك تحقيق في الأرباح و وفرة في الخسائر.

ومن الناحية التاريخية ، يعتبر عالم الرياضيات السوفياتي Leonid Kantorovich الأول الذي وضع لبنة بنائها من خلال تقديم في سنة 1939 أول مجلة في البرمجة الخطية بعنوان "الطرق الرياضية في تنظيم و تخطيط الانتاج" في جامعة لينينقراد .[1]

كما يعتبر ايضا العالم George Stiegler من الأوائل الذين قاموا بمحاولات في استخدام البرمجة الخطية عام 1945 ،حيث حاول آنذاك دراسة الحد الأدنى للنفقات اللازمة للفرد لتأمين الكميات الكافية لحياته و المكونة من تسعة مقومات غذائية أساسية (فيتامين، حديد، بروتين...) يحصل عليها من سبع و سبعون مادة غذائية مختلفة، مستهدفا بذلك مقارنة غلاء المعيشة قبل الحرب العالمية الثانية و بعدها في أوربا. وقد قادته هذه الدراسة الى وضع أول نموذج رياضي خطي ، محاولا حله بالطرق الرياضية المعروفة في تلك الفترة كطريقة لاغرانج ، و كتب حينها يقول:" يبدو أنه لا توجد أية طريقة مباشرة لايجاد الحد الأدنى لدالة خطية تخضع متغيراتها لشروط خطية" مما جعله يعيد المحاولة و التجريب للتقرب من حل المسألة و التي تدعى الآن بمسألة التنظيم الغذائي.[2]

أما سنة 1947 فقد شكلت نقطة تحول في تاريخ البرمجة الخطية حيث تمكن العالم الأمريكي George Dantzig من التوصل الى حل بعض مشكلات التخطيط و الصيانة في سلاح الطيران الأمريكي بالاعتماد على ما يسمى بطريقة السمبلاكس(la méthode du simplexe) و التي نشرت لاحقا في سنة 1951 . وقد تم ادخال تعديلات و تطورات كثيرة عليها حتى تتلاءم مع جميع الحالات الممكنة للنماذج الخطية التي رافقت التطورات الاقتصادية و الصناعية في العالم.

2. مفهوم و بنية البرمجة الخطية:

[1] Gerald Baillargeon, **programmation linéaire appliqué, outille à l'aide de décession** , éditions SMG, Québec, 1996, p24

[2] ابراهيم نائب، انعام بقية، **بحوث العمليات ، خوارزميات و برامج حاسوبية** ، ط1، دار وائل للنشر، عما ن، 1999، ص 27

يتكون نموذج البرمجة الخطية من المكونات الأربع التالية:[1]

- **المتغيرات(les variables)**: تمثل الخيارات المتاحة لمتخذ القرار، و قيمها في البرمجة الخطية تحدد الحل الأمثل ، ويرمز لهذه المتغيرات بـ $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$

حيث n عدد المتغيرات في المسألة المدروسة .

هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية :

- ✓ كميات إنتاج لمنتجات معينة .
- ✓ ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة .
- ✓ مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة .
- ✓ كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين .

- **دالة الهدف(la fonction objective)**: هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه، يعبر عنها رياضيا بـ

$$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J \quad = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$$

حيث C_J أعداد حقيقية تدعى بمعاملات دالة الهدف .

تصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى :

✓ **تعظيم دالة الهدف**: تستخدم هذه الدالة عندما نسعى الى تحقيق أكبر قيمة ممكنة كزيادة الانتاج الى اقصى حد ممكن. يرمز للدالة في هذه الحالة بـ :

$$MaxZ = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$$

✓ **تخفيض دالة الهدف**: تستخدم هذه الدالة عندما نسعى الى الحصول على أدنى قيمة ممكنة كتقليل تكلفة الانتاج الى أدنى حد ممكن. يرمز للدالة في هذه الحالة بـ :

$$MinZ = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$$

- **القيود(les contraintes)**: تمثل مجموعة المحددات أو العوائق التي يجب الخضوع لها من أجل تحقيق الهدف ، فهي تعبر عن الموارد المتاحة التي يجب أن تكون محددة وقابلة للقياس . يتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى اذ يمثل الطرف الأيسر المتغيرات و معاملاتها الخاصة أما الطرف الايمن فيمثل قيمة ثابتة ، كما تأخذ أحد الأشكال التالية:

---

[1] علي العلاونة ، محمد عبيدات ،عبد الكريم عواد ، **بحوث العمليات في العلوم التجارية** , ط1، دار المستقبل للنشر و التوزيع ، الأردن، 2000 ،ص 153.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m.$$ أو

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m.$$ أو

حيث أنه في كلا الأشكال :

n : عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

m : عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).

a_{ij} : أعداد حقيقية تدعى بالمعاملات التقنية.

b_i : أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة

- **عدم سلبية المتغيرات (non négativité des variables)**: وهذا يعني أنه يستوجب أن تكون جميع المتغيرات موجبة أو معدومة، ويعبر عنها رياضيا بـ:

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots, n.$$

3.فرضيات البرمجة الخطية:

ذكرنا فيما سبق ، أن البرمجة الخطية تمثل أسلوبا رياضيا لتوزيع أو استخدام موارد محدودة على عدد من الاستخدامات البديلة, بالطريقة التي تحقق أفضل استخدام ممكن لها ممثلا في شكل هدف محدود , وهذا ما يبين لنا أنها تستند إلى على فكرتين هما فكرة النشاط(Activité) , و فكرة البدائل (Alternatives) حيث يقصد بالأولى في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم الإنتاج بها , أما الثانية فتعني تلك الوسائل المختلفة التي يمكن أن تؤدي كل منها إلى تحقيق الهدف المحدد, و في هذه الحالة تقوم البرمجة الخطية في أساسها النظري على الإفتراضات الرئيسية التالية :[1]

- **التناسبية (proportionnalité)**: و يعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلا عن الآخر , ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع المساهمات العوامل المختلفة , كذلك فإن الكميات التي يتم إستخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع إحتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد. فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين , فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج, و هذا الإفتراض هو أساس إفتراض الإضافية.
- **التجميع (additivité)**: ويعني هذا الإفتراض أنه لا يوجد تداخل بين الأنشطة المختلفة، ما يستلزم أن الاثر الكلي يتم الحصول عليه بجمع الأثار الخاصة لكل متغير .فاذا مثلا كان الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من

[1] Gerald Baillargeon, opcit, p24

المنتج الأول هو 3وحدات نقدية و الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من المنتج الثاني هو 5وحدات نقدية فسيكون الحال كذلك سواء تم بيع المنتج الاول بمفرده أو المنتج الثاني بمفرده أو هما معا ، فمن الممكن مثلا أن يؤدي بيع المنتج الأول الى تغير اقبال الزبون على المنتج الثاني وفي هذه الحالة يتأثر الربح المحقق من مبيعات المنتج الأول و الربح المحقق من المنتج الثاني في حالة بيع كل منهما بمفرده أو بيعهما معا ، فاذا كان بيع الوحدة من المنتج الأول هي 3 في حالة بيعه منفردا فقد يصبح 3.5 في حالة بيعه مع المنتج الثاني.

- **قابلية التجزئة(divisibilité)**: يقصد بهذه الفرضية أن مستويات النشاط تتيح لمتغيرات القرار أن تأخذ قيم كسرية ، أي ليس بالضرورة أن تكون أعداد صحيحة ، لهذا يعتبر نموذج البرمجة الخطية نموذج مستمر . و اذا كان من الصعب انتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك يتم اللجوء الى استخدام الى أساليب أخرى كالبرمجة بالأعداد الصحيحة التي تعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية حيث تضمن الحصول على قيم صحيحة لكل متغيرات المسألة.
- **التأكد التام (certitude)**: يفترض النموذج الخطي أن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة , فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التوقع حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل, و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) و المحددات أو القيود (إحتياجات العوامل و المصادر المتوفرة) معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث .

4.متطلبات البرمجة الخطية:

لكي يتمكن متخذ القرار في المؤسسة من تطبيق البرمجة الخطية يتطلب الأمر توفر جملة من الشروط أو المتطلبات ، والمتمثلة في:[1]

- **وجود هدف** : يجب أن يكون هناك هدف محدد و معبر عنه بطريقة كمية , كما يجب أن يكون الهدف واضحا و دقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية , وعادة ما يكون الهدف تحقيق أقصى أرباح ممكنة أو تخفيض التكاليف لأقل حد ممكن.
- **توفر البدائل**: يجب أن تكون هناك استخدامات متعددة أو متنافسة للموارد المتاحة ، وهذا يعني وجود عدد من المجاهيل و التي تشكل الغاية من حل النموذج الرياضي للبرنامج الخطي . و يعني ذلك أنه بامكان المؤسسة مثلا انتاج السلعة A أو السلعة B أو السلعة C أو كل هذه السلع مجتمعة أو بنسب معينة لأن وجود استعمال وحيد للموارد المتاحة يلغي وجود البدائل ومن ثم المسألة ككل.

[1] محمد دباس الحميد، محمدا لعزاوي ، **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية** ، دار اليازوري، الأردن، 2013 ،ص ص 9-10

وجود قيود: وتعني وجود نهايات محددة تحد من الانطلاق الى ما لا نهاية في تحقيق الهدف المنشود ، فالتغير في المتغيرات يخضع الى نوعين من التقييدات وهي:

- انشاء ارتباط بين البدائل أي أن الموارد المتاحة للمؤسسة متوفرة بكمية محدودة و بالتالي فان الحد الأقصى لما هو متوفر من اي تلك الموارد في فترة زمنية معينة يمثل قيد يجب أخذه بعين الاعتبار عند وضع الحلول البديلة.
- احداث تقييد مباشر على البدائل نفسها ، ومثال ذلك اذا كان هناك نوعان من السلع تستهلكان نفس المادة الخام ، فان هذا القيد يخلق نوعا من الارتباط بين هاتين السلعتين لأن أي زيادة في الكمية المنتجة من السلعة الأولى سيؤدي تلقائيا الى تخفيض عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية.

العلاقة الخطية: ينبغي أن تكون العلاقات بين المتغيرات التي تتركب منها المشكلة خطية ، اذ يمكن النظر الي ذلك من ناحيتين:

- . رياضيا: يعني أن كل المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج الخطي من الدرجة الأولى.
- اقتصاديا: تشير الخطية الى التناسب بين المدخلات و المخرجات.

II: صيغ ،تطبيقات و خطوات البرمجة الخطية

1.صيغ النماذج الخطية:

يأخذ البرنامج الخطي بشكل عام أحد الصيغ التالية:[1]

- **الصيغة النظامية أو القانونية(la forme canonique)**: تتشكل هذه الصيغة من نموذج رياضي يحتوي اما على قيود من نوع أقل من أو يساوي اذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، أو قيود من نوع أكبر من أو يساوي اذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير.

و يمكن اختصار الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

أ/ في حالة التعظيم Max :

$$MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1,2,.........., m. \\ x_j \ge 0 & j = 1,2,.........., n. \end{cases}$$

ب/ في حالة التخفيض Min:

[1] Didier Smets, Programmation linéaire et Optimisation, pp13,15

$$MinZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & i = 1,2,.........,m. \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,.........,n. \end{cases}$$

- **الصيغة القياسية أو المعيارية(la forme standard)**: هي الصيغة التالية للصيغة النظامية حيث تستخدم لإيجاد الحل الأولي في البرنامج الخطي . و يأخذ البرنامج الخطي هذه الصيغة اذا كانت جميع القيود على شكل مساواة(معادلات) سواء كانت دالة الهدف من نوع تعظيم أو تخفيض. وبذلك تكون الصيغة القياسية بالشكل التالي:

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,.........,m. \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,.........,n. \end{cases}$$

- **الصيغة العامة أو المختلطة(la forme générale ou mixte)**: عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على قيود مختلفة الاتجاهات أي بعضها يكون من نوع أقل من أو يساوي أو أكبر من أو يساوي و أخرى من نوع المعادلات. وعلى ضوء ذلك تكون الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية هو:

$$MinZ / MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,.........,m. \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,.........,n. \end{cases}$$

وللإشارة، فانه يمكن الانتقال من الصيغة العامة الى الصيغة المعيارية أو القانونية ، وكذا الانتقال من الصيغة القانونية الى الصيغة المعيارية باستعمال بعض التحويلات، أهمها:[1]

1. ان تصغير تابع الهدف Z يكافئ رياضيا تعظيم الصيغة السالبة لهذا التابع ، أي أن:

$$MinZ = Max-Z$$

2. يمكن لأي متراجحة ذات اتجاه معين أن تستبدل باتجاه معاكس بضرب طرفيها في (-1) ، أي أن:

$$ax \geq b \longleftrightarrow -ax \leq -b$$

3. يمكن أن يستبدل كل قيد على شكل مساواة بمتراجحتين متعاكستين، أي بمعنى:

$$Ax = b \longleftrightarrow \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

4. يمكن أن تحول كل متراجحة الى معادلة عن طريق اضافة متغير جديد للطرف الأيسر من المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي ، وطرح متغير جديد من الطرف الأيسر للمتراجحة من نوع أكبر أو يساوي.

2. تطبيقات البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا. لذلك ، فلها تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال، منها:[2]

- **توزيع الموارد الانتاجية**: يساهم أسلوب البرمجة الخطية في التوزيع الأمثل للموارد (المادة الخام، الآلات ، العمالة...الخ) على منتجات مختلفة أو تقديم خدمات متباينة .
- **تخطيط الانتاج**: تتركز مشكلة تخطيط الانتاج في الاختيار الصحيح لأحجام محددة من عدد معين من منتجات المؤسسة ، مع مراعاة طاقات الانتاج و مستلزماتها.
- **تخطيط الاستثمار**: تساعد البرمجة الخطية في تحديد أنسب الاستثمارات لجعل عائد الاستثمارات محققا لأعلى ما يمكن من الأرباح، وذلك من خلال عدد كبير من المجالات وتوزيع هذه الامكانيات على أفضل البدائل المتاحة.
- **النقل** : تمكن البرمجة الخطية من تحديد مسارات النقل التي تحقق أعلى كفاءة توزيعية ممكنة ، منها التوزيع الأمثل لسفن البضائع على الخطوط الملاحية بهدف تحقيق التشغيل الأمثل.
- **توزيع العاملين**: تتعلق هذه المشكلة في كيفية تخصيص العمالة للوظائف المختلفة داخل المؤسسة.

---

[1] Jean Pierre Védrine, Elisabeth Bringuier , Alain Brisard, **Techniques quantitatives de gestion**, Vuibert, paris , 1985 , p69

[2] محمد توفيق ماضي، **البرمجة الخطية، التوزيع الأمثلي للموارد المحدودة**، المكتب العربي الحديث للنشر، القاهرة، 1992، ص7

- **تخصيص مساحات التخزين**: ان القرار الذي تتخذه الادارة في هذه المشكلة هو كيف يمكن تخصيص المساحة المحدودة المتاحة للتخزين على الاستثمارات المختلفة لها لتحقيق أعلى مستوى كفاءة للتخزين و بأقل تكلفة.
- **التخطيط للإشهار**: يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها في مجموعة مختلفة من وسائل الاعلان من أجل ترويج السلع بفعالية وذلك تحت عدد من القيود.

3.خطوات استخدام البرمجة الخطية:

تتلخص خطوات استخدام البرمجة الخطية في ثلاث نقاط أساسية:

- **صياغة أو بناء النموذج الرياضي للمسألة**: تعد صياغة البرنامج الخطي أهم خطوة في البحث عن الأمثلية ، اذ أنه بمجرد الانتهاء منها تصبح بقية المراحل سهلة . لذا سيخصص الفصل الموالي لها للتكلم عن بإسهاب. وعلى العموم ، يقصد بها تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية الى مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح متكون من عدد من المتغيرات بدالة هدف تكون اما في حالة تعظيم أو تخفيض ، و عدد من القيود تكون اما في شكل معادلات أو متراجحات أو الاثنين معا.
- **الحل**: يتم التوصل الى حل لنموذج البرمجة الخطية التي تمت صياغته بالاعتماد على أحد طرق و تقنيات الحل و المتمثلة في:
  - ✓ الطريقة البيانية: يتمثل هذا الحل لمشكلة البرمجة الخطية بالسهولة و الوضوح اذ أنه بالنظر الى الرسم البياني الذي تمثل فيه جميع الشروط و المتغيرات يمكننا أن نجد الحلول المختلفة للمشكلة.(**سيتم التطرق اليها في الفصل الثالث**)
  - ✓ طريقة السمبلاكس(simplexe): تعتمد هذه الطريقة على تقييم الأركان العملية الموجودة في المشكلة مثلها مثل الطريقة السابقة ، اذ يمكن لمتخذ القرار تطبيقها مع أي نموذج مهما كان عدد المتغيرات فيه.(**سيتم التطرق اليها في الفصل الرابع**).

كما يمكن التمييز بين نوعين من الحلول:

الحل المقبول (Solution réalisable): هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات.

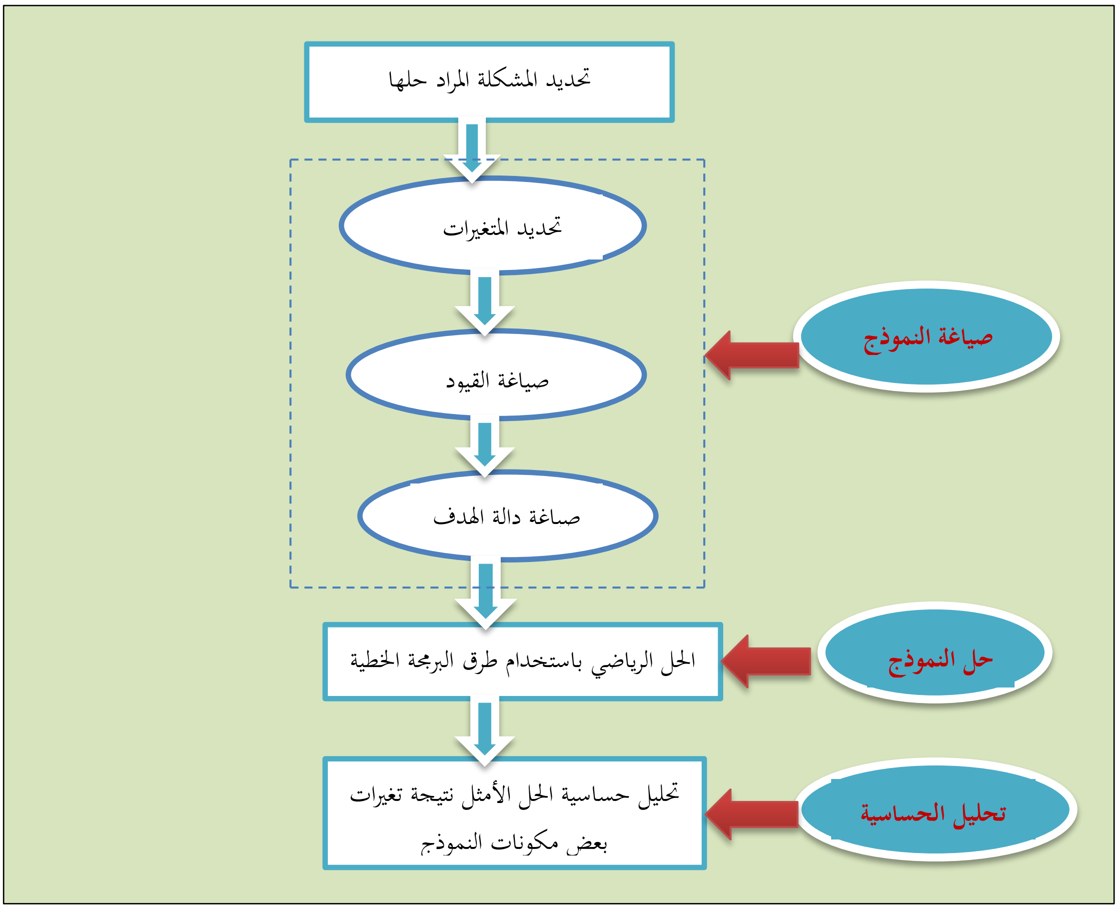
الحل الأمثل (Solution Optimale): نسمي حلاًّ أمثلاً كل حل مقبول و الذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيم، أي أعظم قيمة في حالة Max، و أدنى قيمة في حالة Min.

- **التفسير الاقتصادي للنتائج و التحليل ما بعد الحل الأمثل**: بعد خطوتي الصياغة و الحل يأتي التفسير الاقتصادي لهذه النتائج ، كما يبقى للمحلل مواجهة تساؤلات بصيغة "ماذا-اذا" الخاصة بتقييم الآثار التي

تنتج عن تغيرات في عناصر نموذج المشكل المطروح ، وهذا ما يعرف بتحليل الحساسية .[1] (**سيتم التطرق اليها في الفصل الخامس**)

بيانيا يمكن تلخيص الخطوات السابقة كما يلي:

الشكل رقم 01: خطوات استخدام البرمجة الخطية



المصدر: Gerald baillargon, opcit,p06

III. تقييم أسلوب البرمجة الخطية:

يمكن القول بشكل عام ، أن البرمجة الخطية هي أداة فعالة و قوية في حل نطاق واسع من مشكلات الأعمال ، اذ تعتبر الأكثر تطورا في الأساليب الكمية، ومع ذلك فقد تعرضت لانتقادات نذكر من بينها فيما يلي:

- **مزايا البرمجة الخطية:** أهمها نذكر ما يلي:[2]

[1] Daniel Denoff, **recherche opérationnelle**, université du littoral, Dunkerque ,2003, p57

[2] نجم عبود نجم، **مدخل الى الأساليب الكمية، نماذج و تطبيقات**، دار الوراق للنشر و التوزيع، عمان، 2004، ص257

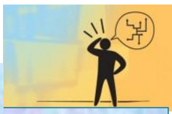
- ✓ **الميزة الأولى** :هي إمكانية الاستعمال الأمثل لعوامل الإنتاج في المؤسسة , فاستخدام البرمجة الخطية يتيح لنا دراسة جميع عوامل الإنتاج في المؤسسة المتعلقة بالمشكلة من مواد أولية و أيدي عاملة و الآلات , كما يعطينا الأساس العلمي الإقتصادي للوصول إلى أعلى الأرباح أو أقل التكاليف في المشكلة المعروضة .
- ✓ **الميزة الثانية** : تحسين نوعية القرارات المتخذة في المؤسسة , فالبرمجة الخطية تجبر الإداري على أن يكون موضوعيا بدلا من إتخاذ قراراته على أساس شخصي , فالبيانات و المعلومات التي تجمع لتكوين مشكلة البرمجة الخطية و حلها في بيانات موضوعية مرتبطة بالمشكلة , وتساعد المدير على التفهم الأكثر للمشكلة و إمكانية إيجاد الحل الموضوعي لها .
- ✓ **الميزة الثالثة** : البرمجة الخطية تعد وسيلة لتعليم المسيرين و زيادة مهاراتهم , فالمسير عليه أن يتفهم النموذج الأساسي للبرمجة الخطية , وأن يقوم بتحليل مشاكل المؤسسة في نموذج البرمجة الخطية و هذا يزيد من معلومات و قدراته المرتبطة بمشاكل المؤسسة
- ✓ **الميزة الرابعة** : إمكانية تعديل الحل الرياضي الذي تم التوصل إليه على أساس بعض الشروط و القيود الخارجة عن المشكلة , فمن الممكن مثلا أن نتوصل إلى الحل الأمثل لمشكلة ما باعتبار الموارد المتاحة من مواد أولية و أيدي عاملة والآلات , ولكن مراعاة الاعتبارات الأخرى الخارجية كالطلب على المبيعات يجب أن يدخل في التحليل , و كذلك مشكلة ارتباط المنتجات ببعضها البعض فيما يسمى خط إنتاجي أي أن العميل يريد أن يرى مجموعة كاملة من المنتجات مرتبطة ببعضها البعض , و على هذا قد تقرر المؤسسة إنتاج عدد من المنتجات ذات الربحية الأقل بهدف الحفاظ على خط كامل للإنتاج طبقا لمتطلبات العملاء , و يمكن ملاحظة كل هذه الأمور في تعديلات تقدم على حل المشكلة .

عيوب البرمجة الخطية:[1]

- ✓ يتطلب استخدام نموذج البرمجة الخطية أن تكون العلاقات خطية بين كافة عناصر المشكلة , بينما يلاحظ أن معظم العلاقات الموجودة في الحياة العملية علاقات غير خطية , الأمر الذي يصعب معه استخدام نموذج البرمجة الخطية لحل مثل هذه المشاكل , فوضعها في صورة خطية يجعلها بعيدة عن الواقع بدرجات متفاوتة فمثلا بخصوص شرط الخطية فإنه يتطلب توفر صفة افتراض الخطية على وجه التقريب وليس شرطا مطلقا , فحتى يمكن أن نقابل شرط الخطية فإنه يجب أن يتوافر لدى المنشأة نظام للمحاسبة التحليلية لتوفير المعلومات.
- ✓ يقوم نموذج البرمجة الخطية على فرض عامل التأكد , و هو فرض صعب القبول في الحياة العملية , لذا فقد أستخدم أسلوب تحليل الحساسية للتغلب على ظاهرة عدم التأكد التي تلازم الحياة الاقتصادية , التي قد تضطر الشخص القائم بإعداد النموذج إلى إعادة تغيير بعض القيم و استخداماتها في الحصول على الحل الأمثال .

[1] محمد الطراونة ، سليمان عبيدات ، **مقدمة في بحوث العمليات** ،ط1، دار المسيرة للنشر والتوزيع ، عمان ،،2009، ص80

- ✓ يصعب في بعض الأحيان استخدام أسلوب التقريب لحل نموذج البرمجة الخطية , وهذا بالنسبة للمشاكل التي تكون متغيراتها منفصلة و التي تتسم بعدم قابليتها للتجزئة, وقد أمكن من استخدام نموذج البرمجة الخطية تحت ظروف المتغيرات المنفصلة هذا بإتباع أسلوب برمجة الأعداد الصحيحة.
- ✓ هناك بعض الاعتبارات الكيفية التي تؤثر بدرجة كبيرة على اتخاذ القرارات و التي لا تأخذها تقنية البرمجة الخطية في الحسبان نظرا لأنه لا يمكن إعطائها قيما عددية, عند إجراء التحـليل ، لذلك يجب تعديل الحل الأمثل بما يضمن أخذ هذه الاعتبارات في الحسبان.
- ✓ قد يتطلب استخدام نموذج البرمجة الخطية الحصول على كمية ضخمة من المعلومات و التي قد يصعب الحصول عليها في الظروف العادية في الوحدات الصغيرة و المتوسطة.



الملخص:

تعتبر البرمجة الخطية من بين الأدوات الرياضية المهمة في مجال اتخاذ القرارات التسييرية التي تبحث عن ايجاد حلول للمشاكل المتعلقة بتخصيص الموارد المتاحة و الامكانيات المحدودة على استخدامات مختلفة من أجل الحصول على أفضل النتائج، وهذا يتم من خلال نمذجة المشكلة و جعلها في شكل برنامج رياضي يعكس مختلف القيود التي من قدرات المؤسسة بهدف الوصول الى تحقيق الهدف بنوعيه التعظيم و التخفيض.

بمعنى آخر أن نموذج البرمجة الخطية يتكون من :

- متغيرات القرار: وه تعبر عن المجاهيل المراد تحديد قيمها ، حيث يرمز لها بالرمز X_J.
- دالة الهدف: هي دالة خطية على ضوئها يتم اختيار الحل الأمثل ، حيث يرمز لها بالرمز **Z** الذي يأخذ أحد الشكلين: **MaxZ** في حالة التعظيم و **MinZ** في حالة التخفيض.
- القيود: هي مجموعة من المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها و لكنه يحاول الوصول الى أفضل قرار في ظلها ، حيث يتم تجسيدها في شكل متباينات و معادلات رياضية.
- قيد عدم السلبية: يشترط البرنامج الخطي أ تكون المتغيرات غير سالبة أي موجبة أو معدومة.

و لكي يتمكن متخذ القرار في المؤسسة من تطبيق البرمجة الخطية يتطلب الأمر توفر جملة من الشروط أو المتطلبات ، والمتمثلة:

- وجود هدف محدد و معبر عنه بطريقة كمية.
- توفر البدائل ، أي أن تكون هناك استخدامات متعددة أو متنافسة للموارد المتاحة.
- وجود قيود تحد من الانطلاق الى ما لا نهاية في تحقيق الهدف المنشود.
- العلاقة الخطية التي تعكس اقتصاديا التناسب بين المدخلات و المخرجات.

الفصل الثاني: صياغة النموذج الرياضي لتطبيقات البرمجة الخطية

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- فهم التطبيقات المختلفة التي تستخدم فيها البرمجة الخطية.
- صياغة النموذج الرياضي لكل أنواع مسائل البرمجة الخطية انطلاقا من المعطيات الواقعية.
- تطبيق الافتراضات الأساسية لنموذج البرمجة الخطية

محتوى الفصل:

I .مراحل صياغة نموذج البرمجة الخطية

II .صياغة بعض نماذج تطبيقات البرمجة الخطية .

1.تخطيط الانتاج(حالة التعظيم).
2.تخطيط الانتاج (حالة التخفيض)
3.التسويق(التخطيط للإشهار)
4.مسألة الخلط.
5.النظام الغذائي.
6.مسألة النقل.
7.مسألة التخزين

الملخص

تمهيد:

تعد مرحلة صياغة النموذج الرياضي من أهم و أعقد مراحل استخدام البرمجة الخطية لكونها مرحلة عملية أكثر منها فنية ، تعتمد على القدرات العقلية لمتخذ القرار بحيث لا يوجد على الاطلاق برنامج لصياغة هذا النوع من البرامج. ومن خلال هذا الفصل سوف نستعرض كيفية بناء النموذج الخطي من خلال أمثلة عن بعض أهم تطبيقات البرمجة الخطية.

I:مراحل صياغة نموذج البرمجة الخطية:

ان صياغة مشكلة تسييرية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي الى تطوير نموذج رياضي يمثل مكونات المشكلة المراد حلها ، و الذي يعتمد بدرجة كبيرة على الفهم الدقيق للمشكلة التي يواجهها المسير بحيث يوفر له نوعين من المعلومات، وهما:

أ/. معلومات خاصة بالهدف المراد تحقيقه من خلال المسألة (المشكلة) ، فمثلا في حالة البحث عن تحقيق أقصى ربح نحتاج الى المعلومات الخاصة بالربح الوحدوي مثلا، و اذا كان الهدف تخفيض التكاليف يجب توفر معلومات حول التكلفة الوحدوية .

ب/. معلومات تتعلق بالقيود ، و هي تمثل المعلومات الخاصة بالاستخدامات وفق الامكانيات الممكنة و التي يشترط فيها عدم تجاوز الكميات المتاحة ، فمثلا استخدام ساعات العمل في العملية الانتاجية يجب أن لا تتجاوز عدد الساعات المتوفرة أو عدد الوحدات التي يمكن انتاجها و التي يجب أن تفوق مستوى معين و الذي يتحدد من طرف المؤسسة و يجنبها الوقوع في خسارة مثلا.

وعلى العموم، فان صياغة البرنامج الخطي يستدعي تحليل مشكلة الدراسة عبر الخطوات التالية :[1]

- تحديد ماهية النشاطات المتعلقة بالمسألة حيث يمكن تمثيل كل نشاط بواسطة متغير وحيد ، و التي يجب أن تتم بطريقة واضحة و دقيقة مع تعريف وحدات القياس المستعملة و أي خطأ في تحديدها يؤدي الى وضع نموذج خاطئ ، لذا تعتبر هذه الخطوة من أهم مراحل صياغة النموذج .و بشكل عام، فان هذه الخطوة تحاول الاجابة على التساؤل التالي:

عن ماذا نبحث أو ماهي المجاهيل التي تهدف المسألة الى ايجاد قيم لها؟

- تحديد المعيار المتبع في قياس المتغيرات ، أي تحديد الهدف المنشود مع التأكد من استخدام وحدة القياس نفسها ، علما أنه يجب أن يكون في النموذج هدف واحد معبر عنه رياضيا في صورة دالة الهدف سواء كانت تعظيم(Max) أو تخفيض (Min). وبتعبير آخر، فان هذه الخطوة تجيب على التساؤل التالي:

ما هو الهدف الذي تصبو المؤسسة الى تحقيقه؟

[1] Michel Nedzela, **introduction a la science de la gestion, méthodes déterministes en recherche opérationnelle**, 2édition,presses de l'université du Québec , 1984, pp 72, 73

- تحديد قيود المسألة من خلال بناء مختلف المعادلات و المتراجحات التي تقيد القيم التي يمكن أن تأخذها مختلف المتغيرات، و ذلك بإدراج كل من الكميات المتاحة لمختلف الموارد و المعبر عنها بالثوابت التي تكون على الجانب الأيمن من القيد، و استغلال الموارد من طرف مختلف المنتجات في الطرف الأيسر من القيد. مع الاشارة الى أن شرط عدم السلبية يجب أن يعبر عنه بقيد أخير في النموذج .بمعنى آخر، ان هذه الخطوة تجيب على التساؤل التالي:

ما هي القيود المفروضة على تحقيق هدف المسألة؟

- مراعاة توفر شرط خطية النموذج (دالة الهدف و القيود) . و في الحقيقة يمكن تجاوز بعض الفرضيات اذا رأينا أنها لا تبعدنا بشكل كبير عن الحل الأمثل .
- جمع كل المعطيات على الشكل الرياضي للنموذج (دالة الهدف، القيود وشرط عدم السلبية).
- مراجعة الشكل النهائي للنموذج مع معطيات المسألة و التحقق من عدم نسيان أي عنصر من عناصر المسألة.

ان اتباع هذه الخطوات في صياغة النموذج الخطي سوف يقلل الى حد كبير من حجم الأخطاء التي يمكن أن نقع فيها . و قد تم التوسع فيها نظرا لأهميتها، الا أنه يمكن صياغة النموذج من خلال الاجابة على الأسئلة الثلاثة السابقة و التي سوف يتم تطبيقها على الأمثلة التوضيحية الموالية.

II-صياغة بعض نماذج تطبيقات البرمجة الخطية

1.. تخطيط الانتاج (حالة التعظيم):

مثال : تقوم مؤسسة انتاجية بصناعة نوعين من لعب الأطفال(A، B)، بحيث انتاج وحدة واحدة من النوع Aيتطلب استعمال وحدتي قياس من مادة البلاستيك و تستغرق في ورشة التصنيع 3ساعات عمل ، بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع B وحدة واحدة من مادة البلاستيك و تستغرق 6ساعات عمل بورشة التصنيع . ويتوفر أسبوعيا لدى المؤسسة 1000وحدة من مادة البلاستيك و 2400ساعة عمل في ورشة التصنيع، كما أن الربح الوحدوي من النوع A و من النوع B على الترتيب هو 20 ، 30 وحدة نقدية.

المطلوب: صياغة المسألة في شكل نموذج البرمجة الخطية من أجل تحديد البرنامج الانتاجي الأمثل الذي يعظم أرباح المؤسسة.

الحل:

- ✓ لتسهيل فهم المسألة نضعها في شكل جدول (نعتمد على هذه الخطوة في هذا التمرين فقط لتعلم الحل بسهولة)
- ✓

المنتوج/ الموارد	مادة البلاستيك	ورشة التصنيع	الربح الوحدوي
لعب نوع A	2	3سا	20و.ن
لعب نوع B	1	6سا	30و.ن
كميات و ساعات العمل المتاحة أسبوعيا	1000وحدة	2400سا	

✓ نحاول بناء النموذج الرياضي للمسألة من خلال الاجابة عن الأسئلة الثلاثة السابقة:

أولا/ تحديد المتغيرات : عن ماذا نبحث أو ماهي المجاهيل التي تهدف المسألة الى ايجاد قيم لها؟

من خلال نص المسألة نلاحظ أن نشاط المؤسسة يكمن في تصنيع نوعين من لعب الأطفال بحيث أن ربح الوحدة الواحدة منهما معلوم للمؤسسة ،في حين أن عدد الوحدات الواجب انتاجها لكليهما و الذي يحقق الربح الاجمالي هو المجهول في المسألة . و عليه فأن متغيرات المسألة يمكن التعبير عنها كما يلي:

. X_1: عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من النوع A

. X_2 : عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من النوع B

ثانيا/ تحديد دالة الهدف: ما هو الهدف الذي تصبو المؤسسة الى تحقيقه؟

ان الهدف الاساسي للمؤسسة هو تعظيم الربح الناتج عن الوحدات الممكن انتاجها من النوعين ، أي ان :

الربح الاجمالي = ربح النوع A + ربح النوع B

=(ربح الوحدة الواحدة من A ×عدد الوحدات الواجب انتاجها من النوع A) +(ربح الوحدة الواحدة من B×عدد الوحدات الواجب انتاجها من النوع B

وعليه يمكن ترجمة الصيغة اللغوية لدالة الهدف في شكل رياضي كما يلي :

$$\mathbf{MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2}$$

ثالثا/ تحديد القيود: ما هي القيود المفروضة على تحقيق هدف المسألة؟

ان تحقيق أعظم قيمة لدالة الهدف في هذه المسألة يجب أن يتم في ظل احترام القيود المفروضة على الهدف , و المتمثلة في :

- **قيد مادة البلاستيك:** يتم التعبير عن هذا القيد بطرفين:

1. طرف الاستخدامات (الطرف الايسر):الذي يمثل مجموع الوحدات التي يتطلبها انتاج المنتوجين ، بتعبير لغوي نقول:

عدد الوحدات من البلاستيك المخصصة للنوعA + عدد الوحدات من البلاستيك المخصصة للنوعB

=

(عدد وحدات البلاستيك المخصصة لوحدة واحدة من A ×عدد وحدات المنتجة من A) +(عدد وحدات البلاستيك المخصصة لوحدة واحدة من B×عدد وحدات المنتجة منB)

=

$2\ x_1 + x_2$

2.طرف المتاحات أو الامكانيات(الطرف الأيمن) الذي يمثل الوحدات المتاحة من مادة البلاستيك الواجب عدم تجاوزها (أي عدم استخدام أكثر مما هو متاح) و المقدرة بـ 1000وحدة.

و بتركيب طرفي القيد (الاستخدامات و المتاحات) تكون العبارة الرياضية لهذا القيد وفق الصياغة التالية:

$$\mathbf{2\ x_1 + x_2 \leq 1000}$$

- **قيد ورشة التصنيع:** بنفس الطريقة المتبعة في صياغة القيد الأول يتم التعبير عن قيد ساعات العمل :

طرف الاستخدامات: و يساوي هنا:

عدد ساعات العمل المخصصة للنوع A + عدد ساعات العمل المخصصة للنوع B

=

(عدد ساعات العمل المخصصة لوحدة واحدة من A ×عدد وحدات المنتجة من A) +(عدد ساعات العمل المخصصة لوحدة واحدة من B×عدد وحدات المنتجة من B)

=

$3\ x_1 + 6\ x_2$

طرف المتاحات: الزمن المتاح و الذي لا يمكن تجاوزه بأي حال من الأحوال هو 2400ساعة عمل أسبوعيا.

وبتركيب طرفي القيد ، نكتب:

$$\mathbf{3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 2400}$$

- قيد عدم سلبية المتغيرات: بما أن المتغيرات المستعملة في البرنامج تعبر عن مقادير فيزيائية (وحدات) فلا يمكن أن تكون اشارتها سالبة ، و عليه نكتب:

$$\mathbf{x_1\ ,\ x_2 \geq 0}$$

✓ كتابة البرنامج الخطي بناء على الخطوات السابقة بالشكل التالي:

$$\mathbf{MaxZ = 20\ x_1 + 30\ x_2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{2\ x_1 + x_2 \leq 1000} \\ \mathbf{3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 2400} \\ \mathbf{x_1\ ,\ x_2 \geq 0} \end{cases}$$

✓ بعد التأكد من عدم اهمال أي عنصر من عناصر المسألة و مراجعتها مع النموذج، يمكن التحقق من توفر الفرضيات الأساسية للنموذج الخطي: (نستعملها في هذا التمرين فقط من أجل التوضيح لهذه النقطة)

. الفرضية التناسبية: محققة لأن كل معاملات دالة الهدف و المعاملات التقنية ثابتة.

. فرضية التجميع: محققة بحيث كل نشاط مستقل عن الآخر ، فكل منتج لا يدخل في انتاج منتج آخر.

. فرضية قابلية التجزئة: محققة لأن المتغيرات مستمرة(عدد وحدات).

2.تخطيط الانتاج(حالة التخفيض):

مثال: ترغب احدى المزارع في وضع خطة لإنتاج نوعين من الأعلاف هما N و M من أجل تغذية ماشيتها ، بحيث تحتوي هذه الأعلاف على أربع عناصر : A , B, C, D بالكميات التي تظهر في الجدول التالي:

	A	B	C	D
يحتوي على M 1كغ من	100 غ	/	400 غ	500 غ
يحتوي على N 1كغ من	/	100 غ	200 غ	700 غ

كما أن الماشية على الأقل يجب أن تستهلك كل يوم على الأقل:

0.4كغ من A ، 0.6كغ من B ، 2كغ من C و3.5 كغ من D . كما أن تكلفة النوعين M و Nهما على الترتيب 10دج/كغ و 4دج/كغ.

المطلوب: ما هو النموذج الخطي الذي تقترحه من اجل تغذية الماشية بأقل تكلفة؟

الحل:

✓ **تحديد المتغيرات:** نفرض أن:

X_1: عدد الكيلوغرامات الواجب انتاجها من العلف M

X_2: عدد الكيلوغرامات الواجب انتاجها من العلف N

✓ **كتابة البرنامج الخطي:** يمكن أن نكتبه كما يلي:

$$\text{Min } Z = 10\,x_1 + 4\,x_2$$

$$\begin{cases} 0.1\,x_1 \geq 0.4 & \text{:A قيد العنصر} \\ 0.1\,x_2 \geq 0.6 & \text{:B قيد العنصر} \\ 0.4\,x_1 + 0.2\,x_2 \geq 2 & \text{:C قيد العنصر} \\ 0.5\,x_1 + 0.7\,x_2 \geq 3.5 & \text{:D قيد العنصر} \\ x_1\,,\,x_2 \geq 0 & \text{:شرط عدم السلبية} \end{cases}$$

3. التسويق(التخطيط للاشهار)

مثال : أراد مدير اعلانات مؤسسة الهقار اعطاء صورة حسنة عن منتوج المؤسسة ، فوضع ميزانية تقدر بـ 51000دج للفترة المقبلة، ويبحث عن كيفية توزيعها ما بين الوسائل الاشهارية المبينة في الجدول التالي:

الوسائل	تكلفة الاعلان الواحد	العدد الاقصى للإعلانات	مؤشر الاتصال
القناة الاولى	3000	30	100
القناة الثانية	2500	20	80
الاذاعة	200	30	15
الجرائد	1500	20	40

كما فرضت ادارة المؤسسة على مدير الاعلانات الشروط التالية:

. يجب عرض عشرة اعلانات تلفزيونية على الأقل.

. ألا تتجاوز تكلفة الاعلانات التلفزيونية 36000دج.

المطلوب: تشكيل النموذج الخطي الذي يحقق هدف المدير و المتمثل في تعظيم مؤشر الاتصال.

الحل:

✓ **تحديد المتغيرات**:

في هذا المثال ، يمثل كل نشاط الاعلان في مؤسسة اعلامية معينة ، وعليه يمكن التعبير عن متغيرات القرار بـ:

X_1: عدد الاعلانات في القناة الأولى

X_2: عدد الاعلانات في القناة الثانية

X_3: عدد الاعلانات في الراديو

X_4: عدد الاعلانات في الجرائد

✓ **كتابة البرنامج الخطي**: يمكن أن نكتبه كما يلي:

$$MaxZ= 100\,x_1 +80x_2 +15x_3 +40x_4$$

قيد الميزانية: $3000x_1 + 2500x_2 + 200x_3 + 1500x_4 \leq 51000$

قيد تكلفة الاعلانات التلفزيونية: $3000x_1 + 2500x_2 \leq 36000$

قيد عدد الاعلانات التلفزيونية: $x_1 + x_2 \geq 10$

قيد اعلانات القناة الأولى: $x_1 \leq 30$

قيد اعلانات القناة الثانية: $x_2 \leq 20$

قيد اعلانات الراديو: $x_3 \leq 30$

قيد اعلانات الجرائد: $x_4 \leq 20$

قيد عدم السلبية: $x_1 , x_2, x_3 , x_4 \geq 0$

4. مسألة الخلط:

مثال: يرغب مدير لأحد معامل تكرير النفط في تحديد الخليط الأمثل لنوعين من عمليات الخلط الممكنة في تحديد المدخلات و المخرجات الخاصة بكل دورة انتاج كما يوضحها الجدول التالي:

عملية الخلط	المدخلات		المخرجات	
	المادة الخام-1-	المادة الخام-2-	المنتوج-1-	المنتوج-2-
الخلط1	6	4	6	9
الخلط2	5	6	5	5

ان الكمية القصوى المتوفرة من مادتي الخام هي 250وحدة و 200وحدة على التوالي. كما أوضحت حاجة السوق أنه يجب انتاج مالا يقل عن 150وحدة من المنتوج -1- وما لا يقل عن 120وحدة من المنتوج -2- ، و أن الربح بالدورة الانتاجية الواحدة من عمليتي الخلط الاولى و الثانية هو 4 و 5 وحدة نقدية على التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية لهذه المسألة.

الحل:

✓ **تحديد المتغيرات:**

يريد مدير المعمل هنا تعظيم أرباحه من عمليتي الخلط الأولى و الثانية و ليس من المنتوجين ، لذا فان متغيرات القرار تتمثل في:

X_1: عدد دورات الانتاج لعملية الخلط الأولى

X_2: عدد دورات الانتاج لعملية الخلط الثانية

✓ **كتابة البرنامج الخطي**: يمكن أن نكتبه كما يلي:

$$MaxZ = 4x_1 + 5x_2$$

قيد المادة الخام-1-: $6x_1 + 5x_2 \leq 250$

قيد المادة الخام-2-: $4x_1 + 6x_2 \leq 200$

قيد المنتوج-1-: $6x_1 + 5x_2 \geq 150$

قيد المنتوج-2-: $9x_1 + 5x_2 \geq 120$

قيد عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

5. النظام الغذائي:

مثال: تود ادارة الخدمات في احدى المؤسسات تأمين وجبة غذائية من قائمة تحتوي على ثلاثة أنواع من الأطعمة(الحليب، البيض، ، اللحم) بحيث تحتوي على كميات معينة من ثلاثة أنواع من الفيتامينات ، و تكون تكلفة الوجبة أقل ما يمكن. والجدول التالي يبين القيم الغذائية و تكلفة الوحدة لهذه الأطعمة:

الفيتامين	حليب(1لتر)	لحم(1كغ)	البيض(1بيضة)	الكمية الأدنى الواجب توفرها
A	10	15	10	20
B	100	10	10	50
C	20	100	10	10
تكلفة الوحدة	2	3	1	

المطلوب: ما هو نموذج البرمجة الخطية الذي تقترحه لمساعدة ادارة الخدمات على تأمين وجبة غذائية بأقل تكلفة.

الحل:

✓ **تحديد المتغيرات:**

يتمثل القرار في هذا المثال في تحديد المزيج الأمثل من الأطعمة الثلاثة ، لذا نفترض أن :

X_1: عدد اللترات من الحليب في الوجبة الغذائية

X_2: عدد الكيلوغرامات من اللحم في الوجبة الغذائية

X_3: عدد البيض في الوجبة الغذائية

✓ **كتابة البرنامج الخطي:** يمكن أن نكتبه كما يلي:

$$MinZ = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 \geq 20 & \text{قيد الفيتامين A:} \\ 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 & \text{قيد الفيتامين B:} \\ 20x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 & \text{قيد الفيتامين C:} \\ x_1, x_2, x_3, \geq 0 & \text{قيد عدم السلبية:} \end{cases}$$

6. مسألة النقل:

مثال: تمتلك مؤسسة ثلاث مصانع لانتاج المحركات الكهربائية متواجدة في المناطق C,B,A بحيث الطاقة الانتاجية لكل مصنع على الترتيب هي 7000، 6000، 2500 وحدة. وتقوم هذه المؤسسة ببيع منتوجها في ثلاث نقاط بيع هي Y,Z,W حيث يقدر الطلب المتوقع في كل نقطة بيع على الترتيب 4000، 5500، 6000وحدة.

تهدف المؤسسة الى تحديد عدد المحركات الواجب نقلها من كل نقطة انطلاق(المصنع) نحو نقطة وصول معينة(نقاط البيع) وذلك بالأخذ بعين الاعتبار تكاليف القل المختلفة لكل مسار ، والجدول التالي يبين تكاليف النقل الوحدوية لكل مسار:

نقاط الانطلاق/نقاط الوصول	W	Z	Y
A	76	55	82
B	42	25	53
C	31	19	20

المطلوب: صياغة البرنامج الذي يسمح باختيار المسارات المثلى التي تخفض تكاليف النقل الكلية الى أقل ما يمكن.

الحل:

✓ **تحديد المتغيرات:**

تكمن نشاطات المؤسسة في نقل المحركات من نقاط الانطلاق (المصانع) نحو نقطة الوصول(نقاط البيع) حيث نستعين في هذا المثال بالمتغيرات من الشكل x_{ij} بدلا من الشكل x_j لتسهيل تحديد المسارات ، وعليه نفترض أن:

X_{11}: عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Aالى نقطة بيع W

X_{12} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Aالى نقطة بيع Z

X_{13} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Aالى نقطة بيع Y

X_{21} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Bالى نقطة بيع W

X_{22} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Bالى نقطة بيع Z

X_{23} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Bالى نقطة بيع Y

X_{31} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Cالى نقطة بيع W

X_{32} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Cالى نقطة بيع Z

X_{33} عدد المحركات الواجب نقلها من مصنع Cالى نقطة بيع Y

✓ **كتابة البرنامج الخطي:** يمكن كتابة البرنامج لمسألة تخفيض تكاليف النقل كالتالي:

$$MinZ= 76x_{11}+55x_{12} + 82x_{13}+ 42x_{21}+25x_{22}+ 53x_{23}+ 31x_{31}+ 19x_{32}+20x_{33}$$

قيد الطاقة الانتاجية للمصنعA: $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 7000$

قيد الطاقة الانتاجية للمصنعB: $x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 6000$

قيد الطاقة الانتاجية للمصنع C: $x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 2500$

قيد نقطة البيعW : $x_{11}+x_{21}+x_{31}= 4000$

قيد نقطة البيعY : $x_{12}+x_{22}+x_{32}=5500$

قيد نقطة البيعZ : $x_{13}+ x_{23}+ x_{33}= 6000$

قيد عدم السلبية: $x_{11},x_{12} ,x_{13}, x_{21},x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32},x_{33}\geq 0$

7.مسألة التخزين:

مثال: تنتج احدى المؤسسات منتوجا معينا وعليها تحقيق المتطلبات للأشهر الثلاثة القادمة ، على أن الطاقة الانتاجية الشهرية القصوى للمؤسسة هي 18000وحدة وكلفة انتاج الوحدة الواحدة هي 2000وحدة نقدية.

الشهر	أفريل	ماي	جوان
العدد المطلوب	6000	12000	18000

تعاني المؤسسة من عدم توفر مكان للتخزين ، لذلك قامت بتأجير مكان للتخزين حيث كلفة تخزين الوحدة الواحدة هي 250و.ن/ شهريا . و يجري حساب الكلفة على أساس العدد الموجود في المخزن في نهاية الشهر ، مع العلم أن المؤسسة لا تمتلك أي مخزون أولي ولا ترغب في الاحتفاظ بمخزون معين .

المطلوب: تشكيل النموذج الخطي للمسألة من أجل تخفيض التكاليف

الحل:

✓ **تحديد المتغيرات:** نفرض أن متغيرات القرار هي:

X_{11}: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر أفريل لتسليمها في نفس الشهر

X_{12}: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر أفريل لتسليمها في شهر ماي

X_{13}: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر أفريل لتسليمها في شهر جوان

X_{22}: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر ماي لتسليمها في نفس الشهر

X_{23}: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر ماي لتسليمها في شهر جوان

X_{33}: عدد الوحدات الوجب انتاجها في شهر جوان لتسليمها في نفس الشهر

✓ **كتابة البرنامج الخطي:** يأخذ نموذج هذه المشكلة الشكل التالي:

✓

ان الهدف لهذه المسألة هو تقليل التكلفة الكلية و المرتبطة بتكلفة الانتاج و تكلفة التخزين وعليه نجد:

$$MinZ = 2000x_{11}+ 2250x_{12}+ 2500x_{13}+2000x_{22}+2250x_{23}+2000x_{33}$$

قيد الطاقة الانتاجية لشهر أفريل: $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 18000$

قيد الطاقة الانتاجية لشهر ماي: $x_{22}+x_{23} \leq 18000$

قيد الطاقة الانتاجية لشهر جوان: $x_{33} \leq 18000$

قيد الطلب لشهر أفريل: $x_{11} = 6000$

قيد الطلب لشهر ماي: $x_{12}+x_{22} = 12000$

قيد الطلب لشهر جوان: $x_{13}+x_{23}+x_{33} = 18000$

قيد عدم السلبية: $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{33} \geq 0$

الملخص

تعد مرحلة صياغة النموذج الرياضي من أهم و أعقد مراحل استخدام البرمجة الخطية لكونها مرحلة عملية أكثر منها فنية ، تعتمد على القدرات العقلية لمتخذ القرار بحيث لا يوجد على الاطلاق برنامج لصياغة هذا النوع من البرامج. فاذا ما توفرت متطلبات تطبيق البرمجة الخطية في أية مسألة ، فان النتيجة هي الحصول على نموذج رياضي يصف النشاط موضوع البحث ، عن طريق اتباع خطوات محددة والتي تعكس الاجابة على التساؤلات التالية :

- خطوة تحديد ماهية نشاطات المسألة: تتجسد في سؤال عن ماذا نبحث أو ماهي المجاهيل التي تهدف المسألة الى ايجاد قيم لها؟
- خطوة تحديد المعيار المتبع في قياس المتغيرات: تتجسد في سؤال ما هو الهدف الذي تصبو المؤسسة الى تحقيقه؟
- خطوة تحديد قيود المسألة: تتجسد في سؤال ما هي القيود المفروضة على تحقيق هدف المسألة؟

الفصل الثالث: الطريقة البيانية للبرمجة الخطية

La méthode graphique

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- ايجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي مهما كان نوع مسألة البرمجة الخطية.
- التمييز بين قيود البرنامج الخطي ودلالتها بالطريقة البيانية .
- التمييز وحل مختلف الحالات الخاصة لمسائل البرمجة الخطية.

محتوى الفصل:

I. البحث عن الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

اولا. في حالة التعظيم.

ثانيا. في حالة التخفيض.

II. الحالات الخاصة في الطريقة البيانية .

1. تعدد الحلول المثلى.
2. عدم وجود حلول.
3. الانحلال.
4. الحلول غير المحددة.

III. تقييم الطريقة البيانية .

الملخص

تمهيد:

كما أشرنا سابقا، فانه بعد صياغة النموذج للمشكلة و المتضمنة بطبيعة الحال بحث العلاقات المنطقية المتبادلة فيما بين العديد من المتغيرات الواقعة تحت تأثير قيود نوعية وكمية و غيرها ،تأتي خطوة حله التي تعنى بإيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود سواء كانت الدالة في حالة تعظيم أو في حالة التخفيض، وهذا يكون باستخدام احدى أهم طرق البرمجة الخطية وهما:

- ✓ طريقة السمبلاكس(méthode du simplexe)
- ✓ الطريقة البيانية التي تعتبر مدخلا لفهم طريقة simplexe التي تكون عادة معقدة و صعبة الى حد ما ، كما تعطي تصورا عن صورة احتمالات الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية.

لذا، سيتم تناول الطريقة البيانية أولا في هذا الفصل بشيء من التفصيل .

I. البحث عن الحل الأمثل بالطريقة البيانية :

تعتمد الطريقة البيانية على التمثيل التصويري لمسألة البرمجة الخطية ولكنها لا تطبق الا على الحالات البسيطة حيث أن التمثيل البياني لا يمكن أن يتجاوز السطح المحدد بمحوري الاحداثيات الأفقي و الرأسي، لذلك فان استخدامها في الحياة العملية معدومة لان عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جدا تفوق المتغيرين . كما تعمل على رسم القيود على المحورين لتتكون لدينا ما يسمى بمنطقة الحلول الممكنة و التي تعتبر لأية مسألة برمجة خطية بمثابة مجموعة محدبة ، وأن أية نقطة تقع داخل هذه المنطقة أو على محيطها تمثل حلا ممكنا للمسألة ، أما الحل الأمثل فيتمثل هنا بوجود نقطة زاوية على محيط منطقة الحلول الممكنة .

و سنقوم بتوضيح الخطوات العملية للطريقة البيانية وفقا لنوعي دالة الهدف لمسائل البرمجة الخطية:

أولا . في حالة التعظيم:

سنوضح الخطوات الستة الواجب اتباعها للحل بالطريقة البيانية وفقا للمثال التوضيحي السابق عن تخطيط الانتاج في حالة التعظيم:[1]

- تمثيل كل متغير بأحد الإحداثيات (الأفقي أو العمودي) ، وحسب مثالنا فان المسألة تتعلق بمتغيرين فقط حيث يتم تخصيص الخط الأفقي من الرسم البياني لعدد لعب أطفال نوع $A(x_1)$ و الخط العمودي لعدد لعب أطفال نوع $B(x_2)$. وهنا من الضروري أن يعلم الدارس أن الأخذ بعين الاعتبار بقيد عدم سلبية المتغيرات يطلب أن يقع المتغيرين في الربع الأول من الرسم البياني(أي الجهتين الموجبتين من المحورين).
- تمثيل كل قيد بخط مستقيم بعد تحويله من متباينة الى معادلة ، وذلك بإيجاد نقطتين لكل قيد يتم تعيين أحدهما على المحور الافقي و الآخر على المحور العمودي . وبشكل مبسط نأخذ الجزء الأول من القيد الذي يكون على شكل المساواة ونضع أحد المتغيرات مساو للصفر ، فنتمكن من تحديد قيمة المتغير الثاني و العكس صحيح.

---

[1] Amor Farouk Benghezal , **programmation linéaire**, 2édition, office des publications universitaires, Alger, 2006 , pp16,17

في مثالنا السابق يتم تحديد احداثيات المتغيرات على النحو التالي:

أ. نقاط القيد الأول(مادة البلاستيك): $2\ x_1 + x_2 \leq \ 1000$

نحول المتباينة الى مساواة : $2\ x_1 + x_2 = 1000$

نفرض أن $x_1 = 0$ و نعوض في معادلة القيد فتكون قيمة $x_2 = 1000$، وهذه هي النقطة الأولى ، و بنفس الأسلوب نستخرج النقطة الثانية بافتراض أن $x_2=0$ فنكون قيمة $x_1 = 500$.

ب. نقاط القيد الثاني(ورشة التصنيع) : $3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 2400$

يتم استخراج النقاط بنفس الاجراءات التي طبقت على القيد الأول ، فبافتراض أن $x_1=0$ فان قيمة $x_2 = 400$ ، وبافتراض أن $x_2=0$ فان قيمة $x_1 = 800$.

ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي:

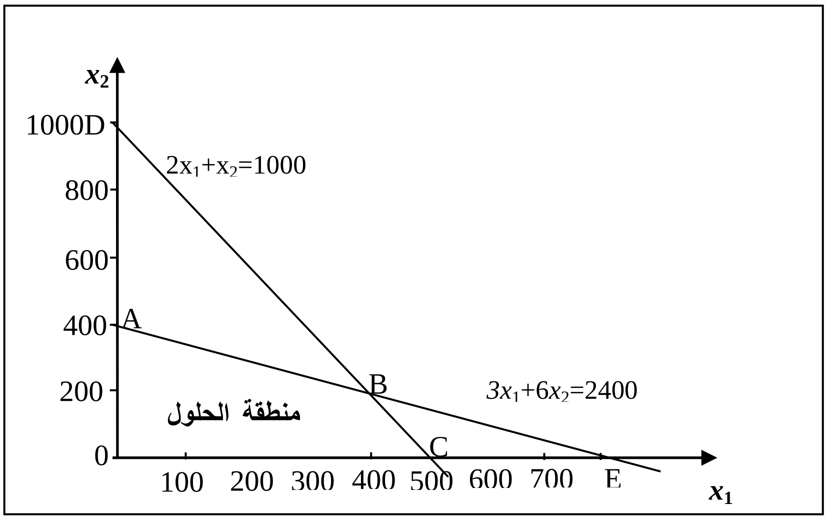
القيود	$x_1 = 0$	$x_2=0$
$2\ x_1 + x_2 = 1000$	1000	500
$3\ x_1 + 6\ x_2 = 2400$	400	800

و يمكن تمثيل هذه النقاط بيانيا كما يلي:

- رسم كل قيد على الرسم البياني بالتوصيل ما بين النقاط المستخرجة ، ثم تحديد مجال الحل للقيد حسب طبيعته حيث:

- اذا كان القيد من نوع أقل من أو يساوي فان مجال الحل يقع تحت القيد باتجاه نقطة الأصل (المساحة الواقعة على يسار المستقيم).
- اذا كان القيد من نوع أكبر من أو يساوي فان مجال الحل يقع فوق القيد نقطة الأصل(المساحة الواقعة على يمين المستقيم) .
- اذا كان القيد من نوع مساواة فان مجال الحل يقع على القيد نفسه .

وبما أن قيدي المثال من نوع أقل من أو يساوي فان مجال الحل لكل منهما يقع باتجاه نقطة الأصل التي يمكن التعبير عنه بأسهم تتجه نحو هذا المجال، و الشكل التالي يبين تمثيل القيدين:



- تحديد منطقة الحلول المشتركة التي تظهر من تقاطع الخطوط المستقيمة الممثلة للقيود، فهي تمثل مساحة تستجيب لشروط جميع قيود المشكلة.

وحسب الرسم البياني أعلاه ، فان منطقة الحل لقيد مادة البلاستيك هي الواقعة الى أسفل و يسار المستقيم (DC) و المحددة بالمساحة (OCD) ، أما منطقة القبول الممكنة لقيد ورشة التصنيع فهي المنطقة الواقعة الى أسفل و يسار المستقيم (AE) و المحددة بالمساحة (OAE) . وبالتالي فان منطقة القبول المشتركة للقيدين معا تتحدد بالمساحة (OABC) حيث أن أي نقطة ضمن هذه المنطقة المضللة (داخلها أو على حدودها) يمكن اعتبارها حلا ممكنا تتحقق فيه قيدي المسألة .

- ايجاد الحل الأمثل الذي يجعل دالة الهدف في نهايتها العظمى باتباع احدى الطريقتين التاليتين:[1]

- **الطريقة الأولى**: وهي طريقة بسيطة وسهلة جدا تقوم على تعويض احداثيات نقاط أركان منطقة الحلول الممكنة بدالة الهدف ، ومن ثم اختيار النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف .

وحسب مثالنا هناك أربعة نقاط تمثل أركان منطقة الحلول الممكنة حيث تظهر نتائج اختبار هذه النقاط في دالة الهدف لتحديد نقطة الحل الأمثل في الجدول التالي:

النقاط	احداثيات النقاط	قيمة دالة الهدف
0	o :($x_1=0$, $x_2=0$)	$MaxZ_O=0$
A	A:($x_1=0$, $x_2=400$)	$MaxZ_A=12000$
B	**B:($x_1=400$, $x_2=200$)**	**$MaxZ_B=14000$**
C	C:($x_1=500$, $x_2=0$)	$MaxZ_C=10000$

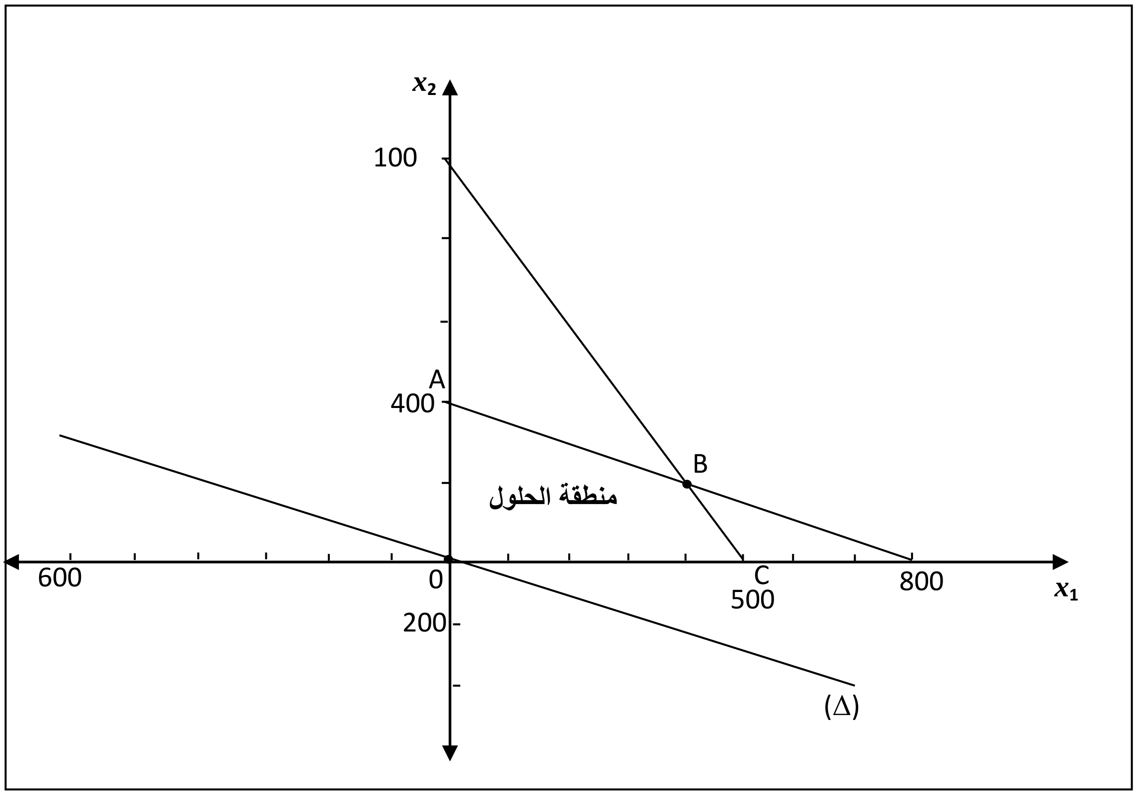
[1] عبد الستار أحمد محمد الآلوسي ، **أساليب بحوث العمليات ، الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، ط1، دار القلم للنشر و التوزيع، الامارات العربية المتحدة، 2003، ص 64.

ومقارنة الحلول المختلفة عند النقاط O,A,B,C يتبين أن الحل الأمثل يكون عند النقطة B أي أن البرنامج الانتاجي الأمثل للمسألة يتمثل في انتاج 400لعبة من نوع A و 200لعبة من نوع B مع تحقيق أقصى ربح قدره 14000وحدة نقدية .

- **الطريقة الثانية:** نرسم مستقيم لدالة الهدف على نفس المعلم يدعى بالمستقيم (Δ) ، و الذي يتم الحصول عليه بجعل الدالة معدومة ، أي أن Z=0، وعليه فالمستقيم (Δ) يمر بالنقطتين:

$20\ x_1 + 30\ x_2=0$	
x_1	x_2
300	200-
600-	400

ويكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر الزاما بنقطة المبدأ



وبعد رسم المستقيم(Δ) نقوم بتحريكه بصفة متوازية اتجاه رؤوس منطقة الحلول الممكنة وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة هي آخر نقطة يصل اليها المستقيم . وحسب المثال نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول الممكنة هي النقطة B، و بالتالي تشكل لنا الحل الأمثل ، حيث يمكن لنا ايجاد احداثياتها اما :

- ✓ هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة x_1 وامداد مستقيم موازي للمحور الأفقي انطلاقا من النقطة B فنجد قيمة x_2.

✓ حل معادلتي المستقيمين باعتبارها تمثل نقطة تقاطع القيدين:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1000 \\ 3x_1 + 6x_2 = 2400 \end{cases}$$

وبحلها نجد أن $x_1 = 400$ و $x_2 = 200$ وهما القيمتان اللتان تجعلان دالة الهدف في أعلى قيمة لها .

شرح الحل الأمثل و التحقق منه من خلال التعويض بإحداثيات الحل في كل من دالة الهدف و قيود المسألة كما هو مبين أدناه:

. دالة الهدف: $MaxZ = 20x_1 + 30x_2$

$$= 20(400) + 30(200) = 14000$$

. القيد الأول: $2x_1 + x_2 \leq 1000$

$$2(400) + 200 \leq 1000$$

$$1000 \leq 1000$$

وعليه ، فان القيد الأول محقق كما أن كمية مادة البلاستيك المتاحة تساوي كمية مادة البلاستيك المستغلة ، وهذا يعني أن هذه المادة قد استغلت بالكامل.

. القيد الثاني: $3x_1 + 6x_2 \leq 2400$

$$3(400) + 6(200) \leq 2400$$

$$2400 \leq 2400$$

وعليه ، فان القيد الثاني محقق كما أن زمن ورشة التصنيع المتاح يساوي الزمن المستغل ، ما يعني ذلك أن زمن ورشة التصنيع قد استغل بالكامل.

. قيد عدم سلبية المتغيرات: محقق هو أيضا حيث قيمة اشارة المتغيرات موجبة : $x_1 = 400$ ، $x_2 = 200$.

وبالتالي، فان هذا الحل مقبول نظرا لتحقيقه جميع قيود المسألة من جهة و تعظيمه للأرباح من جهة أخرى.

ملاحظات:

1.يسمى القيد الذي استغل طاقته بالكامل بالقيد المشبع(contrainte saturée) و الذي يمر بالحل الأمثل ، أما القيد الذي لم يستغل طاقته بالكامل بالقيد غير المشبع (contrainte non saturée) ، و التفرقة بينهما يفيد المسير في اتخاذ القرارات المتعلقة بالإجابة على السؤالين التاليين:

. ماهي الطاقات أو الموارد الواجب زيادتها أو الحصول على كميات اضافية منها؟

. ماهي الطاقات أو الموارد الواجب تخفيضها أو ايجاد استعمالات أخرى لها و بأي كمية؟

2. في نقطة الحل الأمثل ليس شرطا الاستغلال الكامل لطاقات موارد القيود ، بل يكفي تحقيق دالة الهدف أي أكبر قيمة في حالة التعظيم و أدنى قيمة في حالة التدنية .

ثانيا. في حالة التخفيض:

تتشابه خطوات حل مسائل التخفيض بالطريقة البيانية مع استخدامها في حل مسائل التعظيم كما سبق الاشارة اليها في الحالة السابقة، الا أن هناك فارقين أساسيين ناتجين عن اختلاف طبيعة كل من داله الهدف والقيود بحيث نتعامل هنا مع دالة من نوع تخفيض و قيود من نوع أكبر من أو يساوي[1]. لذا فان الفارقين يتمثلان في :

- منطقة الحلول الممكنة و التي تقع فوق مستقيمات معادلات القيود (أي على يمين المستقيم).
- الحل الأمثل الذي يتواجد دائما في اقرب نقطة الى الاصل ضمن منطقة الحلول الممكنة لأنها تعطي أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف.

و لتوضيح الفروقات بين استخدام طريقة الحل البياني في حل مسائل التعظيم و مسائل التخفيض سنعتمد على المثال التوضيحي السابق المتعلق بمسألة تخطيط الانتاج في حالة التخفيض:

مثال:

كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

حيث: X_1: عدد الكيلوغرامات الواجب انتاجها من العلف M

X_2 : عدد الكيلوغرامات الواجب انتاجها من العلف N

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 4x_2$$

قيد العنصر A: $0.1x_1 \geq 0.4$

قيد العنصر B: $0.1x_2 \geq 0.6$

قيد العنصر C: $0.4x_1 + 0.2x_2 \geq 2$

قيد العنصر D: $0.5x_1 + 0.7x_2 \geq 3.5$

شرط عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

تمثيل كل قيد بخط مستقيم: وذلك من خلال ايجاد النقاط الممثلة لكل قيد بنفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم(للتخلص من الفاصلة قمنا بضرب طرفي القيد في عشرة)

$X_1=4$ هو خط مستقيم موزي للمحور العمودي.

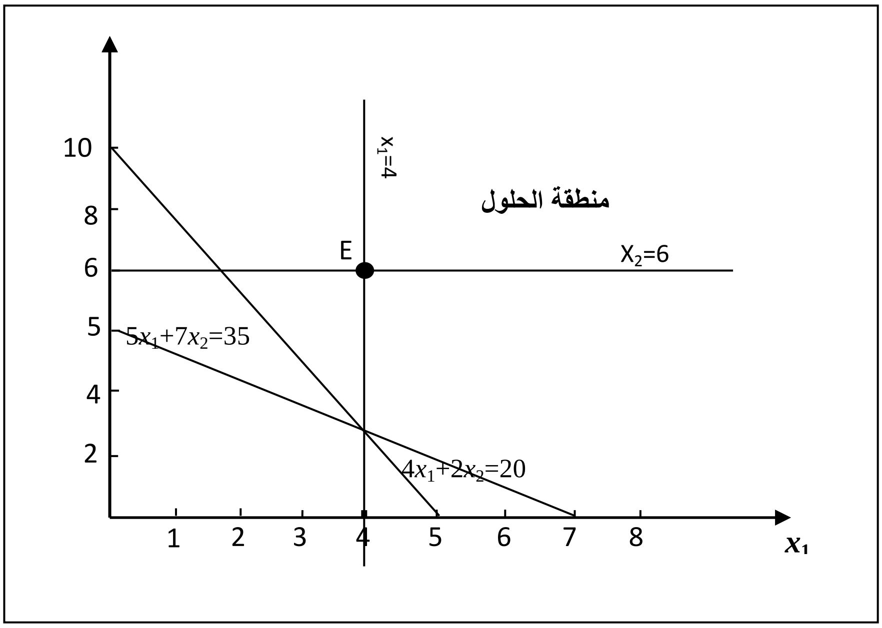
$X_2=6$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي

$5x_1 + 7x_2 = 35$	
x_1	x_2
0	5
7	0

$4x_1 + 2x_2 = 20$	
x_1	x_2
0	10
5	0

[1] محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، **بحوث العمليات و تطبيقاتها في ادارة الاعمال** ،ط1، دار الوراق، الاردن، 2004، ص29

رسم القيود على المعلم : من خلال التوصيل ما بين النقاط المستخرجة ، ثم تحديد مجال الحل لكل قيد و التي تنحصر بين الخط المستقيم صعودا الى الأعلى على اعتبار ان اشارة القيود من نوع (≥)



تحديد منطقة الحلول الممكنة: تمثل المنطقة المضللة وغير المحددة من الأعلى اذ تحددت بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل لكون المتراجحات من نوع أكبر من أو يساوي ومن ثم يوجد عدد غير منته من الحلول في هذه المنطقة.

ايجاد الحل الأمثل: كما نلاحظ في الرسم، يقع الحل الامثل على الحدود الداخلية لمنطقة الحلول الممكنة الغير محددة . والتي يمكن تحديدها بالنقطة E التي يمكن تحديد احداثياتها مباشرة من الرسم و المتمثلة في $x_1=4$و $x_2= 6$

وبالتالي، فان عدد الكيلوغرامات الواجب انتاجها من العلف Mهي 4كغ و من العلف Nبحيث تكون التكلفة في حدها الأدنى بمقدار 64وحدة نقدية .

II. الحالات الخاصة في الطريقة البيانية :

يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء ايجاد الحل بالطريقة البيانية منها [1] :

- . تعدد الحلول المثلى.
- . عدم وجود حلول.
- . القيد الزائد عن الحاجة.
- . الحلول غير المحددة.

[1] اليمين فالته، **بحوث العمليات**،ط1، ايتراك للنشر و التوزيع، مصر، 2006، ص ص 38،40

1. تعدد الحلول المثلى:

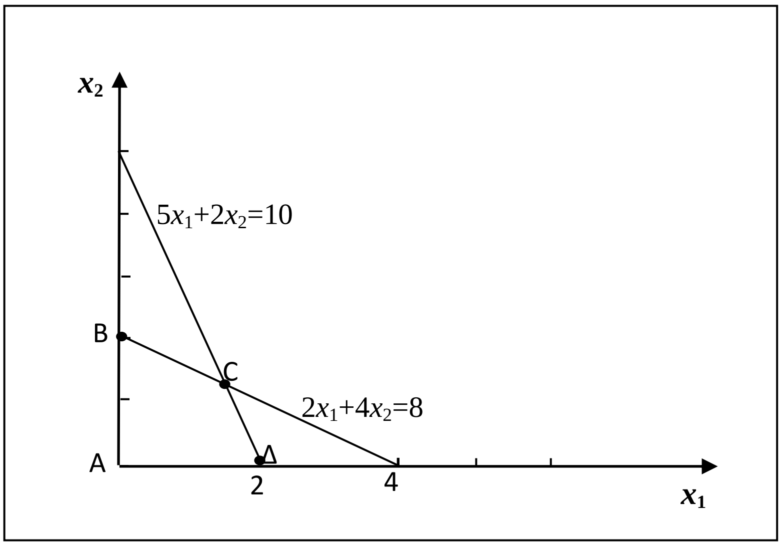
عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تخفيض. تسمى هذه الحالة بالحلول البديلة حيث تمنح لمتخذ القرار مجالا واسعا للاختيار وفقا لما يراه مناسبا.

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MaxZ = 5x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ X_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

بحل هذه المسألة بيانيا كما سبقت الاشارة اليه ، نتوصل الى الرسم البياني و جدول منطقة الحلول الممكنة التاليين:



قيمة دالة الهدف	احداثيات النقاط	النقاط
$MaxZ_A=0$	o :($x_1=0$, $x_2=0$)	**A**
$MaxZ_B=20$	**A**:(**$x_1=0$, $x_2=2$**)	**B**
$MaxZ_C=20$	**B**:(**$x_1=1.5$, $x_2=1.25$**)	**C**
$MaxZ_D=10$	C:($x_1=2$, $x_2=0$)	D

يلاحظ من الجدول أنه عند تعويض قيم النقطتين C،B في دالة الهدف فانهما يعطيان نفس القيمة (MaxZ=20) ، ما يعني أن المسألة تحتوي على أكثر من حل أمثل ، ويعود السبب في ذلك أم دالة الهدف تكون موازية لأحد قيود المسألة.

2.عدم وجود حلول:

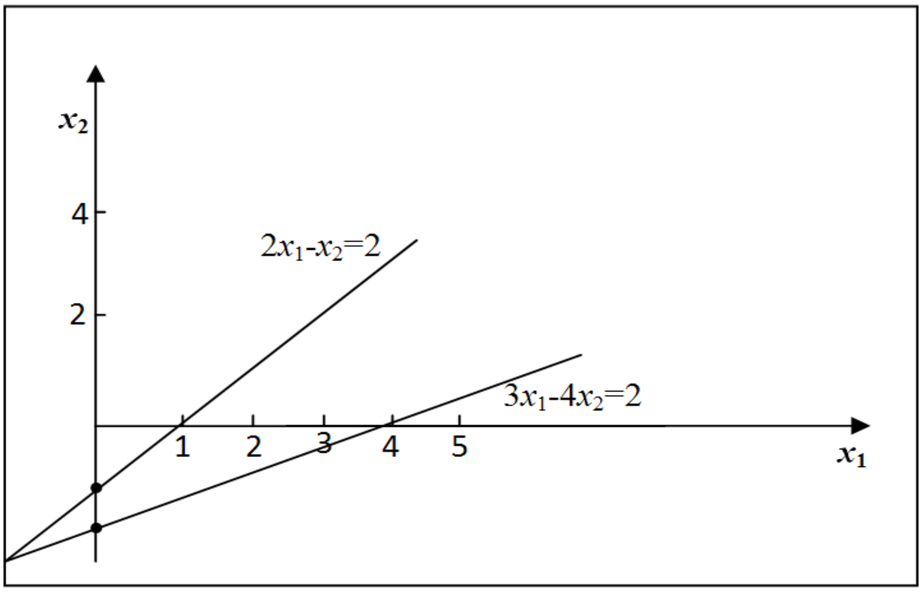
قد يحدث أن لا نتمكن أصلا من تحديد منطقة الحلول الممكنة نتيجة لتضارب في قيود البرنامج ، و المثال التالي يبين ذلك:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max}Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ X_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

من خلال الحل البياني لهذه المسألة ، نلاحظ أن القيدين متعاكسين ولا يتقاطعا نهائيا ، وبذلك لا نستطيع الحصول على منطقة الحلول الممكنة . و اذا حدث و أن وقع متخذ القرار في مثل هذه الحالة فعليه اعادة الظر في صياغة النموذج صياغة صحيحة أو اعادة النظر في القيود السابقة.



3.الانحلال:

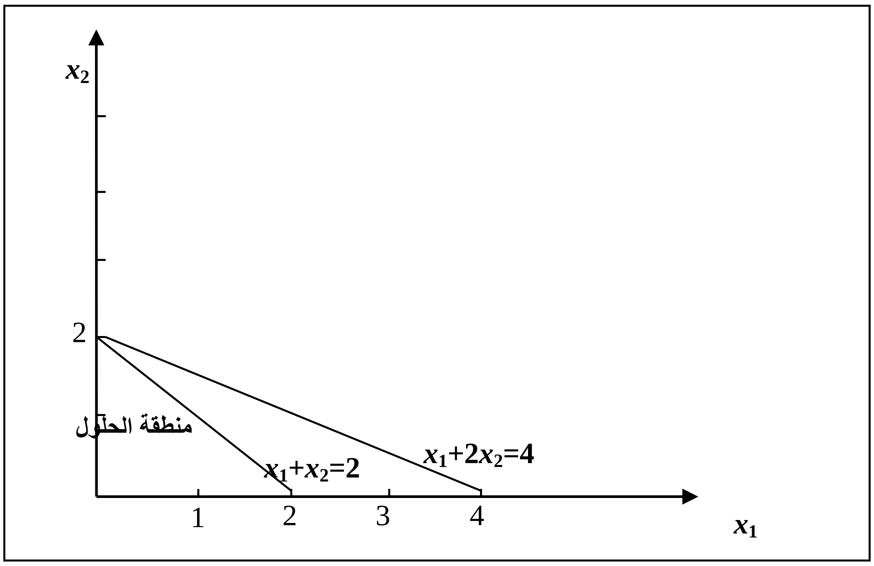
في مثل هذه الحالة،فان أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائدا عن الحاجة اي انه لا يساهم في تحديد نقطة الحل الأمثل ، اذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولا يؤثر بأي حال على الحلول .

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MaxZ = 5x_1 + 9x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ X_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

باستعمال الطريقة البيانية نجد من خلال الرسم البياني أدناه أن النقطة c تحقق الحل الأمثل حيث أن بقاء القيد الأول فقط أو الثاني فقط سيحقق لنا نفس الحل الأمثل . وهذا يعي أن أحد القيدين يعتبر قيدا زائدا .



4. الحلول غير المحددة:

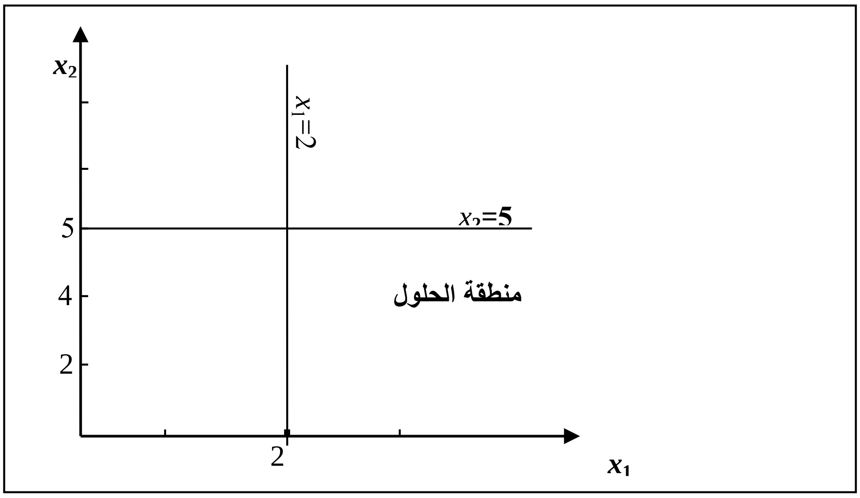
تحدث هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة غير محددة من جهة واحدة على الاقل، الأمر الذي سيترتب عنه زيادة في دالة الهدف الى مالا نهاية ومن ثمة استحالة الوصول الى الحل الأمثل، عندئذ يمكن القول أن كلا من منطقة الحلول و القيمة المثلى لدالة الهدف غير محددان. ومن المؤكد أن سبب ظهور هذه الحالة هو عدم مراعاة واحدا أو أكثر من القيود المحددة للنشاط أو أنه لم يتم تقدير كمية الطاقات المتاحة بشكل جيد لأنه يستحيل أن يكون هناك نموذج خطي حقيقي يعطي مالا نهاية من الربح مثلا.

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MaxZ = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ من الرسم البياني أدناه أن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية و هي غير محددة ، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف و بالتالي يمكن أن نقول أن دالة الهدف لانهائية.



III: تقييم الطريقة البيانية :

المزايا: تتميز الطريقة البيانية بـ :

- البساطة و سهولة الاستخدام.
- القدرة على توضيح بعض مفاهيم البرمجة الخطية.

العيوب: يعاب على الطريقة على أنها:

- تستعمل فقط في حالة وجود متغيرين في النموذج ، وهذا لا يتوافق مع الواقع العملي للمسير.
- تفترض الاستغلال التام للطاقات الانتاجية (تحويل المتراجحات الى معادلات).
- تستخلص النتائج على الرسم البياني بصفة تقريبية وغير دقيقة.

الملخص

تعد الطريقة البيانية من الطرق الخاصة لحل مسائل البرمجة الخطية لكونها تصلح فقط عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط حيث أن التمثيل البياني لا يمكن أن يتجاوز السطح المحدد بمحوري الاحداثيات الأفقي و الرأسي .وتتلخص خطواتها في :

- الخطوة الأولى: تمثيل كل قيد بخط مستقيم.
- الخطوة الثانية: رسم القيود على معلم .
- الخطوة الثالثة: تحديد منطقة الحلول الممكنة.
- الخطوة الرابعة: ايجاد الحل الأمثل.

وتتشارك مسائل البرمجة الخطية من نوع التخفيض أو التعظيم في هذه الخطوات، الا أن هناك فارقين أساسيين ناتجين عن اختلاف طبيعة كل من داله الهدف والقيود ، و المتمثلين في :

- تحديد منطقة الحلول.
- ايجاد الحل الأمثل.

كما أن تطبيق هذه الخطوات لا يمكننا من الوصول دائما الى الحل الأمثل (وهي الحالة الطبيعية)، و انما قد نتحصل على احدى الحالات الخاصة و المتمثلة في:

- تعدد الحلول المثلى: الخط الممثل لدالة الهدف يوازي الخط الممثل لأحد القيود.
- الانحلال: وجود قيد فائض لا يؤثر على نقطة الحل الأمثل.
- حلول غير محددة: وجود منطقة حلول ممكنة مفتوحة وبدون نهاية.
- عدم وجود حلول: عدم وجود منطقة حلول ممكنة تحقق جميع القيود.

الفصل الرابع: طريقة السمبلاكس للبرمجة الخطية

La méthode du simplexe

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي انطلاقا من نوع القيود ودالة الهدف.
- ايجاد الحل الأولي للبرنامج الخطي مهما كان نوع مسألة البرمجة الخطية .
- ايجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي مهما كان نوع مسألة البرمجة الخطية.
- التفسير الاقتصادي لمكونات الجدول النهائي للبرنامج الخطي.
- التمييز وحل مختلف الحالات الخاصة لمسائل البرمجة الخطية.

محتوى الفصل:

I: البحث عن الحل الأمثل بطريقة السمبلاكس.

أولا. في حالة التعظيم.

ثانيا. في حالة التخفيض.

II. الحالات الخاصة في طريقة السمبلاكس.

1. تعدد االحلول المثلى.
2. عدم وجود حلول.
3. الانحلال(عدم الانتظام)
4. الحلول غير المحددة

الملخص

تمهيد:

كما لاحظنا في الفصل السابق ، أن الطريقة البيانية تستخدم لمعالجة المشكلات ذات المتغيرين ، وأن دخول متغير ثالث يتطلب استخدام مستوى ثلاثي الأبعاد مما يعقد استعمال هذه الطريقة، و أن زيادة عدد المتغيرات لأكثر من ثلاثة يجعلها غير ملائمة لمعالجة وحل المشكلات ، في حين نلاحظ أن واقع المشكلات التي تواجهها المؤسسات تتصف بالتعقيد مما يجعلها بحاجة الى عدد كبير من القيود و المتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند اتخاذ القرار. لذلك كان لابد من تطبيق طريقة أخرى تكون ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات فيها ، تعرف بطريقة السمبلاكس (méthode du simplexe) أو بالطريقة المبسطة التي سيتم تناولها بشيء من التفصيل.

I: البحث عن الحل الأمثل بطريقة السمبلاكس:

ان البدايات التاريخية لتطبيق طريقة السمبلاكس تعود الى الجهود المبذولة من قبل العالم George Dantzing عام 1947، وهي عبارة عن خوارزمية تبحث عن الحل الأمثل بطريقة متدرجة بدءا من الحل الممكن الأولي وصولا الى الحل النهائي الذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده على الاطلاق، من خلال فحص ذروات منطقة الامكانات بشكل متسلسل و باستخدام مفاهيم رياضية بسيطة وثابتة ، معتمدة بذلك على قاعدة الطريقة البيانية التي تنص على أن أي حل لمسألة البرنامج الخطي سيكون على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة فقط.

ويمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس في الخطوات الأربع التالية:[1]

- ✓ تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري
- ✓ ايجاد الحل الأولي الممكن.
- ✓ اختبار أمثلية الحل.
- ✓ تحسين الحل الى غاية بلوغ الحل الأمثل.

وكل خطوة من هذه الخطوات تتم وفق عدة عمليات حسابية في جداول تسمى بجداول السمبلاكس ذات الشكل العام التالي:

			معاملات دالة الهدف (C_j)
C_k	V	b_i	متغيرات النموذج (X_i, e_i, A_i)
معاملات دالة الهدف المقابلة للمتغيرات الاساسية	المتغيرات الاساسية المجهولة	كمية الموارد	مصفوفة القيود (a_{ij})
قيمة دالة الهدف: $Z = \sum C_k\, b_i$			سطر التقييم: $\Delta C = \sum C_k\, a_{ij} - c_j$

[1] Michel Nedzela, opcit, pp145 ;148

ولتبسيط خطوات ايجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلاكس سنعمل على توضيحها وفقا لنوعا دالة الهدف لمسائل البرمجة الخطية:

أولا. في حالة التعظيم:

سنوضح خطوات تطبيق طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم انطلاقا من المثال العددي الذي استخدم في شرح الطريقة البيانية ، رغبة في مقارنة النتيجة المترتبة عن هاتين الطريقتين :

مثال : كان البرنامج الخطي هو:

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 2400 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري**

يتم ذلك من خلال تحويل جميع المتراجحات الى معادلات بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة تسمى بمتغيرات الفجوة (**Les variables d'écart**) الى الطرف الأيسر للمتراجحات (أي الى الطرف الأقل من المتراجحة لكي تتحول الى معادلة) ، و التي تعبر اقتصاديا عن الطاقة العاطلة أو غير المستغلة حيث أن عائدها يساوي الصفر (أي أن قيمتها في دالة الهدف معدومة). يرمز لها بالرمز e. وعليه يصبح النموذج المعياري لهذه المسألة بالشكل التالي:

$$MaxZ = 20\,x_1 + 30\,x_2 + 0\,e_1 + 0\,e_2$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + \mathbf{e_1} = 1000 \\ 3\,x_1 + 6\,x_2 + \mathbf{e_2} = 2400 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ e_1,\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية: ايجاد الحل الأولي الممكن**

يقصد بها اعداد جدول الحل الأولي من خلال تنظيم بيانات النموذج المعياري في حالة التعظيم كما هو مبين في الشكل التالي ، مع مراعاة أن تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساسية أما متغيرات القرار فتكون خارج خانة المتغيرات الأساسية(خارج الاساس) :

جدول الحل رقم **1**:

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	e_1	1000	2	1	1	0
0	$\mathbf{e_2}$	2400	3	**6**	0	1
	Z= 0		-20	**-30**	0	0

كما نلاحظ من الجدول أعلاه أنه يناظر نقطة الأصل في طريقة الحل البياني ، وهي الحالة التي تعبر عن عدم وجود أي انتاج (أي $x_1=0,\ x_2=0$)، وبالتالي لم يتم تحقيق أي ربح.

- **الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية**

يتحقق شرط الأمثلية في مسائل التعظيم Max عندما تكون جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة (أي $\Delta C\geq0$). ووجود قيمة سالبة في هذا السطر يعني أن هناك امكانية لتحسين الحل أي الانتقال من حل مقبول الى آخر أكثر قبولا و اقترابا من الحل الأمثل بهدف زيادة قيمة دالة الهدف .وفي مثالنا نلاحظ أن سطر التقييم للجدول الأولي يضم أكثر من قيمة سالبة، ما يعني امكانية تحسين الحل من خلال اعداد جدول جديد (ثاني) يمثل حلا محسنا

- **الخطوة الرابعة: تحسين الحل**

للقيام بهذه الخطوة ، يتطلب الأمر تحديد ثلاثة عناصر و المتمثلة في:

✓ المتغيرة الداخلة(variable entrante): هي تلك المتغيرة خارج الأساس التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها في حالة التعظيم عن طريق اختيار **أقل قيمة سالبة من قيم سطر التقييم** (أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) . وحسب مثالنا هذا فان x_2 تمثل المتغيرة الداخلة ، و يسمى عمودها **بعمود المحور**.

✓ المتغيرة الخارجة (variable sortante) : هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس يتم تحديدها من خلال قسمة عناصر عمود الثوابت (b_i) على عناصر عمود المتغيرة الداخلة (a_{ijk}) و اختيار **أصغر حاصل قسمة موجب** لأنه يحقق جميع قيود المسألة أي:

$\mathbf{Min\ b_i/\ a_{ijk}}$ حيث تشير k الى عمود المتغيرة الداخلة

و السطر الذي يحقق تلك النتيجة يسمى **بسطر المحور**. وعليه فان:

$$\mathrm{Min}\{1000/1=1000,\ 2400/6=400\}=400$$

وهذا يعني أن e_2 تمثل المتغيرة الخارجة التي ستحل مكانها المتغيرة الداخلة x_2

✓ نقطة المحور(pivot): هي نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة. وكما هو واضح فان نقطة المحور هي الرقم 6 في مثالنا.

وبناءا على تحديد العناصر الثلاثة السابقة يمكن تشكيل جدول سمبلاكس جديد كما يلي:

✓ قسمة عناصر سطر المحور على نقطة المحور فنحصل على سطر x_2 ا كما يلي:

$$x_2 = 400 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0 \quad 1/6$$

✓ جعل كل عناصر عمود المحور أصفارا ماعدى نقطة المحور.

✓ حساب بقية عناصر المصفوفة و كذلك الثوابت(b_i) بالعلاقة التالية:

القيمة الجديدة للعنصر = القيمة القديمة للعنصر –[(عنصر سطر المحور× عنصر عمود المحور)÷ نقطة المحور]

وفقا لهذه العلاقة فان قيم السطر الأول الجديد كما يلي:

$e_1 = 600 \quad 3/2 \quad 0 \quad 1 \quad -1/6$

وبالتالي نسجل تلك النتائج في جدول الحل الثاني الموالي ، كما نعيد حساب قيمة كل من Z و Δ C :

جدول الحل رقم2:

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	$\mathbf{e_1}$	600	**3/2**	0	1	-1/6
30	$\mathbf{x_2}$	400	½	1	0	1/6
Z= 12000			**-5**	0	0	5

نلاحظ أن الحل المتوصل اليه في الجدول الثاني قد تحسن بحيث انتقلت قيمته من 0 الى 12000 ، وهو نفس الحل المتوصل اليه بطريقة الرسم البياني الذي يظهر عند النقطة A . وهذا الحل يشير الى أن المؤسسة بإمكانها انتاج 400وحدة من x_2 وعدم انتاج أي وحدة من x_1 (لأنها لم تظهر في عمود V) من أجل تحقيق ربح قدره 12000وحدة نقدية. و أما متغيرة الفجوة e_1 فتبين أن عدد الوحدات غير المستخدمة من مادة البلاستيك هو 600وحدة ، في حين متغيرة الفجوة e_2 هو متغير غير أساسي لذا كانت قيمته تساوي الصفر ، ما يعني أن زمن ورشة التصنيع قد استغل بالكامل.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن : هل توصلنا الى الحل الأمثل؟

والجواب هو أنه مادامت هناك قيم أقل من الصفر في سطر التقييم فان الحل الأمثل لم يتحقق بعد ، مما يتطلب الأمر اجراء خطوة أخرى لتحسينه باتباع نفس الاجراءات السابقة حيث تكون x_1 هي المتغيرة الداخلة و e_1 المتغيرة الخارجة في حين تمثل القيمة 3/2 نقطة المحور . و بذلك يكون الجدول الثالث بعد اجراء التحويلات المشابهة للخطوة السابقة كما يلي:

جدول الحل رقم3:

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	x_1	400	1	0	2/3	-1/9
30	$\mathbf{x_2}$	200	0	1	-1/3	2/9
Z= 14000			**0**	**0**	**10/3**	**40/9**

نلاحظ أن جميع عناصر سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر ، ما يعني أنه لا توجد امكانية لتحسين الحل ،لذلك فان هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل حيث تكون النتائج المحصل عليها كما يلي:

$$\mathbf{x_1 = 400\ ,\ x_2 = 200\ ,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0\ ,\ Z = 140000}$$

أي أنه سيتم انتاج 400وحدة من لعب الأطفال نوع A و 200وحدة من لعب الأطفال نوع B لتحقيق ربح أعظمي قدره 14000وحدة نقدية ،و هذا في ظل استغلال تام لمادة البلاستيك و زمن ورشة التصنيع (لأنه لا تظهر أي متغيرة الفجوة في عمود V) .و هذه النتيجة نفسها المتوصل اليها في الطريقة البيانية و التي تمثلها النقطة B

ويمكن التحقق من الحل المتوصل اليه من خلال التعويض في القيود و دالة الهدف:

. دالة الهدف: $MaxZ = 20\,x_1 + 30x_2 \Rightarrow Maxz = 20\times400 + 30\times200 = 14000$

. القيد الأول محقق: $2x_1+x_2\leq1000 \Rightarrow 2\times400+200= 1000$

. القيد الثاني محقق : $3x_1+6x_2\leq2400 \Rightarrow 3\times400+ 6\times200= 2400$

. شرط عدم السلبية محقق: فقيم كل من x_1, x_2 في الحل النهائي موجبة أما قيم كل من e_1, e_2 فهي مساوية للصفر لأنها غير موجودة في الحل النهائي.

ملاحظات

1. تكون قيمة المتغير الأساسي سواء كان متغير فجوة أو متغير قرار في سطر التقييم لجداول السمبلاكس معدومة .

2. ان دخول أي متغير للحل أثناء عملية التحسين لا يعني بالضرورة بقاؤه في الحل الى غاية الوصول الى الحل الأمثل ، بل قد يصبح متغير خارجي في أية عملية تحسين لاحقة.

3. عند اختيار أحد المتغيرات الداخلة أو الخارجة ، قد نجد قيمتين أو أكثر متساوية ، عندئذ يتم الاختيار بطريقة عشوائية. مع العلم أن احدى القيم ستؤدي الى الحل بشكل سريع.

4. لا تقتصر معطيات سطر التقييم على ابراز أمثلية الحل من عدمها ، بل تمتد الى الافادة ببعض المعلومات المفيدة في التوقع بأثر التغيرات التي تحدث في المعطيات الرئيسية للمسألة على النتيجة النهائية(وهذا سيتم معالجته في الفصل الموالي)

ثانيا. في حالة التخفيض:

تتشابه خطوات حل مسائل التخفيض بطريقة السمبلاكس مع استخدامها في حل مسائل التعظيم كما سبق الاشارة اليها في الحالة السابقة، الا أن هناك فارقين أساسيين ناتجين عن اختلاف طبيعة كل من داله الهدف والقيود بحيث نتعامل هنا مع دالة من نوع تخفيض و قيود من نوع أكبر من أو يساوي. لذا فان الفارقين يتمثلان في[1] :

- كتابة الصيغة المعيارية للنموذج الرياضي.
- اختبار أمثلية الحل.

[1] Michel Nedzela, opcit, p157

ولتوضيح هذه الفروقات سنعتمد على المثال التالي كحالة تطبيقية:

مثال:

قررت مؤسسة وطنية شراء نوعين من الآلات حيث تكلفة شراء النوع الأول و الثاني على الترتيب هو 3000دج و 1000دج. يمكن لآلة من النوع الأول أن تنتج 60وحدة يوميا و 40وحدة بالنسبة للآلة من النوع الثاني ، كما تريد المؤسسة شراء على الاقل 3آلات من النوع الثاني وهذا لتحقيق انتاج يومي لا يقل عن 100وحدة.

المطلوب: تحديد عدد الآلات الواجب شراؤها من النوعين من لأجل تحقيق أقل تكلفة.

الحل:

قبل تطبيق خطوات الحل بطريقة السمبلاكس، فان النموذج الخطي لهذه المسألة يمكن كتابته بالشكل التالي:

متغيرات القرار: x_1: عدد الآلات من النوع الأول الواجب شراؤها

x_2: عدد الآلات من النوع الثاني الواجب شراؤها

النموذج الخطي:

$$MinZ= 3000x_1 + 1000\, x_2$$

$$\begin{cases} 60\, x_1 + 40x_2 \geq 2000 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1\, ,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الأولى: تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري**

يتم ذلك من خلال تحويل جميع المتراجحات الى معادلات بطرح متغيرات فجوة من الطرف الأكبر (أي الطرف الأيسر للمتراجحة) مع اضافة متغيرات جديدة تدعى بالمتغيرات الاصطناعية (variables artificiel) يرمز له بالرمز A و وجوب اظهارها في دالة الهدف بإشارة موجبة و بمعامل M وهي قيمة كبيرة جدا , وهذا لكي تتحقق مبادئ البرمجة الخطية . اذ أن تحويل القيد ≥ الى الصيغة المعيارية بطرح فقط متغيرة الفجوة يخل بمبدأ عدم سلبية المتغيرات في الحل الأولي الذي تكون فيه قيمة المتغيرات x_n مساوية للصفر، وفي هذه الحالة تكون قيمة متغيرة الفجوة تساوي قيمة سالبة ، وهذا أمر غير منطقي.

وبناءا على ذلك يصبح النموذج المعياري لمثالنا على الشكل التالي:

$$MinZ= 3000x_1 + 1000\, x_2 + 0\, e_1 + MA_1 + 0\, e_2 + MA_2$$

$$\begin{cases} 60\, x_1 + 40x_2 - e_1 + A_1 = 2000 \\ x_2 - e_2 + A_2 = 3 \\ x_1\, ,\, x_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية: ايجاد الحل الأولي الممكن**

يتم تكوين جدول الحل الأولي بنفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم مع وجود فارق أساسي يتمثل في أن متغيرات الحل الأساس تصبح المتغيرات الاصطناعية بدلا من متغيرات الفجوة.

و يكون الحل الأولي لنموذج حالتنا كما يلي:

جدول الحل رقم 1:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	A_1	e_2	A_2
M	A_1	100	3	2	-1	1	0	0
M	$\mathbf{A_2}$	3	0	**1**	0	0	-1	1
Z= 103M			3M-3000	**3M-1000**	-M	0	-M	0

كما نلاحظ من الجدول أعلاه، أنه عندما $x_1=x_2=0$ و المؤدية الى حل أولي أساسي بـ $A_1=100$ و $A_2= 3$ يعطي قيمة لدالة الهدف قدرها 103M ، وهي تكلفة باهضة للمؤسسة على اعتبار أن رقم M كبير جدا.

- **الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية**

ان الوصول الى الحل الأمثل في مسائل التخفيض مشروط بأن تكون جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة (أي$\Delta C\leq 0$).. وبما أن قيم سطر التقييم في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة ، فهذا يعني عدم تحقق الحل الامثل ، لذلك نتابع البحث عن الحل الأمثل من خلال عملية التحسين الموالية.

- **الخطوة الرابعة: تحسين الحل**

لاجراء عملية التحسين الهادفة الى تخفيض التكاليف عن طريق اخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل.، يتطلب الأمر تطبيق نفس القواعد التي تم شرحها في حالة التعظيم مع وجود فارق وحيد و المتمثل في تحديد المتغيرة الداخلة و التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم. فيكون بذلك:

- ✓ X_2 المتغيرة الداخلة لأن القيمة 3M-1000 هي الأكبر في سطر التقييم.
- ✓ A_2 المتغيرة الخارجة لأن:

$$\text{Min } b_i/ a_{ijk} = \text{Min}\{ 100/2, 3/1\}=3$$

- ✓ القيمة 1 هي نقطة المحور لانها تمثل نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة.
- ✓ قيم سطر المحور في الجدول الجديد تصبح كالتالي:

$$X_2= 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0$$

- ✓ عمود المحور في الجدول الجديد تصبح قيمه كلها أصفارا ما عدى نقطة المحور .
- ✓ بقية قيم المصفوفة تحسب بالعلاقة السابقة التي تطبيقها في حالة التعظيم ، أي يصبح سطر A_1 هو:

$$A_1= 94 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 0$$

وبموجب النتائج السابقة نتحصل على الجدول التالي:

جدول الحل رقم2:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	**x_1**	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
M	**A_1**	94	3	0	-1	1	2	0
1000	X_2	3	0	1	0	0	-1	1
Z= 94M+3000			3M-3000	**0**	-M	0	2M-1000	0

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الحل قد تحس بحيث انخفضت دالة التكاليف من القيمة 103M الى 49M+3000 ، و لكنه لم يتم بعد الوصول الى الحل الأمثل نظرا لوجود قيم موجبة في سطر التقييم ، و بالتالي يجب تحسينه بإدخال X_1 محل A_1 وفق القواعد المعمول بها سابقا . وباجراء التحويلات اللازمة نحصل على جدول الحل الثالث بالشكل التالي:

جدول الحل رقم3:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	**e_2**	A_2
3000	**x_1**	94/3	1	0	-1/3	1/3	2/3	0
1000	X_2	3	0	1	0	0	-1	0
Z= 97000			0	0	-1000	1000-M	1000	-M

نلاحظ من خلال هذا الجدول أنه يتم بعد الوصول الى الحل الأمثل نظرا لوجود قيمة موجبة في سطر التقييم ، و بالتالي يجب تحسينه بإدخال e_2 محل x_1 وفق القواعد المعمول بها سابقا . وباجراء التحويلات اللازمة نحصل على جدول الحل الرابع بالشكل التالي:

جدول الحل رقم4:

			3000	1000	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
0	e_2	47	3/2	0	-1/2	½	1	0
1000	X_2	50	3/2	1	-1/2	½	0	0
Z= 50000			**-1500**	**0**	**-500**	**500-M**	**0**	**-M**

واضح أن الحل المتوصل اليه هو الحل الأمثل لأن جميع قيم $\Delta C \leq 0$ اذ لا يمكن ايجاد أية قيمة أخرى للمغيرات تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف و تحترم في نفس الوقت جميع القيود . و يتلخص هذا الحل في:

. عدد آلات النوع الثاني الواجب شراؤها هو 50آلة.

. عدم شراء أي آلة من النوع الأول.

. أدنى تكلفة تتحملها المؤسسة هو 50000دج.

ملاحظات

1. عندما تضاف المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف من نوع تعظيم ، تكون معاملاتها بإشارة سالبة (أي $-M$)

2. عندما تخرج المتغيرات الاصطناعية من الحل ، فإنها لن تعود اليه مرة أخرى بسبب معاملاتها الكبيرة التي تعمل عكس دالة الهدف.

3. اذا خرجت المتغيرة الاصطناعية من خانة الأساس يمكن الاستغناء عن حساب عناصر عمودها لأنها لا يمكن أن تدخل الى الأساس مرة أخرى.

جدول رقم 01 :خلاصة خطوات حل مسائل التعظيم و التخفيض بطريقة السمبلاكس:

	حالة التعظيم	حالة التخفيض
النموذج النظامي	القيود من شكل أقل من أو يساوي	القيود من شكل أكبر من أو يساوي
النموذج المعياري	اضافة متغيرة الفجوة الى الطرف الأيسر من القيد، وتكون معاملها صفر في الة الهدف	نطرح متغيرة الفجوة من القيد وتكون معاملها صفر في دالة الهدف، مع اضافة متغيرة اصطناعية في القيد وتكون معاملاتها $+M$ في دالة الهدف
الحل الأمثل	جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة	جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة
المتغيرة الداخلة	أقل قيمة سالبة(أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) من قيم سطر التقييم	أكبر قيمة موجبة من قيم سطر التقييم
المتغيرة الخارجة	أصغر قيمة موجبة ناتجة عن قسمة عمود الثوابت على عمود المتغيرة الداخلة	
نقطة المحور	نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة	

ملاحظة هامة: لا يختلف حل النموذج المختلط بطريقة السمبلاكس عن حل النموذج النظامي الا فيما يتعلق بمعالجة أنواع القيود الأخرى التي قد يتضمنها النموذج المختلط ، والتي يمكن أن نلخص القواعد السابقة و الجديدة في الجدول التالي:

جدول رقم 02 : قواعد تحويل أنواع القيود الى معادلات

نوع القيد	الاجراء	دالة Max	دالة Min
$\leq$	+e	0^e	0^e
$\geq$	-e + A	0e – MA	0e + MA
=	+A	-MA	+MA

ولشرح هذه الحالة نأخذ المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MinZ= x_1 + 3\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \,,\, x_2 \geq \end{cases}$$

حل هذا النموذج المختلط يأخذ نفس خطوات حل أي نموذج خطي ، وذلك كما يلي:

النموذج المعياري :

$$MinZ= x_1 + 3\,x_2 + 0\,e_1 + MA_1 + 0\,e_2 + MA_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + A_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 6 \\ x_2 + A_2 = 3 \\ x_1 \,,\, x_2 \,,\, e_1, e_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

			1	3	0	M	0	M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	A_1	e_2	A_2
M	A_1	4	1	1	-1	1	0	0
0	e_2	6	2	1	0	0	1	0
M	A_2	3	0	1	0	0	0	1
Z= 7M			M-1	2M-3	-M	0	0	0
M	A_1	1	1	0	-1	1	0	-1
0	e_2	3	2	0	0	0	1	-1
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1
Z= M +9			M-1	0	-M	0	0	-2M+3
1	x_1	1	1	0	-1	1	0	-1
0	e_2	1	0	0	2	-2	1	1
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1
Z=10			**0**	**0**	**-1**	**1-M**	**0**	**2-M**

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن قيم سطر التقييم جميعها معدومة أو سالبة، لذا فان شرط الأمثلية قد تحقق.

II. الحالات الخاصة في طريقة السمبلاكس:

ان ما تناولناه سابقا حول الحالات الخاصة في الطريقة البيانية ، يمكن توضيحه أيضا في طريقة السمبلاكس وذلك كما يلي بالاعتماد على نفس الأمثلة:[1]

1. تعدد الحلول المثلى(الحلول البديلة):

تحدث هذه الحالة عندما يمكن الحصول على أكثر من حل ، ويتحقق ذلك عندما يكون أحد المتغيرات غير الأساسية (المتغيرات لم تدخل الحل) يأخذ القيمة صفر في سطر التقييم للجدول الأخير من جداول السمبلاكس . ويمكن الحصول على الحل البديل باعتبار ذلك المتغير متغيرة داخلة و تكوين جدول سمبلاكس جديد بنفس القواعد السابقة، والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلاكس:

$$\mathrm{Max}Z = 5x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ X_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

بحل هذه المسألة كما سبقت الاشارة اليه ، نتوصل الى الجدول النهائي التالي:

جدول الحل الأمثل :

			5	10	0	0
c_k	V	b_i	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
10	X_2	2	½	1	1/4	0
0	e_2	6	4	0	-1/2	1
Z= 20			**0**	**0**	**5/2**	**0**

نلاحظ من الجدول أعلاه أن توليفة الحل تتمثل في : $x_2=2\ ;\ e_2=6\ ,\ Z=20$ ، وأن x_1 متغيرة لم تدخل الحل الا أن قيمتها في سطر التقييم تساوي الصفر ، ما يعني ذلك وجود حل بديل و الذي نتحصل عليه في الجدول التالي:

[1] محمود العبيدي وآخرون، مرجع سابق،ص ص 47،58

جدول الحل البديل:

			5	10	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
10	X_2	5/4	0	1	5/16	0
5	x_1	3/2	1	0	-1/8	1
Z= 20			**0**	**0**	**40/16**	**0**

نلاحظ أنه قد توصلنا الى الحل الأمثل بنفس قيمة دالة الهدف لكن بتوليفة جديدة و المتمثلة في : $x_2=5/4$, $x_1=3/2$,

ملاحظة: ان عدد الحلول البديلة يكون حسب عدد الأصفار في سطر تقييم الجدول النهائي للمتغيرات التي لم تدخل الحل (أي لا تكون ضمن عمود V)

2. عدم وجود حلول:

يمكن أن نحدد هذه الحالة بطريقة السمبلاكس عند بقاء المتغير الاصطناعي في جدول الحل الأمثل كمتغير في الحل الاساسي ، ويمكن توضيحها في المثال التالي:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MaxZ= 2x_1+ x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ X_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل :

			2	1	0	0	-M
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	e_2	A_1
2	X_1	1	1	-1/2	½	0	0
-M	A_1	9	0	-5/2	-3/2	-1	1
Z= 2-9M			**0**	**5/2M-2**	**3/2M+1**	**M**	**0**

من الجدول نلاحظ بقاء المتغير الاصطناعي A_1 في عمود المتغيرات الأساسية ، ما يجعل قيمة الدالة غير محددة وسالبة بقدر كبير($Z= 2-9M$) رغم أن الدالة من نوع التعظيم، أي ليس لها معنى اقتصادي. وبذلك نقول أن للمسألة ليس لها حل.

3. الانحلال(أو عدم الانتظام):

تظهر هذه الحالة عندما يكون واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي قيمته صفر ، وقد يكون ذلك في أحد مراحل الحل أو يستمر الى نهاية الحل أو يختفي قبل الوصول الى الحل الامثل . و في حالة استمرار الانحلال الى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف. كما يمكن الاستدلال عن حالة الانحلال عندما تتساوى ناتج قسمة عمود b_i على قيم عمود المتغيرة الداخلة لأكثر من متغير ، ويتم الاختيار عشوائيا . والمثال التالي يبين ذلك:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلاكس:

$$MaxZ= 5x_1+ 9x_2$$

$$\begin{cases} x_1+2\,x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

بتطبيق خطوات الحل لطريقة السمبلاكس نتوصل الى جداول الحل التالية:

			5	9	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	e_1	4	1	2	1	0
0	$\mathbf{e_2}$	2	1	1	0	1
Z= 0			-5	-9	0	0
9	x_2	2	½	1	½	1
0	$\mathbf{e_2}$	0	½	0	-1/2	1
Z= 18			-1/2	0	9/2	0
9	x_2	2	0	1	1	-1
5	x_1	0	1	0	-1	2
Z=18			**0**	**0**	**4**	**1**

نلاحظ من الجدول الأول من جداول السمبلاكس أنه تم اختيار عشوائيا e_1 كمتغيرة خارجة نتيجة لوجود قيمتين متساويتين . كما نجد أن حالة الانحلال ظهرت في الجدول الثاني من الحل حيث اصبحت قيمة e_2 كمتغير أساسي صفر ، واستمرت حتى نهاية الحل و الوصول الى الحل الأمثل الا أن قيمة دالة الهدف لم تتحسن و بقيت بقيمة 18 في الجدولين الثاني و الثالث. ومن الناحية العملية ، تعني هذه الحالة أن للنموذج الرياضي على الأقل أحد القيود زائدا عن الحاجة(و هذا ما تم اظهاره بالطريقة البيانية).

4. الحلول غير المحددة:

تظهر هذه الحالة عندما لا نجد قيمة موجبة في عمود المتغيرة الداخلة أي أن كل القيم سالبة أو معدومة، و بالتالي يتعذر ايجاد المتغيرة الخارجة لأن حاصل القسمة يكون سالبا أو مساريا لـ ∞ . و يمكن توضيحها كالتالي:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلاكس:

$$MaxZ= 2x_1+ x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

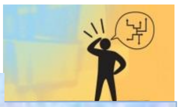
باستخدام طريقة السمبلاكس نحصل على الجدولين التاليين حيث نلاحظ أنه في الجدول الثاني من الحل تمكنا من تحديد المتغير الداخل وهو e_1 الا أننا لم نتمكن من تحديد المتغيرة الخارجة لعدم وجود حاصل قسمة موجبة لقيم عمود b_i على قيم عمود المتغيرة الداخلة حيث كانت القيم اما سالبة أو مساوية لـ ∞.و بالتالي يتعذر علينا اكمال جدول التحسين . لذا نقول ان للمسألة حلول غير منتهية.

			2	1	0	-M	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	A_1	e_2
-M	A_1	2	1	0	-1	1	0
0	e_2	5	0	1	0	0	1
Z= -2M			-M-2	-1	M	0	0
2	x_1	2	1	0	-1	1	0
0	e_2	5	0	1	0	0	1
Z= 4			0	-1	-2	2+M	0

يمكن تلخيص الحالات الخاصة بطريقتي الرسم البياني و السمبلاكس في الجدول التالي:

جدول رقم 03 : الحالات الخاصة بطريقتي الحل البياني و السمبلاكس

الحالات الخاصة	الطريقة البيانية	طريقة السمبلاكس
تعدد الحلول المثلى	الخط الممثل لدالة الهدف يوازي الخط الممثل لأحد القيود	معامل أحد المتغيرات غير الاساسية يساوي صفر في سطر التقييم
الانحلال	وجود قيد فائض لا يؤثر على نقطة الحل الأمثل	واحد أو أكثر من المتغيرات الاساسية يساوي صفر في أحد مراحل الحل أو في المرحلة النهائية
حلول غير محددة	وجود منطقة حلول ممكنة مفتوحة وبدون نهاية	عدم وجود حاصل قسمة موجب لقيم عمود b_i على قيم عمود المتغيرة الداخلة
عدم وجود حلول	عدم وجود منطقة حلول ممكنة تحقق جميع القيود	بقاء المتغير الاصطناعي في جدول الحل الأمثل



الملخص

تعد طريقة السمبلاكس أسلوب رياضي متقدم في حل مشاكل البرمجة الخطية كونها تعالج المشاكل التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات ، وذلك من خلال اعتمادها على عدد من الجداول حيث يتم الانتقال من جدول الى آخر مع تحسين قيمة دالة الهدف في كل مرة الى أن نصل الى الجدول الأخير الذي يعطينا الحل الأمثل . لذلك ، تتلخص خطواتها الأساسية في:

- الخطوة الأولى: تحويل النموذج الخطي الى نموذج معياري
- الخطوة الثانية: ايجاد الحل الأولي الممكن.
- الخطوة الثالثة: اختبار أمثلية الحل.
- الخطوة الرابعة: تحسين الحل الى غاية بلوغ الحل الأمثل.

وتتشارك مسائل البرمجة الخطية من نوع التخفيض أو التعظيم في هذه الخطوات، الا أن هناك فارقين أساسيين ناتجين عن اختلاف طبيعة كل من داله الهدف والقيود ، و المتمثلين في :

- كتابة الصيغة المعيارية للنموذج الرياضي.
- اختبار أمثلية الحل.

كما أن تطبيق هذه الخطوات لا يمكننا من الوصول دائما الى الحل الأمثل (وهي الحالة الطبيعية)، و انما قد نتحصل على احدى الحالات الخاصة و المتمثلة في:

- تعدد الحلول المثلى: معامل أحد المتغيرات غير الاساسية يساوي صفر في سطر التقييم.
- الانحلال: واحد أو أكثر من المتغيرات الاساسية يساوي صفر في أحد مراحل الحل أو في المرحلة النهائية.
- حلول غير محددة: عدم وجود حاصل قسمة موجب لقيم عمود b_i على قيم عمود المتغيرة الداخلة.
- عدم وجود حلول: بقاء المتغير الاصطناعي في جدول الحل الأمثل.

الفصل الخامس :الثنائية و تحليل الحساسية

Dualité et analyse de sensibilité

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- فهم مفهوم الثنائية في البرمجة الخطية فهما صحيحا وجيدا.
- تشكيل برنامج ثنائي انطلاقا من البرنامج الأولي.
- التفسير الاقتصادي للبرنامج الثنائي.
- تحليل حساسية الحل الامثل في حالة تغير أحد مكونات البرنامج الخطي.

محتوى الفصل:

I . الثنائية (la dualité) .

أولا. صياغة البرنامج الثنائي.

ثانيا. اشتقاق الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من البرنامج الأولي.

ثالثا. التفسير الاقتصادي للبرنامج الثنائي.

II. تحليل الحساسية أو ما بعد الأمثلية (Poste Optimale ou L'analyse de sensibilité)

أولا.تحديد مدى الأمثلية.

ثانيا.تحديد مدى الامكانية

الملخص.

تمهيد:

لقد كانت فكرتي الثنائية و تحليل الحساسية من أهم التطورات التي حدثت في البرمجة الخطية ، بحيث أظهر هذا التطور أن لكل مشكلة برمجة خطية هناك مسألة مقابلة تسمى بالمسألة الثنائية التي تمتاز بطبيعتها الرياضية شأنها في ذلك شأن المسألة الأصلية ، وتتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل الى الحل الأمثل عندما يصعب حل المسألة الأصلية و كذا اعطاء حقائق اقتصادية تساعد على تفهم أبعاد المشكلة. أما تحليل الحساسية فيمكن من دراسة مختلف التغيرات التي ستطرأ على الحل الأمثل في حالة تغير مكونات النموذج الخطي و على رأسها كمية الموارد المتاحة التي تتغير على المدى القصير و معاملات دالة الهدف التي تتغير في المدى المتوسط، و هذا راجع لعدم ثبات محيط المؤسسة و تعرضه دائما للتغيير ، مما يتطلب الأمر دراسة و تحليل المجال الذي يبقى فيه الحل أمثلا.

I : الثنائية: (la dualité)

يشير لفظ الثنائية الى وجود : مشكلة برمجة خطية من نوع تعظيم يترافق مع مشكلة برمجة خطية من نوع تخفيض، بمعنى ان مشكلات البرمجة الخطية تكون مزدوجة ، فالمشكلة الأصلية (وهي جميع المسائل التي عالجناها حتى الآن) تدعى بالمشكلة الأولية (problème primal) و المشكلة المناظرة تدعى بالمشكلة الثنائية أو المقابلة (problème dual) ، فاذا كانت المشكلة الأولى تتعلق بتعظيم دالة الهدف فان المشكلة الثنائية ستكون تقليل دالة الهدف بحيث تصاغ عادة من نفس البيانات التي تتضمنها المشكلة الاولى و العكس صحيح.[1] وعليه، فان كل صيغة من هذه الصيغ(صيغة المشكلة الأولية و صيغة المشكلة الثنائية) تحمل تفسيرات معينة يمكن استخدامها لحل مسألة برمجة خطية واحدة بطرق مختلفة بالرغم من أن النتائج و المعلومات التي يتم الحصول عليها من حل مسائل البرمجة الخطية هي متشابهة في كلتا الحالتين.

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: لما يتم استخدام المشكلة الثنائية؟

ان اللجوء الى استخدام المشكلة الثنائية يتضمن فوائد عديدة منها:[2]

- ✓ التوصل الى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان من خلال تقليص خطوات الحل ، أي أن المشكلة الثنائية تستلزم خطوات رياضية أقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحيانا.
- ✓ اجراء تحليل ما بعد الأمثلية و التوصل الى الحل بصورة مختصرة في حالة اضافة قيود جديدة للمشكلة أو اجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الاساسية.
- ✓ اعطاء الكثير من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم ابعاد المشكلة و بخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل.

[1] Amor Farouk Benghezal, opcit, p113

[2] دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات** ، دار اليازوري للنشر و التوزيع، الأردن، 2008، ص 100

لذا ، فان صياغة البرنامج الثنائي وحله بدلا من البرنامج الأولي يعد أمرا حكيما من قبل متخذ القرار, وهذا ما سيتم التطرق اليه في النقاط الموالية:

أولا: صياغة البرنامج الثنائي

سيتم توضيح كيفية تشكيل الصيغة الثنائية وفقا لصيغتي البرامج الخطية ، أي وفقا للصيغة القانونية و الصيغة المختلطة للبرنامج الأولي:

1. ثنائية الصيغة القانونية:[1]

اذا كان البرنامج الأولي في صيغته القانونية التالية :

$$MaxZ = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1,2,\dots\dots\dots, m. \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,\dots\dots\dots, n. \end{cases}$$

فان برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$/ \, MinW = \sum_{i=1}^{m} b_i Yi$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq c_i & j = 1,2,\dots\dots\dots, n. \\ Yi \geq 0 & i = 1,2,\dots\dots\dots, m. \end{cases}$$

وهذه الصيغة يتم الحصول عليها وفق خطوات معينة ، سيتم توضيحها فيما يلي بالاعتماد على المثال العددي الذي استخدم في شرح طريقة السمبلاكس في حالة التعظيم:[2]

$$MaxZ = 20\, x_1 + 30\, x_2$$

$$\begin{cases} 2\, x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3\, x_1 + 6\, x_2 \leq 2400 \\ x_1\, ,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **دالة هدف البرنامج الثنائي:**

✓ **عدد المتغيرات:** يكون عدد قيود البرنامج الأولي مساويا لعدد متغيرات البرنامج الثنائي بحيث نستخدم الرمز Y في الصيغة المقابلة بدلا من X في الصيغة الأولية من أجل التمييز بينهما . فاذا فرضنا أن نموذج مثالنا يحتوي على قيدين فان عدد المتغيرات في النموذج المقابل سيكون اثنان حيث يمثل كل قيد بمتغيرة واحدة ، أي:

---

[1] محمد راتول ، **بحوث العمليات**، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006، ص82

[2] Amor Farouk Benghezal, opcit, p115

$$2x_1 + x_2 \leq 1000 \longrightarrow Y_1$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 2400 \longrightarrow Y_2$$

- ✓ **نوع دالة الهدف:** ان دالة الهدف للبرنامج الثنائي هي عكس دالة الهدف للبرنامج الأولي، فاذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي من نوع تعظيم فإنها تقلب الى نوع تخفيض في النموذج المقابل و العكس صحيح. وحسب مثالنا فان دالة الهدف للبرنامج الثنائي ستكون من نوع Min .
- ✓ **معاملات دالة الهدف:** تمثل قيم الطرف الأيمن لقيود البرنامج الأولي معاملات دالة الهدف لكل متغير في البرنامج المقابل على الترتيب. وعليه، يمكن كتابة دالة الهدف للبرنامج الثنائي بالشكل التالي:

$$\mathbf{MinW = 1000y_1 + 2400y_2}$$

- ▪ **قيود البرنامج الثنائي:**
- ✓ **عدد القيود:** عدد المتغيرات في البرنامج الأولي يكون مساويا لعدد قيود البرنامج المقابل ، و بالتالي فان عدد قيود البرنامج الثنائي لمثالنا سيكون اثنان .
- ✓ **المعاملات الفنية للقيود وثوابتها:** تصبح معاملات دالة الهدف للبرنامج الأولي ثوابت القيود في البرنامج المقابل ، في حين تقلب مصفوفة المعاملات في البرنامج الأولي لتصبح الأعمدة صفوفا في البرنامج المقابل، أي أن معاملات العمود j في النموذج الأولي هي عبارة عن معاملات الصف في النموذج المقابل. وحسب مثالنا تكون كالتالي:

مصفوفة الأولي $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ تصبح مصفوفة الثنائي $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

- ✓ **.اتجاه القيود وعدم السلبية:** اذا كانت القيود في البرنامج الأولي على شكل أصغر من او يساوي فإنها تتغير في البرنامج الثنائي الى أكبر من أو يساوي و العكس صحيح، مع اضافة شرط عدم السلبية للمتغيرات الجديدة.

وبالتالي فان قيود البرنامج الثنائي لمثالنا تكون :

$$\mathbf{2y_1 + 3y_2 \geq 20}$$
$$\mathbf{y_1 + 6y_2 \geq 30}$$
$$\mathbf{y_1, y_2 \geq 0}$$

وبموجب النتائج التي تحصلنا عليها بتطبيق الخطوات الآنفة الذكر ، يمكننا كتابة النموذج الثنائي لمثالنا كما يلي:

النموذج الأولي	النموذج الثنائي
$\text{Max } Z = 20\,x_1+30\,x_2$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \leq 1000 \\ 3x_1+6x_2 \leq 2400 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$	$\text{Min } W = 1000\,y_1+2400\,y_2$ $\begin{cases} 2y_1+3y_2 \geq 20 \\ y_1+6y_2 \geq 30 \\ y_1,\ y_2, \geq 0 \end{cases}$

2. ثنائية الصيغة المختلطة:

كما هو معلوم أن الشكل المختلط للنموذج الخطي هو الذي يحتوي على متراجحات من النوعين $\leq$، $\geq$ ، كما توجد معادلة على شكل مساواة ، ولكل منها معاملة خاصة لايجاد البرنامج الثنائي ،نذكرها كالآتي:

❖ **حالة ظهور القيد *i* بإشارة $\geq$ في نموذج *Max*:**

لتوضيح هذه الحالة، نعرض المثال التالي.

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 10\,x_1+25\,x_2+14\,x_3$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 \leq 6500 \\ 2x_1+4x_2+8x_3 \geq 2150 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق الصيغة القانونية لدالة Max ، لذا وجب تحويله إلى متراجحة من الشكل **أقل من أو تساوي** بضرب طرفيها في القيمة (-1)، فيصبح:

$$\mathbf{-2x_1-4x_2-8x_3 \leq -2150}$$

وبتطبيق خطوات تشكيل النموذج الثنائي الآنفة الذكر نتحصل على الصيغة النهائية التالية :

$$\text{Min } W = 6500\,y_1-2150\,\mathbf{y_2}$$

$$\begin{cases} y_1-2y_2 \geq 10 \\ 3y_1-4y_2 \geq 25 \\ y_1-8y_2 \geq 14 \\ y_1,\ \mathbf{y_2},\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

❖ **حالة ظهور القيد *i* بإشارة $\leq$ في نموذج Min:**

شبيهة هذه الحالة بالحالة السابقة ، اذ يجب تحويل المتراجحة من الشكل $\leq$ الى الشكل $\geq$ بضرب طرفيها في القيمة (-1) . وللتوضيح نأخذ المثال التالي:

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MinZ = 15\,x_1 + 13\,x_2 + 23\,x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2\,x_2 + 8\,x_3 \geq 210 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5\,x_3 \geq 240 \\ 6x_1 + 7x_2 + 6\,x_3 \leq 160 \end{cases}$$

$$\mathbf{x_1},\ x_3 \geq 0$$

بضرب القيد الثالث في (-1) يكون النموذج الثنائي لهذا المثال كالآتي:

$$MaxW = 210\,y_1 + 240\,y_2 - 160\,y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 6y_3 \geq -15 \\ 2y_1 + 3y_2 - 7y_3 \geq 13 \\ 8y_1 + 5y_2 - 6y_3 \geq 23 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

❖ **حالة ظهور القيد i بإشارة = في النموذج الأولي:**

سنقوم بتوضيح هذه الحالة، في المثال أدناه.

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 120\,x_1 + 240\,x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 = 50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني يخالف الصيغة القانونية لدالة Max كونه مكتوبا في صورة معادلة، لذا وجب تحويله إلى متراجحتين إحداهما أقل أو تساوي و الأخرى أكبر أو تساوي، فيصبح:

$$\mathbf{3x_1 + 4x_2 \leq 50}$$

$$\mathbf{3x_1 + 4x_2 \geq 50}$$

و بما أن المتراجحة الثانية تحقق هي الأخرى تخالف الصيغة القانونية لنموذج التعظيم فيجب هي الأخرى تعديلها و ذلك بضرب طرفيها في (-1) لتصبح من الشكل:

$$\mathbf{-3x_1 - 4x_2 \leq -50}$$

و بناء على ذلك يصبح الشكل القانوني للنموذج الأولي كما يلي:

$$Max\ Z = 120\,x_1 + 240\,x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 50 \\ -3x_1 - 4x_2 \leq -50 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

أما النموذج المقابل له فيكون كالتالي:

$$\text{Min } W = 60\, y_1 + 50\, \mathbf{y_2} - 50\, \mathbf{y_3}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3\, \mathbf{y_2} - 3\, \mathbf{y_3} \geq 120 \\ 6y_1 + 4\, \mathbf{y_2} - 4\, \mathbf{y_3} \geq 240 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

نتيجة : قبل تحويل النموذج ذو الصيغة المختلطة الى برنامج ثنائي ، يجب أولا ايجاد صيغته القانونية وفقا للقواعد المذكورة أعلاه

ثانيا: اشتقاق الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من البرنامج الأولي:

أشرنا فيما سبق ، الى أن البرنامجين الأولي و الثنائي يقابل أحدهما الآخر و أن حل أحدهما يغني عن حل البرنامج الآخر . لذا يمكننا الحصول على قيم المتغيرات و دالة الهدف للبرنامج الثنائي مباشرة وذلك من الجدول الأخير الذي نحصل منه على الحل الأمثل للبرنامج الأولي دون الحاجة الى حله بتطبيق خطوات طريقة السمبلاكس .

و لتوضيح ذلك نستعين بمثالنا السابق :

مثال: كانت الصيغة الأولية لمشكلة البرمجة الخطية هي الآتي:

$$\text{Max } Z = 20\, x_1 + 30\, x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 2400 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ويشير الجدول التالي الحل الأمثل المتوصل اليه للبرنامج الاولي:

جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

			20	30	0	0
c_k	V	b_i	x_1	$\mathbf{x_2}$	e_1	e_2
0	x_1	400	1	0	2/3	-1/9
30	$\mathbf{x_2}$	200	0	1	-1/3	2/9
Z= 14000			0	0	10/3	40/9

أما الصيغة الثنائية لهذه المشكلة فكانت :

$$\text{Min } W = 1000\, y_1 + 2400\, y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1+3y_2 \geq 20 \\ y_1+6y_2 \geq 30 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

وبعد تحويل النموذج المقابل الى الصيغة المعيارية بإضافة المتغيرات الاصطناعية و طرح متغيرات الفجوة للقيدين ، ثم تطبيق خطوات طريقة السمبلاكس نتحصل على جدول الحل الأمثل كالآتي:

جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

			20	30	0	M	0	M
c_k	V	b_i	y_1	y_2	e_1	A_1	e_2	A_2
1000	y_1	10/3	1	0	-2/3	2/3	1/3	-1/3
2400	y_2	40/9	0	1	1/9	-1/9	-2/9	2/9
W=14000			0	0	-400	400-M	-200	200-M

- **المقارنة:**

من الجدولين الأولي و الثنائي نجد أن:

✓ قيمة الدالتين في البرنامجين الأولي و الثنائي متساويتين حيث:

$$Z = W = 14000 .$$

✓ القيم الموجودة في سطر التقييم للبرنامج الأولي و المقابلة لمتغيرات الفوارق (e_1, e_2) تساوي قيم المتغيرات الاساسية (y_1 , y_2) في البرنامج الثنائي حيث:

$$e_1 = y_1 = 10/3 \quad , \quad e_2 = y_2 = 40/9$$

✓ قيم المتغيرات الاساسية في البرنامج الأولي و التي تظهر في عمود الثوابت (x_1, x_2) تساوي بالقيمة المطلقة لمتغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي و التي تظهر في سطر التقييم $((e_1, e_2))$، أي:

$$x_1 = e_1 = 400 \quad , \quad x_2 = e_2 = 200$$

✓ باستبعاد أعمدة المتغيرات الاصطناعية والمتغيرات التي دخلت الحل فان قيم السطر في مصفوفة معاملات البرنامج الأولي تصبح عموداً في مصفوفة معاملات البرنامج الثنائي مع تغيير الاشارة، حيث:

مصفوفة الأولي   تصبح   مصفوفة الثنائي

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1/9 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \quad \text{تصبح} \quad \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ \frac{1}{9} & -2/9 \end{pmatrix}$$

- **الاستنتاج:**

يمكن تعميم هذه النتائج لأي زوج من المسألتين الأولية و الثنائية كما يلي:

المسألة الأولية	المسألة الثنائية
متغيرات القرار على الترتيب ($x_1,x_2,\ldots\ldots x_n$)	متغيرات الفجوة على الترتيب
متغيرات الفجوة على الترتيب	متغيرات القرار على الترتيب($y_1,y_2\ldots y_m$)
قيم عمود الثوابت	قيم سطر التقييم
قيم سطر التقييم	قيم عمود الثوابت
قيمة دالة الهدف	قيمة دالة الهدف

ثالثا: التفسير الاقتصادي للبرنامج الثنائي

ان أهمية البرنامج الثنائي تكمن أساسا في المعنى الاقتصادي لمتغيراته حيث تمثل هذه المتغيرات مؤشرات مهمة تساعد المسير على اتخاذ القرارات الرشيدة ، كما أن هذا التفسير يعتمد بشكل مباشر على تفسير البرنامج الأولي حيث تمثل:

x_j: مستوى النشاط j ($j=1,2\ldots\ldots n$)

c_j: وحدة الربح (أو الكلفة) من النشاط j.

Z: الربح (أو الكلفة) الكلي من جميع النشاطات.

b_i: الكمية المتاحة من المورد i ($i=1,2\ldots\ldots m$).

a_{ij}: الكمية المستهلكة من المورد i لكل وحدة واحدة من النشاط j.

$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} X_J$: الاستخدام الكلي من قبل جميع النشاطات n من المورد i.

1. التفسير الاقتصادي لمتغيرات ودالة الثنائية:

تطرقنا فيما سبق الى نتيجة مهمة تربطان البرنامجين الأولي و الثنائي بشكل مباشر و المتمثلة في أن قيمة دالتيهما متساويتين في الحل الأمثل أي :

$$\sum_{i=1}^{m} b_i Yi = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

وبالتالي يمكننا الحصول على تفسير اقتصادي للمتغيرات الثنائية (y_i) حيث أن الطرف الأيمن يمثل الدينار (الربح) و b_i تمثل وحدات المورد i ، فان متغيرات الثنائية تشير الى القيمة الحدية للموارد أي أنها تحدد للمسير المقدار الذي يمكن به زيادة أرباح المؤسسة اذا استطاع زيادة الكمية المتاحة من كل مورد من موارد الانتاج المحدودة بوحدة واحدة. مع العلم أن الموارد المستخدمة بالكامل هي التي سيكون لها قيمة حدية في البرنامج الثنائي ، أما الموارد التي لم تستغل بالكامل سوف لن تأخذ قيمة حدية .

أما التفسير الاقتصادي لدالة الهدف للثنائية فيعني ذللك الحصول على أدنى قيمة حدية اجمالية للموارد.

2.التفسير الاقتصادي لقيود الثنائية:

أشرنا فيما سبق الى أن كل قيد من قيود الثنائية يمكن ان يعبر ب:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq c_i$$

وهذا معناه، مساهمة مزيج الموارد المستخدمة في الربح و الذي على الأقل أن يساوي ما استخدمناه في الوحدة من النشاط j

II تحليل الحساسية أو ما بعد الأمثلية (Poste Optimale ou L'analyse de sensibilité):

يسعى متخذ القرار عادة إلى التوسع في مجال التحليل قصد الحصول على نتائج مختلفة، فينصب اهتمامه على معرفة الحدود التي يمكن فيها إجراء التغيير في قيمة العوامل المكونة للنموذج الرياضي دون تغيير هدفه.

فمن المعلوم أن الإدارات عموما ترغب دائما في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة لأي مشكلة ما (نموذج البرمجة الخطية)، و يمكن معرفة أثر هذه التغييرات في المعاملات على الحل الأمثل عن طريق حل المسألة مرة أخرى، وهذا يتطلب إجراء حسابات كثيرة تتناسب طرديا مع عدد القيود و المتغيرات. لذا يمكننا معرفة هذا الأمر اذا ما قمنا باجراء تحليل الحساسية ، و هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقا لتغير المعاملات المختلفة، سواء كانت هذه المعاملات: مواد أولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح ... إلخ،[1] والذي يعرف على أنه " الأسلوب الذي يهدف الى معرفة مدى حساسية الحل الامثل المتوصل اليه لمختلف التغيرات التي قد تحدث في عناصر النموذج الرياضي" . ويتم ذلك من خلال دراسة محاور تحليل الحساسية و المتمثلة في:[2]

- محور مدى الأمثلية (التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف): وهو يهدف الى تحديد الحد الأعلى و الحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف و التي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل .
- محور مدى الامكانية (التغير في ثوابت القيود): و هو يهدف الى تحديد الحد الأعلى و الأدنى التي ضمنها تبقى الموارد المتاحة تحقق حلول ممكنة و يبقى الحل أمثل .

ولشرح هذين المحورين سنستعين بالنموذج الرياضي التالي و جدول حله الأمثل:

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

X_1: كمية المنتوج الأول

X_2: كمية المنتوج الثاني

X_3: كمية المنتوج الثالث

[1] سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 130.

[2] محمود العبيدي و آخرون، مرجع سابق، ص64

$$MaxZ = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 & \text{:-1- قيد المادة الخام} \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 & \text{:-2- قيد المادة الخام} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 & \text{:-3- قيد المادة الخام} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \text{: قيد عدم السلبية} \end{cases}$$

و يرفق مع هذا البرنامج جدول الحل الأمثل التالي:

			2	4	3	0	0	0
C_j	V	b_i	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
Z=230/3			11/6	0	0	5/6	2/3	0

المطلوب: 1. تحديد مدى الأمثلية لمتغيرات دالة الهدف.

2. تحديد مدة الامكانية للمواد الأولية المتاحة.

الحل:

أولا. تحديد مدى الأمثلية

لتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية:[1]

- نقوم باستبدال معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة نرمز له بالرمز c_j حيث $j=1.2.......n$. و في مثالنا نبدأ بالمتغيرات التي دخلت الحل و لتكن x_2 حيث نستبدل قيمة معاملها وهو 4 بـ c_1 و نضعها في صف c_j فوق متغيرات دالة الهدف و كذلك في عمود c_j مقابل الحل الأساسي.
- نعيد حساب صف دالة الهدف و قيم سطر التقييم. وحسب مثالنا نتحصل على جدول الحل التالي:

			2	C_2	3	0	0	0
C_j	V	b_i	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
C_2	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
$Z=20/3c_2+50$			1/3c2+1/4	0	0	$1/3c_2-1/2$	$-1/3c_2+2$	0

[1] محمد العبيدي و آخرون، مرجع سابق، ص ص67، 68

- نكون متراجحات يكون طرفها الأيسر أي معامل في سطر التقييم يحتوي على c_j و طرفها الأيمن يساوي صفر و باشارة أكبر من أو يساوي اذا كانت الدالة من نوع تعظيم و باشارة اقل من أو يساوي اذا كانت الدالة من نوع التخفيض . و دلالة ذلك أننا نبحث عن حدود التغير في c_j و التي ضمنها يبقى الحل أمثل أي أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة في حالة التعظيم و جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة في حالة التخفيض.

وعليه تكون متراجحات مثالنا كالتالي:

$$\begin{cases} 1/3c_2+1/4 \geq 0 \\ 1/3c_2-1/2 \geq 0 \\ -1/3c_2+2 \geq 0 \end{cases}$$

- نحل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة لتتحدد حدود c_j كحد أعلى و حد أدنى و التي تمثل مدى الأمثلية للمتغير c_j . و حسب مثالنا نتحصل على ما يلي:

$$\begin{cases} 1/3c_2+1/4 \geq 0 \Rightarrow c_2 \geq -3/4 \\ 1/3c_2-1/2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \geq 3/2 \\ -1/3c_2+2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \leq 6 \end{cases}$$

ومن خلال المجالات أعلاه يمكننا القول بأن **مجال الأمثلية للمنتوج الثاني هو $c_2 \in [3/2, 6]$** حيث يبين هذا المجال لمتخذ القرار امكانية زيادة ربح المنتوج الثاني لغاية القيمة 6 و بقاء الحل أمثل ، وخفض الربح لغاية القيمة 1,5 و بقاء الحل أمثل ، أما خارج مجال هاتين القيمتين فتوليفة الحل الأمثل ستتغير.

- بنفس الخطوات السابقة يتم حساب مدى الأمثلية للمتغيرات المتبقية. وفي مثالنا سنستبدل معامل المتغير x_3 بالرمز c_3 و نعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنتحصل على الجدول التالي:

			2	4	3	0	0	0
C_j	V	b_i	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	−1/3	0
C_3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	5/3	0	0	2/3	−1/3	1
$Z=80/3+50/3c_3$			$5/6c_3-2/3$	0	0	$4/3-1/6c_3$	$-4/3+2/3c_3$	0

ولكي يكون جدول السمبلاكس جدول الحل الأمثل لابد أن تكون جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة ، و بالتالي نتحصل على جملة المتراجحات التالية:

$$\begin{cases} 5/6c_3-2/3 \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 4/5 \\ 4/3-1/6c_3 \geq 0 \Rightarrow c_3 \leq 8 \\ -4/3+2/3c_3 \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 2 \end{cases}$$

و عليه، **فان مجال الأمثلية للمنتوج الثالث هو $c_3 \in[2,8]$** بحيث أي تغيير ضمن هذا المجال سيبقي الحل الأمثل صالحا للاستعمال و لا يتطلب اعادة حله من جديد .

و بنفس الطريقة أيضا سيتم ايجاد مجال الأمثلية للمتغيرة x_1 حيث يكون جدول السمبلاكس الجديد بعد استبدال معامله بالرمز c_1 كالآتي:

			C_1	4	3	0	0	0
C_j	V	b_i	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
Z=230/3			$23/6-c_1$	0	0	5/6	2/3	0

نعلم أن المتغيرة x_1 غير موجودة ضمن الحل الأمثل ومعاملها في دالة الهدف يقدر بـ 2 أما قيمتها الحدية في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل تساوي 6/11 ، لذلك فان الحد الأدنى للربح المتعلق بهذه المتغيرة لكي يظهر في الحل الأمثل هو أن لا يقل عن : الربح السابق + التأثير الحدي المقابل له أي 2+ 6/11+ = 6/23دج . فلو نعيد الحل للنموذج السابق بحيث الربح الوحدوي لها هو 6/23 أو أكثر سنجد المتغيرة x_1 ضمن متغيرات الحل .

أما مجال الأمثلية فيتحدد فقط بالعمود الخاص بهذه المتغيرة التي لم تدخل الحل، أي :

$$23/6 - c_1 \geq 0 \;\; \Rightarrow c_1 \leq 23/6$$

وبالتالي، فانه من أجل أن يبقى الحل الأمثل صالحا و لا تظهر المتغيرة x_1 في الحل النهائي يجب أن يكون مجال الأمثلية للمنتوج الأول هو **$c_1 \in]-\infty,23/6[$** .

نتيجة: في حالة كون متغيرة خارج الأساس في الحل الأمثل(أي لم تدخل الحل) فان لا شيء يتغير الا قيمة عمودها في سطر التقييم ،ليكون بذلك مجال أمثليتها هو القيمة المقابلة لها في سطر التقييم $c_j \leq$

ثانيا:تحديد مدى الامكانية:

1. أسعار الظل و الطاقات العاطلة:

كقاعدة عامة يفضل زيادة الاستثمار في الموارد التي تمتلك سعر الظل، وهي الموارد التي تحقق زيادة في قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل مضروبا في الوحدات التي يقرر متخذ القرار زيادة الاستثمار فيها وتقع ضمن حدود الامكانية . مع العلم أنه يقصد بأسعار الظل العوائد التي يمكن الحصول عليه جراء اضافة وحدة واحدة من مورد ما موظف في العملية الانتاجية ، كما تتمثل في قيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في سطر التقييم لجدول الحل الأمثل.

أما الموارد التي لا تمتلك سعر الظل فلا يفضل الاستثمار فيها لأنها تشير الى وجود طاقات غير مستغلة في العملية الانتاجية ، حيث تتمثل في قيم متغيرات الفجوة في عمود متغيرات الأساس لجدول الحل الأمثل.

وفي مثالنا السابق ، **فان أسعار الظل تتمثل في:**

- متغيرة الفجوة e_1 حيث :

. اضافة وحدة واحدة من المورد الأول (المادة الخام 1) فان الربح يزيد بـ 6/5 أي يصبح :

الربح الجديد = الربح القديم + الربح الاضافي

الربح الجديد= 3/230 + 6/5 =85دج

. اضافة وحدة واحدة من المورد الأول يزيد المنتوج الثاني بـ 3/1وحدة ، أي تصبح

الكمية الجديدة لـ x_2 = الكمية القديمة + الكمية الاضافية

الكمية الجديدة لـ x_2 =3/20 + 3/1 = 7 وحدات

. اضافة وحدة واحدة من المورد الأول ينخفض المنتوج الثالث بـ 6/1وحدة ، أي تصبح:

الكمية الجديدة لـ x_3 = الكمية القديمة + الكمية الاضافية

الكمية الجديدة لـ x_3 = 50/3 – 1/6= 6/99 وحدة

. اضافة وحدة واحدة من المورد الأول يزيد الكمية المتبقاة من المادة الأولية 3 بـ 2/3وحدة ، أي تصبح:

الكمية الجديدة لـ e_3 = الكمية القديمة + الكمية الاضافية

الكمية الجديدة لـ e_3 =80/3 + 2/3= 3/82 وحدة

- متغيرة الفجوة e_2 حيث :

. اضافة وحدة واحدة من المورد الثاني (المادة الخام2) فان الربح يزيد بـ 2/3 أي يصبح :

الربح الجديد = الربح القديم + الربح الاضافي

الربح الجديد= 3/230 + 2/3= 232/3دج

. اضافة وحدة واحدة من المورد الأول يزيد المنتوج الثالث بـ 2/3وحدة ، أي تصبح:

الكمية الجديدة لـ x_3 = الكمية القديمة + الكمية الاضافية

الكمية الجديدة لـ x_3 =50/3 + 2/3 = 52/3 وحدات

. اضافة وحدة واحدة من المورد الثاني ينخفض المنتوج الثاني بـ 3/1وحدة ، أي تصبح:

الكمية الجديدة لـ x_2 = الكمية القديمة + الكمية الاضافية

الكمية الجديدة لـ x_2 =20/3 – 1/3= 19/3 وحدة

. اضافة وحدة واحدة من المورد الثاني تنخفض الكمية المتبقاة من المادة الأولية 3 بـ 1/3وحدة ، أي تصبح:

الكمية الجديدة لـ e_3 = الكمية القديمة + الكمية الاضافية

الكمية الجديدة لـ e_3= 80/3 − 1/3= 79/3وحدة

أما الطاقات العاطلة فتتمثل في:

- متغيرة الفجوة e_3 حيث نجد أن المورد الثالث يحتوي على 80/3 وحدة غير مستغلة ، الأمر الذي يمكن أن نتحقق منه من خلال تعويض قيم x_2 ، x_3 في القيد الثالث لنجد أن:

$$3(20/3) + 2(50/3) = 160/3 \Rightarrow 80 - 160/3 = \mathbf{80/3}$$

لذا فان المستغل فقط هو 160/3 و المتبقي هو 80/3 ، لهذا السب لا يفضل الاستثمار في هذا المورد لأن أي اضافة له ا تؤدي الى زيادة الأرباح و انما الى زيادة الطاقات العاطلة .

2. مدى الامكانية:

يهدف مدى الامكانية تحديد الحد الأعلى و الحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن (الثوابت) الذي يحافظ على قيمة سعر الظل ، حيث من خلال مدى الامكانية يمكننا تحديد عدد الوحدات من أي مورد التي يمكن اضافتها أو التخلص منها دون أن يؤثر ذلك في سعر الظل الخاص بالمورد . و لتحديد مدى الامكانية نتبع ما يلي[1]:

- نحسب مدى التغير المسموح به للمورد باستخدام القاعدة التالية:

$$\begin{pmatrix} bi \text{ عمود} \\ \text{في} \\ \text{جدول الحل الأمثل} \end{pmatrix} + \Delta b \begin{pmatrix} \text{عمود معاملات متغيرة الفجوة} \\ \text{في} \\ \text{جدول الحل الأمثل} \end{pmatrix} \geq 0$$

ويقصد بـ Δb_i مقدار التغير الذي سيحدث في حدود المورد المتاح و يبقي الحل ممكنا و أمثل. وبتطبيق ذلك على مثالنا نحصل على ما يلي:

. بالنسبة للمورد الأول:

$$\begin{cases} 20/3 + \Delta b_1(1/3) \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -20 \\ 50/3 + \Delta b_1(-1/6) \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 100 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Delta b_1 \in [-20,100]} \\ 80/3 + \Delta b_1(2/3) \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -40 \end{cases}$$

بالنسبة للمورد الثاني:

$$\begin{cases} 20/3 + \Delta b_2(-1/3) \geq 0 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -20 \\ 50/3 + \Delta b_2 \, 2/3) \geq 0 \Rightarrow \Delta b_2 \leq 100 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Delta b_2 \in [-25,2\ 0]} \\ 80/3 + \Delta b_2(-1/3) \geq 0 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -40 \end{cases}$$

---

[1] محمد العبيدي و آخرون، مرجع سابق، ص ص71، 72

بالنسبة للمورد الثالث:

$$\begin{cases} 20/3 + \Delta b_3\,(0) \geq 0 \quad \text{محقق} \\ 50/3 + \Delta b_{3}(0) \geq 0 \quad \Rightarrow \text{محقق} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Delta b_3 \in]{,}-80/3,\ +\infty\,[} \\ 80/3 + \Delta b_3(1) \geq 0 \quad \Rightarrow \Delta b_3 \geq -80/3 \end{cases}$$

نلاحظ أن المورد الثالث لا يملك سعر الظل ، و لكي يدخل الحل الامثل ينبغي خفض الاستثمار فيه بمقدار 80/3و التي تشكل الكمية الفائضة من هذا المورد و التي ظهرت في عمود كميات جدول الحل الامثل.

- نحسب مجال الامكانية باضافة الكمية المتاحة من للمورد لطرفي مجال التغير. ويكون حسب مثالنا كما يلي:

مجال الامكانية للمورد الأول هو $\boldsymbol{b_1 \in [-20+60, 100+60]}$

مجال الامكانية للمورد الثاني هو $\boldsymbol{b_2 \in [-25+40, 2\ 0+40]}$

مجال الامكانية للمورد الثالث هو $\boldsymbol{b_3 \in]{,}-80/3+80, +\infty\,[}$

نتيجة: اذا كانت متغيرة الفجوة ضمن مزيج الحل الأمثل ، فذا يشير الى وجود كمية اضافية من هذا المورد ، لذا فان الحد الأعلى لا مكانيتها غير محدودة و حدها الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مضافا اليها قيمة متغيرة الفجوة في عمود كمية الموارد لجدول السمبلاكس.

الملخص

تعتبر المسألة الثنائية في البرمجة الخطية الصورة الثانية للمسألة التي تصاغ مباشرة من المعطيات التي تأتي في غالب الأحيان في أسلوب أدبي و يطلق عليها المسألة الأصلية أو الأولية، وحلها بدلا من هذه الأخيرة يعد أحيانا تصرفا حكيما خاصة عندما ينطوي حل المسألة الأصلية على مجموعة من الصعوبات المرتبطة بكثرة القيود أو ادخال المتغيرات الاصطناعية. فالمسألة الثنائية تعتمد على نفس المعطيات الخاصة بالمسألة الأصلية الا أنها تختلف فيما يخص الصياغة و المعنى الاقتصادي ، حيث:

- دالة الهدف التي كانت على شكل**Max** في المسألة الثنائية تصبح على شكل **Min** في المسألة الأصلية و العكس صحيح.
- عدد المتغيرات في المسألة الثنائية هو نفسه عدد القيود في المسألة الأصلية.
- عدد القيود في المسألة الثنائية هو نفسه عدد المتغيرات في المسألة الأصلية.
- معاملات دالة الهدف في المسألة الثنائية هو الطرف الأيمن للقيود في المسألة الأصلية.
- الطرف الأيمن لقيود المسألة الثنائية هو معاملات دالة الهدف للمسألة الأصلية.
- معاملات متغيرات القيود في المسألة الثنائية تمثل منقول مصفوفة معاملات متغيرات القيود في المسألة الأصلية.
- قيد من الشكل ($\leq$) في حالة التعظيم للمسألة الثنائية يصبح قيد من الشكل ($\geq$)في حالة التخفيض للمسألة الأصلية.

مع الاشارة ،الى أنه قبل تحويل النموذج ذو الصيغة المختلطة الى مسألة ثنائية، يجب أولا ايجاد صيغته القانونية وذلك بضرب طرفي المتراجحة المخالفة له في القيمة (-1) ، أما اذا كانت معادلة فوجب تحويلها الى متراجحتين من نوع$\geq$ و$\leq$ ثم تعديل المتراجحة المخالفة للصيغة القانونية.

أما تحليل الحساسية فيتم اللجوء اليه من أجل معرفة مدى قدرة الحل الأمثل على الحفاظ على أمثليته في حالة حصول أي تغير في مكونات البرنامج الخطي، حيث يضم محورين أساسين هما:

- مدى الأمثلية: (التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف): وهو يهدف الى تحديد الحد الأعلى و الحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف و التي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل .
- مدى الامكانية (التغير في ثوابت القيود): و هو يهدف الى تحديد الحد الأعلى و الأدنى التي ضمنها تبقى الموارد المتاحة تحقق حلول ممكنة و يبقى الحل أمثل .

الفصـل السادس: نـموذج النـــقل

Modèle de transport

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- فهم مسائل النقل فهما صحيحا و جيدا.
- التعبير الرياضي لمسائل النقل.
- حل كل أنواع مسائل النقل لاتخاذ القرار الأمثل.
- التمييز وحل مختلف الحالات الخاصة لمسائل النقل.

محتوى الفصل:

I .صياغة نموذج النقل.

أولا. جدول النقل.

ثانيا. البرنامج الخطي.

II. حل نموذج النقل.

اولا. في حالة التخفيض.

ثانيا. في حالة التعظيم.

III.الحالات الخاصة في مسائل النقل.

1.الاخلال بين العرض و الطلب.

2.عدم الانتظام.

3.التوزيع بالطرق الممنوعة.

4.الحلول البديلة.

5.تخطيط الانتاج.

6. النقل بمراحل متعددة.

الملخص.

تمهيد:

يعتبر نموذج النقل من النماذج الرياضية المشتقة أصلا من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية باعتباره يهدف الى الوصول الى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية ، وهذا يعني على وجه الخصوص أنه يهتم بالبحث عن أقل تكلفة أو أعلى ربح لنقل كميات من مجموعة مناطق تدعى بمصادر العرض (المنبع) الى مواقع أخرى تسمى بمصادر الطلب(المصب) . وقد تم تطويره لأول مرة عام 1941 من قبل F.L.Hichcok حيث قدم دراسة بعنوان " توزيع الانتاج من عدة مصادر الى عدة مناطق محلية"، بينما يعتبر Dantzig أول من قام بحله بأسلوب البرمجة الخطية ، في حين قدما كل من Charnesو cooper طريقة الحجر المتنقل و التي أجريا عليها بعض التحسينات لتصبح طريقة التوزيع المعدل .[1]

I صياغة نموذج النقل:

من أجل بناء نموذج نقل يتطلب الأمر توفر البيانات الأساسية التالية:

- سعة المنابع معلومة أي أن نكون على علم بالكميات المتاحة في كل مركز عرض يمكن نقل السلع منه.
- سعة المصبات معلومة أي أن نكون على علم بالكميات المطلوبة في كل مركز طلب يمكن نقل السلع اليه.
- تكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلع من المنابع الى المصبات معلومة.
- كمية الكميات المعروضة في المنابع متساوية مع الكميات المطلوبة في المصبات.

أولا: جدول النقل:

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى **بجدول النقل** الذي يكون كالتالي:

جدول رقم : جدول النقل

مصب/ منبع	D_1	D_2	....	D_n	a_i
S_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	....	C_{1n} x_{14}	a_1
S_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	....	C_{2n} x_{2n}	a_2
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	....	C_{mn} X_{mn}	a_m
b_i	b_1	b_2	......	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} ai$

المصدر: محمود العبيدي و آخرون ، مرجع سابق ، ص124

[1] دلال صادق الجواد و آخرون، مرجع سابق، ص141

كما نلاحظ أن الصيغة الجدولية لمسألة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها M التي تمثل المنابع (مراكز العرض)و عدد أعمدتها N التي تمثل المصبات (مراكز الطلب) ، أما مربعاتها و التي تتشكل من خلال تقاطع المنابع مع المصبات فتمثل خلايا الجدول التي تحتوي على تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنبع i الى المصب j وعلى الكمية المنقولة من المنبع i الى المصب j . كما أن الفرضية الأساسية لها تتمثل في أن ما هو معروض في المنابع يكون مساويا لما هو مطلوب من قبل المصبات أي $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} ai$ ، وفي هذه الحالة يسمى بنموذج النقل المتوازن.

وبشكل عام ، فان:

X_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المنبع i الى المصبj.

C_{ij}: تكلفة(ربح) نقل الوحدة الواحدة من المنبع i الى المصبj.

A_i : عدد الوحدات المعروضة عند المنبعS_i.

b_j: عدد الوحدات المطلوبة عند المصب D_i

ثانيا: البرنامج الخطي:

يمكن ترجمة مكونات جدول النقل في شكل نموذج رياضي على اعتبار أن مسألة النقل من الحالات الخاصة للبرمجة الخطية ، وذلك كما يلي:[1]

- **متغيرات القرار:** تمثل X_{ij} الكميات الواجب نقلها من كل منبع الى كل مصب حيث عددها يساوي حاصل ضرب عدد المنابع في عدد المصبات.
- **دالة الهدف:** تتمثل في تدنية تكلفة النقل التي تساوي مجموع تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مركز العرض الى مركز الطلب في عدد الوحدات المنقولة أو تعظيم الربح الذي يساوي ربح الوحدة الواحدة من مركز العرض الى مركز الطلب في عدد الوحدات المنقولة. يعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$MinZ / MaxZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} C_{ij} Xij$$

- **القيود:** تضم مسألة النقل نوعين من القيود هما:

1. قيود العرض: حيث يجب أن تتساوى الكمية المنقولة من كل منبع مع الكمية المتوفرة لذلك المنبع. أي يعبر عنها رياضيا كمايلي:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$$

[1] محمود العبيدي و آخرون ، مرجع سابق ، ص ص 125، 126

2. **قيود الطلب**: حيث يجب أن يحصل كل مصب على كمية السلع تساوي حجم طلبه . و بذلك يمكن التعبير عنها رياضيا كالتالي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$$

- **عدم سلبية المتغيرات**: بمعنى أن جميع الكميات المنقولة يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر . أي:

$$x_{ij} \geq 0$$

مثال: تكلف مؤسسة القصباوية التي لها ثلاث وحدات انتاجية (أولى، ثانية، ثالثة) بتموين ثلاث مناطق مختلفة(الغربية، الوسطى، الشرقية) من السلعة التي تنتجها حيث تقدر الكمية المطلوبة لهذه المناطق على الترتيب 450،600،400 وحدة ، أما الطاقة الانتاجية للوحدات على التوالي هي 250،700،500 وحدة. كما يقدم الجدول أدناه تكاليف النقل من كل وحدة الى كل منطقة:

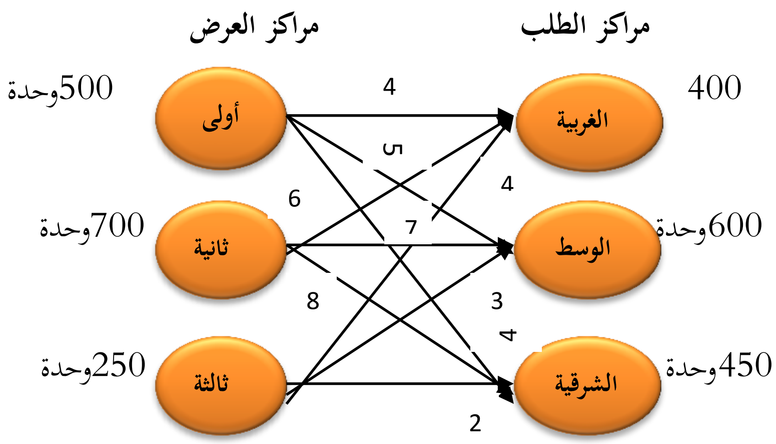
	الغربية	الوسطى	الشرقية
أولى	4	5	4
ثانية	6	7	8
ثالثة	4	3	2

المطلوب: . بناء جدول النقل لهذه المسألة.

. كتابة النموذج الخطي لهذه المسألة.

الحل:

قبل بناء جدول النقل لهذه المسألة يمكن توضيحها بيانيا كما يلي:



1. يمكن اجمال معطيات المسألة في جدول النقل التالي:

	الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i
وحدة أولى	4 x_{11}	5 x_{12}	4 x_{13}	500
وحدة ثانية	6 x_{21}	7 x_{22}	8 x_{23}	700
وحدة ثالثة	4 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	250
b_i	400	600	450	1450/1450

2. يمكن كتابة النموذج الخطي للمسألة كما يلي:

✓ **متغيرات القرار**: بما أنه لدينا ثلاثة منابع و ثلاثة مصبات فان عدد المتغيرات هو تسعة (3*3=9) حيث يمثل كل متغير الكمية المنقولة من المنبع i الى المصب j أي:

x_{11}: الكمية المنقولة من الوحدة الأولى الى المنطقة الغربية.

نستمر في تسمية المتغيرات بهذا الشكل الى غاية ان نصل الى:

X_{33}: الكمية المنقولة من الوحدة الثالثة الى المنطقة الشرقية.

✓ **دالة الهدف**: هي من نوع تخفيض تكاليف النقل أي:

$$Min\ Z = 4x_{11}+5x_{12}+4x_{13}+6x_{21}+7x_{22}+8x_{23}+4x_{31}+3x_{32}+2x_{33}$$

✓ **القيود**: تتضمن شقين:

قيود العرض:

قيد منبع الوحدة الأولى: $x_{11}+x_{12}+x_{13}=500$

قيد منبع الوحدة الثانية: $x_{21}+x_{22}+x_{23}=700$

قيد منبع الوحدة الثالثة: $x_{31}+x_{32}+x_{33}=250$

قيود الطلب:

قيد مصب المنطقة الغربية: $x_{11}+x_{21}+x_{31}=400$

قيد مصب المنطقة الوسطى: $x_{12}+x_{22}+x_{23}=600$

قيد مصب المنطقة الشرقية: $x_{13}+x_{23}+x_{33}=450$

✓ **عدم سلبية المتغيرات**: أي أن $x_{11},,,,,,,x_{33} \geq 0$

II: حل نموذج النقل:

بعد أن يتم اعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل ، فان الخطوة الموالية تتمثل في ايجاد الحل الأمثل من خلال البحث عن قيمة x_{ij} التي تمثل الكمية المنقولة من مراكز العرض الى مراكز الطلب، بحيث تتطلب هذه الخطوة المرور بمرحلتين أولها مرحلة ايجاد الحل الأساسي الأولي و ثانيها مرحلة ايجاد الحل الأمثل.

ومن أجل تبسيط خطوة الحل الأمثل سنعمل على توضيحها وفقا لنوعي دالة الهدف لنموذج النقل ومن خلال المثال العددي السابق :

أولا: في حالة التخفيض:

1. مرحلة ايجاد الحل الأساسي الأولي:

يمثل الحل الأساسي الأولي الحل الذي عنده عدد الخلايا المملوءة (خلايا الأساس) مساوية لمجموع عدد المنابع والمصبات مطروح منها القيمة الواحد أي:

$$\text{عدد الخلايا المملوءة} = m + n - 1$$

ويتم التوصل الى ذلك باستخدام ثلاث طرق أساسية ، وهي:[1]

1.1 طريقة الزاوية الشمالية الغربية: تعتبر هذه الطريقة من أسهل و أبسط الطرق حيث يتم التوزيع من مراكز العرض الى مراكز الطلب دون أي منطق علمي، اذ تبدأ من أول خلية في الجدول الى الأعلى و الى اليسار حيث يتم اشباعها بالكامل باستخدام العلاقة التالية:

$$X_{ij}=\text{Min}[a_i,\ b_j]$$

أي أنه يتم اختيار الكمية (التي يتم وضعها في الخلية) الأقل بين كمية العرض و الطلب المقابلين لهذه الخلية ، ثم انقاص كمية السطر في العرض و كمية الطلب في العمود بنفس الوحدات المخصصة لهذه الخلية. و في حالة ما اذا أصبح العرض في السطر (سطر الخلية المختارة) مساويا للصفر يتم التحرك الى الأسفل في العمود الى الخلية التالية ، في حين اذا أصبح الطلب مساويا للصفر يتم الانتقال الى اليمين في السطر الى الخلية الموالية ، أما اذا أصبح كل من العرض في السطر و الطلب في العمود مساويان للصفر يتم التحرك الى الأسفل خلية واحدة ثم الى اليمين خلية أخرى. وفي جميع الحالات يتم ملء الخلية الجديدة بنفس الطريقة ليتم اشباع الخلايا كل حسب طلبه مع ضرورة مراعاة كميات العرض المتوفرة في كل المنابع.

وحسب مثالنا فان الحل الأساسي الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية يكون كالتالي:

[1] Amor Farouk Benghezal, opcit, pp 173,176

	الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i
وحدة أولى	4 400	5 100	4	500
وحدة ثانية	6	7 500	8 200	700
وحدة ثالثة	4	3	2 250	250
b_i	400	600	450	**1450/1450**

نلاحظ من الجدول أعلاه أن :

. أول خلية هي الخلية التي تربط بين المنطقة الغربية و الوحدة الأولى حيث تم توريع الكمية 400وحدة استنادا الى قاعدة: $400 = X_{11}=\text{Min}[500,400]$ ، و بالتالي يتم تلبية احتياجات المنطقة الغربية و يتبقى 100وحدة في الوحدة الأولى.

. تم الانتقال الى الخلية التي تربط المنطقة الوسطى و الوحدة الأولى حيث تم نقل الكمية 100وحدة استنادا الى قاعدة $X_{12}=\text{Min}[100,6\ 00]= 100$ ، و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الأولى.

. ثم تم الانتقال الى الخلية التي تربط بين المنطقة الوسطى و الوحدة الثانية حيث تم نقل الكمية 500وحدة استنادا الى قاعدة $X_{22}=\text{Min}[700,5\ 00] =500$ ، و بالتالي يتم تلبية احتياجات المنطقة الوسطى و يتبقى 200وحدة في الوحدة الثانية.

. ثم تم الانتقال الى الخلية التي تربط المنطقة الشرقية و الوحدة الثانية حيث تم نقل الكمية 200وحدة استنادا الى قاعدة $X_{23}=\text{Min}[200,450]= 200$ ، و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الثانية.

. ثم تم الانتقال الى الخلية التي تربط المنطقة الشرقية و الوحدة الثالثة حيث تم نقل الكمية 250وحدة استنادا الى قاعدة $X_{33}=\text{Min}[250,2\ 50]= 250$ ، و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الثالثة.

كما نلاحظ أنه بعد عمليات النقل السابقة أن جميع القيم في السطور تساوي قيمة العرض المقابل لها وأن مجموع القيم الموجودة في كل عمود تساوي الطلب المقابل له، ما يعني أن التوزيع الأولي قد اكتمل لأنه تم تصريف كل العرض و تلبية كل الطلب ، لذا يجب التحقق من الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = $m+ n - 1$ أي $5= 3+ 3-1$ (الشرط محقق)

ومنه فان تكلفة الحل الأساسي الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية هي:

$$Z=(400*4)+(100*5)+ (500*7)+ (200*8)+ (250*2)=7700$$

2.1 طريقة أقل تكلفة: تعتبر هذه الطريقة أفضل من سابقتها لأنها تأخذ بعين الاعتبار التكلفة الدنيا، حيث يتم ملء الخلية ذات الأقل تكلفة في الجدول باستخدام نفس القاعدة السابقة، ثم الانتقال الى الخلية الموالية و التي تكون تساويها في التكلفة أو الأكبر منها مباشرة ، وهكذا نستمر في العملية حتى يتم تلبية كل الطلب و توزيع كل العرض.

و بالعودة لمثالنا نجد جدول الحل الأساسي الأولي حسب طريقة أقل تكلفة كما يلي:

	الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i
وحدة أولى	4 400	5	4 100	500
وحدة ثانية	6	7 600	8 100	700
وحدة ثالثة	4	3	2 250	250
b_i	400	600	450	**1450/1450**

نلاحظ من الجدول أعلاه أن:

. أدنى تكلفة في الجدول هي 2 المقابلة للخلية التي تربط بين المنطقة الشرقية و الوحدة الثالثة حيث تم نقل الكمية 250وحدة استنادا الى قاعدة X_{33}=Min[250,45 0]= 250 ، و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الثالثة.

. التكلفة الموالية هي 4 حيث إما يتم النقل من الوحدة الأولى الى المنطقة الغربية أو من الوحدة الأولى الى المنطقة الشرقية، الا أن الاختيار كان للخلية التي تربط بين الوحدة الأولى و المنطقة الغربية بناءا على قاعدة الطلب الأكبر ، حيث تم نقل الكمية 400وحدة استنادا الى قاعدة: 400 = X_{11}=Min[500,400] ، و بالتالي يتم تلبية احتياجات المنطقة الغربية و يتبقى 100وحدة في الوحدة الأولى.

. أما التكلفة الموالية هي 4 المقابلة للخلية التي تربط بين الوحدة الأولى و المنطقة الشرقية ، حيث تم نقل الكمية 100وحدة استنادا الى قاعدة: 100 = X_{13}=Min[100,2 00] ، و بالتالي يتم تلبية احتياجات المنطقة الغربية و لم يتبقى أي كمية في الوحدة الأولى.

. التكلفة الموالية هي 7 المقابلة للخلية التي تربط بين الوحدة الثانية و المنطقة الوسطى ، حيث تم نقل الكمية 600وحدة استنادا الى قاعدة X_{22}=Min[700,6 00] =600 ، و بالتالي يتم تلبية احتياجات المنطقة الوسطى و يتبقى 100وحدة في الوحدة الثانية.

. التكلفة الموالية هي 8 و المقابلة للخلية التي تربط بين الوحدة الثانية و المنطقة الشرقية ،حيث تم نقل الكمية 100وحدة استنادا الى قاعدة X_{23}=Min[100,100]= 100 ، و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الثانية.

وبعدما ما اكتمل التوزيع الأولي لأنه تم تصريف كل العرض و تلبية كل الطلب ، يجب التحقق من الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = $m+n-1$ أي $5=3+3-1$ (الشرط محقق)

و بالتالي فان تكلفة الحل الأساسي الأولي باستخدام طريقة أقل تكلفة هي:

$$Z=(400*4)+(100*4)+(600*7)+(100*8)+(250*2)=7500$$

ملاحظة: في حالة وجود خلايا لها نفس التكلفة يتم التوزيع في الخلية ذات أكبر كمية، أما في حالة تساوي الكميات فيتم الاختيار عشوائيا .

3.1 طريقة فوجل: تعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق الثلاثة في ايجاد الحل الأولي حيث تتميز بقدرة الوصول الى الحل الامثل بأسرع وقت ممكن الا أنها تحتاج الى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتي الشمال الغربي و أقل تكلفة. و تتلخص خطواتها في الآتي:

- ✓ حساب الغرامات لكل سطر و لكل عمود حيث تمثل الغرامة الفرق بين أقل تكلفتين لكل سطر و لكل عمود.
- ✓ اختيار أكبر غرامة محسوبة من الخطوة السابقة.
- ✓ التوزيع في خلية الأقل تكلفة التي تقابل السطر أو العمود ذو الغرامة الأكبر ، وذلك باستخدام قاعدة $X_{ij}=Min[a_i, b_j]$
- ✓ تكرار الخطوات السابقة مع تفادي الخلايا المشبعة حتي يتم تصريف كل العرض و تلبية كل الطلب.

وبتطبيق هذه الطريقة على حالتنا التطبيقية نتحصل على جدول الحل الأساسي الأولي:

	الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i	
وحدة أولى	4 300	5	4 200	500	0 0 1 / /
وحدة ثانية	6 100	7 600	8	700	1 1 1 1 6
وحدة ثالثة	4	3	2 250	250	1 / / / /
b_i	400	600	450	**1450/1450**	
	0	2	2		
	2	2	4		
	2	2	/		

6	7	/
6	/	/

نلاحظ من الجدول أعلاه أن :

. الغرامة الأكبر لأسطر و أعمدة الجدول تمثلت في القيمة 2 حيث تكررت في العمود الثاني و الثالث ليتم اختيار الخلية ذات الأدنى التكلفة و الموافقة للخلية التي تربط بي المنطقة الشرقية و الوحدة الثالثة، وملؤها بالكمية 250 وحدة استنادا الى قاعدة 250 =X_{33}=Min[250,45 0] ، و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الثالثة ليتم الغاء السطر الثالث من الجدول لكونه مشبعا.

. الغرامة الموالية بعد اعادة الحسابات من جديد تمثلت في القيمة 4 ليتم التوزيع في الخلية ذات الأقل التكلفة و التي تربط بين المنطقة الشرقية و الوحدة الأولى ، وذلك بالكمية 200 وحدة استنادا الى قاعدة 200 = X_{13}=Min[500,2 00] ، و بالتالي تم تلبية طلب المنطقة الشرقية ليتم الغاء عمودها.

. الغرامة الموالية بعد اعادة الحسابات من جديد تمثلت في القيمة 2 التي تكررت في العمود الأول و الثاني ليتم اختيار الخلية ذات الأدنى التكلفة و الموافقة للخلية التي تربط بي المنطقة الغربية و الوحدة الأولى، وملؤها بالكمية 300 وحدة استنادا الى قاعدة 300 =X_{11}=Min[300,40 0] . و بالتالي لم يبقى أي كمية في الوحدة الأولى ليتم الغاء السطر الأول من الجدول لكونه مشبعا.

. الغرامة الموالية بعد اعادة الحسابات من جديد تمثلت في القيمة 7 ليتم التوزيع في الخلية ذات الأقل التكلفة و التي تربط بين المنطقة الوسطى و الوحدة الثانية ، وذلك بالكمية 600 وحدة استنادا الى قاعدة 600 = X_{22}=Min[700,6 00] ، و بالتالي تم تلبية طلب المنطقة الوسطى ليتم الغاء عمودها.

. الغرامة الأخيرة تمثلت في القيمة 6 ليتم التوزيع في الخلية ذات الأقل التكلفة و التي تربط بين المنطقة الغربية و الوحدة الثانية ، وذلك بالكمية 100 وحدة استنادا الى قاعدة 100 = X_{21}=Min[100,1 00] . وبالتالي تم اشباع المنطقة الغربية ليتم الغاء عمودها و سطر الوحدة الثانية لكونه مشبعا أيضا.

وبعدما ما اكتمل التوزيع الأولي لأنه تم تصريف كل العرض و تلبية كل الطلب ، يجب التحقق من الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = $n + m - 1$ أي $5 = 3 + 3 - 1$ (الشرط محقق)

و بالتالي فان تكلفة الحل الأساسي الأولي باستخدام طريقة فوجل هي:

$$\mathbf{Z= (300*4)+ (200*4)+ (100*6)+ (600*7)+ (250*2)= 7300}$$

ملاحظة: في حالة تساوي الغرامات يتم التوزيع في الخلية ذات الأقل تكلفة في الصف أو العمود المعني، ، واذا ما تساوت التكلفتين الدنيويتين يتم التوزيع في الخلية التي تأخذ أكبر كمية ، أما اذا كانت الكميات متساوية فيتم الاختيار عشوائيا.

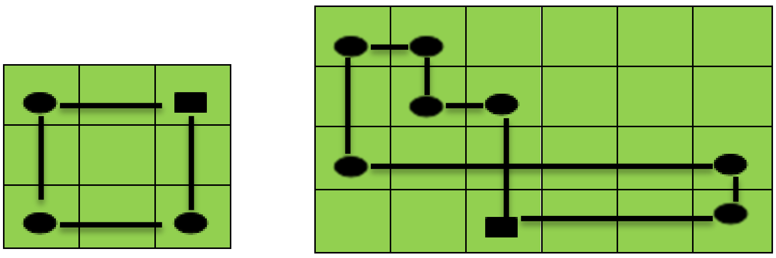
2. مرحلة ايجاد الحل الأمثل:

تعتمد مرحلة ايجاد الحل الأمثل على مرحلة ايجاد الحل الأساسي الأولي حيث يتم اختبار هذا الأخير الذي تم الوصول اليه باحدى الطرق السابقة ، وذلك لمعرفة ما اذا كان يمثل حلا أمثلا أم يمكن ايجاد حل أفضل من هذا الحل. ومن أجل ذلك يتم استخدام احدى الطريقتين التاليتين:

1.2: طريقة الحجر المتنقل: تقوم هذه الطريقة على تخفيض تكلفة النقل الى اقل حد ممكن للوصول الى الحل الأمثل من خلال مراحل متتابعة ، حيث يتم في كل مرحلة ادخال متغير خارج الأساس والذي يمثل هنا الخلية الفارغة(غير مشغولة أو غير مشحونة) عوض متغير الأساس و الذي يمثل الخلية المملوءة،وهو نفس المنهج الذي تقوم عليه طريقة السمبلاكس لايجاد الحل الأمثل[1]. وهذا التغيير في الخلايا يتم بواسطة ما يسمى بالمسار المغلق الذي هو عبارة عن مستقيمات عمودية و أفقية بحيث تقع الخلايا المشغولة و خلية واحدة غير مشغولة عند الزوايا القائمة له، كما ينطلق و ينتهي عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.

والأشكال التالية توضح بعض المسارات المغلقة:

الشكل رقم 02 : بعض الأشكال للمسار المغلق



المصدر: Gerald Baillargon , opcit , p325

و لتوضيح خطوات تطبيق هذه الطريقة سنعتمد على جدول الحل الأولي الذي تم الحصول عليه بطريقة أقل تكلفة و المستخدمة على مثالنا العددي السابق:

[1] Jean Pierre Védrine et autres, opcit, p76

مثال: جدول الحل الأولي بطريقة أقل تكلفة :

	الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i
وحدة أولى	4 400	5	4 100	500
وحدة ثانية	6	7 600	8 100	700
وحدة ثالثة	4	3	2 250	250
b_i	400	600	450	1450/1450

- تحديد الخلايا الفارغة (غير المشغولة) لجدول النقل. وحسب مثالنا نجد أن هناك أربعة خلايا فارغة و المتمثلة في $x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{32}$
- تحديد المسار المغلق الذي تنتمي اليه كل خلية من الخلايا غير المشحونة.
- وضع اشارة (+) للخلية غير المشحونة تعقبها اشارة(−) للخلية التي تليها في المسار ثم اشارة (+) للخلية التي تليها و هكذا لجميع خلايا المسار المغلق. ووفقا للهاتين الخطوتين نتحصل علي ما يلي:

خلية x_{12}:

5 +	4 -100
7 -600	8 +100

خلية x_{21}:

4 400-	5	4 100+
6 +	7 600	8 100-

خلية x_{31} :

4 -400	5	4 100+
6	7 600	8 100
4 +	3	2 250-

خلية x_{32} :

7 -600	8 100+
3 +	2 250-

- حساب التكلفة الحدية لكل مسار وذلك بجمع تكلفة الخلية التي تحمل الاشارة الموجبة و طرح تكلفة الخلية التي تحمل الاشارة السالبة، لنتحصل على احدى الحالات الثلاثة:

✓ تكلفة حدية أكبر من الصفر والتي تعني أن نقل كمية عبر هذه الخلية الفارغة سيؤدي الى زيادة التكاليف.

✓ تكلفة حدية مساوية للصفر و التي تعني أن نقل كمية عبر هذه الخلية الفارغة سيمنح خطة نقل أخرى بنفس خطة النقل الأولى (حل بديل)

✓ تكلفة حدية أقل من الصفر و التي تعني أن نقل كمية عبر هذه الخلية الفارغة سيؤدي الى خفض التكاليف، مما يتطلب الأمر وجوب نقل أكبر كمية عبر هذه الخلية.

وبناءا على ذلك ، فان التكلفة الحدية للمسارات الأربعة هي:

$$X_{12}= 5-4+8-7= 2$$

$$\mathbf{X_{21} = 6-8+4-4 =-2}$$

$$X_{31} = 4-2+4-4 =2$$

$$X_{32}= 3-2+8-7= 2$$

- تحديد متغير الأساس من خلال اختيار المسار المغلق الحاصل على أقل قيمة سالبة (أكبر قيمة مطلقة) من بين المسارات الأخرى. وحسب مثالنا فإنها تتمثل في خلية x_{21}.

- تحديد متغير خارج الأساس من خلال اختيار أقل كمية في الخلايا التي لها اشارة سالبة في المسار المختار . وهي تمثل في حالتنا الخلية x_{23} ذات الكمية 100وحدة.

- نقل كمية متغير خارج الأساس وذلك بإضافتها للخلايا الموجبة للمسار و طرحها من خلايا السالبة للمسار.

وعليه تصبح القيم الجديدة لخلايا مسار الخلية x_{21} كالتالي:

4 / *300*	*5*	*4* / *200*
6 / 100	*7* / *600*	*8*

- حساب دالة الهدف في ضوء تعديل قيم المتغيرات x_{ij}. أي تصبح :

$$Z= (300*4)+ (200*4)+ (100*6)+ (600*7)+ (250*2)= 7300$$

نلاحظ أن الحل قد تحسن بحيث انخفضت قيمة دالة الهدف من القيمة 7500الى القيمة 7300.و للتأكد من أن هذه النتيجة تعبر عن الحل الأمثل يجب القيام بالخطوة الموالية.

▪ تكرار الخطوات السابقة إلى غاية الوصول إلى أن تكون التكلفة الحدية للمسارات المغلقة موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل. وبذلك نجد حسب مثالنا أن عدد الخلايا الفارغة أربعة و مساراتها المغلقة تكون كالتالي:

خلية x_{12}:

4 300-	5 +
6 +100	7 600-

x_{12} ; 5−4+6−7=0

خلية x_{23}:

4 +300	5	4 200-
6 100−	7 600	8 +

X_{23} ;8−4+4−6=2

خلية x_{31} :

4 -300	5	4 200+
6 100	7 600	8
4 +	3	2 250-

x_{31} ; 4−2+4−4=2

خلية x_{32}:

4 300-	5	4 200+
6 +100	7 600-	8
4	3 +	2 250-

X_{32} ; 3−2+4−4+6−7= 0

ما نلاحظه أن التكاليف الحدية للمسارات المغلقة موجبة أو معدومة ، وأنه لا توجد أي تكلفة حدية سالبة ، ومنه لا يمكن نقل أي كمية عبر هذه الخلايا الفارغة وأن الحل المتوصل اليه هو حل أمثل . وبذلك تكون خطة النقل للمسألة بالشكل التالي:

. يتم نقل الكمية 300وحدة من الوحدة الأولى الى المنطقة الغربية بتكلفة قدرها 1200.

. يتم نقل الكمية 200وحدة من الوحدة الأولى الى المنطقة الشرقية بتكلفة قدرها 800.

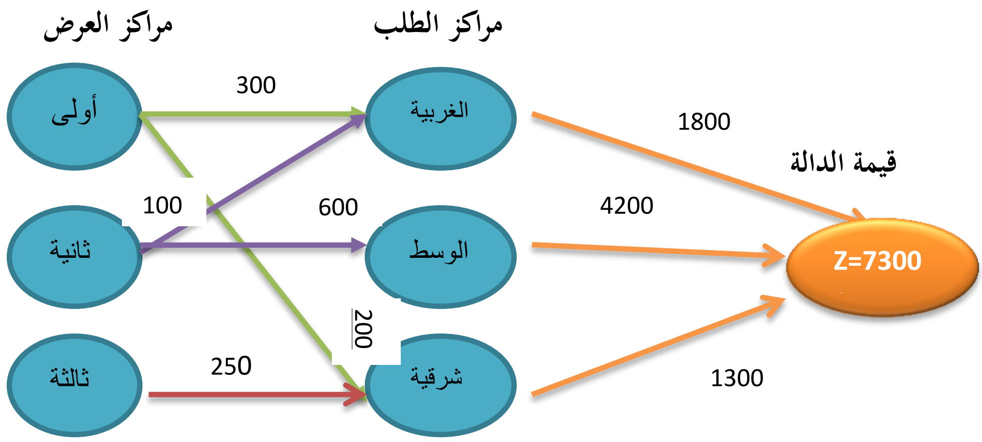
. يتم نقل الكمية 100وحدة من الوحدة الثانية الى المنطقة الغربية بتكلفة قدرها 600.

. يتم نقل الكمية 600وحدة من الوحدة الثانية الى المنطقة الوسطى بتكلفة قدرها 4200.

. يتم نقل الكمية 250وحدة من الوحدة الثالثة الى المنطقة الشرقية بتكلفة قدرها 500.

وهذا بتكلفة نقل اجمالية قدرها 7300وحدة نقدية

بيانيا يمكن توضيح الحل الأمثل بالشكل التالي:



2.2 طريقة التوزيع المعدل: تعتبر هذه الطريقة مرادفة للطريقة السابقة ، الا أنها أكثر سهولة و يسرا في الحصول على الحل الأمثل لقدرتها على تحديد المتغير خارج الأساس الذي يساهم في تخفيض تكاليف النقل دون ضرورة رسم جميع المسارات للخلايا الفارغة ، وذلك من خلال اتباع الخطوات التالية:[1]

- اضافة سطر يسمى (I) و عمود يسمى (J). واذا انطلقنا من الجدول الاولي بطريقة أدنى تكلفة لمثالنا السابق فإننا نتحصل على الجدول التالي:

		الغربية J_1	الوسطى J_2	الشرقية J_3	a_i
وحدة أولى	I_1	4 / 400	5	4 / 100	500
وحدة ثانية	I_2	6	7 / 600	8 / 100	700
وحدة ثالثة	I_3	4	3	2 / 250	250
b_i		400	600	450	1450/1450

[1] علي العلاونة وآخرون، مرجع سابق، ص 275

- حساب معاملات الصفوف و الأعمدة وفقا للعلاقة التالية $C_{ij} = I_i + j_i$ و التي تطبق الا على الخلايا المملوءة ، و هذا بعد اعطاء القيمة صفر (I_i) أو (J_j) التي تقابل السطر أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من الخانات المملوءة. ونجد في مثالنا أن العمود الثالث به أكبر عدد من الخلايا المملوءة لهذا سنضع $J_3=0$ و نحسب باقي القيم بتطبيق العلاقة لنجد ما يلي:

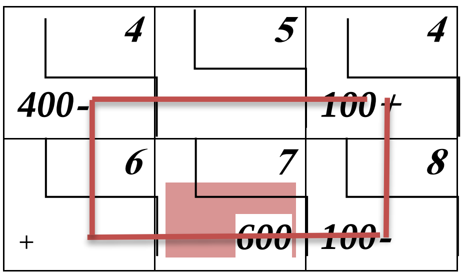
$$C_{13}= I_1+ J_3 \Rightarrow 4= I_1+ 0 \Rightarrow I_1= 4$$
$$C_{23}= I_2+ J_3 \Rightarrow 8= I_2+ 0 \Rightarrow I_2= 8$$
$$C_{33}= I_3+ J_3 \Rightarrow 2= I_3+ 0 \Rightarrow I_3= 2$$
$$C_{22}= I_2+ J_2 \Rightarrow 7= 8+ J_2 \Rightarrow J_2 = -1$$
$$C_{11}= I_1+ J_1 \Rightarrow 4= 4+ J_1 \Rightarrow J_1 = 0$$

- تقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية) وفقا للعلاقة التالية: $E_{ij}= C_{ij}- I_i-J_i$ حيث تمثل E_{ij} التكلفة الحدية و التي على أساسها يتحدد أمثلية الحل (أي كل قيمها يجب أن تكون موجبة أو معدومة). وفي مثالنا نجد ما يلي:

$$E_{12}= C_{12}- I_1-J_2 \Rightarrow E_{12}= 5-4-(-1) \Rightarrow E_{12}= 2$$
$$E_{21}= C_{21}- I_2-J_1 \Rightarrow E_{21}= 6-8-0 \Rightarrow \mathbf{E_{21}= -2}$$
$$E_{31}= C_{31}- I_3-J_1 \Rightarrow E_{31}= 4-2-0 \Rightarrow E_{31}= 2$$
$$E_{32}= C_{32}- I_3-J_2 \Rightarrow E_{32}= 3-2-(-1) \Rightarrow E_{32}= 2$$

- تحديد متغير الأساس من خلال اختيار الخلية غير الأساسية (الفارغة) التي تكون فيها E_{ij} ذات أقل قيمة سالبة ، أي أنها تعطينا أكبر تخفيض ممكن في تكاليف النقل لكل وحدة يتم توزيعها عبر تلك الخلية. و في مثالنا يمكن اعتبار الخلية x_{21} متغيرا داخلا للحل.
- تشكيل مسار مغلق انطلاقا من خلية متغير الأساس و وضع اشارة (+) للخلية غير المشحونة تعقبها اشارة(−) للخلية التي تليها في المسار ثم اشارة (+) للخلية التي تليها و هكذا لجميع خلايا المسار المغلق. وهو ما يمكن توضيحه في الشكل التالي:

خلية x_{21} :



- تحديد متغير خارج الاساس من خلال اختيار أقل كمية في الخلايا التي لها اشارة سالبة في المسار المغلق. وفي مثالنا أقل كمية تحمل اشارة سالبة هي الكمية 100 المقابلة للمتغيرة x_{23} .
- نقل كمية متغيرة خارج الأساس وذلك بإضافتها للخلايا الموجبة للمسار و طرحها من خلايا السالبة للمسار. وعليه تصبح القيم الجديدة لخلايا جدول النقل كالتالي:

	الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i
وحدة أولى	4 300	5	4 200	500
وحدة ثانية	6 100	7 600	8	700
وحدة ثالثة	4	3	2 250	250
b_i	400	600	450	**1450/1450**

- حساب دالة الهدف في ضوء تعديل قيم المتغيرات x_{ij}. أي تصبح :

$$Z= (300*4)+ (200*4)+ (100*6)+ (600*7)+ (250*2)= 7300$$

نلاحظ أن الحل قد تحسن بحيث انخفضت قيمة دالة الهدف من القيمة 7500الى القيمة 7300.و للتأكد من أن هذه النتيجة تعبر عن الحل الأمثل يجب القيام بالخطوة الموالية.

- تكرار الخطوات السابقة إلى غاية الوصول إلى أن تكون قيم E_{ij} للخلايا الفارغة موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل. وبالتالي نجد أن جدول النقل بعد اضافة سطر لـ I وعمود لـ J و حساب المعاملات :

		الغربية	الوسطى	الشرقية	a_i
		$J_1=4$	$J_2=5$	$J_3=4$	
وحدة أولى	$I_1=0$	4 300	5	4 200	500
وحدة ثانية	$I_2=2$	6 100	7 600	8	700
وحدة ثالثة	$I_3=-2$	4	3	2 250	250
b_i		400	600	450	**1450/1450**

وبتطبيق علاقة $E_{ij}= C_{ij}- I_i-J_i$ على الخلايا الفارغة نجد ما يلي:

$$E_{12}= C_{12}- I_1-J_2 \Rightarrow E_{12}= 5-0-5 \Rightarrow E_{12}= 0$$

$$E_{23}= C_{23}- I_2-J_3 \Rightarrow E_{23}= 8-2-4 \Rightarrow E_{23}= 2$$

$$E_{31}= C_{31}- I_3-J_1 \Rightarrow E_{31}= 4-(-2)-4 \Rightarrow E_{31}= 2$$

$$E_{32}= C_{32}- I_3-J_2 \Rightarrow E_{32}= 3-(-2)-5 \Rightarrow E_{32}= 0$$

بما أن كل قيم E_{ij} لخلايا الفارغة كلها موجبة و معدومة فان الحل المتوصل اليه حل أمثل ، وهو نفس الحل المتوصل اليه بطريقة الحجر المتنقل.

ثانيا . في حالة التعظيم:

لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التخفيض، و إنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا و هي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة ومن ثمة التعامل معها على أنها مصفوفة تكلفة الا أنه لابد من مراعاة الاختلافات التالية:[1]

- ايجاد الحل الأولي.
- تحديد متغير الأساس.
- أمثلية الحل.

ولتوضيح هذه الفروقات سنعتمد على المثال التالي كحالة تطبيقية:

مثال: نفرض أن مؤسسة لها ثلاث وحدات انتاجية (تلمسان، عنابة، قسنطينة) ذات طاقة انتاجية مقدرة ب 120،190،190 على التوالي. هذه الوحدات تنتج نوعين من المنتوجات (B.A) وقد كان الطلب عليهما مقدر ب 200، 300على الترتيب.

المطلوب: أوجد التوزيع الأمثل للمنتوجين على الوحدات الانتاجية الثلاث اذا كانت الأرباح المتوقعة لكل وحدة من المنتوج على هذه الوحدات موضحة في الجدول التالي:

منتوج/وحدة	A	B
وحدة تلمسان	10	15
وحدة عنابة	12	7
وحدة قسنطينة	9	9

الحل:

[1] علي العلاونة وآخرون، مرجع سابق، ص 292

1. مرحلة ايجاد الحل الأساسي الأولي:

يتم ايجاد الحل الأولي بنفس الطرق الثلاثة (الزاوية الشمالية الغربية، أقل تكلفة، فوقل) التي تم شرحها في حالة التخفيض مع وجود فارقين أساسيين يتمثلان في أنه في طريقة أقل تكلفة بطريقة التكلفة يتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، وفي طريقة فوقل يتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر و عمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى. وحسب مثالنا يكون كالتالي:

طريقة أقل تكلفة:

	A	***B***	a_i
وحدة تلمسان	*10*	*15* **120**	120
وحدة عنابة	*12* **190**	*7*	190
وحدة قسنطينة	*9* **10**	*9* **180**	190
b_i	200	300	**500/500**

نلاحظ أنه بعد عمليات النقل السابقة أن جميع القيم في السطور تساوي قيمة العرض المقابل لها وأن مجموع القيم الموجودة في كل عمود تساوي الطلب المقابل له، ما يعني أن التوزيع الأولي قد اكتمل لأنه تم تصريف كل العرض و تلبية كل الطلب ، لذا يجب التحقق من الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = $1 - n + m$ أي $1-2+3=4$ (الشرط محقق)

ومنه فان ربح الحل الأساسي الأولي باستخدام طريقة أقل تكلفة هي:

$$Z=(120*15)+(192*12)+(10*9)+(180*9)=5790$$

طريقة فوقل:

	A	B	a_i			
وحدة تلمسان	10	15 **120**	120	5	/	/
وحدة عنابة	12 **190**	7	190	5	5	/
وحدة قسنطينة	9 **10**	9 **190**	190	0	0	0
b_i	200	300	500/500			
	2	6				
	3	2				
	9	9				

بما أن مجموع اقيم الموجودة في كل عمود تساوي كمية الطلب المقابل و كذا مجموع القيم الموجودة في كل سطر تساوي كمية العرض المقابل، فانه يجب التحقق من الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = $m+n-1$ أي $2+3-1=4$ (الشرط محقق)

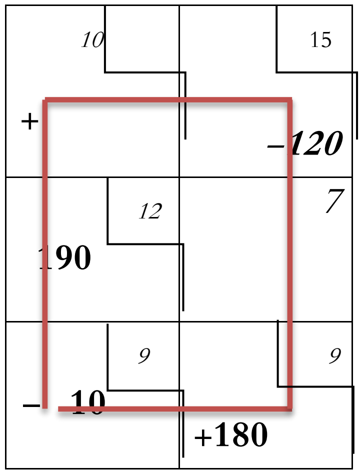
ومنه فان ربح الحل الأساسي الأولي باستخدام طريقة أقل تكلفة هي:

$$Z=(120*15)+(192*12)+(10*9)+(180*9)=5790$$

2. مرحلة ايجاد الحل الأمثل:

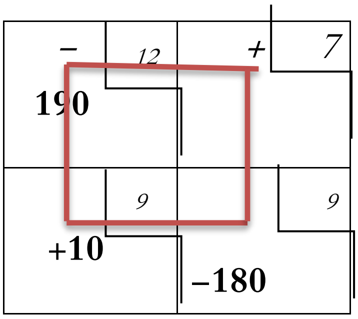
يتم اختبار الحل اما بطريقة الحجر المتنقل أو التوزيع المعدل كما تم شرحهما في حالة التخفيض الا ان الاختلاف يكمن في تحديد المتغيرة الداخلة و التي تمثل هنا الخلية التي تعطي أكبر عائد حدي موجب ، وقياسا على ذلك نحصل على الحل الأمثل لما تعطي جميع الخلايا غير الداخلة في الحل عوائد حدية سالبة. فتختار مثلا في حالتنا التطبيقية على طريقة الحجر المتنقل لنحصل على ما يلي:

خلية X_{11} :



$$X_{11}\,;\ 10-9+9-15=-5$$

خلية X_{22}:



$$X_{22}\,;\ 7-12+9-9=-5$$

نلاحظ أن الأرباح الحدية للخلايا الفارغة سالبة ، ما يعني أنه لا توجد أي خلية يمكن عن طريقها تحسين الحل بزيادة الارباح . وبذلك يمكن القول أن الحل الأولي المتوصل اليه في المرحلة السابقة يمثل الحل الأمثل لهذه المسألة و الذي يمكن تفسيره كما يلي:

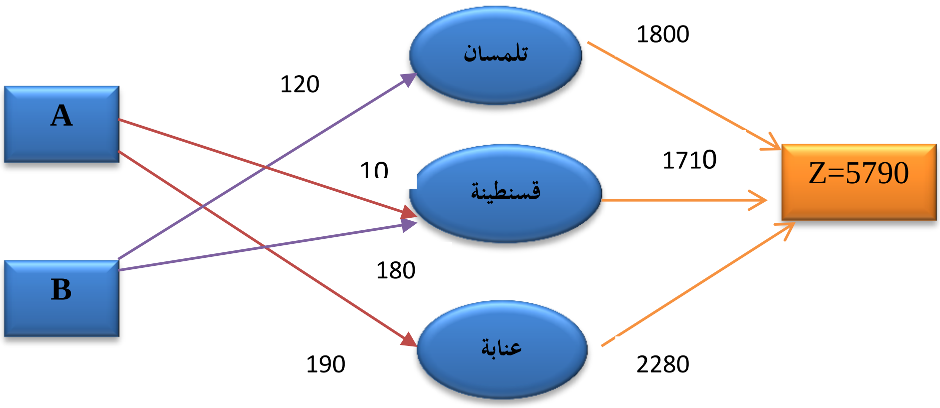
. يتم توزيع الكمية 120وحدة من المنتوج B الى وحدة تلمسان و بعائد قدره 1800و. ن.

.. يتم توزيع الكمية 190وحدة من المنتوج A الى وحدة عنابة و بعائد قدره 2280و. ن.

. يتم توزيع الكمية 10وحدة من المنتوج A الى وحدة قسنطينة و بعائد قدره 90و. ن.

. يتم توزيع الكمية 180وحدة من المنتوج B الى وحدة قسنطينة و بعائد قدره 1620و. ن.

لتحصل المؤسسة على ربح اجمالي قدره 5790 و.ن.



ملاحظة: يمكن حل مسألة النقل من نوع التعظيم بطريقة أخرى و هي تحويل هذه الأخيرة الى مسألة نقل من نوع تخفيض من خلال تحديد أعلى ربح في المسألة و طرح باقي الأرباح منه ثم حل المسألة الجديدة بنفس خطوات الحل السابقة الذكر.

III: الحالات الخاصة في مسائل النقل:

هناك مجموعة من الحالات الخاصة التي تختلف في طبيعتها عن المشكلة التي تم التعامل معها ،و من الحالات الخاصة في مجال النقل نذكر ما يلي:

- ✓ الاخلال بين العرض و الطلب.
- ✓ عدم الانتظام.
- ✓ التوزيع بالطرق الممنوعة.
- ✓ الحلول البديلة
- ✓ تخطيط الانتاج.
- ✓ النقل بمراحل متعددة.

1. حالة الاخلال بين العرض و الطلب:

تمثل الحالة الأكثر شيوعا في مسائل النقل ، اذ كثيرا ما نجد عدم توازن بين العرض و الطلب ، وهذا الأمر يتطلب الموازنة بينهما لحل مسألة النقل ، وذلك من خلال اضافة سطر وهمي اذا كان العرض أكبر من الطلب أو اضافة عمود وهمي اذا كان الطلب أكبر من العرض بتكاليف صفرية و كمية تساوي الفرق بينهما ، ثم اكمال خطوات الحل السابقة[1]. و المثال التالي يوضح ذلك:

مثال: أوجد الحل الأولي لجدولي النقل التاليين:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	11	12	13	2000
O_2	21	22	23	2500
b_i	1600	2400	2000	4500 / 6000

[1] Amor Farouk Benghezal, opcit, p187

	D_1	D_2	D_3	a_i
S_1	2	5	3	110
S_2	3	1	2	90
b_i	40	50	40	130/200

نلاحظ أن مجموع الطلب أكبر من مجموع العرض في الجدول الأول لذا يجب اضافة سطر وهمي بتكاليف صفرية و بكمية تساوي الفرق بينهما أي 6000-4500= 1500، فنحصل على جدول النقل المتوازن الموالي و نطبق عليه طريقة زاوية الشمالي الغربي:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	11 / 1600	12 / 400	13	2000
O_2	21	22 / 2000	23 / 500	2500
O_3	0	0	0 / 1500	1500
b_i	1600	2400	2000	6000 / 6000

$$Z=(1600*11)+(400*12)+(2000*22)+(500*23)+(1500*0)=77900$$

نلاحظ أن مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب في الجدول الأول لذا يجب اضافة عمود وهمي بتكاليف صفرية و بكمية تساوي الفرق بينهما أي 200-130= 70، فنحصل على جدول النقل المتوازن الموالي و نطبق عليه طريقة أقل تكلفة لايجاد الحل الأولي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	2 40	5	3	0 70	110
S_2	3	1 50	2 40	0	90
b_i	40	50	40	70	200/200

Z=(40*2)+(70*0)+(50*1)+(40*2)=210

2. حالة عدم الانتظام:

تظهر هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا المملؤة أقل من m+n-1 سواء كان في جدول الحل الأولي أو أثناء مراحل التحسين ، مما يترتب على ذلك عدم امكانية حساب بعض معاملات الصفوف أو الأعمدة لتقييم الخانات الفارغة ومن ثم عدم امكانية الوصول الى الحل الأمثل . و لمعالجة هذه المشكلة يتم اشغال احدى الخلايا الفارغة بقيمة € هي قيمة صغيرة جدا تؤول الى الصفر) شريطة أن:

- توضع في الخانة ذات الأقل تكلفة.
- أن لا تشكل مسارا مغلقا ، واذا شكلت مسارا نحاول أن تكون من المتغيرات الأساسية المؤشر عليهم ب "+" ومن ثم نواصل الحل وفقا للخطوات المعروفة[1] .

مثال : أوجد الخطة المثلى لنقل السلعة من المخازن نحو فروعها انطلاقا من البيانات الموضحة في الجدول التالي :

المخازن/الفروع	A	B	a_i
الفرع الأول	4	5	80
الفرع الثاني	3	2	20
الفرع الثالث	1	3	40
b_i	80	60	140/140

[1] Amor Farouk Benghezal, opcit, p187

بتطبيق طريقة زاوية الشمال الغربي نحصل على جدول الحل الأولي التالي:

المخازن/الفروع	***A***	***B***	a_i
الفرع الأول	4 80	5	80
الفرع الثاني	3	2 20	20
الفرع الثالث	1	3 40	40
b_i	80	60	**140/140**

$$Z=(80*4)+(20*2)+(40*3)=480$$

نلاحظ أن عدد الخلايا المملوءة 3 في حين أن $m+n-1= 3+2-1=4$ و بالتالي فالحل غير مقبول ، مما يتطلب اضافة € في الخلية x_{31} لأنها تستوفي بالشروط السابقة الذكر ثم يتم ايجاد الحل بطريقة التوزيع المعدل مثلا فنحصل على ما يلي:

المخازن/الفروع		**A**	**B**	a_i
		$J_1=4$	$J_2=6$	
الفرع الأول	$I_1=0$	4 80	5	80
الفرع الثاني	$I_2=-4$	3	2 20	20
الفرع الثالث	$I_3=-3$	1 €	3 40	40
b_i		80	60	**140/140**

وبتطبيق علاقة $\mathbf{E_{ij}= C_{ij}- I_i-J_i}$ على الخلايا الفارغة نجد ما يلي:

$$E_{12}= C_{12}- I_1-J_2 \Rightarrow E_{12}= 5-0-6 \Rightarrow E_{12}= -1$$

$$E_{21}= C_{21}- I_2-J_1 \Rightarrow E_{21}= 3-(-4)-4 \Rightarrow E_{21}= 3$$

نلاحظ أن الحل ليس أمثل لأن هناك قيمة سالبة لـ E_{ij} ، ما يعني أن المتغيرة X_{12} ستكون المتغيرة الداخلة وانطلاقا منها يتم تشكيل المسار لاختيار المتغيرة الخارجة ، فنجد:

الخلية x_{12}:

80–	4	5 +
	3	20 2
+ €	1	40– 3

باختيار المتغيرة الخارجة و المتمثلة في x_{32} واعادة اختبار أمثلية الحل نجد :

المخازن/الفروع		**A**	**B**	a_i
		$J_1=4$	$J_2=5$	
الفرع الأول	$I_1=0$	4 **40**	5 **40**	80
الفرع الثاني	$I_2=-3$	3	**2** **20**	20
الفرع الثالث	$I_3=-3$	1 **40**	3	40
b_i		80	60	**140/140**

نلاحظ أن الحل مقبول لأن عدد الخلايا المملوءة = $1 - n + m$ أي $1-2+3=4$ (الشرط محقق)

و بالتالي فان قيم E_{ij} للخلايا الفارغة هي:

$$E_{22}= C_{21}- I_2-J_1 \Rightarrow E_{21}= 3-(-4)-4 \Rightarrow E_{21}= 3$$

$$E_{22}= C_{32}- I_3-J_2 \Rightarrow E_{21}= 3-(-3)-5 \Rightarrow E_{21}= 1$$

وعليه فان الحل أمثل وقيمة الدالة تساوي:

$$Z=(40*4)+(40*5)+(20*2)+(40*1)=440$$

3. حالة التوزيع بالطرق الممنوعة:

تحدث هذه الحالة عندما لا يتوفر امكانية التوزيع من منبع معين الى مصب معين لأسباب عديدة كعدم رغبة مورد ما التعامل مع زبون ما أو العكس. ويمكن معالجتها ع طريق تحميل الخلية المعنية بتكاليف كبيرة جدا يرمز لها بالرمز ∞ أو تشطيبها من البداية و عدم التعامل معها في جميع خطوات الحل[1].

مثال: أوجد التوزيع الأمثل لمسألة التخفيض التالية اذا علمت أن المورد الثاني لا يمكنه تزويد الزبون الثاني بالسلعة :

	F_1	F_2	F_3	a_i
C_1	5	2	7	400
C_2	7	1	6	200
C_3	10	6	2	150
b_i	50	350	350	750 / 750

في هذه الحالة نضع في الخلية X_{32} القيمة ∞ ثم نواصل الحل بالخطوات المعروفة، فنحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

		F_1	F_2	F_3	a_i
		$J_1=5$	$J_1=2$	$J_1=7$	
C_1	$I_1=0$	(5) 50	(2) 150	(7) 200	400
C_2	$I_2=-1$	(7)	(1) 200	(6)	200
C_3	$I_3=-5$	(10)	(∞)	(2) 150	150
b_i		50	350	350	750 / 750

وبحساب قيم E_{ij} للخلايا الفارغة نجد:

[1] فالتة لمين، مرجع سابق، ص 155

$$E_{21}= C_{21}- I_2-J_1 \Rightarrow E_{21}= 7-5-(-1) \Rightarrow E_{21}= 3$$
$$E_{23}= C_{23}- I_2-J_3 \Rightarrow E_{23}= 6-7-(-1) \Rightarrow E_{23}= 0$$
$$E_{31}= C_{31}- I_3-J_1 \Rightarrow E_{31}= 10-5-(-5) \Rightarrow E_{31}= 10$$

وعليه ، فان الحل أمثل و تكون قيمة الدالة مساوية لـ:

$$Z=(50*5)+(150*2)+(200*7)+(200*1)+(150*2)=2450$$

4. حالة الحلول البديلة:

تشير هذه الحالة الى وجود توزيع آخر بكيفية مختلفة يسمح بالحصول على نفس قيمة دالة الهدف مما يعطي مرونة أكثر لمتخذي القرار في اختيار ما يراه مناسبا ، وذلك عندما تكون نتائج تقييم الخلايا الفارغة (مؤشرات التحسين) فيها ذات قيمة صفرية . ويمكن الوصول الى الحلول البديلة من الجدول الامثل بنفس طريقة عملية التحسين[1]، و المثال التالي يوضح ذلك:

مثال: انطلاقا من المثال السابق أوجد حلا بديلا للمسألة:

بالرجوع الى قيم E_{ij} المحسوبة نجد أن الخلية X_{23} قيمتها تساوي الصفر ما يعني وجود حلا بديلا، وبالتالي نشكل مسارا مغلقا انطلاقا منها لنتحصل على ما يلي:

خلية X_{23}:

2 150+	7 −200
1 200−	6 +

باختيار المتغيرة الخارجة و المتمثلة في X_{13} واعادة اختبار أمثلية الحل نجد :

		F1	F2	F3	ai
		J1=5	J1=2	J1=7	
C1	I1=0	5 50	2 350	7	400
C2	I2=−1	7	1 €	6 200	200
C 3	I3=−5	10	∞	2 150	150
bi		50	350	350	750 750

[1] فالته لمين، مرجع سابق ،ص 140

وبحساب قيم E_{ij} للخلايا الفارغة نجد:

$$E_{13}= C_{13}- I_1-J_3 \Rightarrow E_{13}= 7-0-7 \Rightarrow E_{13}= 0$$

$$E_{21}= C_{21}- I_2-J_1 \Rightarrow E_{21}= 7-5-(-1) \Rightarrow E_{23}= 3$$

$$E_{31}= C_{31}- I_3-J_1 \Rightarrow E_{31}= 10-5-(-5) \Rightarrow E_{31}= 10$$

وعليه ، فان الحل أمثل و تكون قيمة الدالة مساوية لـ:

$$Z=(50*5)+(350 *2)+(200*6))+(150*2)=2450$$

5.حالة تخطيط الانتاج:

تدور مسائل تخطيط الانتاج حول منتج واحد يصنع على فترات زمنية متتالية لمقابلة احتياجات مسبقة ، اذ يمكن تحويلها الى مسائل نقل باعتبار الفترات الزمنية التي يحدث فيها الانتاج كمنابع و الفترات الزمنية التي ينقل فيها المنتج كمنابع و تكون تكلفة الانتاج أو التخزين معروفة[1]. و للتوضيح نورد المثال التالي:

مثال: تخطط مؤسسة بوابة الصحراء لانتاج منتوج معين للأشهر الستة التالية، حيث يبين الجدول الموالي كل البيانات المتعلقة بذلك:

البيان	جانفي	فيفري	مارس	أفريل	ماي	جوان
الطلب	1000	2000	5000	3000	2000	1000
تكلفة الانتاج للوحدة	10	8	7	7	8	9
طاقة الانتاج	3000	4000	4000	5000	4000	3000

كما قدرت تكلفة تخزين الوحدة بـ 1دج شهريا.

المطلوب: تخطيط الانتاج خلال الأشهر الستة حتى تكون التكاليف (الانتاج والتخزين) في حدها الأدنى.

الحل:

بتطبيق خطوات حل مسائل النقل تحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، **بحوث العمليات، سلسلة ملخصات شوم**، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر،ص119

	جانفي	فيفري	مارس	أفريل	ماي	جوان	وهمي	a_i
جانفي	10 1000	11	12	13	14	15	0 2000	3000
فيفري		8 2000	9 1000	10	11	12	0 1000	4000
مارس			7 4000	8	9	10	11	4000
أفريل				7 3000	8	9	0 2000_0	5000
ماي					8 2000	9	0 2000	4000
جوان						9 1000	0 2000	3000
b_i	1000	2000	5000	3000	2000	1000	9000	23000 23000

يمكن شرح جدول الحل الأمثل كما يلي:

. سيتم انتاج 1000وحدة في شهر جانفي و تسويقها في نقس الشهر وذلك بتكلفة انتاج قدرها 10000دج.

.. سيتم انتاج 2000وحدة في شهر فيفري و تسويقها في نقس الشهر وشهر مارس وذلك بتكلفة انتاج وتخزين قدرها 25000دج.

. سيتم انتاج 4000وحدة في شهر مارس و تسويقها في نقس الشهر وذلك بتكلفة انتاج قدرها 28000دج.

. سيتم انتاج 3000وحدة في شهر أفريل و تسويقها في نقس الشهر وذلك بتكلفة انتاج قدرها 21000دج.

. سيتم انتاج 3000وحدة في شهر ماي و تسويقها في نقس الشهر وذلك بتكلفة انتاج قدرها 16000دج.

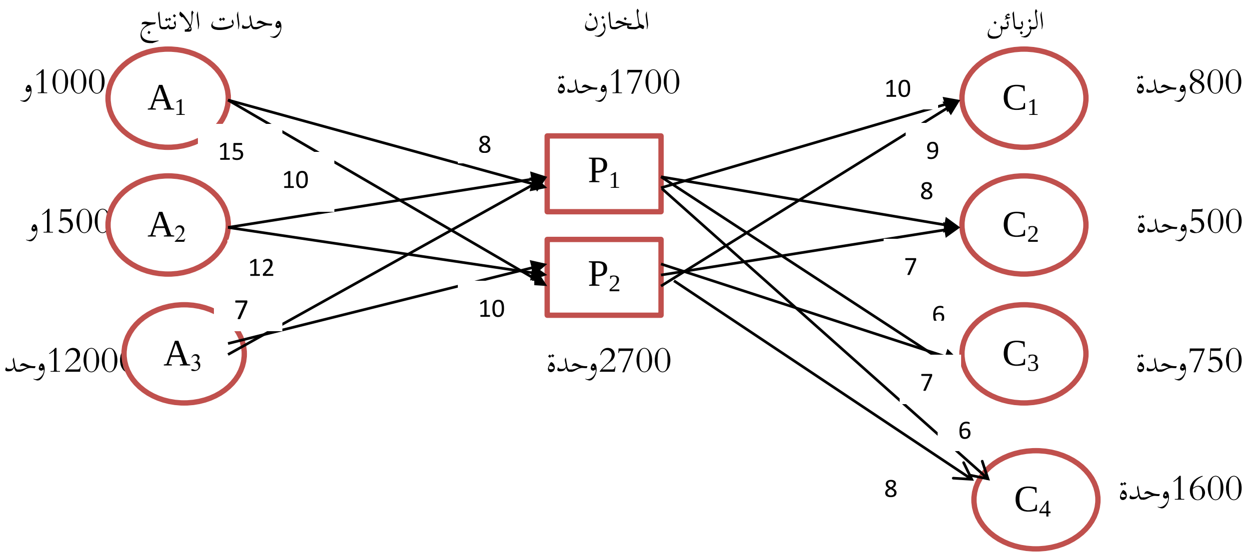
. سيتم انتاج 1000وحدة في شهر جوان و تسويقها في نقس الشهر وذلك بتكلفة انتاج قدرها 9000دج.

وذلك بتكلفة اجمالية قدرها 109000دج.

6. حالة النقل بمراحل متعددة:

في بعض الحالات لا تكون مسألة النقل بسيطة و انما مكونة من مجموعة مراحل بحيث يتم النقل في مرحلة أولى و على اساس نتائجها يتم تكوين المسألة الثانية.

مثال: تقوم مؤسسة الهضاب بتلبية طلبات أربع زبائنها (C_1, C_2, C_3, C_4) بعد أن يتم نقل البضاعة من الوحدات الانتاجية (A_1, A_2, A_3) الى مخزنين (P_1, P_2) ، حيث يمكن تلخيص معلوماتها بيانيا كما يلي:



المطلوب: ايجاد التوزيع الأمثل الذي يحقق أدنى تكلفة نقل البضائع من الوحدات الى الزبائن

الحل:

نلاحظ أن هذه المسألة ذات مرحلتين لأن الوحدات الانتاجية لا يمكنها تزويد الزبائن مباشرة و انما حتى يتم تخزينها . لذا، فان حل المرحلة الأولى يمثل أساس الحل للمرحلة الثانية و بتطبيق خطوات حل مسائل النقل نتحصل على ما يلي:

التوزيع الأمثل للمرحلة الأولى (من الوحدات الانتاجية الى المخازن)

	P_1	P_2	a_i
A_1	8 **1000**	15	1000
A_2	10	12 **1500**	1500
A_3	7 **700**	10 **500**	1200
$A_{artificiel}$	0	0 **700**	700
b_i	1700	2700	4400 / 4400

وبالتالي، فانه يتم:

. نقل الكمية 1000وحدة من الوحدة الانتاجية الأولى الى المخزن الأول بتكلفة قدرها 8000دج.

. نقل الكمية 1500وحدة من الوحدة الانتاجية الثانية الى المخزن الثاني بتكلفة قدرها 18000دج.

. نقل الكمية 700وحدة من الوحدة الانتاجية الثالثة الى المخزن الأول بتكلفة قدرها 4900دج.

. نقل الكمية 500وحدة من الوحدة الانتاجية الثالثة الى المخزن الثاني بتكلفة قدرها 5000دج.

و ذلك بتكلفة اجمالية للمرحلة الأولى بـ 35900دج

التوزيع الأمثل للمرحلة الثانية (من المخازن الى الزبائن)

	C_1	C_2	C_3	C_4	$C_{artificiel}$	a_i
P_1	10	8	6 **100**	6 **1600**	0	1700
P_2	**800** 9	7 **500**	7 **650**	8	**50** 0	2000
b_i	800	500	750	1600	50	3700 3700

وبالتالي، فانه يتم نقل :

. الكمية 800وحدة من المخزن الثاني الى الزبون الأول بتكلفة قدرها 7200دج.

. الكمية 500وحدة من المخزن الثاني الى الزبون الثاني بتكلفة قدرها 3500دج.

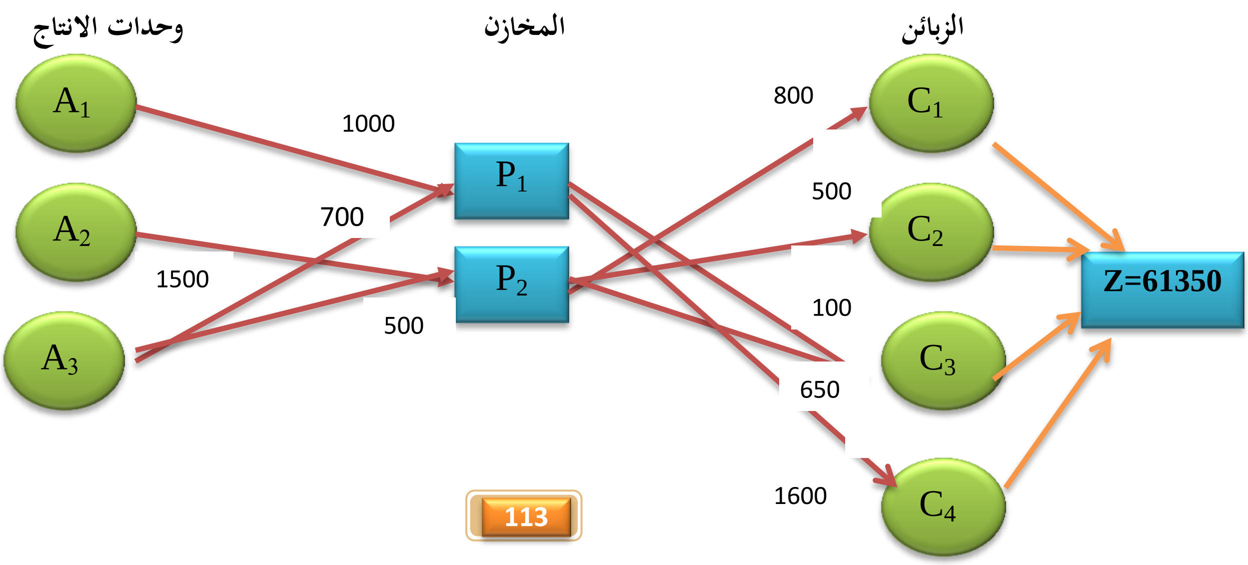
. الكمية 650وحدة من المخزن الثاني و100وحدة من المخزن الأول الى الزبون الثالث بتكلفة 5150دج.

. الكمية 1600وحدة من المخزن الأول الى الزبون الرابع بتكلفة قدرها 9600دج

و ذلك بتكلفة اجمالية للمرحلة الثانية قدرها 25450دج

أما اجمالي تكاليف التوزيع الأمثل للمرحلتين فهو : 35900+ 25450= 61350

بيانيا يمكن توضيح الحل الامثل للمرحلتين كما يلي:



الملخص

يعتبر نموذج النقل من الحالات الخاصة للبرمجة الخطية باعتباره يهدف الى الوصول الى أمثلية التوزيع من منابع مختلفة الى مصبات عديدة بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح ممكن، وحله بطريقة السمبلاكس يتطلب جداول و عمليات حسابية كثيرة . وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ متغيرات المسألة في جدول خاص يسمى بجدول النقل وتطبيق عليه خطوات الحل و المتمثلة في:

- مرحلة ايجاد الحل الأولي: تتعلق بايجاد خطة نقل مبدئية يتم الحصول عليها باستخدام احدى الطرق الثلاث، وهم:
  - ✓ طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
  - ✓ طريقة أقل تكلفة.
  - ✓ طريقة فوقل.
- مرحلة ايجاد الحل الأمثل: تعتمد على المرحل السابقة حيث يتم اختبار الحل الأولي لمعرفة اذا ما كان يمثل حلا أمثلا ، واذا لم يكن كذلك يتم تحسيه الى غاية تحقيق الأمثلية، وذلك باستخدام احدى الطريقتين و المتمثلتين في:
  - ✓ طريقة الحجر المتنقل.
  - ✓ طريقة التوزيع المعدل.

و تتشارك مسائل النقل سواء كانت من نوع التخفيض أو التعظيم في هاتين المرحلتين ، الا أن الاختلاف بينهما يتمثل في:

- ايجاد الحل الأولي في طريقتي أقل تكلفة و فوقل.
- تحديد متغير الأساس.
- أمثلية الحل.

كما أن هناك بعض الحالات الخاصة في مسائل النقل والتي قد تنشأ اما لعدم توفر بعض الشروط كحالتي الاخلال بين العرض و الطلب و عدم الانتظام، أو نتيجة لظروف المسألة كحالة التوزيع بالطرق الممنوعة، و لكل من هذه الحالات طريقة معينة لمعالجتها من أجل الوصول الى الحل الأمثل.

الفصل السابع : مدخل للبرمجة غير الخطية

Introduction à la programmation non linéaire

المهارات المستهدفة:

بعد قراءة هذا الفصل سيكون الطالب قادرا على:

- التمييز بين مختلف مسائل البرمجة غير الخطية.
- حل كل أنواع مسائل البرمجة غير الخطية لاتخاذ القرار الأمثل.

محتوى الفصل:

I. أمثلية المتغير المفرد بقيد و بدون قيد.

1. مفاهيم أساسية.
2. نظريات التفاضل و التكامل لتحديد الحدود الدنيا و العليا.

II. أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود.

1. مفاهيم أساسية.
2. نظريات التفاضل و التكامل لتحديد الامثلية

III. أمثلية متعدد المتغيرات ذو قيود.

1. الصيغة القياسية.
2. طريقة لاغرانج لتحديد الأمثلية.

الملخص

تمهيد:

يمثل البرنامج غير الخطي برنامج رياضي بشكله العام حيث تكون دالة الهدف أو القيود أو كلاهما معا غير خطية ، كما يعتبر من أصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق على أمثل طريقة لحله . و يمكننا في هذا الفصل التمييز بين ثلاث حالات للبرنامج غير الخطي.

I: أمثلية المتغير المفرد بقيد و بدون قيد

1. مفاهيم أساسية :

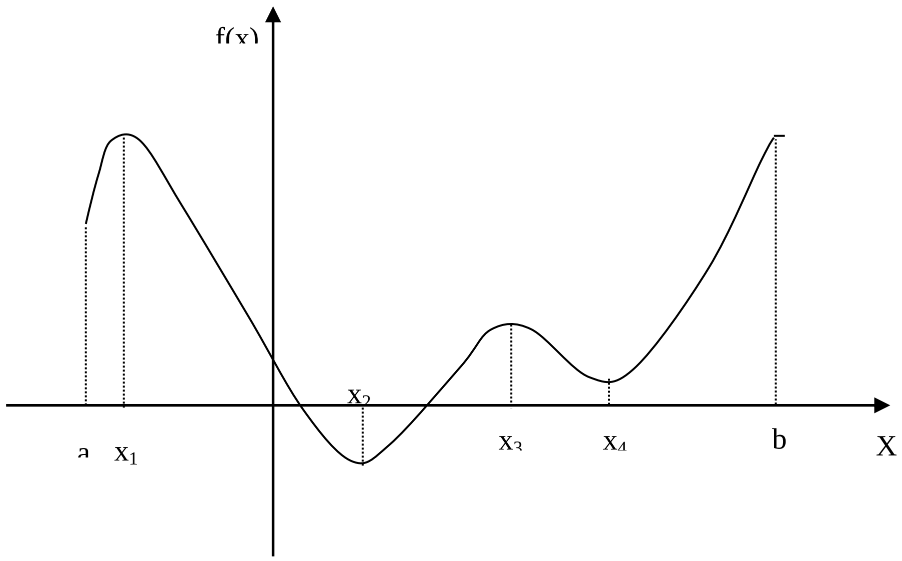
البرنامج غير الخطي المقيد و غير المقيد لمتغير واحد :

يأخذ البرنامج غير الخطي غير المقيد الصيغة الآتية : $\mathbf{y= f(x)}$ حيث أن $f(x)$ دالة غير خطية في المتغير المفرد x، و يكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المقيدة $]-\infty, +\infty[$. أما اذا كانت الفترة مقيدة $[a,b]$ فيكون البرنامج غير الخطي مقيدا لمتغير واحد حيث يأخذ الصيغة التالية: $\mathbf{y= f(x)}$ و $\mathbf{a \leq x \leq b}$.

الأمثلية المحلية و الشاملة:

نقول أن للدالة f حد أدنى محلي عند x_0 اذا وجد مجال محدود ذو مركز x_0 بحيث يحقق $f(x)\geq f(x_0)$ لكل قيم x التي تحدد فيها الدالة ، و اذا تحقق الشرط $f(x)\geq f(x_0)$ مهما كانت قيم x في المجال الذي تحدد فيه الدالة فان الحد الأدنى عند x_0 يكون حدا أدنى شاملا.[1]

مثال:نفرض أن الدالة f و المقيدة في المجال $[a,b]$ تأخذ الشكل البياني التالي:



[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، **بحوث العمليات/ ملخصات سلسلة شوم**، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص135

نلاحظ من الشكل أعلاه أن الدالة لها حدود دنيا محلية عند a, x_2, x_4 و حدود عليا محلية عند b, x_3, x_1. و احدى هذه الحدود الدنيا و العليا مرشحة لتكون حدود شاملة للدالة لكونها تمثل القيم المثلى لها في المجال $[a,b]$. فنجد أن الحد الأدنى عند x_2 يمثل حدا أدنى شاملا باعتباره يمثل أدنى قيمة في المجال المدروس ، في حين نجد أن كل من b, x_1 يمثل حدا أعلى شاملا في نفس المجال باعتبارهما أعلى قيمة يمكن أن تأخذها الدالة في نفس المجال.

2. نظريات التفاضل و التكامل لتحديد الحدود الدنيا و العليا:

تعتمد عملية البحث عن الأمثلية للدوال غير الخطية على تحديد الحدود الدنيا و العليا وفق نظريات التفاضل و التكامل التي نذكرها كما يلي[1]:

- **نظرية (1)**: اذا كانت الدالة f مستمرة في المجال $[a,b]$ ، فان للدالة أمثلية شاملة في هذا المجال.
- **نظرية (2)**: اذا كانت للدالة f أمثلية محلية عند x_0 ، و اذا كانت f قابلة للاشتقاق في المجال المحدود ذات المركز x_0 فان $f(x_0)=0$.
- **نظرية (3)**: اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين في جزء من المجال ذات المركز x_0 ، و اذا كانت $f'(x_0)=0$ و $f''(x_0)>0$، فان للدالة f حد أدنى محلي ، و اذا كانت $f''(x_0)<0$ فان للدالة f حد أعلى محلي.

مثال: حدد الأمثلية للدالة التالية:

$F(x)=|x^2-8|$ ضمن المجال $[-4,4]$ و في حالة التعظيم

الحل:

مجال تعريف الدالة:

$$F(x)=|x^2-8|=\begin{cases} x^2-8 & x\leq -8^{1/2} \\ 8-x^2 & -8^{1/2}\leq x\leq 8^{1/2} \\ X^2-8 & 8^{1/2}\leq x \end{cases}$$

المشتقة الجزئية الأولى:

$$F'(x)=\begin{cases} 2x & x\leq -8^{1/2} \\ -2x & -8^{1/2}\leq x\leq 8^{1/2} \\ 2x & 8^{1/2}\leq x \end{cases}$$

هنا لا توجد المشتقة عند $x=\pm 8^{1/2}$ لأن الدالة f تنعدم عند هاتين القيمتين كما تنعدم الدالة المشتقة عند القيمة الصفر أي $x=0$. و تكون كل الثلاث نقط في المجال $[-4,4]$. و من أجل تحديد الحدود الدنيا و العليا نحسب قيمة الدالة من أجل قيم x عند النقاط الخمسة التالية:

[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، مرجع سابق ، ص 136

X	-4	$-8^{1/2}$	0	$8^{1/2}$	4
F(x)	8	0	8	0	8

وبالتالي فان الحد الأعلى الشامل في المجال [-4،4] هو z=8 و المفترض يكون عند النقط الثلاث $x=0, x=-4,$ $x=4$

II: أمثلية متعددة المتغيرات بدون قيود

1. مفاهيم اساسية:

البرنامج غير الخطي المقيد و غير المقيد لأكثر من متغير :

هو البرنامج الذي يأخذ صيغة $y= f(x)$ حيث $x= [x_1,x_2.....,x_n]^T$ و يكون البحث عن الأمثلية (تعظيم) في جميع المراحل و في الفترة غير المقيدة]$-\infty$، $+\infty$[، و تنطبق جميع النتائج على برامج التصغير اذا استبدلت $f(x)$ بـ $-f(x)$.

الحدود العظمى المحلية و الشاملة:

نسمي الجوار € حول x^* مجموع الأشعة x حيث:

$$(x-x^*)^T(x-x^*)= (x_1-x^*_1)^2+ (x_2-x^*_2)^2+.......+ (x_n-x^*_n)^2\leq €^2$$

ومن منظور الهندسة التحليلية ، يكون الجوار€ حول x^* هو حدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها € و مركزها x^* و يكون للدالة f حد أعلى محلي عند x^* اذا وجد جوار € حول x^* بحيث $f(x)\leq f(x^*)$ من أجل كل قيم x في هذا الجوار الذي تحدد فيه الدالة ، واذا تحقق هذا الشرط من أجل كل قيمة موجبة لـ € فان للدالة حد أعلى شامل عند x^*

الشعاع المتدرج:

نسمي الشعاع المتدرج ∇f المرتبط بالدالة $f(x_1, x_2 .....x_n)$ شعاع المشتقات الجزئية للدالة f من أجل كل مكونات الشعاع x، و نكتب:

$$\nabla f=[\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2.........\partial f/\partial x_n]^T$$

و التعبير $\nabla f|x^*$ يحقق قيمة التدرج عند x^* لأي ازاحة صغيرة من x^* في الاتجاهات المختلفة ، و اتجاه أعلى زيادة في $f(x)$ هو اتجاه في الشعاع $\nabla f|x^*$

مثال: اذا كان لدينا $f(x)= 3x^2_1x_2 - x^2_2x^3_3$ مع $x^*=[1,2,3]^T$

فان الشعاع المتدرج:

$$\nabla f=\begin{Bmatrix} 6x_1x^2 \\ 3x_1^2-2x_2x_3^3 \\ -3x_2^2x_3^2 \end{Bmatrix}$$

حيث أن :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (1)(2) \\ 3(1)^2-2(2)(3^3) \\ -3(2^2)(3^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -105 \\ -108 \end{pmatrix}$$

لذلك فان عند $[1,2,3]^T$ تزيد الدالة بسرعة في الاتجاه $[108-,105-,12]^T$

المصفوفة الهيسية:

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق مرتين في مجال تعريفها ، فان مصفوفة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة f من أجل كل قيم x تسمى بالمصفوفة الهيسية للدالة f من أجل x. و نكتب عندئذ:

$$Hf(x)= [\partial^2 f/ \partial x_i x_j] \ (i,j =1,2........n)$$

و التعبير $Hf|x^*$ يحقق قيمة المصفوفة الهيسية عند x^* .

نظرية: اذا كانت الدالة f مستمرة و قابلة للاشتقاق مرتين على R^n فان المصفوفة الهيسية المتعلقة بالدالة f هي عبارة عن مصفوفة مربعة من الدرجة n و متناظرة .

مثال: انطلاقا من المثال السابق فان المصفوفة الهيسية للدالة f هي:

$$Hf(x)= \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2 & x_1 & 0 \\ 6x_1 & -2x_3^3 & -6x_2x_3^2 \\ 0 & -6x_2x_3^2 & -6x_2^2x_3 \end{pmatrix}$$

2. نظريات التفاضل و التكامل لتحديد الأمثلية

ان البحث عن الأمثلية لدوال الهدف بعدة متغيرات بدون قيود يتم وفق النظريات التالية:[1]

- **نظرية (1):** اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في مجال محدود فانه يكون للدالة حد أعلى شامل أو أدنى شامل في هذا المجال.
- **نظرية (2):** اذا كانت للدالة $f(x)$ حد أعلى محلي (أو حد أدنى محلي) عند x^* و اذا كان الشعاع $\nabla f(x)$ موجودا في جوار € حول x^* فان $\nabla f|x^* = 0$.
- **نظرية (3):** اذا كانت للدالة $f(x)$ مشتقة جزئية ثانية في الجوار €حول x^* ، واذا كان $\nabla f(x^*) = 0$ و $Hf|x^*$ سالبة محددة فان للدالة $f(x)$ حد أعلى محلي عند x^*

ويفهم من ذالك، أنه اذا كانت الدالة مستمرة و قابلة للاشتقاق لعدة مرات في مجال محدد فان لهذه الدالة حد أدنى أو أعلى محلي في هذا المجال عند x^* بحيث يتحقق $\nabla f(x^*) = 0$ و يكون هذا الحد أعلى اذا كانت المصفوفة الهيسية

[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، مرجع سابق ، ص155

للدالة من أجل $x=x^*$ محددة سالبة أو شبه محددة سالبة . و يكون حد أدنى محلي اذا كانت المصفوفة الهيسية للدالة f من أجل $x=x^*$ محددة موجبة أو شبه محددة موجبة.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على R^2 هي: $f(x)= 6x_1^2- 2x_2^2$

المطلوب : التحقق اذا كانت للدالة حد أدنى ؟

الحل:

- ✓ الشعاع المتدرج للدالة $\nabla f=\begin{Bmatrix} 12x_1 \\ -4x_2 \end{Bmatrix}$ و هو ينعدم من أجل النقطة; $x_1=0$, $x_2=0$ وتكون الدالة عندها معدومة
- ✓ المصفوفة الهيسية للدالة $\nabla^2 f(x) =\begin{Bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -4 \end{Bmatrix}$

ومن أجل معرفة ما اذا كانت النقطة المتوصل اليها تمثل حد أدنى أو أعلى نطبق ما يلي:

$(0)(0) -(12)(-4)>0$ و هذا الشرط محقق ، ما يعني أن المصفوفة الهيسية محددة موجبة و بالتالي فان للدالة حد أدنى محلي من أجل $x^*=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

ملاحظة: في بعض الحالات يصعب استخدام التكامل و التفاضل لذا نستخدم الطرق العددية لتقريب الحدود العليا و الدنيا منها: طريقة أقصى ميل صعود، طريقة نيوتن-رافسون، بحث النمط المعدل.

III: أمثلة متعددة المتغيرات ذو قيود

1. الصيغة القياسية

يأخذ البرنامج غير الخطي المقيد الصيغة الرياضية التالية:

$$MinZ / MaxZ = f(x)$$

$$\begin{cases} g_1(x) \leq = \geq b_1 \\ g_2(x) \leq = \geq b_2 \\ \\ g_m(x) \leq = \geq b_m \\ \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ومن المسائل التي يمكن مواجهتها بكثرة في الحياة ا الاقتصادية للبرمجة غير الخطية ذو قيود ، و هي مألوفة لدى طلبة التدرج نذكر ما يلي:

- ✓ تعظيم دوال الانتاج تحت قيد التكاليف بحيث تكون دالة الانتاج على شكل أسي و قيود التكاليف على شكل معادلات أو متراجحات خطية.
- ✓ دالة المنفعة تحت قيد الدخل بحيث تأخذ الدالة شكل أسي و دالة الدخل على شكل خطي.
- ✓ المردود غير التناسبي و هي الحالة التي فيها تعظيم المردود مع وجود ارتباط بي ساعات عمل الآلة مثلا لإنتاج وحدة واحدة من المنتج و مستوى الانتاج ، و بالتالي يكون متغير الانتاج غير ثابت كما هو الحال في البرمجة الخطية.
- ✓ علاقة السعر بالكمية في السوق ، وهي الحالة التي يكون فيها ارتباط بين الكمية المباعة في السوق بالتغير الحاصل في الأسعار، و بالتالي يكون تعظيم الربح مرتبط بعامل الأسعار و العوامل المحددة له، مما يجعلها دالة أرباح غير خطية

2.طريقة لاغرانج(Lagrange) لتحديد الأمثلية:

لا تزال طرق تحديد الامثلية لهذا النوع من البرامج قيد البحث ، الا ان من أشهرها طريقة لاغرانج التي تعتمد هي ايضا على التفاضل بحيث تكون سهلة التطبيق في حالة عدد قليل من القيود .

اذا كان لدينا برنامج من الشكل:

$$\text{Min/Max}Z=f(x)$$
$$\begin{cases} g_i(x)=b_i & i=1,2 \,\ldots\ldots\, m \\ x\varepsilon R \end{cases}$$

f و g دوال قابلة للاشتقاق

فحسب نظرية لاغرانج يكون لدالة الهدف f تحت القيود g_i حد أدنى محلي في R^n اذا تحقق الشرط اللازم (المشتقة الأولى المعدومة) ، ويكون x^* حد أدنى محلي اذا وجدت قيمة حقيقية λ_i ليتحقق الشرط :

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda i \Delta gi(x^*)$$

و يتم تحويل البرنامج حسب طريقة لاغرانج الى برنامج جديد على الشكل التالي:[1]

$$L(x, \lambda_i)=f(x)- \sum_{i=1}^{m} \lambda i g_i(x)$$
$$\begin{cases} \partial L/\partial x_j= 0 \\ \partial L/\partial \lambda_i = 0 \end{cases}$$

ثم يتم حل جملة المعادلات ليتم ايجاد الحل الأمثل .

---

[1] ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، مرجع سابق، 176

مثال:ليكن لدينا البرنامج:

$$MaxZ=2x_1+x_1x_2+3x_2$$

$$\begin{cases} X_1+x_2=3 \\ X_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل بطريقة لاغرانج.

الحل:

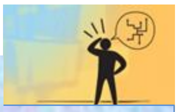
تأخذ دالة لاغرانج لهذا البرنامج الشكل التالي:

$$L(x_1,x_2,\lambda)= 2x_1+x_1x_2+3x_2+\lambda(3- X_1-x_2)$$

و يكون الشرط اللازم لتعظيم دالة لاغرانج هو انعدام المشتقات الجزئية الأولى للدالة :

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1=2+x_2-\lambda =0 \\ \partial L/\partial x_2= x_1+3-\lambda=0 \\ \partial L/\partial \lambda_i= 3-x_1-x_2=0 \end{cases}$$

وبحل جملة المعادلات نتحصل على: $x_1^*=1,\ x_2^*=2,\ \lambda^*= 4,\ z= 10$



الملخص

تعتبر البرمجة غير الخطية من البرامج الرياضية المهمة في مجال اتخاذ القرار الأمثل ، حيث تكون دالة الهدف أو القيود أو كلاهما معا غير خطية .لذا يمكن التمييز بين ثلاث حالات وهي:

- البرامج الغير الخطية بمتغير واحد (بقيد أو بدون قيد).
- البرامج غير الخطية غير المقيدة.
- البرامج الغير الخطية المقيدة.

وبشكل عام ، فانه اذا ما تم صياغة علاقة أو أكثر من العلاقات في صورة غير خطية يمكن حله باستخدام حساب التفاضل للحصول على قيم متغيرات القرار التي تعظم أو تخفض الدالة.

القســـــــم الثــانــي:

تطبيـقــات في رياضيـــات المؤسســـــة

تمارين حول صياغة البرنامج الخطي:

I.تمارين محلولة:

التمرين الأول: يخطط معمل لصناعة الأحذية انتاج ثلاثة أنواع جديدة من الأحذية الرجالية ، حيث يوضح الجدول التالي كمية المادة المستخدمة و زمن انتاج كل زوج من الأحذية:

المنتوج	زمن انتاج زوج واحد(بالدقيقة)	عدد وحدات الجلد لإنتاج زوج واحد
حذاء نوع-1-	115	4
حذاء نوع-2-	85	5.5
حذاء نوع-3-	45	2

لدى المعمل مخزون من المادة الخام مقداره 1500وحدة و الزمن المتاح لا يزيد عنن 1200ساعة عمل ، كما أن تكلفة انتاج زوج واحد من كل نوع هي على الترتيب : 480، 430،320 دج و سعر بيعها هي 600، 640، 500 دج على التوالي.

المطلوب: تحديد نموذج البرمجة الخطية الذي تقترحه لحل هذه المسألة من اجل تعظيم الربح؟

الحل:

تحديد المتغيرات:

x_1: عدد أزواج الأحذية الواجب انتاجها من النوع -1-.

X_2: عدد أزواج الأحذية الواجب انتاجها من النوع -2-.

X_3: عدد أزواج الأحذية الواجب انتاجها من النوع -3-.

دالة الهدف: $MaxZ=(600-480)\ x_1+ (640-430)\ X_2+ (500-320)\ X_3$

قيد المادة الخام: $4x_1+5.5x_2+2x_3\leq 1500$

قيد زمن الانتاج: $115x_1+ 85x_2 +45\ x_3\leq (1200*60)$

قيد عدم السلبية: $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

التمرين الثاني: تقوم الشركة الوطنية للخياطة بخياطة نوعين من القمصان أحدهما للرجال و الآخر للنساء، و تقدر طاقتها البيعية في الأسبوع ب 6000قميص رجال بسعر 350دج للقميص و 3000قميص نساء بسعر 550دج للقميص. كما يتوفر بقسم الخياطة 50عاملا يشتغل كل عامل مدة 10ساعات في اليوم على امتداد 5أيام في الاسبوع.

يستغرق وقت خياطة فميص النساء ضعف الوقت المخصص لخياطة قميص الرجال ، و اذا ما سخر قسم الخياطة جميع طاقاته لإنتاج قميص الرجال فقط فبإمكانه انتاج 1600قميص في اليوم. كما أن التكاليف المتغيرة لقميص رجال يساوي25دج و 40دج لقميص نساء .

المطلوب: اعداد النموذج الرياضي لهذه المسألة ، علما أن هدف المؤسسة هو البحث عن البرنامج الانتاجي الأسبوعي الأمثل الذي يحقق أعظم ربح ممكن.

الحل:

تحديد المتغيرات:

x_1: عدد قمصان الرجال الواجب خياطتها.

X_2: عدد قمصان النساء الواجب خياطتها.

دالة الهدف: $MaxZ=(350-25)\ x_1+(550-40)\ X_2$

قيد الطاقة البيعية للرجال: $x_1 \leq 6000$

قيد الطاقة البيعية للنساء: $x_2 \leq 3000$

قيد الزمن:

بافتراض أن T_1 هو زمن خياطة قميص رجالي ، و T_2 زمن خياطة قميص نساء ، فان:

1600قميص $\longrightarrow$ 500ساعة

1قميص $\longrightarrow$ T_1 $\Rightarrow T_1=1*500/1600=5/16$

$T_2=2\ T_1=2*5/16=10/16$

و بالتالي: $5/16\ x_1+\ 10/16\ x_2 \leq 2500$

قيد عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$:

التمرين الثالث: لضمان جودة الأدوية، تقوم وحدة صناعة الأدوية للصيدلية المركزية بمراقبة قارورات الأدوية بمرورها عبر طاولة ذات اضاءة خاصة اين يراقبها مفتش بالعين المجردة، حيث يسحب كل قارورة غير مليئة أو معابة . في الوقت الحاضر تتوفر وحدة الانتاج على ثلاثة مفتشين يمكن لأي منهم القيام بهذه المهمة غير أن تكلفة و دقة هؤلاء متفاوتة كما هو موضح بالجدول التالي:

المفتش	سرعة الاداء(وحدات/ساعة)	دقة الاداء(%)	الأجر/ساعة
الأول	300	98	15
الثاني	200	99	13
الثالث	350	96	14

تشتغل المؤسسة دورة واحدة في اليوم(8ساعات)، ويجب القيام بتفتيش على الأقل 2000قارورة في اليوم بأقل من 2% من الأخطاء. ونظرا لعامل التعب في عملية المراقبة هذه لا يمكن لأي مفتش تجاوز 4ساعات عمل في اليوم.

المطلوب: تشكيل النموذج الرياضي لهذه المسألة حتى يكون الأجر المدفوع في حده الأدنى.

الحل:

تحديد المتغيرات:

x_1: عدد ساعات عمل المفتش الأول.

X_2: عدد ساعات عمل المفتش الثاني.

X_3: عدد ساعات عمل المفتش الثالث.

دالة الهدف: $MinZ= 15x_1+ 13x_2 + 14x_3$

قيد ساعات عمل المفتشين: $x_1+ x_2 + x_3 = 8$

قيد ساعات عمل المفتش الأول: $x_1\leq 4$

قيد ساعات عمل المفتش الثاني: $x_2\leq 4$

قيد ساعات عمل المفتش الثالث: $x_3\leq 4$

قيد سرعة الأداء: $300x_1+ 200x_2 +350 x_3\geq 20000$

قيد دقة الأداء: $0.98(300x_1)+ 0.99(200x_2) + 0.96(350 x_3)\geq 0.98(300x_1+ 200x_2 +350 x_3)$

قيد عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

II. تمارين مقترحة:

التمرين الأول: يقوم مصنع بإنتاج سلعتين حيث يمر انتاجهما على آلة التصنيع ثم آلة التلميع حيث تقدر تكاليف تشغيلهما للساعة الواحدة بـ 1200دج و1500دج على الترتيب أما تكلفة المادة الأولية لوحدة واحدة من السلعة الأولى فهي 65دج وللسلعة الثانية فهي 90دج . كما يبين الجدول التالي طاقة كل آلة في الساعة الواحدة:

الآلات / السلع	السلعة الاولى	السلعة الثانية
آلة التصنيع	30وحدة/سا	20وحدة/سا
آلة التلميع	25وحدة/سا	12وحدة/سا

بالإضافة الى أن كل آلة لا يمكن تشغيلها أكثر من ساعة كما أن سعر البيع الوحدوي للسلعتين هما على الترتيب 200و 320دج.

المطلوب: تكوين النموذج الرياضي للمسألة بهدف الحصول على أقصى ربح ممكن مع الشرح.

التمرين الثاني: تقوم مؤسسة القصباوية بإنتاج نوعين من الاحذية : احذية شتوية و أحذية صيفية وذلك من خلال تشغيل ثلاث وحدات انتاجية هي : وحدة تلمسان ،وحدة قسنطينة، وحدة عنابة. فاذا افترضنا أن :

. وحدة تلمسان: تقدر طاقتها الانتاجية اليومية من الاحذية الشتوية و الاحذية الصيفية هي على الترتيب40زوج/اليوم،40زوج/اليوم وأن تكلفة التشغيل تقدر بـ 20000دج/اليوم

. وحدة قسنطينة: تقدر طاقتها الانتاجية اليومية من الاحذية الشتوية و الاحذية الصيفية هي على الترتيب40زوج/اليوم،60زوج/اليوم وأن تكلفة التشغيل تقدر بـ 22000دج/اليوم.

. وحدة عنابة: تقدر طاقتها الانتاجية اليومية من الاحذية الشتوية و الاحذية الصيفية هي على الترتيب60زوج/اليوم،10زوج/اليوم وأن تكلفة التشغيل تقدر بـ 18000دج/اليوم.

كما أن المؤسسة قد التزمت بتسليم على الأقل 540زوج من الأحذية الشتوية و على الأقل 650 زوج من الأحذية الصيفية في نهاية كل أسبوع ، ولدى المؤسسة تعاقدات مع العمال تضمن تواجدهم بطول اليوم أو جزء منه .

المطلوب: كتابة النموذج الذي يحدد عدد الأيام الذي يسمح للمؤسسة بالوفاء بالتزاماتها بأقل تكلفة ممكنة.

التمرين الثالث: في اطار الانتخابات التشريعية ، كلف المترشح الحر ادارته بتخطيط حملة دعاية في وسائل الاعلام المختلفة بهدف اقناع الناخبين بمشروعه الانتخابي. وبعد تقسيم الناخبين الى ثلاث فئات ، تمكنت الادارة من الحصول على المعلومات التالية :

	عدد الناخبين المبلغين من التلفاز	عدد الناخبين المبلغين من راديو	عدد الناخبين المبلغين من الصحافة	اجمالي الناخبين
فئة[18، 25)	80	20	10	30000
فئة[25، 40)	50	15	20	16000

من 40سنةفأكثر	40	20	30	26000
تكلفة الرسالة الواحدة	1000	700	550	

من أجل نجاح المترشح من الضروري تبليغ على الأقل 65% من الفئة الأولى ، و على الأقل 45% من الفئة الثانية ، وعلى الأقل 10% من الفئة الثالثة.

المطلوب: كتابة نموذج البرمجة الخطية للمسألة الذي يسمح بتخفيض تكاليف الدعاية.

التمرين الرابع: طلب من السيد محمد الذي يعمل كمسير في مستشفى توفير المكونات الغذائية الأساسية لغذاء مرضى قسم الجراحة العامة، بناءا على توصيات الطبيب المكلف بالقسم ، حيث يجب أن تحتوي وجبة المريض على الأقل: 50وحدةمن البروتين ، 15 وحدة من الفيتامينات، 1200حريرة، وعلى الأكثر 100وحدة من الدسم . لجأ السيد محمد الى المختصين في التغذية للمستشفى الذين أعطوا له الكميات التي جرت العادة شراؤها من الأغذية و المبينة في الجدول التالي :

المكونات/الغذاء	جوت(100 غ)	دجاج(100 غ)	جبن(100 غ)	جزر(كغ)	عجائن(كغ)	بطاطا(كغ)
البروتين	40	50	30	20	22	15
الفيتامين	25	10	20	30	15	25
الدسم	10	20	30	50	100	80
الحريرات	300	500	600	1400	2000	1800
تكلفة الوحدة	دج45/كغ	18دج/كغ	35دج/كغ	6دج/كغ	8دج/كغ	5دج/كغ

المطلوب: اعداد البرنامج الذي يسمح بتحديد مكونات الوجبة بأقل تكلفة مع الحفاظ على صحة المريض.

التمرين الخامس: لدى المؤسسة الوطنية لانتاج الآلات الالكترونية مصنعين لتصنيع الراديو و التلفاز حيت تكلفة الوحدة الواحدة من المنتوجين على الترتيب في المصنع A هي 150دج و 200دج، وفي المصنع B هي 200دج و 250دج. طاقة الانتاج الشهرية تقدر بـ 1200ساعة في A و 1000ساعة في B ، كما أن أوقات التصنيع بالساعة معطاة في الجدول التالي:

المنتوج / المصنع	مصنع a	مصنع b
راديو	0.10	0.15
تلفاز	0.20	0.20

بالاضافة الى أن مخطط الانتاج الشهري محدد من طرف ادارة المؤسسة هو 1000تلفاز و 6000راديو.

المطلوب: وضع المسألة في شكل برمجة خطية من أجل ايجاد الحجم الأمثل لكل مصنع قصد تحقيق أدنى تكلفة.

التمرين السادس: وقع مدير دائرة البرمجة في مشكلة برمجة أوقات عمل الأقسام الانتاجية الثلاث القطع ، الثني والتغليف. يشتغل قسم القطع أيام السبت، الاثنين، الثلاثاء و الأربعاء، أما قسم التغليف فيشتغل يومي الاثنين

و الثلاثاء، بينما قسم الثني فيعمل أيام الأحد، الثلاثاء و الأربعاء. وقد لاحظ المدير أن أكثر الأيام ازدحاما في الأسبوع هي الاثنين و الثلاثاء و الاربعاء ، وان من بين شروط العمل في هذه الأقسام عدم تجاوز 8عمال يوم الاثنين ، و15عاملا يوم الثلاثاء و10عمال يوم الاربعاء.

وقد كانت تكلفة تشغيل العامل الواحد في اليوم لأقسام القطع و التغليف و الثني هي على التوالي: 500، 800، 400دج.

المطلوب: وضع البرنامج الأسبوعي لهذه الأقسام تحل به مشكلة المدير خلال الأيام الثلاثة المذكورة

التمرين السابع: تنتج مؤسسة معينة ثلاث منتوجات P_1، P_2 ، P_3 استعمالا للأجزاء A و B بحيث أن:

وحدة من P_1 تتطلب2 وحدة من A ووحدة منB ، ووحدة من P_2 تتطلب 3 وحدات من A ووحدة من B كما وحدة من P_3 تتطلب 3 وحدات من B فقط .

يستهلك إنتاج A و B للمواد الأولية M_1 ، M_2 بالنسب التالية :

وحدة من Aتتطلب 1 كغ من M_1 و 3 كغ من M_2 ، و وحدة من B تتطلب 3 كغ من M_1 و 1 كغ من M_2، و للمؤسسة مخزون بكمية 4000 كغ من M_1 و 6000 كغ من.M_2 وتتم عملية الإنتاج في ورشتين بحيث يشتغل في الورشة الأولى 10 عمال لمدة 8 ساعات في اليوم و 30 يوم في الشهر ويشتغل في الورشة الثانية 20عامل لمدة 8 ساعات في اليوم 30 يوم في الشهر.

يحتاج المنتوج P_1 إلى % 20 من وحدة النشاط(عدد العمال)في الورشة الأولى و % 20 من وحدة النشاط في الورشة الثانية ، ويحتاج المنتوج P_2 إلى % 50 من وحدة النشاط في الورشة الأولى و % 10 من وحدة النشاط في الورشة الثانية، كما يحتاج المنتوج P_3 إلى % 10 من وحدة النشاط في الورشة الأولى و % 15 من وحدة النشاط في الورشة الثانية .متطلبات السوق بالنسبة للمنتوجات الثلاثة هي كالتالي :200 وحدة للمنتوج الأول شهريا و 100 وحدة للمنتوج الثاني شهريا و 500 وحدة للمنتوج الثالث شهريا.

سعر البيع للمنتوج الأول هو 500دج ، 700 دينار للمنتوج الثاني، 800 دينار للمنتوج الثالث . كما أن التكاليف الإجمالية تقدر ب 200 دينار للمنتوج الأول، 200 دينار للمنتوج الثاني، 300 دينار للمنتوج الثالث.

المطلوب : كتابة البرنامج الخطي المناسب

تمارين حول الطريقة البيانية

I.تمارين محلولة:

التمرين الأول: تنتج مؤسسة النصر منتجين P_1، P_2، مستخدمة مادتين خام و آلتين . الجدول أدناه يوضح استهلاك المواد الخام و كذا الوقت المستغرق على مستوى كل آلة.

	المادة الأولى	المادة الثانية	الآلة الأولى	الآلة الثانية
المنتج P_1	01	05	02	00
المنتج P_2	01	06	01	03

المؤسسة لا تتوفر إلا على 400 وحدة من المادة الخام الأولى أما المادة الخام الأخرى فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 600 و 900 ساعة، و حسب مدير المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب عليها على الأقل إنتاج 150 وحدة من P_1، أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 300 و 200 دج.

المطلوب:1- حدد الكميات الواجب إنتاجها من المنتجين بغرض تحقيق أعظم ربح.

2- حدد كمية المادتين الخام المستخدمتين لإنتاج P_1 و P_2.

3- حدد الوقت المستخدم و غير المستخدم على مستوى الآلتين.

4- حدد القيود المشبعة و غير المشبعة بيانيا و جبريا.

الحل:

1- تحديد الكميات الواجب إنتاجها:

✓ صياغة نموذج البرمجة الخطية:

نفرض أن: x_1: الكمية الواجب انتاجها من المنتوجP_1 .

X_2: الكمية الواجب انتاجها من المنتوجP_2 .

$$Max\ Z= 300\ x_1+200\ x_2$$

قيد المادة الأولى: $x_1+x_2\leq 400$

قيد الآلة الأولى: $2x_1+x_2\leq 600$

قيد الآلة الثانية : $3x_2\leq 900$

قيد المنتج الأول: $x_1\geq 150$

قيد عدم السلبية: $x_1,\ x_2\geq 0$

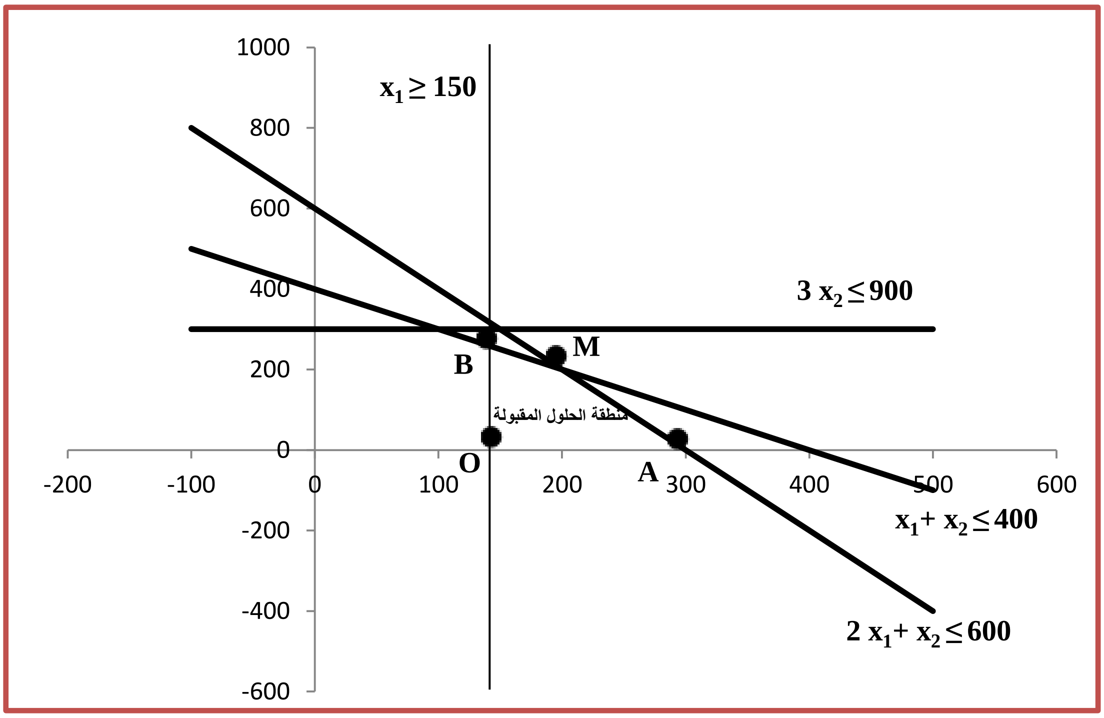
التمثيل البياني للقيود:

$x_1 + x_2=400$	
x_1	x_2
0	400
400	0

$2x_1 + x_2=600$	
x_1	x_2
0	300
600	0

القيد الثالث: $x_2 = 300$

القيد الرابع: $x_1 = 150$



✓ تحديد إحداثيات النقط الرأسية و قيمة دالة الهدف عندها:

النقاط	احداثيات النقاط	قيمة دالة الهدف
0	o :(x_1=150, x_2=0)	$MaxZ_O$=45000
A	A:(x_1=300, x_2=0)	$MaxZ_A$=90000
B	B:(x_1=150, x_2=250)	$MaxZ_B$=95000
C	**C:(x_1=200, x_2=200)**	**$MaxZ_C$=100000**

و عليه فإنه على المؤسسة إنتاج 200 وحدة من المنتج الأول و من 200 وحدة من المنتج الثاني من أجل تحقيق ربح قدره 100000دج.

2- تحديد كمية المادتين الخام المستخدمتين لإنتاج المنتج الأول و المنتج الثاني:

✓ المادة الأولى المستخدمة في إنتاج P_1 و P_2:

$$x_1 + x_2 \leq 400 \quad \Rightarrow \quad 200 + 200 = 400$$

و عليه فإن المادة الخام الأولى مستخدمة بشكل تام (المستخدم = المتاح)

✓ المادة الثانية المستخدمة في إنتاج P_1 و P_2:

$$5\,x_1 + 6\,x_2 \quad \Rightarrow 5\,(200) + 6\,(200) = 2200$$

3- تحديد الوقت المستخدم و غير المستخدم على مستوى الآلتين:

✓ الوقت المستخدم في الآلة الأولى: 400 سا + 200 سا = 600 سا

✓ الوقت غير المستخدم في الآلة الأولى (المتاح – المستخدم): 600 سا – 600 سا = 0 سا

✓ الوقت المستخدم في الآلة الثانية: 600 سا + 0 سا = 600 سا

✓ الوقت غير المستخدم في الآلة الثانية (المتاح – المستخدم): 900 سا – 600 سا = 300 سا

4- تحديد القيود المشبعة و غير المشبعة بيانيا و جبريا:

✓ بيانيا: القيود المشبعة هي مجموع القيود التي تمر عبر الحل الأمثل، و هي:

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$2\,x_1 + x_2 \leq 600$$

أما باقي القيود فهي غير مشبعة لأنها لا تمر بنقطة الحل الأمثل.

✓ جبريا: القيود المشبعة هي مجموع المتراجحات التي تتحقق بالإشارة (=)، و هي:

$$x_1 + x_2 \leq 400$$
$$200 + 200 = 400$$

$$2\,x_1 + x_2 \leq 600$$
$$2(200) + 200 = 600$$

أما باقي القيود فهي غير مشبعة لأنها لا تحقق اشارة المساواة.

التمرين الثاني: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Z = 5\,x_1 + 3\,x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 \geq 3 \\ X_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. في كل حالة من الحالات التالية بين عندما تحتوي منطقة الحلول على منطقة محددة، عدد غير محددة، لا توجد منطقة:

أ. في جميع القيود المعطاة في المسألة.

ب. اذا غيرنا القيد $x_1+x_2\leq 6$ الى $x_1+x_2\leq 2$.

ج. اذا غيرنا القيد $x_1+x_2\leq 6$ الى $x_1+x_2\geq 6$.

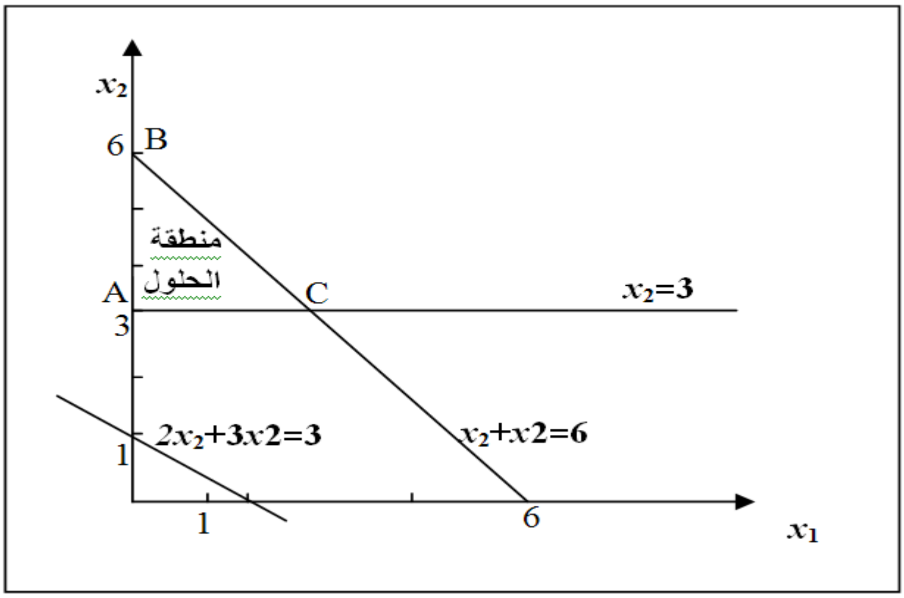
2. في الحالات المذكورة في (1) و التي توجد فيها منطقة حلول، حدد القيم العظمى و الدنيا ل Z .

الحل:

1. تحديد شكل منطقة الحلول في الحالات التالية:

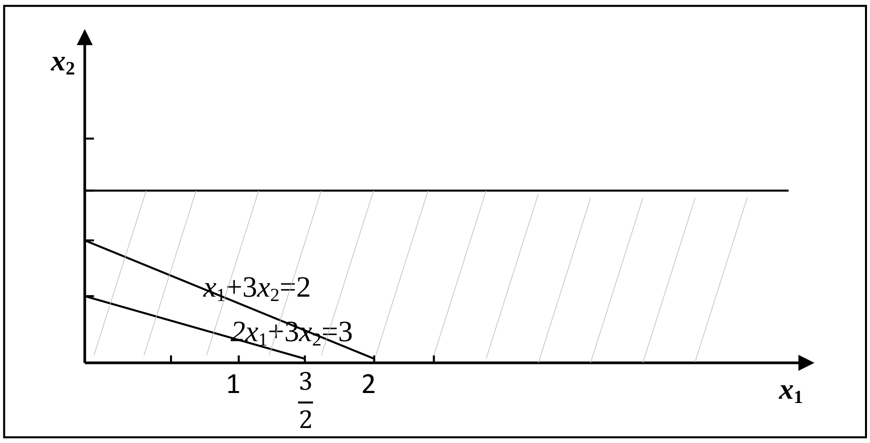
✓ التمثيل البياني للحالة أ:

✓



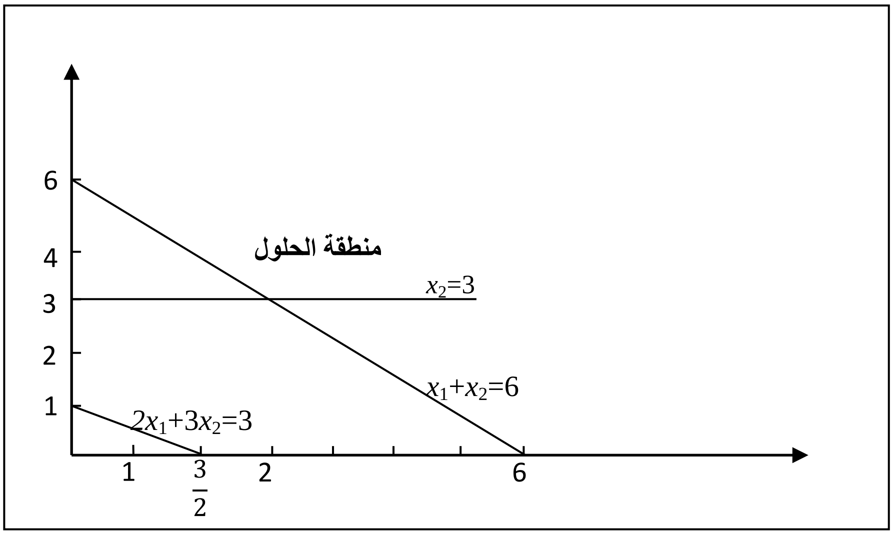
من الرسم البياني نجد أن منطقة الحلول محددة بالنقط A,B ,C

✓ التمثيل البياني للحالة ب:



من الرسم أعلاه يتبين عدم وجود منطقة حلول .

✓ التمثيل البياني للحالة ج:



نلاحظ أن منطقة الحلول غير محددة.

2. حساب قيمة Z:

✓ الحالة أ: $MaxZ_c= 5(3)+3(3)= 24$

$MinZ_a= 5(0)+ 3(3)= 9$

✓ الحالة ج: $MinZ_d= 5(3)+3(3) = 24$

II. تمارين مقترحة:

التمرين الأول: باستخدام الطريقة البيانية أوجد حل لبرامج التعظيم و التخفيض التالية:

$$MaxZ= 150x_1+ 200x_2$$
$$\begin{cases} 20x_1+ 30x_2 \le 240 \\ 10x_1 + 25x_2 \le 500 \\ 15x_1+ 40x_2 \le 550 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$MaxZ=x_1+ x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1+ 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1+ x_2 \le 5 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$MaxZ=10x_1+ 20x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1+ 3x_2 \le 15 \\ 2x_1+ 4x_2 \le 8 \\ X_1+x_2 \le 4 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$MinZ= 80x_1+ 100x_2$$
$$\begin{cases} 8x_1+ 6x_2 \ge 24 \\ 10x_1+ 4x_2 \ge 20 \\ 6x_1+ 12x_2 \ge 24 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$MinZ= 25x_1+ 30x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1+ 7x_2 \ge 1 \\ 8x_1+ 5x_2 \ge 3 \\ 6x_1+ 9x_2 \ge 2 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$MinZ=20x_1+ 30x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1+ 14x_2 \ge 4 \\ 16x_1+ 10x_2 \ge 8 \\ 3x_1+ 9x_2 \ge 6 \\ X_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني: تخطط مؤسسة نقل لاقتناء نوعين جديدين من الحافلات حيث تكلفة الحافلة من النوع الأول مبلغ 4مليون دج و تتسع لـ 20راكبا، في حين تكلفة حافلة من النوع الثاني تساوي 6مليون و تتسع لـ 50راكبا.مع العلم أن المؤسسة لا تتوفر الا على مرآب واحد يتسع لـ 100حافلة على الأكثر ، كما أن القرض الممنوح من البنك محدد بعدم تجاوز مبلغ 480مليون دج. ونظرا لتعدد الأحياء السكنية يجب اقتناء 30حافلة على الأقل من النوع الأول و 20حافلة على الأقل كذلك من النوع الثاني ، كما أن عدد المقاعد الواجب توفيرها يجب ألا يقل عن 2000 مقعد . بالإضافة الى أن عدد الحافلات من النوع الثاني يجب ألا يقل عن ربع الحافلات الاجمالية.

المطلوب: باستعمال الطريقة البيانية، حدد:

. أكبر عدد من الحافلات من النوعين الاول و الثاني.

. أكبر عدد من المقاعد الواجب توفيرها.

التمرين الثالث: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z= 300\ x_1+400\ x_2$$
$$\begin{cases} 5\ x_1-5\ x_2 \le 60 \\ x_1+3\ x_2 \ge 12 \\ x_1-2\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 6 \\ x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: – باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه؛

. هل الحل الأمثل يحقق القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات ؟

. حدد القيود المشبعة و القيود غير المشبعة بيانيا ، و ماذا يعني كل منها ؟

. حدد الربح المترتب عن الكمية المنتجة من المنتج الأول ثم الربح المترتب عن الكمية المنتجة من المنتج الثاني.

التمرين الرابع: حل بيانيا البرنامج التالي في حالة التعظيم ثم في حالة التخفيض. ماذا تلاحظ؟

$$\text{Max}Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الخامس: وضح اذا ما كان البرنامجين التاليين يتضمنان حلولا غير محدودة ، أو حلولا بديلة:

$$\text{Max}Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq -12 \\ 2x_2 \geq 4 \\ X_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max}Z = 4x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 10 \\ X_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين السادس: ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$\text{Max}Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: . ايجاد الحل الأمثل و تحديد قيمة دالة الهدف.

. هل يوجد في هذا البرنامج قيدا زائدا؟ اذا كان موجودا، فما هو؟

. هل يتغير الحل اذا أزيل القيد الزائد من البرنامج؟ وضح ذلك.

التمرين السابع: في اطار انشاء المؤسسات المصغرة تقدم أحد الشباب الى الوكالة الوطنية لدعم و تشغيل الشباب بدراسة اقتصادية للاستثمار في مشروع انتاجي ينتج مبدئيا مالا يتجاوز 1200وحدة ، ومن أجل ذلك لا بد من شراء نوعين من الآلات حيث تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الأول يساوي 20000دج ومن النوع الثاني يساوي 30000دج .

يمكن لآلة من الوع الأول أن تعطي ربحا قدره 2500دج ومن النوع الثاني 3000دج ، كما أن الطاقة الانتاجية لآلة من النوع الأول تقدر بـ 160وحدة و من النوع الثاني 220وحدة. تحصل الشاب على قرض قدره 800000دج من البنك ، المبلغ المخصص لشراء هذه الآلات يجب ألا يتجاوز 20% من أصل القرض ، أما المبلغ المخصص لشراء من الآلات يجب ألا يتجاوز المبلغ المخصص لشراء النوع الأول من الآلات بمبلغ 10000دج . بالإضافة الى ما سبق ، فان المبلغ المخصص لشراء النوع الأول من الآلات يجب ألا يقل عن ربع الميزانية المخصصة لشراء الآلات.

المطلوب: باستعمال الطريقة البيانية أوجد:

. عدد الآلات من كلا النوعين من أجل تحقيق أقصى ربح.

. الطاقة الانتاجية الاجمالية لهذا المشروع الانتاجي

تمارين حول طريقة السمبلاكس

I. تمارين محلولة:

التمرين الأول: تقوم مؤسسة صناعة الألبسة التقليدية بخياطة نوعين من الألبسة هما C2,C1وذلك باستعمال مادتين هما M2,M1، حيث الكميات المتاحة منهما هي على الترتيب 100متر/أسبوع و 90متر/أسبوع، وأيضا استخدام ورشتي عمل هما القص و الخياطة ومادة أولية أخرى للتزيين هي M3. وقد توفرت لدينا المعلومات التالية:

	M1	M2	ورشة القص	ورشة الخياطة	M3
C1	2متر	2متر	2ساعة	0.5ساعة	/
C2	1.5متر	2متر	3ساعة	2ساعة	4ساعة
تكلفة الوحدة	500دج/م	100دج/م	15دج/س	20دج/س	100دج/س
عدد العمال	/	/	4عمال	2عمال	3عمال

علما أن هؤلاء العمال يشتغلون 8ساعات في اليوم على امتداد 6أيام في الأسبوع، وكان سعر البيع لـ C1 2000دج و لـ C2 3000دج.

المطلوب: -إيجاد حجم الإنتاج الأسبوعي من أجل تعظيم الربح بطريقة السمبلاكس.

الحل:

✓ تشكيل النموذج الخطي للمسألة:

تحديد المتغيرات: x_1: عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا من c_1.

X_2: عدد الوحدات الواجب انتاجها أسبوعيا منc_2.

دالة الهدف: لتشكيل دالة الهدف يتطلب الأمر أولا ايجاد الربح الوحدوي و الذي يساوي سعر البيع مطروح منه مجموع التكاليف . و بالتالي نجد ما يلي:

البيان	C_1	C_2
تكلفة M_1	1000=2*500	750=3/2*500
تكلفة M_2	200=2*100	200=2*100
تكلفة ورشة القص	30=2*15	45=3*15
تكلفة ورشة الخياطة	10=1/2*20	40=2*20
تكلفة M_3		400=4*100
مجموع التكاليف	1240دج	1435دج
سعر البيع	2000دج	3000دج
ربح الوحدة	**760دج**	**1565دج**

وبالتالي فان دالة الهدف تكتب بالشكل التالي: $MaxZ = 760x_1 + 1565x_2$

القيود:

قيد المادة M_1: $2x_1 + 3/2x_2 \leq 100$

قيد المادة M_2: $2x_1 + 2x_2 \leq 90$

قيد ورشة القص: $2x_1 + 3x_2 \leq (4*8*6)$

قيد ورشة الخياطة: $1/2x_1 + 2x_2 \leq (2*8*6)$

قيد المادة M_3: $4x_2 \leq (3*8*6)$

قيد عدم السلبية: $x_1, x_2 \geq 0$

✓ حل النموذج الخطي:

كتابة النموذج المعياري:

$$MaxZ = 760x_1 + 1565x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + 0e_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3/2x_2 + e_1 = 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + e_2 = 90 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_3 = 192 \\ 1/2x_1 + 2x_2 + e_4 = 96 \\ 4x_2 + e_5 = 144 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \geq 0 \end{cases}$$

			760	1565	0	0	0	0	0
c_k	V	b_i	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
0	e_1	100	2	3/2	1	0	0	0	0
0	e_2	90	2	2	0	1	0	0	0
0	e_3	192	2	3	0	0	1	0	0
0	e_4	96	½	2	0	0	0	1	0
0	e_5	144	0	4	0	0	0	0	1
Z= 0			-760	-1565	0	0	0	0	0
0	e_1	46	2	0	1	0	0	0	0
0	e_2	18	2	0	0	1	0	0	0
0	e_3	84	2	0	0	0	1	0	0
0	e_4	24	½	0	0	0	0	1	0

1565	x_2	36	0	1	0	0	0	0	¼
Z= 56340			-760	0	0	0	0	0	1565/4
0	e_1	28	0	0	1	1-	0	0	1/8
760	X_1	9	1	0	0	1/2	0	0	-1/4
0	e_3	66	0	0	0	-1	1	0	-1/4
0	e_4	39/2	0	0	0	-1/4	0	1	-3/8
1565	x_2	36	0	1	0	0	0	0	¼
Z=63180			**0**	**0**	**0**	**380**	**0**	**0**	**805/4**

ما نلاحظه من الجدول الأخير أن توليفة الحل الأمثل تتمثل في انتاج 9وحدات أسبوعيا من c_1 و 360وحدة من C_2 من أجل تحقيق ربح أعظمي قدره 63180 و.ن ، وهذا في ظل بقاء 28متر من المادة M_1 و 66 ساعة عمل غير مستغلة في ورشة القص ، و39/2 ساعة عمل غير مستغلة في و رشة الخياطة ، مع استغلال كلي للمادة M_2 و M_3

التمرين الثاني: جزء من الحل الأساسي الأول لجدول السمبلاكس كما يلي:

c_k	X_i	b_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	36	6	2	1	0	0
0	X_4	40	5	5	0	1	0
0	X_5	28	2	4	0	0	1

و جزء من الحل الأمثل لجدول السمبلاكس كما يلي:

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Δ C	0	0	1/2	2/5	0	Z=34

المطلوب: ايجاد دالة الهدف لهذا النموذج.

الحل:

نلاحظ في جدول الحل الأمثل أن قيم X_1، X_2، X_5 في سطر التقييم معدومة ، ما يعني أنها موجودة في خانة الأساس، و بالتالي سوف نقوم بادخال تلك المتغيرات الى الأساس الواحدة تلوى الأخرى دون مراعاة الترتيب مع افتراض ما يلي:

$$MaxZ= Ax_1+ Bx_2$$

جدول الحل رقم 1

			A	B	0	0	0	
c_k	X_i	b_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$b_{i/}$ X_1
0	X_3	36	6	2	1	0	0	36/6=6
0	X_4	40	5	5	0	1	0	40/5=8
0	X_5	28	2	4	0	0	1	28/2=14
Z=0			-A	-B	0	0	0	

جدول الحل رقم 2

			A	B	0	0	0	
c_k	X_i	b_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$b_{i/}$ X_1
A	X_1	6	1	1/3	1/6	0	0	6/1/3=18
0	X_4	10	0	10/3	-5/6	1	0	10/10/3=3
0	X_5	16	0	10/3	-1/3	0	1	16/10/3=24/5
Z=6A			0	1/3A-B	1/6A	0	0	

جدول الحل رقم 3

			A	B	0	0	0
c_k	X_i	b_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A	X_1	5	1	0	¼	-1/10	0
B	X_2	3	0	1	-1/4	3/10	0
0	X_5	6	0	0	½	-1	1
Z=5A+3B			0	0	1/4A-1/4B	-1/10A +3/10B	0

و بمطابقة نتائج هذا الجدول مع الجدول الحل الأمثل المعطي نجد ما يلي:

$$1/4A-1/4B=1/2$$

$$-1/10A+3/10B=2/5$$

و بحل جملة المعادلتين نجد أن :

$$A=5\ ,\ B=3$$

وبالتالي تكون دالة الهدف بالصيغة التالية:

$$\mathbf{MaxZ=5x_1+3x_2}$$

II. تمارين مقترحة:

التمرين الأول: أوجد الصيغة المعيارية و جدول الحل الأساسي الأول للبرامج الخطية التالية:

$$MaxZ=20x_1+15x_2$$
$$\begin{cases} 7x_1+2x_2\geq 14 \\ 8x_1+16x_2\leq 16 \\ 2x_1+5x_2\geq 10 \\ X_1,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$MinZ=3x_1+20x_2+30x_3$$
$$\begin{cases} 6x_1+3x_2-x_3\geq 20 \\ 2x_1-x_2+x_3\geq 15 \\ 15x_1+12x_2+3x_3\geq 6 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$MinZ=x_1-x_2-3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3\geq 1 \\ 4x_1-2x_2+X_3\geq -2 \\ 3X_1+x_3=2 \\ X_1,\ x_2,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني: تقوم مؤسسة مشروبات غازية بتعبئة مشروب غازي في قارورات ذات سعتين مختلفتين النوع الأول قارورات سعتها0.75ل و الوع الثاني سعتها 1.50ل . وقد حددت المؤسسة برنامج إنتاجي سنوي قدر بتعبئة على الأقل 3200000قارورة من النوع الأول و 400000قارورة على الأقل من النوع الثاني.

تتم التعبئة داخل المؤسسة بورشتين (A,B) حيث تختلف كمية القارورات المعبأة من ورشة الى أخرى ، اذ يوضح الجدول التالي عدد القارورات المعبأة في ساعة عمل واحدة لكلا الورشتين:

طاقة الورشات/نوع القارورات	النوع الأول	النوع الثاني
ورشة A	500قارورة/ساعة	400قارورة/ساعة
ورشة B	400قارورة/ ساعة	320قارورة/ ساعة

علما أن طاقة العمل القصوى لكل ورشة هي 4000ساعة عمل سنويا ، و التكلفة الوحدوية لكلا النوعين من القارورات مبينة في الجدول التالي:

	النوع الأول	النوع الثاني
ورشة A	0.4دج	0.75دج
ورشة B	0.55دج	0.85دج

بالإضافة الى ما سبق، يمكن لهذه المؤسسة اللجوء الى مؤسسة أخرى للمشروبات الغازية من أجل تعبئة النوعين بها حيث تقترح عليها تكاليف التعبئة للوحدة الواحدة كما يلي:

0.5دج للقارورة ذات سعة 0.75ل، 1دج للقارورة ذات السعة 1.50ل

المطلوب: إيجاد عدد القارورات الواجب تعبئتها في كل من الورشتين و المؤسسة الأخرى لتحقيق أدنى تكلفة.

التمرين الثالث: تدير منشأة زراعية ثلاث مزارع (c,b,a) مساحتهم على الترتيب (20000، 14000 ، 18000) هكتار. تريد زراعتهم بنوعين من المحاصيل (m, n). الجدول التالي يوضح عدد الوحدات التي ينتجها الهكتار الواحد:

المحصول / المزرعة	مزرعةa	مزرعةb	مزرعةc
M	360	310	380
N	400	350	270

كما أن القدرة الاستيعابية للسوق من المحصول m تتجاوز 100000وحدة

المطلوب: حل النموذج الخطي من أجل تعظيم حجم الانتاج

التمرين الرابع : ليكن لديك جدول السمبلاكس التالي:

c_k	V	b_i	x_1	x_2	X_3	X_4	X_5	X_6
		100	3	0	1	1	-2	0
		200	1	1	0	0	1	0
		400	-5	0	0	200	4	1
	Z=							

علما أن ربح الوحدة من $x_1=20,\ x_2= 30,\ x_3= 25$

المطلوب: . اكمال بيانات الجدول لايجاد الحل الأمثل.

. هل يوجد حل بديل؟ و لماذا؟

التمرين الخامس: حدد نوع الحالة الخاصة للبرامج الخطية التالية:

$$MaxZ=3\,x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1+ x_2\geq\ 5 \\ x_1 \geq 2 \\ 2x_2\geq 8 \\ X_1,\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$MaxZ= 10x_1 + 10x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 \leq 10 \\ 2x_1 +4\ x_2 \leq 1 \\ 4x_2 \leq\ \ 8 \\ x_1,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$MaxZ=3\,x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 4\ x_1+6\ x_2 \leq\ 48 \\ 4x_1 + 2x_2\ \leq 12 \\ 3x_2\geq 2 \\ X_1,\ \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$MaxZ= x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ 2x_1 \leq \\ x_1 + 2x_2 \leq\ 2 \\ x_1,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

التمرين السادس: ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MaxZ= 3\,x_1+5\,x_2$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ 3x_1+2\,x_2 \leq 18 \\ x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: . ايجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلاكس.

. ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

. ماهي نقاط الاشتراك بين طريقة السمبلاكس و طريقة الرسم البياني في كل مرحلة من مراحل الحل.

تمارين حول الثنائية و تحليل الحساسية

I. تمارين محلولة:

التمرين الأول :ليكن النموذج الرياضي الخاص بمسألة إنتاج منتوجين بالاعتماد على أربعة مواد أولية :

$$MAX\ Z = 10X_1 + 9X_2$$

$$\begin{cases} 7/10\,X_1 + X_2 \leq 630 \\ 1/2\,X_1 + X_2 \leq 600 \\ X_1 + 2/3\,X2 \leq 708 \\ 1/10\,X_1 + 1/4\,X_2 \leq 135 \\ X_1 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

كما أن الحل النهائي الخاص به موضح في الجدول التالي:

		x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
x_2	252	0	1	30/16	0	-21/16	0
e_2	120	0	0	-15/16	1	5/32	0
x_1	540	1	0	-20/16	0	30/16	0
e_4	18	0	0	-11/32	0	9/64	1
Z= 7668		0	0	70/16	0	111/16	0

المطلوب:

1. شرح النتائج المتحصل عليها.
2. تشكيل البرنامج النظير واستنتاج الجدول النهائي له.
3. تحديد مدى صلاحية الحل في حالة ما إذا :

أ. مولت المؤسسة بـ 50كغ إضافية من المادة الأولية الأولى.

ب . مولت المؤسسة بـ 200كغ إضافية من المادة الأولية الثالثة.

4. إذا أرادت المؤسسة تغيير أرباح منتوجيها ، فما هو مقدار التغيير لكل منهما حتى تستمر في إنتاج المنتوجين معا.

الحل:

1. شرح النتائج:

✓ يتحقق الانتاج الأمثل بـ 540وحدة من المنتوج الأول و 252وحدة من المنتوج الثاني من أجل تحقيق ربح قدره 7668و.ن.

- ✓ استغلال كلي للمادة الاولية الأولى و الثالثة نظرا لعدم وجودهما ضمن متغيرات الأساس.
- ✓ بقاء ما مقداره 120وحدة من المادة الأولية الثانية و 18وحدة من المادة الأولية الرابعة غير مستغلتين.
- ✓ 70/16: يمثل سعر الظل و الذي يعني أن اضافة وحدة واحدة من المورد e_1 سيؤدي الى زيادة الربح بـ 70/16 و زيادة x_2 بـ 30/16وحدة و انخفاض كل من x_1 و e_2، e_4 بـ 20/16، 20/16و 11/32 على الترتيب.
- ✓ 111/16: يمثل سعر الظل و الذي يعني أن اضافة وحدة واحدة من المورد e_3 سيؤدي الى زيادة الربح بـ 111/16 و انخفاض x_2 بـ 21/16وحدة وزيادة كل من x_1 و e_2، e_4 بـ 30/16، 5/32و 9/64 على الترتيب.

2. تشكيل البرنامج النظير و استنتاج الجدول النهائي له:

- ✓ البرنامج النظير:

$$\mathrm{Min}W = 630\, y_1 + 600\, y_2 + 708\, y_3 + 135 y_4$$

$$\begin{cases} 7/10 y_1 + 1/2 y_2 + y_3 + 1/10 y_4 \geq 10 \\ y_1 + 5/6 y_2 + 2/3 y_3 + 1/4 y_4 \geq 9 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

- ✓ استنتاج الجدول النهائي له:

قبل اشتقاق الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يتم ايجاد الصيغة المعيارية له و المتمثلة في:

$$\mathrm{Min}W = 630\, y_1 + 600\, y_2 + 708\, y_3 + 135 y_4 + 0e_1 + MA_1 + 0e_2 + MA_2$$

$$\begin{cases} 7/10 y_1 + 1/2 y_2 + y_3 + 1/10 y_4 - e_1 + A_1 = 10 \\ y_1 + 5/6 y_2 + 2/3 y_3 + 1/4 y_4 - e_2 + A_2 = 9 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ e_1, A_1, e_2, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

			630	600	708	135	0	0
c_k	V	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	e_1	e_2
630	y_1	70/16	1	15/16	0	11/32	20/16	-30/16
708	y_3	111/16	0	-5/32	1	-9/64	-30/16	21/16
W=7668			0	-120	0	-18	-540	-252

3. تحديد صلاحية الحل:

- ✓ مجال الامكانية للمورد الأول:

$$\begin{cases} 252 + \Delta b_1 (30/16) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_1 \geq -134. \\ 120+\Delta b_1 (-15/16) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_1 \leq 128 \\ 540+ \Delta b_1 (-20/13) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_1 \leq 432 \\ 18+ \Delta b_1 (-11/32) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_1 \leq 576/11 \\ \boldsymbol{\Delta b_1 \in [-134.4\ ,576/11] \Rightarrow b_1 \in [495.6\ ,7506/11]} \end{cases}$$

وبالتالي يبقى الحل صالحا في حالة اضافة *50*وحدة ، ليكون الحل الأمثل كما يلي:

		x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
x_2	345.75	0	1	30/16	0	-21/16	0
e_2	73 .125	0	0	-15/16	1	5/32	0
x_1	477.5	1	0	-20/16	0	30/16	0
e_4	26/32	0	0	-11/32	0	9/64	1
Z= 7886.75		0	0	70/16	0	111/16	0

✓ مجال الامكانية للمورد الثالث:

$$\begin{cases} 252 + \Delta b_3 (-21/16) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_3 \leq 192. \\ 120+\Delta b_3 (5/32) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_3 \geq -768 \\ 540+ \Delta b_3 (30/16) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_3 \geq -288 \\ 18+ \Delta b_3 (9/64) \geq 0 & \Rightarrow \Delta b_3 \geq -128 \\ \boldsymbol{\Delta b_3 \in [-128\ ,\ 192] \Rightarrow b_3 \in [580\ ,900]} \end{cases}$$

بما أن *200*وحدة الاضافية تقع خارج مجال الامكانية فان الحل لن يكون صالحا بل ستتغير توليفة الحل الأمثل.

4. تحديد مقدار التغير في ربح المنتوجين معا:

✓ مجال الأمثلية للمنتوج الأول:

باستبدال معامل المتغير x_1 بالرمز c_1 نعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنتحصل على الجدول التالي:

			x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
9	x_2	252	0	1	30/16	0	-21/16	0
0	e_2	120	0	0	-15/16	1	5/32	0
C_1	x_1	540	1	0	-20/16	0	30/16	0
0	e_4	18	0	0	-11/32	0	9/64	1
$Z= 2268+540c_1$			0	0	$270/16-20/16c_1$	0	$-189/16+30/16c_1$	0

ولكي يكون جدول السمبلاكس جدول الحل الأمثل لابد أن تكون جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة ،
و بالتالي نتحصل على جملة المتراجحات التالية:

$$\begin{cases} 270/16-20/16c_1 \geq 0 & \Rightarrow c_1 \leq 13.5 \\ -189/16+30/16c_1 \geq 0 & \Rightarrow c_1 \geq 6.3 \end{cases}$$

و عليه، فان مجال الأمثلية للمنتوج الأول هو $c_1 \in [6.3,13.5]$

✓ مجال الأمثلية للمنتوج الثاني:

باستبدال معامل المتغير x_2 بالرمز c_2 نعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنتحصل على الجدول التالي:

			x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
C_2	x_2	252	0	1	30/16	0	-21/16	0
0	e_2	120	0	0	-.15/16	1	5/32	0
10	x_1	540	1	0	-20/16	0	30/16	0
0	e_4	18	0	0	.-11/32	0	9/64	1
$Z= 5400+252c_2$			0	0	$-200/16+30/16c_2$	0	$300/16-21/16c_2$	0

ولكي يكون جدول السمبلاكس جدول الحل الأمثل لابد أن تكون جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة ،
و بالتالي نتحصل على جملة المتراجحات التالية:

$$\begin{cases} -200/16+30/16c_2 \geq 0 & \Rightarrow c_2 \geq 20/3 \\ 300/16-21/16c_2 \geq 0 & \Rightarrow c_2 \leq 300/21 \end{cases}$$

و عليه، فان مجال الأمثلية للمنتوج الثاني هو $c_2 \in [20/3, 300/21]$

فحتى تستمر المؤسسة في انتاج المنتوجين معا فان مقدار التغير في ربح المنتوجين هو :

المنتوج الأول: $6.3-10=-3.7 \quad , \quad 13.5-10=3.5 \Rightarrow \Delta c_1 \in [-3.7, 3.5]$

المنتوج الأول: $20/3-9=-7/3 \quad , \quad 300/21-9=111/21 \Rightarrow \Delta c_2 \in [-7/3,111/21]$

التمرين الثاني: مزارع له ارض زراعية مساحتها 150هكتار ، وفي اطار الاستفادة من مياه السد المجاور تمنحه الدولة ما مقداره $440م^3$ وهو ما يكفي لـ 480ساعة عمل . يمكن زراعة هذه الأرض بالطماطم و الفاصولياء على أن لا تتجاوز و في كل الظروف المساحة المخصصة للطماطم 90هكتار ، كما لخصت معطيات المشكلة في الجدول التالي:

	الطماطم	الفاصولياء
ساعات العمل	1	2
الماء($م^3$)	4	2
ربح الهكتار الواحد	100	200

المطلوب: 1. تشكيل النموذج الثنائي للمسألة .

2. قدم التفسير الاقتصادي للنموذج الثنائي.

3. ايجاد الحل الأمثل للنموذج الثنائي بطريقة السمبلاكس.

4. استنتاج الجدول النهائي للبرنامج الأولي لهذه المسألة.

5. ضمن كل حالة من الحالات التالية منفردة بين ما اذا يتغير الحل الأمثل أم لا؟

اذا كان : $b_1= 250$, $b_2= 400$, $c_1= 150$

الحل:

1. تشكيل النموذج الثنائي للمسألة:

✓ صياغة النموذج الأولي للمسألة:

نفرض أن: x_1: عدد الهكتارات الواجب زراعتها من الطماطم .

X_2: عدد الهكتارات الواجب زراعتها من الفاصولياء.

$$\text{Max } Z=100\, x_1+200\, x_2$$

$$\begin{cases} x_1+ x_2 \le 150 & \text{قيد المساحة:} \\ 4\, x_1+ 2x_2 \le 440 & \text{قيد الماء:} \\ x_1+ 2x_2 \le 480 & \text{قيد ساعات العمل:} \\ x_1 \le 90 & \text{قيد الطماطم:} \\ x_1,\ x_2 \ge 0 & \text{قيد عدم السلبية:} \end{cases}$$

✓ البرنامج الثنائي:

$$\text{Min} W = 150\, y_1+ 440\, y_2 +480\, y_3+90y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 +y_3 + y_4 \ge 100 \\ y_1 + 2y_2 +3y_3 \ge 200 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

2.التفسير الاقتصادي للنموذج الثنائي:

✓ المعنى الاقتصادي لمتغيرات و دالة الثنائية:

تشير متغيرات الثنائية الى القيمة الحدية للموارد أي أن:

y_1: تمثل التكلفة الحدية للهكتار الواحد:

y_2: تمثل التكلفة الحدية لـ 1م^3 من الماء.

y_3: تمثل التكلفة الحدية لساعة عمل.

y_4: تمثل التكلفة الحدية لزراعة هكتار واحد من الطماطم.

وبالتالي فان دالة الهدف لها تشير مجموع القيم الحدية للموارد التي نسعى الى تخفيض قيمتها.

✓ المعنى الاقتصادي للقيود:

. يشير القيد الأول الى اجمالي التكاليف الحدية اللازمة لزراعة هكتار واحد من الطماطم ، و التي يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى ربح الهكتار الواحد من الطماطم و المقدر ب 100و.ن.

. يشير القيد الثاني الى اجمالي التكاليف الحدية اللازمة لزراعة هكتار واحد من الفصولياء، و التي يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى ربح الهكتار الواحد من الفاصولياء و المقدر ب 200و.ن.

3. ايجاد الحل الأمثل للثنائية بطريقة السمبلاكس:

قبل حل البرنامج الثنائي يتم ايجاد الصيغة المعيارية له و المتمثلة في:

$$MinW = 150\,y_1 + 440\,y_2 + 480\,y_3 + 90y_4 + 0e_1 + MA_1 + 0e_2 + MA_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 - e_1 + A_1 = 10 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 - e_2 + A_2 = 9 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, e_1, A_1, e_2, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

			150	440	480	90	0	M	0	M
c_k	V	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	e_1	A_1	e_2	A_2
M	A_1	100	1	**4**	1	1	−1	1	0	0
M	A_2	200	1	2	2	0	0	0	−1	1
Z= 300M			**2M−150**	**6M−440**	**3M−480**	**M−90**	**−M**	**0**	**−M**	**0**
440	y_2	25	1/4	1	**1/4**	¼	−1/4	¼	0	0
M	A_2	150	1/2	0	3/2	−1/2	½	−1/2	−1	1
Z= 150M +11000			**1/2M−40**	**0**	**3/2M−70**	**−1/2M+20**	**1/2M−110**	**−3/2M+110**	**−M**	**0**
480	y_3	100	1	4	1	1	−1	1	0	0
M	A_2	0	−1	−6	0	−2	**2**	−2	−1	1
Z=48000			**−M−330**	**−6M +1480**	**0**	**−2M +390**	**2M−480**	**−3M+480**	**−M**	**0**
480	y_3	100	**1/2**	1	1	0	−0	0	−1/2	1/2
0	e_1	0	−1/2	−3	0	−1	**1**	−1	−1/2	1/2
Z=48000			**90**	**40**	**0**	**−90**	**0**	**−M**	**−240**	**−M +240**
150	y_1	200	1	2	2	0	0	0	−1	1
0	e_1	100	0	−2	1	−1	**1**	−1	−1	1
Z=30000			**0**	**−140**	**−180**	**−90**	**0**	**−M**	**−150**	**−M +150**

بما أن قيم سطر التقييم سالبة و معدومة فان الجدول الأخير يمثل الحل النهائي و الأمثل للثنائية.

4.استنتاج الجدول النهائي للبرنامج الأولي:

			100	200	0	0	0	0
			x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
200	x_2	150	1	1	1	0	0	0
0	e_2	140	2	0	−2	1	0	0
0	e_3	180	−1	0	−2	0	1	0
0	e_4	90	1	0	0	0	0	1
Z= 30000			**100**	**0**	**200**	**0**	**0**	**0**

5. توضيح ما اذا كان الحل يتغير أم لا في الحالات التالية:

✓ حالة $c_1=150$:

يتطلب الأمر ايجاد جال الأمثلية لمنتوج الطماطم من خلال استبدال معامل المتغير x_1 بالرمز c_1 لنعيد حساب جدول السمبلاكس من جديد فنتحصل على الجدول التالي:

			C_1	200	0	0	0	0
			x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4
200	x_2	150	1	1	1	0	0	0
0	e_2	140	2	0	-2	1	0	0
0	e_3	180	-1	0	-2	0	1	0
0	e_4	90	1	0	0	0	0	1
Z= 30000			**$200-c_1$**	**0**	**200**	**0**	**0**	**0**

أي : $200-c_1 \geq 0 \;\Rightarrow\; c_1 \leq 200$

نلاحظ أن مجال الأمثلية للطماطم هو $\mathbf{c_1 \in]-\infty,200]}$. و بالتالي لن يتغير الحل اذا كانت قيمة $c_1=150$ لأنها تقع ضمن مجال الأمثلية.

✓ حالة $b_2= 400$:

يتطلب الأمر ايجاد مجال الامكانية للمورد الثاني كما يلي:

$$\begin{cases} 150+ \Delta b_2\,(0) \geq 0 & \text{محقق} \\ 140+\Delta b_2(1) \geq 0 \;\Rightarrow \Delta b_2 \geq -140 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta b_2 \in]-140, +\infty[} \\ 180+ \Delta b_2(0) \geq 0 \;\Rightarrow & \text{محقق} \\ 90+ \Delta b_2(0) \geq 0 \;\Rightarrow & \text{محقق} \end{cases}$$

نلاحظ أن المورد الثاني لا يملك سعر الظل ، و لكي يدخل الحل الامثل ينبغي خفض الاستثمار فيه بمقدار 140و التي تشكل الكمية الفائضة من هذا المورد و التي ظهرت في عمود كميات جدول الحل الامثل،كما أن مجال الامكانية له هو $b_2 \in]300, +\infty[$. و بالتالي فان الحل الأمثل لن يتغير لأن قيمة $b_2= 400$ تقع ضمن مجال الامكانية.

✓ **حالة** $b_1= 250$:

✓ مجال الامكانية للمورد الأول:

$$\begin{cases} 150 + \Delta b_1\,(1) \geq 0 \;\Rightarrow \Delta b_1 \geq -150. \\ 140+\Delta b_1\,(-2) \geq 0 \;\Rightarrow \Delta b_1 \leq 70 \\ 180+ \Delta b_1\,(-2) \geq 0 \;\Rightarrow \Delta b_1 \leq 90 \\ 90+ \Delta b_1(0) \geq 0 \;\Rightarrow\; 90 \geq 0 \\ \mathbf{\Delta b_1 \in [-150\,,70] \Rightarrow \boldsymbol{b_1} \in [0\,,220]} \end{cases}$$

بما أن قيمة $b_1= 250$ فان الحل لن يكون صالح بل ستتغير توليفة الحل لأنها لا تقع ضمن مجال الامكانية للمورد.

II. تمارين مقترحة:

التمرين الأول: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 20\,x_1 + 15\,x_2 + 18\,x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 10\,x_1 + 15\,x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ 0x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } W = 30\,y_1 + 24\,y_2 + 18$$
$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } W = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$$
$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2\,y_3 \leq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأصلية

التمرين الثاني: تسعى مؤسسة المشروبات الغازية الى إنتاج منتوجين جديديين B_1, B_2 حيث تستخدم لذلك أربع مواد أولية:

. يتكون اللتر الواحد من المشروب B_1 من: 0.5لتر من المادة 1، 0.25لتر من المادة2، 0.25لتر من المادة 3

. يتكون اللتر الواحد من المشروبB_2, من: 0.6لتر من المادة 1 و 0.4 لتر من المادة 4

. سعر بيع المشروب الأول هو 2دج للقارورة و 3دج للقارورة من المشروب الثاني

. الكميات المتاحة من المواد الأولية وكذا تكلفة الوحدة من هذه المواد هي كمايلي:

المواد الاولية	الكمية المتاحة	تكلفة 1 لتر
1	25000	1دج
2	15000	0.8دج
3	35000	0.6دج
4	10000	1.6دج

		1.76	0	0	0	0	1.15
V	Q	X_1	X_2	E_1	E_2	E_3	E_4
X_1	10000	1	0	2	0	0	.3
A_2	15000	0	0	.0.5	1	0	0.75
A_3	35000	0	0	.0.5	0	1	0.75
X_2	25000	0	1	0	0	0	2.5
MAXZ=67000		0	0	2.3	0	0	0.95

المطلوب: استخراج النموذج الخطي وإيجاد الحل بطريقة المسألة المعكوسة

. قدم التفسير الاقتصادي للنموذج الثنائي لهذه المسألة

التمرين الثالث: ليكن لديك النموذج الخطي التالي:

$$MinZ = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 3 \\ x_1 + 1/2x_2 \leq 1 \\ 0x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: . أوجد النموذج الثنائي لهذا النموذج الخطي.

. أوجد حل النموذج الثنائي باستخدام طريقة السمبلاكس.

. استنتج حل النموذج الأصلي.

التمرين الرابع: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10x_1 + 9x_2$$

$$\begin{cases} 7/10x_1 + x_2 \leq 630 \\ 1/2x_1 + 5/6x_2 \leq 600 \\ x_1 + 2/3x_2 \leq 708 \\ 1/10x_1 + 1/4 \leq 135 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وأثناء تطبيق طريقة السمبلاكس تم التوصل الى الجدول التالي:

V	b_i	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	E_4
x_2	252	0	1	30/6	0	-21/16	0
e_2	120	0	0	-15/16	1	5/32	0
x_1	80/3	1	0	-20/16	/0	30/16	0
E_4	18	0	0	-11/32	0	9/64	1

المطلوب: . أكمل الجدول

. اشرح الحل الأمثل للجدول النهائي و ماذا تعني قيم سطر التقييم .

. بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار ΔC_2 ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا. و في حال انخفاض هذا الربح بمقدار وحدتين نقديتين هل يبقى الحل أمثلا؟

. بين حدود تغير مختلف الموارد بحيث لا يتغير الحل الذي توصلت اليه.

التمرين الخامس: تعتزم مؤسسة للأسمدة الزراعية القيام بإنتاج نوعين من الأسمدة (B, A) باستخدام ثلاث مواد كيميائية ، حيث:

. لإنتاج كيس واحد من A نحتاج الى 3كغ من M_1 و 4كغ من M_2 و5كغ من M_3 .

. لإنتاج كيس واحد من Bنحتاج الى 6كغ من M_1 و 2كغ من M_2 و1كغ من M_3

في حين أن الكمية المتاحة من المواد الثلاثة (M_3, M_2, M_1) على الترتيب 120كغ، 70كغ، 90كغ ، و أن الربح للكيس الواحد من A و B على التوالي هو 20 و 25 دج.

المطلوب: . ايجاد توليفة الانتاج المثلى التي تحقق أعظم ربح ممكن.

. ما أثر زياد الربح لـ A الى 25دج على قيمة دالة الهدف ، و هل سيبقى الحل أمثلا أم لا؟

. نفس السؤال لو ارتفعت الكمية المتاحة من المادة M_2 الى 100كغ.

.

تمارين حول نموذج النقل

I.تمارين محلولة:

التمرين الأول: الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	**500**
O_2	06	04	10	11	**700**
O_3	10	09	12	04	**800**
b_i	**400**	**900**	**200**	**500**	**2000**

المطلوب:1- صياغة نموذج النقل الموافق لهذه المسألة.

2- ايجاد الحل الأولي لهذه السألة حسب طرق الحل المختلفة

الحل:

1. صياغة نموذج النقل:

تحديد المتغيرات:

X_{IJ}: عدد الوحدات المنقولة من مركز الانتاج Qالى مركز التوزيعD

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z= 12\, x_{11}+ 13\, x_{12}+ 4\, x_{13}+ 6\, x_{14} + 6\, x_{21} +4\, x_{22} +10\, x_{23} +11\, x_{24} + 10\, x_{31}+ 9\, x_{32}+ 12\, x_{33} +4\, x_{34}$$

قيود العرض:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 500$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 700$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 800$$

قيود الطلب:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 400$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 900$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 500$$

قيود عدم سلبية المتغيرات : $x_{ij} \geq 0$

2.**ايجاد الحل الأولي:**

طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 **400**	13 **100**	04	06	500
O_2	06	04 **700**	10	11	700
O_3	10	09 **100**	12 **200**	04 **500**	800
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (400)+13 (100)+ 4 (700)+ 9 (100)+12 (200)+4 (500) = 14200

طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 **300**	13	04 **200**	06	500
O_2	06 /	04 **700**	10	11	700
O_3	10 **100**	09 **200**	12	04 **500**	800
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (300)+ 4 (200)+ 4 (700)+ 10 (100)+9 (200)+ 4 (500) = 10400

طريقة فوقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12	13	04 200	06 300	500
O_2	06	04 700	10	11	700
O_3	10 400	09 200	12	04 200	800
b_i	500	900	200	500	2000

$$Min\ Z = 4\ (200) + 6\ (300) + 4\ (700) + 10\ (400) + 9\ (200) + 4\ (200) = 12000$$

التمرين الثاني: تحتاج الجزائر لثلاثة أنواع من الحبوب: القمح، الشعير و الذرة لأجل زراعتها في الموسم القادم . وقد أبدت فرنسا، كندا و اسبانيا استعدادهم لتلبية هذه الحاجة بالكميات التالية(40000، 50000، 30000) طن على الترتيب ، أما كميات الطلب عن هذه الحبوب و تكلفة الشراء للطن الواحد معطاة كما يلي:

حجم الطلب	تكلفة الشراء من الحبوب بالدولار			
حجم الطلب	اسبانيا	كندا	فرنسا	أنواع الحبوب
60000	7	1	5	قمح
40000	6	4	3	شعير
20000	3	2	6	ذرة

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل الذي يجعل مجموع تكاليف الشراء في حدها الأدنى باستخدام طريقة الحجر المتنقل.

الحل:

لإيجاد الحل الأولي سنستخدم طريقة أقل تكلفة لنتحصل على جدول النقل التالي:

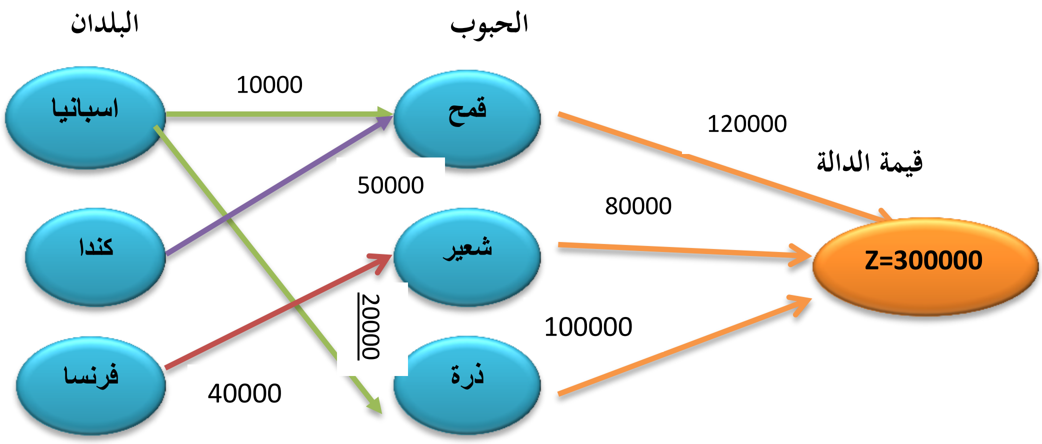
	قمح	شعير	ذرة	a_i
اسبانيا	7 **10000**	6	5 **20000**	30000
كندا	1 **50000**	4	3	50000
فرنسا	5 **€**	2 **40000**	6	40000
b_i	60000	40000	20000	120000

$$MinZ = (10000*7) + (20000*5) + (50000*1) + (40000*2) = 300000$$

قبل ما نختبر أمثلية الحل باستخدام طريقة الحجر المتنقل نلاحظ من الجدول أعلاه أن عدد الخلايا المملوءة أقل من $m+n-1$، وهذا لا يسمح بتكوين مسارات مغلقة وهي حالة خاصة (حالة عدم الانتظام) ، لذلك خصصنا القيمة€ في الخلية الفارغة التي تستوفي بشروط اضافتها ، وهنا وضعت في الخلية x_{31} . وعلى هذا الأساس فان المسارات المغلقة للخلايا الفارغة وتكلفتها الحدية هي كالتالي:

التكلفة الحدية	المسار المغلق	الخلية الفارغة
6-7+5-2=2	$X_{12}-x_{11}-x_{31}-x_{32}$	X_{12}
4-1+5-2=6	$X_{22}-x_{21}-x_{31}-x_{32}$	X_{22}
3-1+7-5=4	$X_{23}-x_{21}-x_{11}-x_{13}$	X_{23}
6-5+7-5=3	$X_{33}-x_{31}-x_{11}-x_{13}$	X_{33}

بما أن التكاليف الحدية للخلايا الفارغة موجبة فان الحل الأولي هو الحل الأمثل بحيث يتم التوزيع كما يلي:



التمرين الثالث: تحتوي مؤسسة النصر على أربعة وحدات انتاجية تختص في صناعة المنتوج (Z) ، طاقتها الانتاجية الاجمالية تقدر بـ 2000طن /شهريا،30% منها يتم انتاجه بالوحدة الأولى بتكلفة قدرها 60دج/طن، و 10% بالوحدة الثانية بتكلفة انتاجية قدرها 80دج/طن، و45% بالوحدة الثالثة بتكلفة انتاج 60دج/طن ، مما تكلفة الانتاج بالوحدة الرابعة فهي 70دج/طن . يجب على هذه الوحدات تموين ثلاثة مراكز بالكمية 800طن في الشهر للمركز الأول و 650طن /الشهر بالنسبة للمركز الثاني و 550طن /الشهر للمركز الثالث. و الجدول التالي يبين تكاليف النقل للطن الواحد من مختلف الوحدات الى مختلف المراكز:

الوحدات/المراكز	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
الوحدة الأولى	30	32	32
الوحدة الثانية	13	15	15
الوحدة الثالثة	34	36	36
الوحدة الرابعة	25	27	27

المطلوب: اذا علمت أن سعر البيع هو 200دج للطن الواحد، فأوجد:

1 . أفضل خطة لتموين المراكز من أجل تعظيم الربح ، مستخدما طريقة التوزيع المعدل.

2 . حلين بديلين ان وجدا.

الحل:

1. لايجاد أفضل خطة لتموين المراكز نقوم بـ:

أولا:حساب اجمالي التكاليف(نقل +انتاج)

وحدات/مراكز	اول	ثاني	ثالث
اولى	90	92	92
ثانية	93	95	95
ثالثة	94	96	96
رابعة	95	97	97

ثانيا: حساب الربح(سعر البيع-مجموع التكاليف)

وحدات/مراكز	اول	ثاني	ثالث
اولى	110	108	108
ثانية	107	105	105
ثالثة	106	104	104
رابعة	105	103	103

ثالثا: ايجاد مصفوفة التكاليف: سنستخدم هنا الطريقة الثانية المشار اليها في الملاحظة في حالة التعظيم حيث سنختار أكبر ربح وهو 110 وطرحه من جميع الأرباح لنتحصل على مصفوفة التكاليف التالية :

وحدات/مراكز	اول	ثاني	ثالث
اولى	0	2	2
ثانية	3	5	5
ثالثة	4	6	6
رابعة	5	7	7

رابعا : ايجاد الحل الأولي لمسالة النقل باستخدام طريقة فوقل:

	أول	ثاني	ثالث	a_i
أولى	0 **600**	2	2	600
ثانية	3 **200**	5	5	200
ثالثة	4 **€**	6 **650**	6 **250**	900
رابعة	5	7	7 **300**	300
b_i	800	650	550	2000

نحسب الربح للجدول الأولي و الذي يساوي مجموع الكميات الموزعة مضروبة في ربح الوحدة المقابلة لها في جدول المسالة الأصلية ، أي:

$$MaxZ= (600*110)+(200*107)+(650*104)+(250*104)+(300*103)=211900$$

خامسا: اختبار أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل:

نلاحظ من الجدول أعلاه أن عدد الخلايا المملوءة أقل من m+n−1، لذلك خصصنا القيمة€ في الخلية الفارغة التي تستوفي بشروط اضافتها ، وهنا وضعت في الخلية x_{31}. وعلى هذا الأساس سيتم ايجاد حل لمعادلات الخلايا المملوءة بفرض أن:

$I_1=0$ و لدينا $C_{ij} = I_i + j_i$:

$$C_{11}= I_1+ J_1 \Rightarrow 0= 0+J_1 \Rightarrow J_1= 0$$

$$C_{21}= I_2+ J_1 \Rightarrow 3= I_2+0 \Rightarrow I_2= 3$$

$$C_{31}= I_3+ J_1 \Rightarrow 4= I_3+0 \Rightarrow I_3= 4$$

$$C_{32}= I_3+ J_2 \Rightarrow 6=4 +J_1 \Rightarrow J_1= 2$$

$$C_{33}= I_3+ J_3 \Rightarrow 6= 4+J_3 \Rightarrow J_3= 2$$

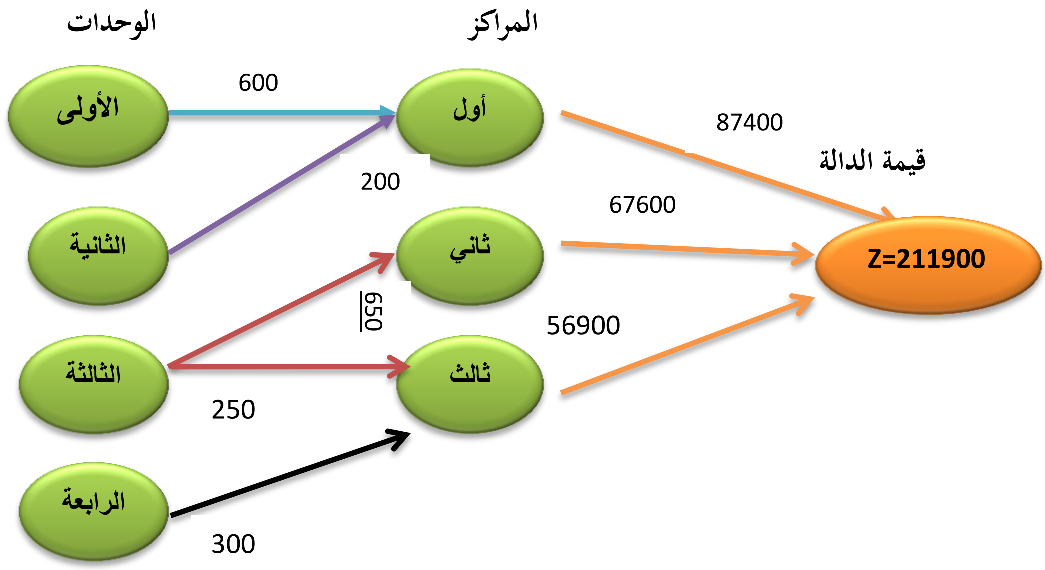
$$C_{43}= I_4+ J_3 \Rightarrow 7= I_4+2 \Rightarrow I_4= 5$$

ثم نقوم بتقييم الخلايا الفارغة (غير الأساسية) وفقا للعلاقة التالية: $E_{ij}= C_{ij}- I_i-J_i$ ، فنتحصل على ما يلي:

الخلية الفارغة	التكلفة الحدية
X_{12}	$E_{12}=2-0-2=0$
X_{22}	$E_{22}=5-2-3=0$
X_{23}	$E_{23}=5-2-3=0$

$E_{13}=2-2-0=0$	X_{13}
$E_{41}=5-0-5=0$	X_{41}
$E_{42}=7-2-5=0$	X_{42}

بما أن كل قيم E_{ij} موجبة أو معدومة فان الحل الأولي يمثل الحل الأمثل لهذه المسألة حيث يتم تموين المراكز بالشكل التالي:



2. ايجاد حلين بديلين:

تدل القيمة الصفرية لـ E_{ij} للخلايا الفارغة على وجود حلول بديلة للمسألة ، وسنختار الخليتين X_{22} وX_{42} وانطلاقا من كل واحدة منهما نشكل مسار مغلق ،ليكون البديلين كالتالي:

البديل الأول:

	أول	ثاني	ثالث	a_i
أولى	0 **600**	2	2	600
ثانية	3	5 **200**	5	200
ثالثة	4 **200**	6 **450**	6 **250**	900
رابعة	5	7	7 **300**	300
b_i	800	650	550	2000

MaxZ=(600*110)+(200*105)+(200*106)+(450*104)+(250*104)+(300*103)=211900

البديل الثاني:

	أول	ثاني	ثالث	a_i
أولى	0 **600**	2	2	600
ثانية	3 **200**	5	5	200
ثالثة	4 **€**	6 **350**	6 **550**	900
رابعة	5	7 **300**	7	300
b_i	800	650	550	2000

MaxZ=(600*110)+(200*107)+(350*104)+(550*104)+(300*103)=211900

II. تمارين مقترحة:

التمرين الأول: لدى مؤسسة الفجر ثلاث وحدات انتاجية وقد كانت المعلومات المتعلقة بالطاقة الانتاجية الشهرية لهم وكذا تكاليف الانتاج للوحدة الواحدة موضحة في الجدول التالي:

الوحدات الانتاجية	الطاقة الانتاجية الشهرية	تكلفة الانتاج للوحدة
A	1300طن	1000دج
B	1000طن	1000دج
C	750طن	1050دج

الوحدات الثلاث مكلفة بتموين خمسة مخازن حيث قدرت طاقة كل مخزن في الشهر بـ 400طن ماعدا المخزن الأول فهي 800طن بالشهر، كما أن تكاليف النقل للوحدة الواحدة من الوحدات الى المخازن هي:

الوحدات/المخازن	E1	E2	E3	E4	E5
A	30	60	50	130	100
B	80	50	40	100	80
C	100	70	100	30	20

المطلوب: تحديد أفضل خطة لتموين المخازن بأقل تكلفة باستخدام طريقة الحجر المتنقل.

التمرين الثاني:: تمتلك مؤسسة مصنعين لإنتاج الدراجات وقد كانت المعلومات المتعلقة بالطاقة الانتاجية الشهرية في الوقت الرسمي لهما وكذا تكاليف الانتاج للدراجة الواحدة موضحة في الجدول التالي:

	الطاقة الانتاجية الشهرية	تكلفة الانتاج للدراجة
المصنع A	600 دراجة	100دج/دراجة
المصنع B	900 دراجة	107دج/دراجة

كما تستخدم المؤسسة الوقت الاضافي في كلا المصنعين حيث ينتج كل مصنع في الوقت الاضافي ثلث ما ينتجه في الوقت الرسمي، أما تكاليف الانتاج للدراجة الواحدة في الوقت الاضافي فتزيد بـ 3دج عن الوقت الرسمي بالنسبة لـ A وتزيد بـ 1دج عن الوقت الرسمي بالنسبة لـ B .

هذين المصنعين مكلفين بتموين ثلاث مناطق حيث قدرت تكاليف النقل للدراجة الواحدة من المصنعين الى المناطق الثلاث كما يلي:

من / الى	شمال	غرب	جنوب
المصنع A	15دج/دراجة	19دج/دراجة	13دج/دراجة
المصنع B	12دج/دراجة	16دج/دراجة	10دج/دراجة

وقد قدر حجم الطلب في المناطق الثلاث وكذا سعر الدراجة الواحدة في كل من هذه المناطق كالتالي:

	حجم الطلب	سعر البيع
شمال	800	225دج/دراجة
غرب	650	227دج/دراجة
جنوب	550	221دج/دراجة

المطلوب: . تعظيم اجمالي الربح لهذه المؤسسة.

. ايجاد حل بديل للمسألة ان وجد.

التمرين الثالث: تقوم احدى المؤسسات بإنتاج ثلاث أنواع من المنتجات $(P_1 .P_2.P_3)$ حيث قدر انتاجها الثلاثي من هذه السنة من P_1 ب 300وحدة أما النوعين الاخرين فانه:

- لإنتاج وحدة واحدة من P_2 تستهلك 6كغ من M_1 و2كغ من M_2 والربح المتوقع منها هو 60دج للوحدة.
- لإنتاج وحدة واحدة من P_3 تستهلك 4كغ من M_1 و5كغ من M_2 و1كغ منM_3 والربح المتوقع منها هو 150دج للوحدة.
- الكميات المتاحة من المواد الأولية تقدر ب 8طن، 6طن، 1طن على التوالي .و يمكن انتاج المنتجات في ثلاث ورشات (1،2،3)طاقتها الانتاجية على الترتيب هي: 700-600-500وحدة،كما أن تكلفة انتاج الوحدة الواحدة من مختلف المنتجات ضمن مختلف الورشات هي كما يلي:

الورشات / المنتجات	P_1	P_2	P_3
الورشة 1	5	8	7
الورشة 2	6	3	6
الورشة 3	4	5	4

المطلوب: ايجاد أفضل خطة انتاجية لتوزيع المنتجات على الورشات اذا علمت أن الورشة 2 لا يمكنها انتاج المنتوج P_2 لهذا الثلاثي .

التمرين الرابع: تستعمل مؤسسة النصر وحداتها الانتاجية الثلاثة لتلبية طلبات زبائنها بواسطة مخزنين كبيرين ، حيث يتم نقل السلع من الوحدات الانتاجية الى المخزنين ثم الى الزبائن .

تقدر الطاقات الانتاجية للوحدات الثلاثة (A_1, A_2, A_3) ب 6، 10، 12طن على الترتيب ، أما طاقة المخزنين E_1 ,E_2 فهي 15، 18طن على الترتيب ، في حين أن احتياجات الزبائن (Z,Y,X,W,V) فهي على التوالي: 3،4،5،6،10 طن .

و يوضح الجدولين التاليين يوضحان التكاليف المتعلقة بنقل السلع من الوحدات الانتاجية الى المخازن ثم الى الزبائن:

	V	W	X	Y	Z
E_1	2	7	5	8	3
E2	2	8	3	6	5

	E_1	E2
A_1	5	6
A_2	3	3
A_3	4	5

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل الذي يخفض تكاليف نقل السلع من الوحدات الانتاجية الى الزبائن بتطبيق طريقة التوزيع المعدل..

التمرين الخامس: المؤسسة الالكترونية للصناعات الالكترونية لها وحدتين(A.B) لإنتاج التلفزيونات الملونة ، و الكميات التي تكون قادرتين على انتاجها و تسويقها وكذا تكاليف الانتاج للتلفاز الواحد موضحة في الجدول التالي:

البيان	طاقة الانتاج	تكاليف الانتاج
الوحدة A	200تلفاز	150دج
الوحدة B	220تلفاز	120دج

هاتين الوحدتين مكلفتين بتموين منطقتين Y,X حيث تقدر طاقات استقبال كل منهما 350،250تلفاز على الترتيب ، أما تكاليف النقل للتلفاز الواحد من الوحدتين الى المنطقتين تظهر في الجدول التالي:

من/ الى	المنطقة X	المنطقة Y
الوحدة A	50دج	40دج
الوحدة B	30دج	40دج

المطلوب: من أجل تلبية الطلب الاجمالي على منتوجها ، تدرس ادارة المؤسسة اقتراحين هما :

- الاقتراح الأول: استخدام الوقت الاضافي بالوحدة A ، علما أن اجمالي تكاليف التلفاز الواحد في الوقت الاضافي تزيد بـ 30دج عن الوقت العادي.
- الاقتراح الثاني: استخدام الوقت الاضافي بالوحدة B ، علما أن اجمالي تكاليف التلفاز الواحد في الوقت الاضافي تزيد بـ 40دج عن الوقت العادي.

حدد أفضل اقتراح يسمح بتلبية الطلب بأقل التكاليف.

تمارين حول البرمجة غير الخطية

I. تمارين محلولة

التمرين الأول: أوجد الشعاع المتدرج و المصفوفة الهيسية للدوال التالية ، و هل هي محدبة أم مقعرة من أجل كل قيم x_1 ؟ :

$$F(x) = x_1^2+x_2^2$$

$$F(x) = x_1^2+x_2^2+ x_3^2$$

$$F(x) =(x_1-2)^4+ (x_1+2x_2)^2$$

الحل:

✓ دالة: $f(x)= x_1^2+ x_2^2$

الشعاع المتدرج للدالة:

$$\nabla f=\begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{Bmatrix}$$

المصفوفة الهيسية للدالة:

$$Hf(x)= \quad \nabla^2 f(x) =\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$$

ان الشعاع المتدرج ينعدم من أجل الشعاع المعدوم، و المصفوفة الهيسية في هذه الحالة محددة موجبة لأن : $0-4<0$ وبالتالي يمكن القول بأن الدالة مقعرة و ليست محدبة.

✓ دالة : $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

الشعاع المتدرج للدالة:

$$\nabla f=\begin{Bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{Bmatrix}$$

المصفوفة الهيسية للدالة:

$$Hf(x)= \quad \nabla^2 f(x) =\begin{Bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix}$$

بما أن الشعاع المتدرج ينعدم من أجل الشعاع المعدوم و المصفوفة الهيسية في هذه الحالة شبه محددة موجبة ، فان الدالة f مقعرة.

✓ دالة: $f(x)= (x_1-2)^4+ (x_1+2x2)^2$

الشعاع المتدرج للدالة:

$$\nabla f=\begin{cases} 4(x_1-2)^3+2(x_1-2x_2) \\ -4(x_1-2x_2) \end{cases}$$

المصفوفة الهيسية للدالة:

$$Hf(x)=\begin{pmatrix} 12(x_1-2)^2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

و لمعرفة ما اذا كانت المصفوفة محددة موجبة أو سالبة نستعمل طريقة المحددات

$$|H_1(x)| = 12(x_1-2)^2+2>0$$

$$|H_2(x)| = 96(x_1-2)^2+16-16 \Rightarrow 96(x_1-2)^2>0$$

ومادام المحددات موجبة ، فهذا يدل على أن المصفوفة H محددة موجبة، ما يعني أن الدالة مقعرة.

التمرين الثاني: حدد الأمثلية لدالة التعظيم التالية:

$$Z=xe^{-x2}$$

الحل:

المشتقة الجزئية الأولى:

$$F'(x)=e^{-x2}-2x^2e^{-x2}=e^{-x2}(1-2x^2)$$

و تعرف لكل قيم x، و تختفي فقط عند $x=\pm1\sqrt{2}$ و حيث أن x غير محددة فتكون قيم دالة الهدف عند الأربعة النقاط التالية:

X	∞-	$-1\sqrt{2}$	$1\sqrt{2}$	∞
F(x)	0	-0.429	0.429	0

و بالتالي، فان الحد الأعلى الشامل يوجد عند $x= 1\sqrt{2}$ و تكون $z= 0.429$

التمرين الثالث: ليكن لدينا دالة التعظيم التالية:

$$MaxZ= -x_1-x_2-x_3$$

في ظل قيدين هما:

$$X_1^2+ x_2=3$$

$$X_1+3x_2+2x_3=7$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل للبرنامج بطريقة لاغرانج.

الحل:

تأخذ دالة لاغرانج لهذا البرنامج الشكل التالي:

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)= -x_1-x_2-x_3+\lambda_1(3- X_1^{2}-x_2)+\lambda_2(7-x_1-3x_2-2x_3)$$

و يكون الشرط اللازم لتعظيم دالة لاغرانج هو انعدام المشتقات الجزئية الأولى للدالة :

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1=-1-2\lambda_1 x_1-\lambda_2 =0 \\ \partial L/\partial x_2=-1 -\lambda_1-3\lambda_2=0 \\ \partial L/\partial x_3=-1-2\lambda_2=0 \\ \partial L/\partial \lambda_1 = 3-x_1^{2} -x_2=0 \\ \partial L/\partial \lambda_2 = 7-x_1 -3x_2 -2x_3=0 \end{cases}$$

و بعد التعويضات و اجراء الحسابات نجد الحل الأمثل هو:

$$Z=1.875,\ \lambda_2= -0.5\ ,\ \lambda_1=0\ .5,\ x_1=-0.5,\ x_2=2.75,\ x_3=-1.875$$

II. تمارين مقترحة:

التمرين الأول: أوجد الأمثلية المحلية و الشاملة للدوال التالية:

$F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ ضمن المجال $[3,0]$

$F(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ ضمن المجال $]\infty ,0]$

$F(x) = x + x^{-1}$ ضمن المجال $[0,\infty-[$

التمرين الثاني: لتكن لدينا دالة الهدف على الشكل التالي:

$$F(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2$$

المطلوب: اثبات أن الدالة f مقعرة.

التمرين الثالث: لتكن لدينا دالة الهدف على الشكل التالي:

$$F(x) = x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

المطلوب: اثبات أن الدالة f محدبة.

التمرين الرابع: ليكن لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

$$MinZ = x_1x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} X_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ X_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل بطريقة لاغرانج.

التمرين الخامس: ليكن لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

$$MaxZ = x_1^2 + x_2x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1^2 + x_2^2 + = 16 \\ 2x_2 + 3x_3 = 25 \\ X_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل بطريقة لاغرانج.

المراجع:

المراجع باللغة العربية:

1. ابراهيم نائب، انعام بقية، **بحوث العمليات ، خوارزميات و برامج حاسوبية** ، ط1، دار وائل للنشر، عما ن، 1999
2. دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات** ، دار اليازوري للنشر و التوزيع، الأردن، 2008.
3. ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري، **بحوث العمليات/ سلسلة ملخصات شوم**، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004.
4. سهيلة عبد الله سعيد، **الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات**، ط 1، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، 2007.
5. عبد الستار أحمد محمد الآلوسي ، **أساليب بحوث العمليات** ، **الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، ط1، دار القلم للنشر و التوزيع، الامارات العربية المتحدة، 2003.
6. علي العلاونة ، محمد عبيدات ،عبد الكريم عواد ، **بحوث العمليات في العلوم التجارية** , ط1، دار المستقبل للنشر و التوزيع ، الأردن، 2000
7. محمد الطراونة ، سليمان عبيدات ، **مقدمة في بحوث العمليات**، ط1، دار المسيرة للنشر والتوزيع ، عمان ،، 2009
8. محمد توفيق ماضي، **البرمجة الخطية، التوزيع الأمثلي للموارد المحدودة**، المكتب العربي الحديث للنشر، القاهرة، 1992.
9. محمد دباس الحميد، محمدا لعزاوي ، **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية** ، دار اليازوري ، الأردن،2013.
10. محمد راتول ، بحوث العمليات ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.
11. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، **بحوث العمليات و تطبيقاتها في ادارة الاعمال**، ط1، دار الوراق، الاردن، 2004.
12. نجم عبود نجم، **مدخل الى الأساليب الكمية**، **نماذج و تطبيقات**، دار الوراق للنشر و التوزيع، عمان، 2004.
13. اليمين فالته، **بحوث العمليات**،ط1، ايتراك للنشر و التوزيع، مصر ، 2006.

المراجع باللغة الأجنبية:

14. Amor Farouk Benghezal , **programmation linéaire**, 2édition, office des publications universitaires, Alger, 2006.
15. Daniel Denoff, **recherche opérationnelle**, université du littoral, Dunkerque ,2003.
16. Didier Smets, **Programmation linéaire et Optimisation**
17. Gerald Baillargeon, **programmation linéaire appliqué**, **outille à l'aide de décession** , éditions SMG, Québec, 1996.
18. Jean Pierre Védrine, Elisabeth Bringuier , Alain Brisard, **Techniques quantitatives de gestion**, Vuibert, paris , 1985 .
19. Michel Nedzela, **introduction a la science de la gestion**, **méthodes déterministes en recherche opérationnelle**, 2édition,presses de l'université du Québec , 1984.