République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Polycopié d'Analyse 03

Support de Cours avec Exercices Corrigés

A l'usage des Étudiants de

$2^{ème}$année Licence en Mathématiques

Réalisé Par :

LAADJAL Baya

Année Universitaire

2022/2023

Table des matières

Table des figures

Avant-propos

Le polycopié est un cours détaillé sur le programme officiel du module d'Analyse 3, qui est le fruit de l'enseignement de cette matière que j'ai eu à assumer à l'Université de Biskra. Il s'adresse principalement aux étudiants en deuxième année licence mathématiques dans le cadre du système $\mathcal{L}.\mathcal{M}.\mathcal{D}$, mais peut éventuellement être utile pour les étudiants en deuxième année licence mathématiques appliquées, sciences techniques, informatique, et les étudiants qui sont en deuxième année au écoles préparatoires.

Le contenu de cette matière traite une partie importante de l'analyse mathématique et donne aux étudiants les connaissances nécessaires concernant les différentes types de convergence des séries et des intégrales impropres. Elle est considérée comme une extension directe des deux matières Analyse 1 et Analyse 2 vues en première année $\mathcal{MI}$.

Ce cours comporte six chapitres où chaque chapitre se termine par une sélection d'exercices types avec corrigés, rédigés de manière progressive et détaillée pour permettre aux étudiants de comprendre les notions mathématiques introduites et de contrôler l'assimilation correcte des points essentiels. On introduit dans le premier chapitre, le concept de série numérique, qui permet l'étude du phénomène de sommation infini discrète. L'objectif de ce chapitre est de savoir étudier la nature d'une série numérique, et effectuer un calcul de somme. On présente dans le deuxième chapitre, les notions de convergence simple et uniforme des suites et séries de fonctions. Le chapitre qui suit est consacré à l'étude des série entières, et a comme objectif, calculer un rayon de convergence, établir un développement en série entière des fonctions usuelles et chercher la somme de séries numériques et les solutions de quelques équations différentielles ordinaires. Le chapitre 4 est sur la théorie des séries de Fourier, on commence par donner la notion de séries trigonométriques, puis les séries de Fourier des fonctions paires ou impaires dans divers formes d'intervalles ainsi que les règles de convergences, la formule de Parseval. Les chapitres 5 et 6 sont consacrés aux intégrales impropres et les fonctions définies par une intégrale.

Ce polycopié, et comme tout produit scientifique, n'est pas exempte de lacunes, et j'espére qu'il contribuera au développement du travail pédagogique et de la recherche scientifique.

Enfin, je ne serais pas terminer cet avant-propos sans passer un grand remerciement à mes collègues enseignants ayant expertisé sérieusement ce cours.

Chapitre 1

Séries numériques

Etant donnée une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on sait alors que la somme d'un nombre fini de ses termes est finie. Mais ce n'est pas toujours le cas quand on passe à un nombre infini de termes. Ce chapitre a pour but de donner (si possible) un sens à la somme d'une infinité de nombres, on a ainsi la notion de série. A de rares exceptions près, on ne saura pas calculer la limite éventuelle, appelée somme de la série. On tentera cependant de préciser sa nature (convergente ou divergente) ainsi que des équivalents asymptotiques.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1 *Soit une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $u_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit une nouvelle suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :*

$$S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1, ..., S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- *La paire de suite (u_n, S_n) s'appelle série numérique et se désigne par $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.*
- *Le terme u_n s'appelle le terme général de la série $\sum u_n$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite de la somme partielle d'ordre n de cette série.*

Définition 1.2 *Une série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente si la suite de la somme* *partielle* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Dans ce cas la limite S *de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée somme de la série et on écrit :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \in \mathbb{R}.$$

Une série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite divergente si elle n'est pas convergente.*

Exemple 1.1 *Etudions la nature de la série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. *On a*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)},$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \in \mathbb{R}.$$

Alors : la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *est convergente.*

Proposition 1.1 (Cas complexe) *Si le terme général est complexe* $u_n = a_n + ib_n$, *alors on a le résultat suivant :*

$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente $\Longleftrightarrow$ $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Remarque 1.1 *On peut définir des séries dont le terme général* (u_n) *n'est définit qu'à partir d'un rang* n_0, *on pose alors :*

$$S_n = u_{n_0} + ... + u_n$$

Exemple 1.2 *Soit la série numérique* $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 3}$ *où*

$$u_n = \frac{1}{n^3-3n^2+2n} = \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)}.$$

Remarque 1.2 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\sum u_n\right)_{n\geq p}$ sont de même nature et en cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.*

Démonstration. Pour N entier $\geq p$, on a

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k = u_{n_0} + ...u_p + ... + u_N = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{N} u_k.$$

et $S_p \in \mathbb{R}$, alors par suite les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\sum u_n\right)_{n\geq p}$ ont la même nature si elles convergent. ■

Proposition 1.2 *Si la série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ converge et de somme S, alors la suite R_n converge vers zéro telle que $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.*

Proposition 1.3 *Si la série numérique $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ est convergente, alors son terme général u_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge.*

Démonstration. On a

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n,$$

d'où

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si on suppose $\left(\sum u_n\right)_{n\geq 0}$ est convergente alors la suite de la somme partielle est convergente, et par suite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

■

Exemple 1.3 *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2n+1}$ est divergente d'après la proposition 1.3, puisque :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Remarque 1.3 *Sette condition est nécessaire mais pas suffisante c-à-d, on peut trouver des séries divergentes dont les termes généraux tendent vers zéro à l'infinie.*

Exemple 1.4 *Soit la série numérique* $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0,$$

mais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Donc la série diverge.

Proposition 1.4 (Série géométrique) *Soit* $q \in \mathbb{R}$. *La série géométrique* $\sum q^n$ *converge si* $|q| < 1$ *et diverge si* $|q| \geq 1$.

Proposition 1.5 (Série télescopique) *Soit la série numarique* $\sum_{n\geq 0} (a_{n+1} - a_n)$, *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite numérique. On a*

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente* $\Longleftrightarrow$ *La série* $\sum_{n\geq 0} (a_{n+1} - a_n)$.

Définition 1.3 *Soient* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques, et soit* λ *un scalaire non nul*

1. *La série* $\left(\sum u_n + v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appellée la série somme des deux séries* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *La série* $\left(\sum \lambda u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appellée la série produit de la série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *par le scalaire* λ.
3. *La série* $\left(\sum w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *où pour tout* n *entier;* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est appellée produit de Cauchy des deux séries* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.6 *Soient* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques convergentes et de somme* S, T *(resp).*
Soient α *et* β *deux scalaires non nuls alors la série* $\left(\sum (\alpha u_n + \beta v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de somme* $\alpha S + \beta T$*, c-à-d*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Soit $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$. On aura :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha u_k + \beta v_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k + \beta \sum_{k=0}^{n} v_k = \alpha S_n + \beta T_n.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} (\alpha S_n + \beta T_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} S_n + \beta \lim_{n\to+\infty} T_n = \alpha S + \beta T. \qquad \blacksquare$$

Remarque 1.4 *:*

1. *Si les séries* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge alors la série* $\left(\sum (\alpha u_n + \beta v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
2. *Si les séries* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent alors on ne peut rien conclure sur la convergente de la série* $\left(\sum (\alpha u_n + \beta v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.5 *:*

1. *Soit* $u_n = 1, v_n = -1, \forall n \in \mathbb{N}$.
   Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent mais la série* $\left(\sum (u_n + v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *Soit* $u_n = \ln \dfrac{1}{n+1}, v_n = \ln \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   Les séries $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent mais la série* $\left(\sum (u_n - v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Proposition 1.7 (Groupement des termes) *Soient* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique convergente. Si on regroupe ses termes comme suit :*

$$\underbrace{(u_1 + u_2 + ... + u_{n_1})}_{v_1} + \underbrace{(u_{n_1+1} + ... + u_{n_2})}_{v_2} + ...$$

on obtient la série $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui est aussi convergente.*

Démonstration. Construisons la suite des sommes partielles de la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0 \\
S_1 &= u_0 + u_1 \\
&. \\
&. \\
&. \\
S_{n_1} &= u_0 + u_1 + ... + u_{n_1} = v_1 \\
S_{n_2} &= u_0 + u_1 + ... + u_{n_1} + u_{n_1+1} + ... + u_{n_2} = v_1 + v_2 \\
S_{n_3} &= u_0 + u_1 + ... + u_{n_3} = v_1 + v_2 + v_3.
\end{aligned}$$

Les termes $S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, ...$ sont les termes de la suite de la somme partielle de la série $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la suite $(S_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ qui est sous suite convergente.

D'ou on déduit que la série $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même somme que la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Exemple 1.6 *On considère la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

On a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Alors, si

$$n = 2k \Rightarrow S_{2k} = 1 - \frac{1}{2k+1},$$

et si

$$n = 2k+1 \Rightarrow S_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+2}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Théorème 1.1 (Critère de Cauchy) *La série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall p \geq q \geq n(\epsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k\right| < \epsilon$$

Remarque 1.5 *On a*

$$\left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k\right| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| = \left|S_p - S_q\right|.$$

Donc $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente ssi la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy.*

Exemple 1.7 *Soit la série harmonique* $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

On a :

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{n fois} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors :

$$\exists \epsilon = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1, \exists p = 2n, q = n \text{ et } |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *n'est pas suite de Cauchy et par suite la série* $\left(\sum \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est divergente.*

1.2 Séries à termes positifs

Définition 1.4 *On dit qu'une série* $\left(\sum u_n\right)$ *est à termes positifs si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0.$$

Remarque 1.6 *Les séries* $\left(\sum u_n\right)$ *vérifiant* $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ *sont aussi supposées des séries à termes positifs.*

Proposition 1.8 *La série à termes positifs* $\left(\sum u_n\right)$ *est convrgente ssi la suite de la somme partielle* (S_n) *est majorée.*

Démonstration. On a

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ce qui prouve que

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \Longleftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$ ∎

1.2.1 Critères de comparaison

L'étude de la nature d'une série à termes positifs peut être faite par la comparaison de la série par des séries classiques au moyen des trois propositions de comparaison suivants :

Proposition 1.9 (Critère de comparaison) *Soient* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques à termes positifs.*

Supposons que $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *alors :*

1. *Si* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors la série* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. *Si* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge alors la série* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Le critère reste vrai si $u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$.

Démonstration. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (resp).

On a

$$\begin{aligned} u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N} \ &\Rightarrow u_0 + u_1 + ... + u_n \leq v_0 + v_1 + ... + v_n \\ &\Rightarrow S_n \leq T_n \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} T_n \Rightarrow S \leq T. \end{aligned}$$

Alors :

1. Si on suppose $\sum v_n$ converge d'après la proposition 1.8, la suite (T_n) est bornée et par suite, la suite (S_n) bornée, ce qui implique que $\sum u_n$ converge.
2. C'est la contraposée du premier résultat.

■

Exemple 1.8 *Soit la série* $\sum \frac{1}{n^n}$. *On a*

$$u_n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 2,$$

puisque $\sum \frac{1}{2^n}$ *converge (série géométrique de raison* $\frac{1}{2}$*). Alors d'après la proposition 1.9, la série* $\sum \frac{1}{n^n}$ *converge.*

Proposition 1.10 (Critère d'équivalence) *Soient* $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques à termes positifs (avec* $v_n \neq 0$*).*
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, *alors :*

1. *Si* $0 < l < +\infty$ *; alors*

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\iff$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

2. *Si* $l = 0$ *; alors*

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\Rightarrow$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

3. *Si* $l = +\infty$ *; alors*

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* $\Rightarrow$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Démonstration.

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\in\left]0,+\infty\right[$, alors par définition :

$$\forall\epsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Rightarrow(l-\epsilon)\,v_n<u_n<(l+\epsilon)\,v_n,$$

   et pour

$$\epsilon=\frac{l}{2},\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Rightarrow\frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n.$$

   Donc d'après le critère de comparaison :

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$, alors par définition :

$$\forall\epsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Rightarrow-\epsilon v_n<u_n<\epsilon v_n,$$

   et pour

$$\epsilon=1,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Rightarrow-v_n<u_n<v_n.$$

   Donc d'après le critère de comparaison :

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$, alors par définition :

$$\forall A>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Rightarrow u_n>Av_n,$$

   et pour

$$A=1,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0\Rightarrow u_n>v_n.$$

   Donc d'après le critère de comparaison :

   $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\Rightarrow$ $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$\blacksquare$

Remarque 1.7 *Si $l=1$, on écrit $u_n\sim v_n$.*

Exemple 1.9 *Pour* $u_n = \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ *et* $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, *on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
Et comme $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *converge donc* $\sum \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Proposition 1.11 (Critère de comparaison logharithmique) *Soient* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux séries numériques à termes strictement positifs.*

On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors :

1. $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\Rightarrow$ $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* $\Rightarrow$ $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Démonstration.

1. On a

$$\forall n \geq N : \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N}, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}, ..., \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En multipliant membre à membre, on obtient :

$$\forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_N} \leq \frac{v_{n+1}}{v_N}.$$

Ceci implique que :

$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n.$$

Supposons que $\left(\sum v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(\sum \frac{u_N}{v_N} v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'après la proposition 1.9, la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. C'est la contraposée du premier résultat. ■

Proposition 1.12 (Comparaison par une intégrale) *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue, décroissante sur un intervalle* $[a, +\infty[$ *où* $a \in \mathbb{R}_+$. *Alors la série* $\sum\limits_{n=a}^{+\infty} f(n)$ *et l'intégrale impropre* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *sont de même nature.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction f est décroissante donc

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1].$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient :

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k).$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=a+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=a+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx = \int_{a}^{n} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

1. Supposons que $\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$. Alors la suite $\sum_{k=a+1}^{n} f(k)$ est une suite croissante majorée, et par suite convergente. Donc la série $\sum_{n=a}^{+\infty} f(n)$ est convergente.
2. Supposons que $\sum_{n=a}^{+\infty} f(n) < +\infty$. On a pour $t \in [a, +\infty[$

$$F(t) = \int_{a}^{t} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{E(t)+1} f(x)\, dx = \sum_{k=a}^{E(t)} \int_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=a}^{E(t)} f(k) < +\infty$$

   La fonction F est croissante, majorée, donc admet une limite finie quand $t \to +\infty$, et par suite l'intégrale impropre $\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. ■

Compléments :

On considère les suites définies par

$$v_n = f(a) + ... + f(n) - \int_{a}^{n+1} f(x)\, dx, \quad n \geq a.$$
$$w_n = f(a) + ... + f(n) - \int_{a}^{n} f(x)\, dx, \quad n \geq a.$$

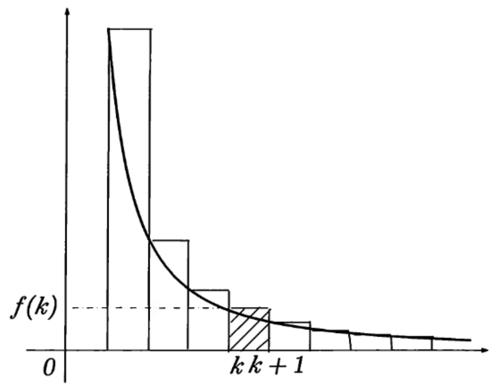

FIG. 1.1 – illustration de la comparaison série-intégrale.

Alors

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \quad \text{et} \quad w_n - v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Par suite si $f(n) \to 0$, alors les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. En particulier elles convergent vers la même limite $c \in [v_0, w_0]$.

On a

$$f(a) + ... + f(n) \geq \int_a^{n+1} f(x)\,dx \geq f(a+1) + ... + f(n),$$

où $f(a) + ... + f(n)$ est la somme des aires des rectangles grands et $\int_a^{n+1} f(x)\,dx$ est l'aire bornée par les droites $x = a$ et $x = n+1$ et $y = 0$ et $y = f(x)$.

Démonstration. On a :

$$v_n = \sum_{k=a}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) \text{ donc } \{v_n \geq 0 \text{ et } v_n \leq v_{n+1}\}.$$
$$w_n = f(a) + \sum_{k=a+1}^{n} \left(f(k) - \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \right) \text{ donc } \{w_n \geq 0 \text{ et } w_n \geq w_{n+1}\}.$$

De plus

$$w_n - v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers c, et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers c, et $v_n \leq c \leq w_n$.

Ce qui permet de calculer numériquement c à la précision $f(n)$. ■

Exemple 1.10 *Considérons la série harmonique* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

D'après la proposition 1.12 cette série diverge.

On utilise le complément :

$$v_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$
$$w_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\int_1^{n}\frac{dx}{x} = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n).$$

Alors

$$0\leq v_n\leq v_{n+1}\leq w_{n+1}\leq w_n \quad et \quad w_n-v_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}.$$

Ce qui donne que (v_n) et (w_n) sont adjacentes et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0,5772.$$

Application aux séries classiques

Proposition 1.13 (Série de Riemann) *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série de Riemann est de la forme $\left(\sum\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Elle converge ssi $\alpha>1$ et diverge ssi $\alpha\leq 1$.*

On applique la comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, (Voir chapitre 5).

Proposition 1.14 (Série de Bertrand) *Soit la série de Bertrand*

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \quad pour\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

On a

1. *Cette série converge si*

$$\begin{cases}\alpha>1, \forall\beta\in\mathbb{R}\\ \quad ou\ bien\\ \alpha=1, \forall\beta>1\end{cases}$$

2. *Cette série diverge si*

$$\begin{cases} \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \quad \textit{ou bien} \\ \alpha = 1, \forall \beta \leq 1 \end{cases}$$

On applique la comparaison avec l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$, (Voir chapitre 5).

Proposition 1.15 (Règle de Riemann) *Soit* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique à termes positifs.*

On suppose que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \textit{ et } k \in [0, +\infty] \textit{ tel que } \lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = k.$$

Alors

1. *Si* $0 \leq k < +\infty$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *Si* $0 < k \leq +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exemple 1.11 *Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty$ *donc la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$ *diverge.*

1.2.2 Critères de D'Alembert et de Cauchy

Il s'agit de règles permettant parfoit de déterminer plus rapidement la nature d'une série à termes positifs.

Proposition 1.16 (Règle de D'Alembert) *Soit* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série numérique à termes strictement positifs, alors :*

1. *S'il existe* $\lambda \in \,]0,1[$ *et un rang* n_0 *à partir duquel on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$, *alors la série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *S'il existe un rang* n_0 *à partir duquel on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, *alors la série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Démonstration.

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda < 1 \Longrightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \lambda \Longrightarrow u_n \leq \lambda u_{n-1}$.

   Par récurrence on obtient $u_n \leq \lambda^n u_0$. Puisque $\lambda \in]0,1[$, alors $(\sum \lambda^n u_0)$ est une série géométrique convergente et en vertu du critère de comparaison , la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_n \geq u_0$, la suite (u_n) est alors croissante. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq u_0 \neq 0$ et par suite la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ■

Corollaire 1.1 (Critère de D'Alembert) *Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série numérique à termes strictement positifs. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ existe (finie ou infini).*

1. *Si $l < 1$ alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
2. *Si $l > 1$ alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
3. *Si $l = 1$, on ne peut rien dire sur la convergence.*

Démonstration. <u>Si l est finie on a :</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \epsilon \\
&\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow l - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon + l
\end{aligned}$$

1. Si $l < 1$. Pour $\epsilon_0 = \dfrac{1-l}{2}$ (ce qui donne $l + \epsilon_0 < 1$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que on a

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2} < 1, \quad \forall n \geq n_0$$

   Ainsi d'après la proposition précédente, la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Si $l > 1$, Pour $\epsilon_1 = \dfrac{l-1}{2}$ (ce qui donne $l - \epsilon_1 > 1$), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que on a

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1, \quad \forall n \geq n_1$$

   Ainsi d'après la proposition précédente, la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. Si $l = 1$, on n'obtient aucune information sur la convergence de la série et pour ceci il suffit de prendre des contre exemples :

   • Pour la série $\sum \frac{1}{n}$ divergente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

   • Pour la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

   <u>Si l est infinie on a :</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \iff \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} > A.$$

Il est évident que pour $A \geq 1$ la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ∎

Proposition 1.17 (Règle de Cauchy) *Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série numérique à termes positifs, alors :*

1. *S'il existe $\lambda \in]0,1[$ et un rang n_0 à partir duquel on a $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$, alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

2. *S'il existe un rang n_0 à partir duquel on a $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, alors la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Démonstration. .

1. $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda < 1 \Longrightarrow u_n \leq \lambda^n$.

   $(\sum \lambda^n)$ étant une série géométrique convergente $(\lambda \in]0,1[)$ et en vertu du critère de comparaison , la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Longrightarrow u_n \geq 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1 \neq 0$ et par suite la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ∎

Corollaire 1.2 (Critère de Cauchy) *Soit $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série numérique à termes positifs. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ existe (finie ou infini).*

1. *Si $l < 1$ alors la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
2. *Si $l > 1$ alors la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
3. *Si $l = 1$, on ne peut rien dire sur la convergence.*

Démonstration. Si l est finie on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \epsilon \\
&\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies l - \epsilon < \sqrt[n]{u_n} < \epsilon + l \\
&\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies (l-\epsilon)^n < u_n < (\epsilon + l)^n
\end{aligned}$$

1. Si $l < 1$. Pour $\epsilon_0 = \dfrac{1-l}{2}$ (ce qui donne $0 < l + \epsilon_0 < 1$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que on a

$$u_n < (\epsilon_0 + l)^n = \left(\frac{1+l}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq n_0$$

   Puisque la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n$ de raison $\dfrac{1+l}{2} < 1$ est convergente alors la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. Si $l > 1$, Pour $\epsilon_1 = \dfrac{l-1}{2}$ (ce qui donne $l - \epsilon_1 > 1$), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que on a

$$u_n > (l - \epsilon_1)^n > \left(\frac{l+1}{2}\right)^n, \quad \forall n \geq n_1$$

   Puisque la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n$ de raison $\dfrac{1+l}{2} > 1$ est convergente alors la série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. Si $l = 1$, on n'obtient aucune information sur la convergence de la série et pour ceci il suffit de prendre des contre exemples :

- Pour la série $\sum \frac{1}{n}$ divergente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

- Pour la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

<u>Si l est infinie on a :</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty \iff \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies \sqrt[n]{u_n} > A.$$

Il est évident que pour $A \geq 1$ la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. ∎

Exemple 1.12 *:*

1. *La série $\sum \frac{1}{n!}$, converge d'après D'Alembert puisque :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1.$$

2. *La série $\sum \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$, converge d'après Cauchy puisque :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2 > 1.$$

Corollaire 1.3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$

Donc si on tombe sur le cas de doute en appliquant le critère de D'Alembert, il ne faut pas appliquer le critère de Cauchy car on ne pourra rien conclure aussi.

1.2.3 Complément sur les séries numériques à temes positifs

Proposition 1.18 (Règle de Duhamel) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\beta \ \text{const})$$

Alors :

- *Si $\beta > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.*
- *Si $\beta < 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.*

Exemple 1.13 *Soit la série à terme général :*

$$u_n = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6........(2n)}$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2}\left[1 + \frac{2}{n}\right]^{-1} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente car $\beta = \dfrac{3}{2} > 1$.

Proposition 1.19 (Règle de Raabe) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Alors :

- *Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.*
- *Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.*
- *Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.*

Exemple 1.14 *On considère la série numérique de terme général donné par :*

$$u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)....(x+n)}, \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } x > 0.$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$, *donc le critère de D'Alembert ne donne aucune information sur la convergence de la série. Appliquons la règle de Raabe*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{x+1-1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{n+1} = x.$$

Donc si $x > 1$, *la série converge et si* $0 < x < 1$, *la série diverge.*

1.3 Séries à termes de signe quelconque

Une série $\sum u_n$ est dite à termes de signe quelconque, si l'on trouve parmi ses termes aussi bien des termes positifs que des termes négatifs.

1.3.1 Séries absolument convergente

Définition 1.5 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique. On dit qu'elle est absolument convergente si la série numérique à terme positif* $\sum |u_n|$ *est convergente or :*

- *Si* $u_n \in \mathbb{R}$, $|u_n|$ *désigne la valeur absolue de* u_n.
- *Si* $u_n \in \mathbb{C}$, $|u_n|$ *désigne le module de* u_n.

Exemple 1.15 *:*

1. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2n)}{n^3}$ *converge absolument, car* $\left|\frac{\sin(2n)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ *converge.*
2. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$ *ne converge pas absolument, car*
$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \geq \frac{1}{n+2}$$
et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+2}$ *diverge.*
3. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}\sin n}{n(n+2)}$ *est absolument convergente, car*
$$\left|\frac{e^{in}\sin n}{n(n+2)}\right| = \left|\frac{\sin n}{n(n+2)}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Proposition 1.20 (Cas complexe) *Si le terme général est complexe* $u_n = a_n + ib_n$*, alors la série* $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est absolument convergente ssi les séries* $\left(\sum a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sum b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont absolument convergentes.*

Théorème 1.2 *Toute série absolument convergente est convergente (la réciproque est fausse). En d'autres termes :*

$$\sum u_n \text{ converge absolument } \implies \sum u_n \text{ converge.}$$

Démonstration. Soit $\sum u_n$ converge absolument alors par définition la série $\sum |u_n|$ converge donc elle satisfait la condition de Cauchy :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^* : \forall n > n_\epsilon, \forall p \geq 0 \quad &\implies |u_n| + |u_{n+1}| + ... + |u_{n+p}| < \epsilon \\ &\implies |u_n + u_{n+1} + ... + u_{n+p}| < \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que la série $\sum u_n$ satisfait la condition de Cauchy et par suite elle est convergente. ∎

Théorème 1.3 *Soit* $\sum u_n$ *une série absolument convergente et soit* $\sum v_n$ *une série obtenue à partir de la série* $\sum u_n$ *en changeant l'ordre des ses termes, alors :*

- *La série* $\sum v_n$ *est absolument convergente.*
- *La série* $\sum v_n$ *converge vers la même somme que* $\sum u_n$*.*

Proposition 1.21 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques convergentes absolument.*

1. $\forall \alpha$ *et* β *deux scalaires non nuls, la série* $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ *est convergente absolument.*
2. *La série produit* $\sum w_n$ *tel que* $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est absolument convergente.*

Remarque 1.8 *Le produit de Cauchy de deux séries convergente n'est pas nécessairement convergent.*

Remarque 1.9 *On peut appliquer les critères de D'Alembert et de Cauchy pour la convergence absolue comme suit :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l,$
   - *Si* $l < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*
   - *Si* $l > 1$, *la série* $\sum u_n$ *ne converge pas absolument.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\sqrt[n]{u_n}\right| = l,$
   - *Si* $l < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge absolument.*
   - *Si* $l > 1$, *la série* $\sum u_n$ *ne converge pas absolument.*

1.3.2 Séries semi-convergente

Définition 1.6 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique. On dit qu'elle est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Théorème 1.4 *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique semi-convergente, alors les séries* $\sum u_n^+$ *et* $\sum u_n^-$ *sont divergentes où :*

- $\sum u_n^+$ *série composés des termes positifs.*
- $\sum u_n^-$ *série composés des termes négatifs.*

Proposition 1.22 (Critère d'Abel) *Soit donnée la série* $(\sum a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que :*

1. *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone et converge vers* 0.
2. *La suite des sommes partielles* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la série* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée, i.e*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : |B_n| = |b_0 + b_1 + ... + b_n| < M.$$

Alors la série $(\sum a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Démonstration. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} : |B_n| < M \quad \text{et} \quad b_n = B_n - B_{n-1}.$$

De plus si on suppose la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers zéro alors $a_n \geq 0$ et $a_n - a_{n+1} \geq 0$.
Soit S_n la somme partielle de la série $\left(\sum a_n b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ alors pour $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + ... + a_m b_m| \\
&= |a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + ... + a_m(B_m - B_{m-1})| \\
&= |-B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + ... + B_{m-1}(a_{m-1} - a_m) - B_m a_m| \\
&\leq |B_n| a_{n+1} + |B_{n+1}|(a_{n+1} - a_{n+2}) + ... + |B_{m-1}|(a_{m-1} - a_m) + |B_m| a_m \\
&\leq M[a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) + ... + (a_{m-1} - a_m) + a_m] \\
&\leq 2M a_{n+1}.
\end{aligned}$$

or

$$\left\{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\right\} \iff \left\{\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \implies a_n < \frac{\epsilon}{2M}\right\}$$

par conséquent

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n \geq n_0 \implies |S_m - S_n| < 2M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon,$$

d'où la convergence de la série $\left(\sum a_n b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Exemple 1.16 *Soit la série* $\sum_{n\geq1} \dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$
Posons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *et* $b_n = \sin 2n$.
On a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$ *i.e décroissante et* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
De plus

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin 1 \sin 2k}{2\sin 1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sin 1}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1) - \cos(2k+1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sin 1}[(\cos 1 - \cos 3) + (\cos 3 - \cos 5) + ... + (\cos(2n-1) - \cos(2n+1))]\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sin 1}[\cos 1 - \cos(2n+1)]\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{|\cos 1| + |\cos(2n+1)|}{|\sin 1|} \leq \frac{1}{|\sin 1|} = M
\end{aligned}$$

Alors d'après Abel la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$ *est convergente.*

Remarque 1.10 *Les séries* $\sum \dfrac{\cos n}{n^\alpha}$ *et* $\sum \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$ *sont convergentes si* $\alpha > 0$*, et semi convergentes si* $\alpha \in \left]0, 1\right]$*. D'ailleurs elles sont absolument convergentes si* $\alpha > 1$*, et semi convergentes si* $\alpha \in \left]0, 1\right]$*.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère d'Abel. ■

1.3.3 Séries alternées

Définition 1.7 *On appelle série alternée, toute série* $\sum u_n$ *dont le terme général est alternativement positif puis négatif i.e :*

$$u_n = (-1)^n a_n \quad \text{où} \quad a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $\sum (-1)^n |u_n|$

Corollaire 1.4 (Critère de Leibniz) *Toute série alternée* $\sum (-1)^n a_n$ *dont la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroit vers zéro est convergente.*

Démonstration. On a

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \right| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si de plus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers zéro alors d'après Abel la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. ■

Exemple 1.17 (Série de Riemann alternée) *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *pour* $(\alpha > 0)$ *est alternée et vérifie les hypothèses du critère de Leibniz, et donc elle converge.*

D'ailleurs la série est semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ *et absolument convergente pour* $\alpha > 1$*.*

Proposition 1.23 *Soit $\left(\sum (-1)^n a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série alternée convergente de somme S. Alors :*

1. *La suite du reste d'ordre n est majorée par :*
$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}.$$

2. *La somme S est majorée par a_0 :*
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n\right| \leq a_0$$

3. *La somme de la série $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ a le signe du premier terme $(-1)^{n_0} a_{n_0}$.*

1.3.4 Méthode du développement asymptotique

Cette méthode est la généralisation de la méthode d'équivalence dans le cas des séries à termes de signe quelconque.

Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple à étudier qui correspond à une approximation au premier ordre. Malheureusement ce n'est pas le cas pour les séries à termes quelconques (voir l'exercice 1.4), et pour ceci on donne un développement asymptotique du terme général.

Exemple 1.18 *Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$.*
On remarque que les critères précédents (Abel et Leibniz) ne s'applique pas pour l'étude de la nature de cette série, dans ce cas on peut utiliser le développement limité de $\ln(1+x)$ *au voisinage de* 0 *:*
$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{2\sqrt{n}} + \frac{\cos^3 n}{3n^{3/2}} + o\left(\frac{\cos^3 n}{3n^{3/2}}\right).$$

On a
$$\begin{cases} \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{converge d'après Abel.} \\ \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos^2 n}{2\sqrt{n}} \quad \text{diverge puisque } \dfrac{\cos^2 n}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1+\cos 2n}{2n}. \\ \sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{\cos^3 n}{3n^{3/2}} + o\left(\dfrac{\cos^3 n}{3n^{3/2}}\right)\right) \quad \text{converge absolument.} \end{cases}$$

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$ *diverge.*

1.4 Exercices

Exercise 1.1 *Calculer la somme des séries numériques suivantes*

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\,(n+2)},\qquad \sum_{n\geq 2}\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right),\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-(-1)^n}{3^n}.$$

Solution : Calcul de la somme des séries : la somme d'une série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est la limite de la suite de la somme partielle (S_n).

1. La somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n\,(n+3)}$. On a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n\,(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

C'est une série télescopique et

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$S=\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]=\frac{5}{12}.$$

2. La somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2}\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$. On a

$$u_n=\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=\ln\frac{(n-1)\,(n+1)}{n^2}=\ln(n-1)-2\ln n+\ln(n+1).$$

C'une série télescopique et

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} u_k \\ &= (\ln 1 - 2\ln 2 + \ln 3) + ... + (\ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)) \\ &= -\ln 2 + \ln \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} -\ln 2 + \ln \frac{n+1}{n} = -\ln 2.$$

3. La somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-(-1)^n}{3^n}$. On a

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{3^n} = \frac{n}{3^n} - \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{n+1}{3^n} - \frac{1}{3^n} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3^k} - \frac{1}{3^k} \\ &= 3\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} - \frac{1}{3} + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right] - \left(\frac{1}{3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2.3^n} + \frac{1}{2.3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2.3^n} + \frac{1}{2.3} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} - \left(\frac{-1}{3} \frac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

et par conséquent

$$S = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Exercise 1.2 *Etudier la nature des séries numériques suivantes :*

$$\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2}{3}\right)^n,\quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right)^n,\qquad \sum_{n\geq 0}(4+(-1)^n)^{-n},\quad \sum_{n\geq 1}1-\cos\frac{1}{n},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^2\quad ,\forall\alpha\in[0,\pi/2]\,.$$

Solution :

1. La série $\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ Converge puisque c'est une série géométrique de raisons $\left(-\frac{2}{3}\right)$ et $\left|-\frac{2}{3}\right|<1$.

2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n}$ diverge d'après D'Alembert puisque
$$\forall n\geq 1:\frac{3^n}{n}\geq 0,$$
et
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)}\times\frac{n}{3^n}=3>1.$$

3. L série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right)^n$ converge d'après Cauchy puisque
$$\forall n\geq 1:\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right)^n\geq 0$$
et
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right)^n}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\cos^2 n}{n}\right)=0<1.$$

4. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}$ converge par équivalence puisque
$$0\leq\frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^{3/2}(\ln n)^{-1}},$$

et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}(\ln n)^{-1}}$ converge d'après Bertrand $(3/2>1)$.

5. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(4+(-1)^n)^{-n}$ converge par comparaison, puisque

$$0\leq (4+(-1)^n)^{-n}=\frac{1}{(4+(-1)^n)^n}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

et la série $\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{3}<1$).

6. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}1-\cos\frac{1}{n}$ converge par équivalence, puisque on utilisant le développement limité de $\cos y$ en 0, on obtient

$$1-\cos\frac{1}{n}=1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2n^2}$$

et $\sum\frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann pour $\alpha=2>1$).

7. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^2$ diverge d'après la condition nécessaire pour tout $\alpha\in\,]0,\pi/2]$ puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^2=+\infty\neq 0.$$

Pour $\alpha=0$, la série nulle converge.

Exercise 1.3 *Etudier la convergence absolue et la semi-convergence des séries suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2n}{n+n^3},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\arctan\frac{1}{n},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right),$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}}.$$

Solution :

1. On a

$$\left|\frac{\sin 2n}{n+n^3}\right|\leq\frac{1}{n^3}$$

et la série $\sum\frac{1}{n^3}$ converge, alors la série $\sum\frac{\sin 2n}{n+n^3}$ converge absolument.

Donc elle converge.

2. Au voisinage de 0, on a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\arctan\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\arctan\frac{1}{n}$ converge absolument. Donc elle converge.

3. On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, alors la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ converge absolument. Donc elle converge.

4. On a

$$\left|\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, alors la série $\sum \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ ne converge pas absolument. D'une autre côté :

$$\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1} + (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge d'après Riemann et la série $\sum (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ converge d'après Leibniz(puisque la suite $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est une suite positive décroissante qui converge vers 0). Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ diverge(somme d'une série divergente et une série convergente). Donc elle est semi-convergente.

5. On a

$$\left|(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \sim \frac{1}{2n},$$

et la et la série $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, alors la série $\sum (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ ne converge pas absolument. Mais la suite $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+1}$ est une suite positive décroissante qui converge vers 0. Donc la série est semi-convergente.

6. On a

$$\left|(-1)^n \frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après Riemann et la série $\sum \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$ converge d'après Abel(voir remarque 1.10). Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}}$ diverge(somme d'une série divergente et une série convergente), alors la série $\sum (-1)^n \frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas absolument. D'une autre côté on a

$$(-1)^n \frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}.$$

Puisque la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après Leibniz et la série $\sum (-1)^n \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$ converge d'après Abel. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+\cos 4n}{\sqrt{n}}$ converge(somme de deux séries convergentes). Donc la série est semi-convergente.

Exercise 1.4 *Montrer que les séries de terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

ne sont pas de mêmes natures et que pourtant $u_n \backsim v_n$.

Solution : On a

1. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après Leibniz (puisque c'est une série alternée).
2. La série $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge (somme d'une série convergente et une série divergente).
3. De plus $u_n \backsim v_n$ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{n}}{n\,(-1)^n}} = 1$$

Ce qui prouve que le critère de comparaison s'applique seulement sur les séries de terme général positif.

Exercise 1.5 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives convergentes.*
Quelle est la nature des séries suivantes :

$$\sum \sqrt{u_n v_n} \quad , \qquad \sum \frac{u_n}{1-v_n} \quad , \qquad \sum v_n^2.$$

Solution :

1. On a :

$$\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2 = u_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + v_n \geq 0.$$

   On déduit que

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + v_n\right),$$

   et puisque $\sum \dfrac{u_n + v_n}{2}$ converge, alors $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge par comparaison.

2. Puisque $\sum v_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1-v_n} \cdot \frac{1}{u_n} = 1 \implies u_n \sim \frac{u_n}{1-v_n}$$

   Il en résulte que $\sum \dfrac{u_n}{1-v_n}$ converge.

3. Puisque $\sum v_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies |v_n| < \epsilon.$$

   Pour

$$\epsilon = 1 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies v_n < 1$$

   alors $v_n^2 < v_n$. Donc $\sum v_n^2$ converge par comparaison.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Soient $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E une partie non vide de $\mathbb{K}$. On considère l'ensemble des fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$, noté par $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$.

2.1 Suites de fonctions

Définition 2.1 *Une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ s'appelle suite de fonctions sur E, on la note par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou f_n.*

Pour tout x fixé dans E, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique .

Exemple 2.1 *:*

- $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}, \quad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{inx}}{n}, \quad \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

2.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{K}$.*
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $D \subseteq E$ si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ et on écrit :

$$\{f_n \to f\} \iff \{\forall \epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\}.$$

- *La fonction* f *s'appelle la limite simple de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* D.

- *Le plus grand sous-ensemble* $D \subseteq E$ *des points* $x \in D$ *tel que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{K}$*, s'appelle domaine de convergence simple de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.2 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{-nx} \end{array}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ +\infty & si\ x < 0 \end{cases}$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On remarque que la fonction f *n'est pas continue par contre les fonctions* f_n *sont continues.*

Exemple 2.3 *Soit la suite de fonctions* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où*

$$\begin{array}{rccc} g_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sin nx}{n} \end{array}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0,$$

donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$ *vers* $g = 0$.

On remarque que toutes fonctions g_n *sont continument dérivables sur* $\mathbb{R}$*, mais la suite des dérivées* $\left(g_n'\right)$ *n'a pas de limite, c-à-d :*

$$\lim_{n\to+\infty} g_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \cos nx \quad n'existe\ pas.$$

Remarque 2.1 *La convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : continuité, intégrabilité, dérivabilité.*

2.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 2.3 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $f_n \in \mathcal{F}(E,\mathbb{K})$) est dite uniformément convergente sur $D \subseteq E$ vers la fonction f si :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

C-à-d :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

et on écrit $f_n \rightrightarrows f$ sur D.
De plus l'ensemble D sera dit le domaine de convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) sur l'ensemble D d'après la définition 2.3, on doit suivre les étapes suivants :

1. Trouver la fonction f par l'étude de la convergence simple.
2. Détermination de la suite (u_n) telle que $u_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ceci justifie que la convergence uniforme est plus difficile à vérifier que la convergence simple.

Remarque 2.2 *Dans la définition de la convergence simple, n_0 dépend de x et de ϵ par contre dans la définition de la convergence uniforme, n_0 dépend seulement de ϵ et commun pour tous les x de D, ce qui est traduit graphiquement qu'à partir d'un certain rang n_0, les courbes des fonctions f_n s'insèrent dans une bande de largeur 2ϵ autour de la courbe de f.*

Proposition 2.1 *La limite unifome (simple) d'une suite de fonctions si elle existe elle est unique.*

Proposition 2.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions (où $f_n \in \mathcal{F}(D,\mathbb{K})$).*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D ssi il existe une suite positive $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers zéro vérifiant :*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq W_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D.$$

2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur D ssi il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$.*

Démonstration. *C'est évident car :*

1. *Ona $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.*
2. *Ona $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty$* ■

Exemple 2.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0, 2\pi[$ par :*

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = 0.$$

De plus

$$\sup_{x\in[0,2\pi[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi[} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,2\pi[} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Ce qui traduit la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.5 *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par :*

$$g_n(x) = \frac{2nx}{1+x^2n^2}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2nx}{1+x^2n^2} = 0 = g(x).$$

Posons $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} |g_n(x_n) - g(x_n)| = \lim_{n\to+\infty} \left| g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1.$$

Donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$.

Proposition 2.3 *La convergence uniforme d'une suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *implique sa convergence simple.*

L'inverse n'est pas toujours vrais.

Démonstration. Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D.

$$\begin{aligned} f_n \rightrightarrows f \text{ sur } D \quad &\iff \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \\ &\iff \forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \implies \|f_n - f\|_\infty < \epsilon. \\ &\iff \forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \implies \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \\ &\iff \forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.6 *Soit* $f_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1]$.

La suite de fonction (f_n) *converge simplement sur* $[0,1]$, *puisque on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1[\\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Mais

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1,$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

Si on restreint à l'intervalle $[0, a]$ *où* $0 < a < 1$ *on aura :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \text{(n fixé)} \sup_{x \in [0,a]} |x^n| = a^n,$$

et comme

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,a]} x^n = \lim_{n \to +\infty} a^n = 0.$$

donc $f_n \rightrightarrows 0$ *sur* $[0, a], \forall a \in]0, 1[$.

On sait qu'une suite numérique de nombres réels ou complexes converge ssi est une suite de cauchy, ce qui conduit au résultat suivant :

Théorème 2.1 (Critère de Cauchy uniforme) *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions (où* $f_n \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$*) et soit* $D \subseteq E$*. Alors pour que la suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* f *sur* D *il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall m > n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Démonstration.

1. Supposons que $f_n \rightrightarrows f$ sur J alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2.$$

   Par suite $\forall x \in D, \forall m > n > n_0$ on a

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

2. Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall m > n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

alors pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ce qui implique qu'elle est convergente c-à-d $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Comme

$$\forall m > n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Si

$$m \to +\infty, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Mais $x \in D$ est arbitraire et n_0 ne dépent pas de x, donc

$$\forall n > n_0 \implies \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

i.e $f_n \rightrightarrows f$ sur D. ■

Proposition 2.4 *Soient $f_n, g_n \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$, si les deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $D \subseteq E$ vers f et g (resp) alors la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $D \subseteq E$ vers la fonction $\alpha f + \beta g$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})$.*

Démonstration. C'est évident car on a :

$$\|(\alpha f_m + \beta g_m) - (\alpha f_n + \beta g_n)\|_\infty \leq |\alpha| \|f_m - f_n\|_\infty + |\beta| \|g_m - g_n\|_\infty$$ ■

Remarque 2.3 *La suite du produit $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement uniformément convergente.*

Exemple 2.7 *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x + \frac{1}{n} = x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors $f_n \to f$ *sur* $\mathbb{R}$. *En plus, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| \leq \left|\frac{1}{n}\right| \implies f_n \rightrightarrows f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Mais la suite (f_n^2) *ne converge pas uniformément vers* f^2 *sur* $\mathbb{R}$ *puisque*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n^2(x) - f^2(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{2xn+1}{n^2}\right| = +\infty$$

2.1.3 Théorèmes fondamentaux sur la convergence uniforme des suites de fonctions

Théorème 2.2 (de continuité) *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle (ouvert, fermé ou semi ouvert) non réduit à un point et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* I, *convergente uniformément vers une fonction* f *sur* I *alors* f *est une fonction continue sur* I.
De plus

$$\forall a \in \overline{I} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right). \tag{2.1}$$

Démonstration. Si $f_n \rightrightarrows f$ sur I alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in I, \forall n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3. \tag{2.2}$$

De plus si f_n est continue en $x_0 \in I$ alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3. \tag{2.3}$$

De (2.2) et (2.3) on déduit $\forall x \in I : |x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

d'où la continuité de f en tout $x_0 \in I$.

Montrons l'égalité (2.1).

1. Si $a \in I$ alors d'après la continuité des fonctions f_n et f en a, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to a} f_n(x) = f_n(a),$$

donc

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim_{n \to +\infty} f_n(a) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

2. Si $a \notin I$ on pose

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} \lim_{x \to a} f_n(x) & \text{Si } x = a \\ f_n(x) & \text{Si } x \in I \end{cases}$$

c-à-d $\widetilde{f_n}$ est le prolongement par continuité de f_n sur $\overline{I}$, donc la fonction $\widetilde{f_n}$ est continue.

Montrons sa convergence uniforme sur $\overline{I}$. On a

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in I, \forall m > n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \tag{2.4}$$

par passage à la limite quand $x \to a$ on aura

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall m > n > n_0 \implies \left| \widetilde{f_m}(a) - \widetilde{f_n}(a) \right| < \epsilon, \tag{2.5}$$

on déduit que $\left(\widetilde{f_n}(a) \right)$ est une suite de Cauchy.

De (2.4) et (2.5) on peut écrire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in \overline{I}, \forall m > n > n_0 \implies \left| \widetilde{f_m}(x) - \widetilde{f_n}(x) \right| < \epsilon$$

ce qui veut dire que $\widetilde{f_n}$ converge uniformément vers $\widetilde{f}$ sur $\overline{I}$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right).$$

■

Remarque 2.4 *:*

1. *Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction discontinue alors la convergence n'est pas uniforme. Voir l'exemple 2.6*
2. *Il peut arriver que les fonctions f_n étant continues et f soit continue, sans que la convergence soit uniforme. Voir l'exemple 2.5*

Théorème 2.3 (de Dini) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues et simplement convergente vers une fonction f continue sur $[a,b]$.*
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors sa convergence est uniforme sur $[a,b]$.

Démonstration. On pose por tout $x \in [a,b]$:

$$R_n(x) = f(x) - f_n(x) \geq 0,$$

alors

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f_{n+1}(x),$$

et comme

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x),$$

on aura $(R_n(x))$ est une suite décroissante et minorée par 0 i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \implies R_n(x) = |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a,b]. \qquad \blacksquare$$

Exemple 2.8 *Soit la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = 1 - \frac{x}{n^3}$$

- *Les fonctions f_n sont des fonctions polynomiales donc continue sur $[0,1]$.*

- *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*

$$n^3 \leq (n+1)^3 \implies \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \implies 1 - \frac{x}{n^3} \leq 1 - \frac{x}{(n+1)^3} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

- *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction continue sur* $[0,1]$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{x}{n^3} = 1$$

Alors d'après le théorème de Dini la convergence est uniforme.

Théorème 2.4 (d'intégration) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, convergente uniformément vers une fonction* f *sur* $[a,b]$*. Alors :*

1. f *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$*.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$

Démonstration. D'après la convergence uniforme on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in [a,b], \forall n > n_0 \implies f_n(x) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

La fonction f_n étant intégrable, il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, ..., x_p = b\}$ de $[a,b]$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} (M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\text{où } M_{n_i} = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_n \quad , \quad m_{n_i} = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_n.$$

En notant :

$$M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \quad , \quad m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$$

par suite pour $1 \leq i \leq p$:

$$m_{n_i} - \frac{\epsilon}{2(b-a)} \leq m_i \leq M_i \leq M_{n_i} + \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{p}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\leq\sum_{i=1}^{p}(M_{n_i}-m_{n_i})(x_i-x_{i-1})+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon,$$

ainsi f est intégrable sur $[a,b]$. De plus

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx\leq\|f_n-f\|_\infty(b-a)\to 0,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Exemple 2.9 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[0,\pi]$ par : $f_n(x)=\frac{\sin x}{n}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x}{n}=0=f(x).$$

De plus

$$\sup_{x\in[0,2\pi[}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,\pi]}\left|\frac{\sin x}{n}\right|\leq\frac{1}{n}.$$

Ce qui donne la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi]$ vers la fonction nulle, cependant

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi\frac{\sin x}{n}dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0=\int_0^\pi 0dx.$$

Remarque 2.5 *La condition de la convergence unifome est suffisante mais pas nécessaire pour que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple 2.10 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues (intégrables) sur $[0,1]$ par : $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}nx\left(1-x^2\right)^n=0=f(x).$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2},$$

alors que

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 0dx=0$$

Donc d'après le théorème d'intégration la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente uniformément sur* $[0,1]$.

Corollaire 2.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on pose*

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,dt\quad,\quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\quad,\quad x\in[a,b].$$

Alors la suite des primitives $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* F *sur* $[a,b]$.

Démonstration. Pour $x\in[a,b]$ on a

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F(x)| &\le \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,dt\\ &\le \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt\\ &\le \|f_n-f\|_\infty (b-a)\to 0\end{aligned}$$

■

Théorème 2.5 (de dérivation) *Soient* $I\subset\mathbb{R}$ *un intervalle non réduit à un point et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* K. *On suppose que :*

1. *Pour tout* n, *la fonctions* f_n *est dérivable (resp.* $\mathcal{C}^1$*) sur* I.
2. $\exists x_0\in I$, *tel que la suite numérique* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
3. *La suite des dérivées* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g *sur tout intervalle fermé, borné* $[a,b]\subset I$.

Alors : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné* $[a,b]\subset I$ *vers une fonction* f *dérivable (resp.* $\mathcal{C}^1$*) sur* I *et l'on a* $f'=g$.

Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

Démonstration. Comme il existe $x_0 \in I$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ existe (noté $f(x_0)$), on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0$$

D'autre part on sait que

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad \text{(convergence simple)}$$

puisque

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \text{ sur } [a,b] \quad \text{(convergence uniforme)}$$

c-à-d ona

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$ définie par

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

et par dérivation on obtient

$$f'(x) = g(x) = \int_{x_0}^{x} g'(t)\,dt \quad \text{car } g \text{ est continue sur } [a,b].$$

■

Remarque 2.6 *:*

1. *La convergence uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dérivables, n'implique pas que la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
2. *La limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables peut être non dérivable.*

Exemple 2.11 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* $f = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Mais la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *puisque* $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$ *n'a pas de limite à l'infinie.*

Exemple 2.12 *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x| = f(x)$$

et

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n} \implies \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.

Mais la fonction $|x|$ *est non dérivable au point* 0.

2.2 Séries de fonctions

Dans ce qui suit, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble non vide $E \subset \mathbb{K}$ et à valeurs réelles. Associons à cette suite, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad \forall x \in E.$$

Définition 2.4 *:*

- *Le couple* (f_n, S_n) *constitué des deux suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, s'appelle série de fonctions sur* E *et se désigne par* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *ou* $\sum f_n$.
- *Le terme* f_n *s'appelle le terme général de la série* $\sum f_n$ *et la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle la suite de la somme partielle d'ordre* n *de cette série.*

2.2.1 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition 2.5 (Convergence simple) *:*

- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *est dite convergente en* $x_0 \in E$*, lorsque la série numérique* $\sum f_n(x_0)$ *est convergente, c-à-d la suite numérique* $(S_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *est dite simplement convergente sur une partie* $D \subseteq E$ *si la série numérique* $\sum f_n(x)$ *est convergente en tout point* $x \in D$*, ce qui est équivaut à la convergence simple se la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* D*. et dans ce cas* D *s'appelle le domaine de convergence simple.*
- *Si* D *est non vide, on définit une fonction*

$$\begin{array}{rcl} S: \; D & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) \end{array}$$

qu'on appellera somme simple des série de fonctions $\sum f_n$*. On écrit :*

$$\begin{aligned} \left\{\sum f_n \to S\right\} &\iff \left\{\forall\epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\right\} \\ &\iff \left\{\forall\epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \epsilon\right\} \\ &\iff \left\{\forall\epsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0 = n_0(\epsilon, x) : \forall n \geq n_0 \implies |R_n(x)| < \epsilon\right\}. \end{aligned}$$

Où (R_n) *s'appelle le reste d'e la série de fonctions* $\sum f_n$.

Remarque 2.7 *Pour étudier la convergence simple des séries de fonctions, on peut utiliser tous les critères établis sur la convergence des séries numériques.*

Exemple 2.13 *Etudions la convergence simple de la série de fonctions*

$$\sum \frac{x^{2n}}{n^3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{x^{2n}} = x^2,$$

alors d'après D'Alembert la série $\sum \frac{x^{2n}}{n^3}$ *converge simplement si* $|x| < 1$ *et diverge si* $|x| > 1$.
Pour $|x| = 1$, *la série devient* $\sum \frac{1}{n^3}$ *converge d'après Riemann.*
Donc le domaine de convergence simple est $[-1, 1]$.

Théorème 2.6 (Condition nécessaire de convergence simple) *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *est simplement convergente vers une fonction* S *sur* $D \subseteq E$, *alors la suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* D *vers la fonction nulle. C-à-d*

$$\sum f_n \longrightarrow S \text{ sur } D \iff f_n \longrightarrow 0 \text{ sur } D.$$

Définition 2.6 (Convergence absolue) *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *est absolument convergente sur* D *si la série de fonctions* $\sum |f_n|$ *est simplement convergente sur* D.

Remarque 2.8 *Il est immédiat que toute série de fonctions absolument convergente sur* D *est simplement convergente sur* D.

2.2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 2.7 *La série de fonctions* $\sum f_n$ *est dite uniformément convergente sur une partie* $D \subseteq E$, *lorsque la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers la fonction* S *sur* D, *et on écrit* $\{\sum f_n \rightrightarrows S\}$ *sur* D. *Dans ce cas* D *s'appelle le domaine de convergence uniforme et* S *s'appelle la somme uniforme de la série* $\sum f_n$. *i.e :*

$$\{\sum f_n \rightrightarrows S\} \text{ sur } D \iff S_n \rightrightarrows S \text{ sur } D$$

Formellement, la convergence uniforme s'exprime par :

$$\begin{aligned}\left\{\sum f_n \rightrightarrows S\right\} \text{ sur } D \quad &\Longleftrightarrow \left\{\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon), \forall x \in D : \forall n \geq n_0 \implies |S_n(x) - S(x)| < \epsilon\right\} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0.\end{aligned}$$

Remarque 2.9 *La convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum f_n$ sur D nécessite sa convergence simple sur D.*

Exemple 2.14 *Considérons la série de fonctions $\left(\sum x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est série géométrique de raison $x \in \mathbb{R}$, alors sa suite de sommes partielles est donnée par*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Alors la série $\left(\sum x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $D =]-1, 1[$ vers la fonction S où $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Cependant la convergence n'est pas uniforme sur $]-1, 1[$ car

$$\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x}\right| = \sup_{x\in]-1,1[} \left|\frac{x^{n+1}}{1 - x}\right| = +\infty.$$

Par contre, pour tout $a \in]0, 1[$, on a

$$\forall x \in [-a, a] : |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1 - a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui implique la convergence uniforme de $\left(\sum x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[-a, a]$.

Proposition 2.5 *Si les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément vers les fonctions f et g sur D, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la série $\sum (\alpha f_n + \beta g_n)$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$ sur D.*

Théorème 2.7 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries de fonctions) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions (où $f_n \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$) et soit $D \subseteq E$. Alors pour que série* *de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction S sur D il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall x \in D, \forall m > n > n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon.$$

Ou bien :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall m > n > n_0 \implies \sup_{x\in D} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon.$$

Proposition 2.6 (Condition nécessaire de convergence uniforme) *Si la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente vers une fonction S sur $D \subseteq E$, alors le terme général f_n converge uniformément sur D vers la fonction nulle. C-à-d :*

$$\sum f_n \rightrightarrows S \text{ sur } D \iff f_n \rightrightarrows 0 \text{ sur } D.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy pour la convergence uniforme sur la suite des sommes partielles (S_n).

On a

$$\sup_{x\in D} |f_n(x)| = \sup_{x\in D} |S_n(x) - S_{n-1}(x)|,$$

et d'après le critère de Cauchy pour la convergence uniforme, ona

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x)| = 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de le suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers zéro sur D. ■

Remarque 2.10 *:*

1. *On peut trouver des séries de fonctions qui ne converge pas uniformément sur D et son terme général converge uniformément vers la fonction nulle sur D.*
2. *Si une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur l'ensemble D, alors la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur D.*

Proposition 2.7 *Si les séries de fonctions* $\sum f_n$ *et* $\sum g_n$ *convergent uniformément vers les fonctions* f *et* g *sur* D*, alors* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, la série* $\sum (\alpha f_n + \beta g_n)$ *converge uniformément vers* $\alpha f + \beta g$ *sur* D*.*

Théorème 2.8 (Critère d'Abel pour la convergence uniforme) *La série de fonctions* $\left(\sum f_n g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur l'ensemble* D*, si*

1. $\exists M > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D : \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq M.$
2. *La suite de fonctions* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone et converge uniformément vers* 0 *sur* D*.*

Théorème 2.9 (Critère de Leibniz pour la convergence uniforme) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions à valeurs positives sur* E *(c-à-d* $\forall x \in E : f_n(x) \geq 0$*). La série alternée de fonctions* $\left(\sum (-1)^n f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur l'ensemble* $D \subseteq E$*, si la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et converge uniformément vers la fonction nulle sur* D*.*

2.2.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 2.8 *La série de fonctions* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite normalement convergente sur une partie* $D \subseteq E$*, si la série numérique* $\left(\sum \sup_{x\in D} |f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Exemple 2.15 *Etudions la convergence normale de la série de fonctions*

$$\sum \frac{x^{2n}}{n^3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x^{2n}}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3},$$

et $\sum \frac{1}{n^3}$ *converge, donc* $\sum \frac{x^{2n}}{n^3}$ *converge normalement sur* $[-1, 1]$*.*

Exemple 2.16 *Etudions la convergence normale de la série de fonctions*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{e^{-n^2x}}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *diverge alors* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$ *converge ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2.11 *La convergence normale nécessite la convergence absolue.*

Proposition 2.8 (de Weierstrass) *Soit* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série de fonctions sur* E.

- *S'il existe une série numérique à termes positifs et convergente* $\sum u_n$ *telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in D : |f_n(x)| \leq u_n,$$

alors la série $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur* D.

- *S'il existe une série numérique à termes positifs et divergente* $\sum v_n$ *telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in D : v_n \leq |f_n(x)|,$$

alors la série $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas normalement sur* D.

Proposition 2.9 *Si la série de fonctions* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur l'ensemble* D*, alors elle converge uniformément sur* D.

Démonstration. Supposons que la série de fonctions $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur l'ensemble D, alors la série $\sum\sup_{x\in D}|f_n(x)|$ converge, donc vérifie la condition de Cauchy c-à-d

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n>m\geq n_0 \implies \sum_{k=m+1}^{n}\sup_{x\in D}|f_k(x)| < \epsilon.$$

Et comme

$$\sup_{x\in D}\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n}\sup_{x\in D}|f_k(x)|,$$

donc

$$\forall\epsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n>m\geq n_0 \implies \sup_{x\in D}\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Ce qui signifie que la série $\sum f_n$ vérifie le critique de Cauchy d'où la convergence uniforme.

$\blacksquare$

Remarque 2.12 *On peut trouver des séries de fonctions qui converge uniformément sans être normalement convergente.*

Exemple 2.17 *Soit la suite de fonctions constantes donnée par :*

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

La séries de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas normalement convergente car

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2.2.4 Propriétés des sommes des séries de fonctions

Les théorèmes fondamentaux sur la convergence uniforme des suites de fonctions vus au précédement peuvent être appliqués aux suites des sommes partielles de séries de fonctions et conduisent aux résultats suivants :

Théorème 2.10 (de continuité) *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (ouvert, fermé ou semi ouvert) non réduit à un point et $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions continues sur I, convergeant uniformément sur I alors sa somme est une fonction continue sur I. i.e*

$$\forall x_0 \in \overline{I}; \quad \sum_{n\geq 0} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x) \right).$$

Théorème 2.11 (d'intégration) *Soit $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions convergente uniformément sur l'intervalle $[a,b]$. Si les fonctions f_n $(\forall n \in \mathbb{N})$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors*

1. *La somme S de la série est intégrable sur $[a,b]$. De plus*

$$\textstyle\sum_{n\geq 0}\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)=\int_a^b \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)dx.$$

2. *La série des primitives $\sum_{n\geq 0}\int_a^x f_n(t)\,dt$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\int_a^x S(t)\,dt$.*

Exemple 2.18 *Comme dans le cas de la série géométrique, on a les séries :*

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \qquad et \qquad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n},$$

convergent uniformément sur chaque intervalle $[a,b]\subset\,]-1,1[$. Alors pour $|x|<1$, on peut donc les intégrer terme à terme de 0 à x comme suit

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\textstyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\\ arctgx&=\textstyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Théorème 2.12 (de dérivation) *Soit $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions continument dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, si*

1. *$\exists x_0\in[a,b]$, tel que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ converge.*
2. *La série des dérivées de fonctions $\left(\sum f_n'\right)$ est uniformément convergente vers une fonction T sur $[a,b]$.*

Alors : la série $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continument dérivable S sur $[a,b]$ et l'on a

$$S'=\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)'=\sum f_n'=T.$$

Corollaire 2.2 *Soit $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions où $f_n\in\mathcal{C}^m([a,b])\,, m\geq 1$. Si*

1. *Pour tout $k\in[0,m-1]$, Les séries de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ sont simplement converge sur $[a,b]$.*
2. *La série de fonctions $\left(\sum f_n^{(m)}\right)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.*

Alors :

- *Toutes les séries de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ $(0 \leq k \leq m-1)$ *sont uniformément convergente.*
- *La somme* S *de la série* $\left(\sum f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de classe* $\mathcal{C}^m\left([a,b]\right)$ *et l'on a*

$$S^{(k)} = \sum f_n^{(k)}, \qquad 0 \leq k \leq m.$$

Exemple 2.19 *Considérons la série de fonctions suivante :*

$$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}, \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

On a

$$\forall x \geq 1 : ne^{-nx} \leq ne^{-n}$$

et $\sum_{n\geq 1} ne^{-n}$ *converge (car* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 ne^{-n} = 0$*), donc* $\sum_{n\geq 1} ne^{-nx}$ *converge normalement sur* $[1, +\infty[$.

D'autre part les fonction $f_n(x) = e^{-nx}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1, +\infty[$.

Alors d'après le théorème de dérivation, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$ *converge et*

$$\sum_{n\geq 1} \left(e^{-nx}\right)' = \left(\sum_{n\geq 1} e^{-nx}\right)',$$

d'où

$$-\sum_{n\geq 1} ne^{-nx} = \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)'.$$

Par conséquent

$$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}.$$

2.3 Exercices

Exercise 2.1 *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions* (f_n) *suivantes :*

1. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+2n+x}$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *puis sur* $[0,1]$.

2. $f_n(x) = \dfrac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

3. $f_n(x) = \dfrac{e^{-n^2x}}{n^3}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

4. $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$ *sur* $[0,1]$ *puis sur* $[0,a]$ *avec* a *dans* $]0,1[$.

Solution :

1. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+2n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[0,1]$.

   La convergence est simple sur $\mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{1+2n+x} = \frac{x^2}{2} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

   La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$, puisque on a si $x = 2n$

$$|f_n(2n) - f(2n)| = \frac{8n^3 + 4n^2}{2(1+5n)},$$

   et

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(2n) - f(2n)| = +\infty \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)|.$$

   La convergence est uniforme sur $[0,1]$, puisque d'après Weierstrass on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^2 + x^3}{2(1+2n+x)}\right| \leq \frac{1}{1+2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $f_n(x) = \dfrac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   La convergence est simple sur $\mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)} = 0 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$, puisque d'après Weierstrass on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin n\sqrt{x}|}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. $f_n(x) = \dfrac{e^{-n^2 x}}{n^3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$

   La convergence est simple sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{n^3} = 0 = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

   La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

4. $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1}) \qquad$ sur $[0,1]$ puis sur $[0,a]$ avec a dans $]0,1[$.

   La convergence est simple sur $[0,1]$,

   - Si $x \in [0,1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n(x^n - x^{n+1}) = 0.$
   - Si $x = 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0.$

   Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

   La convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$: puisque on a si $x = \dfrac{n}{n+1}$

$$\left| f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) - f\left(\frac{n}{n+1}\right) \right| = e^{(n+1)\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)},$$

   et

$$\lim_{n\to+\infty} \left| f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) - f\left(\frac{n}{n+1}\right) \right| = e^{-1} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|.$$

La convergence est uniforme sur $[0, a]$ avec a dans $]0, 1[$: on pose

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n\left(x^n - x^{n+1}\right) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Etudions la variation de g. On a

$$g'(x) = nx^{n-1}(n - (n+1)x),$$

et la fonction g admet un maximum pour $\frac{n}{n+1}$. Comme la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ converge vers 1, on a

$$\forall \epsilon = 1 - a, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \implies \frac{n}{n+1} > a,$$

et la fonction g est croissante sur $[0, a]$, donc

$$\sup_{x \in [0,a]} g(x) = g(a) = n\left(a^n - a^{n+1}\right),$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,a]} g(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(a^n - a^{n+1}\right) = 0.$$

Exercise 2.2 *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme et la convergence normale des séries de fonctions suivantes :*

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + xn^2}$ *sur* $[0, 1]$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n^3 x}}{n^3}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
3. $\sum_{n \geq 0} \left(x^n - x^{n+1}\right)$ *sur* $[0, 1]$.

Solution :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + xn^2}$ sur $[0, 1]$.

   Pour $x = 0 \in [0, 1]$: $f_n(0) = \frac{1}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+xn^2}$ ne converge pas simplement sur $[0,1]$, donc elle ne converge ni uniformément, ni normalement sur $[0,1]$.

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n^3x}}{n^3}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\frac{e^{-n^3x}}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3},$$

   et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge. La série $\sum \frac{e^{-n^3x}}{n^3}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc elle converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}_+$.

3. $\sum_{n\geq 0} (x^n - x^{n+1})$ sur $[0,1]$.

   Cette série converge simplement sur $[0,1]$ et on peut calculer la somme S.

   Si $x=0$, on a

$$S(0) = \sum_{n\geq 0} 0 = 0.$$

   Si $x \in [0,1[$, on obtient

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \left(x^n - x^{n+1}\right) = (1-x)\sum_{n\geq 0} x^n = 1$$

   On constate que la somme S n'est pas continue sur $[0,1]$, alors que les fonction f_n étaient continues. La convergence ne peut être ni uniforme, ni normale sur $[0,1]$.

Exercise 2.3 *Soit la suite de fonctions définie par :*

$$f_n(x) = n\sin\frac{x}{n} \quad ,x \in [0,+\infty] \ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. *Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.*
2. *Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ puis sur l'intervalle $[0,1]$.*
3. *Etudier la convergence simple de la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.*
4. *Que peut-on déduire ?*

Solution : Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où

$$f_n(x) = n\sin\frac{x}{n} \quad ,\forall x \in [0,+\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} n\sin\frac{x}{n} = x = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne convergence pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$: On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|n\sin\frac{x}{n} - x\right| \neq 0,$$

puisque

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \left|n\sin\frac{x}{n} - x\right| = +\infty.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$: On pose

$$g(x) = n\sin\frac{x}{n} - x \leq 0 \implies g'(x) = \cos\frac{x}{n} - 1 \leq 0$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|n\sin\frac{x}{n} - x\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|n\sin\frac{1}{n} - 1\right| = 0$$

3. La suite des dérivées est donnée par :

$$f_n'(x) = \cos\frac{x}{n}, \quad \forall x \in [0,+\infty[\ \textit{et} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

elle converge simplement sur $[0,+\infty[$ puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \cos\frac{x}{n} = 1$$

4. D'après le théorème de dérivation et puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne convergence pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$, alors on déduit que la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne convergence pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercise 2.4 *:*

1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par :*

$$f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 0$$

2. *On considère la série de fonctions de terme général g_n donnée par :*

$$g_n(x) = (-1)^n f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 0.$$

a. *Etudier la convergence simple et normale de la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ sur $\mathbb{R}_+$.*

b. *Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que sa somme S est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.*

3. *On pose $h_n(x) = e^{-x}u_n(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$.*

c. *Etudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum_{n\geq 0} h_n$ sur $[a, +\infty[; \forall a > 0$.*

d. *Calculer $T(x) = \sum_{n\geq 0} h'_n(x), \forall x > 0$.*

e. *Montrer que $\forall x > 0, S(x) = e^x \arctan(e^{-x})$ et justifier que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.*

Solution : Soit la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 0$$

1. <u>La convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$</u> :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-2nx}}{2n+1} = 0 = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: On pose

$$g(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1} \geq 0 \implies g'(x) = -\frac{2ne^{-2nx}}{2n+1} \leq 0$$

alors,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\frac{e^{-2nx}}{2n+1}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1}{2n+1}\right| = 0,$$

2. Soit la série de fonctions de terme général g_n donnée par :

$$g_n(x) = (-1)^n f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \geq 0.$$

a. La convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ sur $\mathbb{R}_+$: On a $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{e^{-2nx}}{2n+1}$ est une série alternée. De plus la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est :

- décroissante puisque $f_n(x) = \dfrac{e^{-2nx}}{2n+1} \geq \dfrac{e^{-2(n+1)x}}{2(n+1)+1} = f_{n+1}(x)$.

- convergente simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Alors d'après le critère de Laibniz la série altenée converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

La convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ sur $\mathbb{R}_+$. : On a pour $x = 0$, la série devient $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ et puisque $\sum\limits_{n\geq 0}\left|\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{2n+1}$ est divergente alors elle ne converge pas absolument, ce qui implique que la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}_+$ et par suite elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

b. La convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ sur $\mathbb{R}_+$: On a la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Alors d'après le critère de Laibniz pour la convergence uniforme la série altenée converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité et puisque les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, alors la somme S de la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On de plus :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0} g_n(x)\right] = \sum_{n\geq 0}\left[\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-2nx}\right) = 0.$$

3. On pose

$$h_n(x) = e^{-x} g_n(x) = (-1)^n \frac{(e^{-x})^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

c. La dérivabilité de la série $\sum\limits_{n\geq 0} h_n$ sur $[a, +\infty[\,; \forall a > 0$: On a

Les fonctions h_n sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} h_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ceci est due d'après Leibniz puisque c'est une série alternée.

La série des dérivées $\sum\limits_{n\geq 0} h'_n$est donnée par :

$$h'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-x(2n+1)}, \quad \forall x \in [0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}$$

elle converge uniformément sur $[a, +\infty[\,; \forall a > 0$ puisque c'est une série alternée $\left(a_n = e^{-x(2n+1)} \geq 0\right)$ et la suite (a_n) est décroissante, de plus converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[\,; \forall a > 0$, c-à-d :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-x(2n+1)} = 0$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |a_n(x) - 0| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}_+} e^{-x(2n+1)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-a(2n+1)} = 0.$$

Alors d'après le théorème de dérivation la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} h_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[\,; \forall a > 0$.

d. Calcul de T : on a $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n\geq 0} h_n'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} e^{-x(2n+1)} \\ &= -\sum_{n\geq 0} (-1)^n e^{-2xn} e^{-x} = -e^{-x} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(e^{-2x}\right)^n \\ &= -e^{-x} \sum_{n\geq 0} \left(-e^{-2x}\right)^n = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \end{aligned}$$

e. On a

$$\sum_{n\geq 0} h_n(x) = \int -\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx = \arctan e^{-x}.$$

Alors :

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} g_n(x) = e^x \sum_{n\geq 0} h_n(x) = e^x \arctan e^{-x}; \quad \forall x > 0,$$

et

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to 0} e^x \arctan e^{-x} = \frac{\pi.}{4}$$

D'une autre côté

$$S(0) = \sum_{n\geq 0} g_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Et puisque la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\lim_{x\to 0} S(x) = S(0) \implies \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Chapitre 3

Séries entières

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une famille particulière des séries de fonctions qui est constituée de fonctions de puissances et généralise les fonctions polynômes : ce sont les séries entières. Nous verrons que cette famille particulière joue un rôle important en mathématiques, comme la résolution de certaines équations différentielles.

3.1 Définition d'une série entière

Définition 3.1 *On appelle série entière toute série de fonctions* $\left(\sum f_n\right)$ *dont le terme général est de la forme* $f_n(x) = a_n x^n$ *où* (a_n) *désigne une suite réelle ou complexe et* x_0 *et* x *sont des nombres réels ou complexes (*x_0 *fixé).*

Remarque 3.1 *On peut avoir deux autres formes des séries entières*

1. *Le cas où le terme général de la série de fonctions est donné par* $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$ *et* x_0 *est un nombre réel ou complexe fixé. Pour étudier ce type Il suffit d'utiliser le changement de variable* $X = x - x_0$.
2. *Le cas où le terme général de la série de fonctions est donné par* $f_n(x) = a_n x^{\alpha n}$ *et* α *est un nombre rationnel fixé. Pour étudier ce type Il suffit d'utiliser le changement de variable* $X = x^{\alpha}$.

Pour unifier la présentation des résultats suivant, on se place dans le cas d'une variable réelle.

3.2 Domaine de convergence

Comme pour les séries de fonctions, l'étude ce base toujours sur la détermination du domaine de convergence de la série entière c-à-d

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Remarque 3.2 *Pour les séries entières, le domaine de convergence n'est jamais vide car il contient au moins le point $x = 0$.*

Lemme 3.1 (Lemme d'Abel) *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une suite entière.*

1. *Si le terme général de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est borné en un point $x_0 \neq 0$ alors :*
   - *La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$.*
   - *La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente dans chaque intervalle $[-r, r] \subset]-|x_0|, |x_0|[$.*
2. *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est divergente en un point $x_0 \neq 0$ (i.e $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ diverge) alors la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est divergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > |x_0|$.*

Démonstration. La suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n x_0^n| < M$$

1. Pour $|x| < |x_0|$:
$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$
La série $\sum\limits_{n\geq 0} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ est une série géométrique de raison $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, donc convergente. d'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n x^n|$ est convergente et par suite la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente.

Maintenant si on considère le nombre réel positif $r < |x_0|$ et soit $|x| \leq r$.

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente.

2. Soit $x_0 \neq 0$ tel que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ est divergente.

   Supposons que pour tout $|x| > |x_0|$ la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > |x_1| > |x_0|$, alors d'après ce qui précède la série $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n x_1^n|$ est convergente.

■

Remarque 3.3 *S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ converge alors, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$.*

en effet, la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0$, ce qui entraine l'existence d'un nombre réel $M > 0$ tel que

$$|a_n x_0^n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.1 *Pour toute série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, il existe un nombre $R \geq 0$ fini ou infini tel que*

1. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $|x| < R$*
2. *La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge pour tout $|x| > R$.*
3. *Si $R > 0$, pour tout $0 < r < R$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement pour tout $|x| \leq r$.*

Remarque 3.4 *Ce qui précède ne donne aucun renseignement sur ce qui se passe lorsque $|x| = R$, alors suivant la série considérée, on verra qu'elle peut converger ou diverger.*

Définition 3.2 *Le nombre R, fini ou infini, caractérisé par les propriétés* 1 *et* 2 *et* 3 *du théorème 3.1 s'appelle le rayon de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$*, il est donné par*

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n r^n| < +\infty\right\}$$

L'intervalle ouvert $]-R, R[$ *s'appelle l'intervalle de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$*.*

Exemple 3.1 *:*

Exemple 3.2

1. *La série géométrique* $\sum_{n\geq 0} x^n$ *converge absolument si* $|x| < 1$ *et diverge si* $|x| > 1$*. Donc* $R = 1$*.*
2. *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n}$ *converge absolument si* $|x| < 1$ *et diverge si* $|x| > 1$*. Donc* $R = 1$*.*

Remarque 3.5 *Le rayon de convergence d'une série entière ne dépend pas des premiers termes de la série. On peut modifier un nombre fini de coefficients sans modifier le rayon de convergence.*

Théorème 3.2 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *deux séries entières de rayons respectifs* R_a *et* R_b*. de sommes* S_a *et* S_b *à l'interieur des intervalles de convergence.*

1. *La série entière somme* $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$*, avec* $c_n = a_n + b_n$*, a pour rayon* $R_c \geq \min(R_a, R_b)$*, et pour somme* S_c *vérifiant :*

$$S_c(x) = S_a(x) + S_b(x), \quad \forall x \in \left]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)\right[.$$

Si de plus $R_a \neq R_b$*, alors* $R_c = \min(R_a, R_b)$*.*

2. *La série entière produit* $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$*, avec* $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$*, a pour rayon* $R_w \geq \min(R_a, R_b)$*, et pour somme* S_c *vérifiant :*

$$S_w(x) = S_a(x) . S_b(x), \quad \forall x \in \left]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)\right[.$$

Démonstration.

1. Si $|x| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ sont absolument convergente, donc $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$ l'est aussi.on en déduit que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

   Maintenant on va montrer que si $R_a < R_b$ on a $R_c = R_a$. Et pour ceci on suppose $R_c > R_a$, alors il existe un réel x tel que $R_a < |x| < R_b$ et $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$ convergente. Ce qui conduit à la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ et par suite $\sum\limits_{n\geq 0} (c_n - b_n) x^n = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ convergente, ce qui contredit la supposition que $R_a < |x|$.

2. Si $|x| < \min(R_a, R_b)$, alors les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ sont absolument convergente, donc $\sum\limits_{n\geq 0} w_n x^n$ l'est aussi.on en déduit que $R_w \geq \min(R_a, R_b)$. ■

Remarque 3.6 *Si $R_a \neq R_b$, on n'a plus nécessairement $R_w = \min(R_a, R_b)$.*

Proposition 3.1 *Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. On suppose que :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : a_n \neq 0.$$

Si la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, le rayon de convergence R est donné par

$$R = \begin{cases} 1/l & si\ 0 < l < +\infty \\ +\infty & si\ l = 0 \\ 0 & si\ l = +\infty \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de D'Alembert. ■

Proposition 3.2 *Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Si la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, le rayon de convergence R est donné par :*

$$R = \begin{cases} 1/l & si\ 0 < l < +\infty \\ +\infty & si\ l = 0 \\ 0 & si\ l = +\infty \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy. ■

Proposition 3.3 (D'Hadamard) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *est égal au nombre* R *défini par* $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exemple 3.3 *:*

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-2)^n}{n} x^n$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)}\frac{n}{(-2)^n}\right| = 2,$$

   alors $R = 1/2$.

2. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e,$$

   alors $R = 1/e$.

3. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$, *on a*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \left(\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}}\right)^{-1} = 1/4.$$

3.3 Propriétés des séries entières

Théorème 3.3 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors :*

1. *Sa somme* S *est une fonction continue sur* $]-R, R[$.
2. *La série entière dérivée* $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ *obtenue à partir de la série initiale par dérivation terme à terme, a le même rayon de convergence* R *et de plus*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in \left]-R, R\right[.$$

3. *La série entière primitive* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} x^n$ *obtenues à partir de la série initiale par intégration terme à terme, a le même rayon de convergence* R *et de plus*

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n, \quad \forall x \in \left]-R, R\right[$$

Corollaire 3.1 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \neq 0$*, alors sa somme* S *est indéfiniment dérivable dans l'intervalle de convergence c-à-d*

$$S \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\left]-R, R\right[\right)$$

De plus

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Corollaire 3.2 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ *deux séries entières et de sommes respectives* S_a *et* S_b*. Alors si* $S_a = S_b$ *sur un intervalle* $\left]\alpha, \beta\right[$ *contenant* 0 *on a*

$$a_n = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 3.4 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \in \mathbb{R}_+$ *et de somme* S*.*

1. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n R^n$ *est convergente alors*

$$\lim_{x\to R} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

2. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n R^n$ *est convergente alors*

$$\lim_{x\to -R} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n R^n.$$

Exemple 3.4 *Soit la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}\right| = 1 \implies R = 1.$$

Et comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *converge (d'après Leibniz) alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

3.4 Fonctions développables en séries entières

Définition 3.3 *Une fonction* f *définie sur un intervalle contenant* 0 *est dite développable en série entière autour de* 0*, s'il existe* $r > 0$ *et une série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *définie sur* $]-r, r[$*, telle que :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in \left]-r, r\right[.$$

Définition 3.4 *Une fonction* $f : x \to f(x)$ *définie sur un intervalle contenant* x_0 *est dite développable en série entière autour de* x_0*, si la fonction* $X \to f(X + x_0)$ *(où* $X = x - x_0$*) est développable en série entière au voisinage de* 0*. On aura alors :*

$$f(x) = f(X + x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[.$$

Proposition 3.4 *:*

1. *Si* f *est développable en série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *définie sur l'intervalle* $]-r, r[$*, alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty(]-r, r[)$ *et on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. *Si* f *est développable en série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ *sur l'intervalle* $]x_0 - r, x_0 + r[$

alors f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}\left(]x_0 - r, x_0 + r[\right)$ et on a

$$a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n .$$

Remarque 3.7 *S'il existe, un développement en série entière d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 , alors ce développement est unique.*

Définition 3.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage du point x_0, alors la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n$ est appelée développement en série de Taylor de f en x_0.*
Pour $x_0 = 0$ la série entière obtenue $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est appelée développement en série de Maclorin de f en 0.

Remarque 3.8 *Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ mais pas développable en série entière.*

Exemple 3.5 *Soit la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^*\right)$. De plus

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ pour tout x, mais $f \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi cette fonction n'est pas développable en série entière autour de 0.

Théorème 3.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}\left(]-r, r[\right)$, vérifiant la condition suivante :*

$$\exists M > 0, \forall n \geq 1, \forall x \in \left]-r, r\right[: \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

Alors, pour tout $x \in \left]-r, r\right[$, la fonction f est somme de la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

qui est de rayon de convergence supérieur ou égale à r.

3.5 Applications

3.5.1 Développement de certaines fonctions en série de Taylor

Les développements en séries entières des fonctions élémentaires sont tout simplement les développements limités vus en première année.

Ils se déduisent presque tous de trois développements à connaître :

$\dfrac{1}{1-x}$	$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	où $R=1$
e^x	$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	où $R=+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	où $R=1$

Notons que pour trouver la série de Taylor d'une fonction on applique différentes méthodes :

• On présente la fonction donnée sous forme de la somme des fonctions simples, dont les séries de Taylor sont connues.

• On applique parfois changement de variables, dérivation et intégration des séries.

Exemple 3.6 *Donner le développement en séries entières de chaque fonction ci-dessous :*

1. $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$

   On a

$$\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x}$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x/2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \forall |x| < R_1 = 2 \\ \frac{1}{3-x} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x/3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \forall |x| < R_2 = 3 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n + \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1}}\right] x^n \\ \forall |x| < \min(R_1, R_2) = 2 \end{cases}$$

2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}\right)$

On a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}\right) &= \ln\left(\frac{2\left(1+x^2/2\right)}{\sqrt{1-2x^2}}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+x^2/2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-2x^2\right) \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(2x^2\right)^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}x^{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^{2n} \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+2^{2n-1}}{n2^n}x^{2n}
\end{aligned}$$

Pour déterminer le rayon de convergence, on pose

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}+2^{2n-1}}{n2^n}$$

alors

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 1/2$$

Donc

$$\begin{cases} g(x) = \ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}+2^{2n-1}}{n2^n}x^{2n} \\ \forall\, |x| < 1/2 \end{cases}$$

3.5.2 Résolution des équations différentielles à l'aide des séries entières

On peut parfois utiliser les séries entières pour résoudre les équations différentielles ceci est due en exprimant leurs solutions au moyen des développement en séries entières. Afin d'expliquer cette technique considérons l'équation différentielle suivante :

$$y" + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)\,.$$

On cherche la solution de cette équation vérifiant la condition initiale

$$y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y'_0$$

Si les fonctions p, q, f se décompose en séries entières convergentes dans un voisinage du point 0, alors il existe une solution unique de l'équation différentielle sous forme d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ qui converge au voisinage du point 0.
En dérivant la série entière deux fois consécutivement et on remplaçant les expressions de y', y'', p, q, f dans l'équation différentielle, on présente cette équation sous forme d'une égalité de deux séries entières. De cette égalité on détermine les coefficients inconnus de la série entière.

Exemple 3.7 *Soit l'équation différentielle*

$$xy'' + xy' + y = 1 \tag{3.1}$$

Soit la série solution de l'équation différentielle

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{3.2}$$

En dérivant la série solution, on obtient

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

En dérivant pour la deuxième fois

$$y\text{''}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{3.3}$$

En substituant les formules 3.2 et 3.3 dans l'équation différentielle 3.1, on trouve :

$$\begin{aligned}
xy'' + xy' + y = 1 \quad &\Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(n-1\right) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(n+1\right) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \\
&\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left[n\left(n+1\right) a_{n+1} + \left(n+1\right) a_n\right] x^n = 1
\end{aligned}$$

Par identification

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ n\left(n+1\right) a_{n+1} + \left(n+1\right) a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Par ailleurs, on montre facilement par récurrence que

$$a_n = \left(-1\right)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$y\left(x\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} x^n$$

en mettant $a_1 x$ enfacteur

$$y\left(x\right) = 1 + a_1 x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

et en changeant l'indice de sommation

$$y\left(x\right) = 1 + a_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{n}}{n!}$$

ce qui donne facilement

$$y\left(x\right) = 1 + a_1 x e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.6 Exercices

Exercise 3.1 *Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries entières suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{3n} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} x^n \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)^n x^n.$$

Solution :

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n$. On a $a_n = \frac{5^n + (-3)^n}{n+1}$, utilisons le critère de D'Alembert :

$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} . \frac{n+2}{5^{n+1} + (-3)^{n+1}} \right| = \frac{1}{5}$, donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{5}$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{1}{5}$ et divergente si $|x| > \frac{1}{5}$.

Pour déterminer le domaine de convergence Δ de la série, il faut étudier les cas :

Si $x = \frac{1}{5}$, la série entière devient

$$\sum_{n \geq 1} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \left(-\frac{3}{5}\right)^n.$$

La première série du second membre de l'égalité diverge et la deuxième converge alors la série entière diverge pour $x = \frac{1}{5}$.

Si $x = \frac{-1}{5}$, la série entière devient

$$\sum_{n \geq 1} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Les deux séries du second membre de l'égalité convergent alors la série entière converge pour $x = \frac{1}{5}$.

Alors $\Delta = \left[\frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right[$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{3n}$, si on pose $t = x^3$, on obtient la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{3n} t^n$.

On a $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{3n}$, utilisons le critère de Cauchy :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{n}\right)^{3n}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^3 = 0$, donc le rayon de convergence est $R = +\infty$. La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dans ca cas $\Delta = \mathbb{R}$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} x^n$. On a

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \implies e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e^1$$

et les séries $\sum e^{-1}x^n$ et $\sum e^1 x^n$ ont le même reyon de convergence égale à 1, donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\sin n} x^n$ est $R = 1$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin n)^n x^n$. On a $a_n = (\sin n)^n$, utilisons le critère d'Hadamard :

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|(\sin n)^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |\sin n| = 1$, donc le rayon de convergence est $R = 1$.

La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

Exercise 3.2 *Calculer la somme et le rayon de convergence des séries entières suivantes*

$$\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} \quad , \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{n!} x^n \quad , \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \quad ,$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n \quad , \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Solution :

1. $\sum\limits_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} = \sum\limits_{n\geq 0} (n+1)^2 x^n \implies R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$

   On a $\forall\, |x| < 1$,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \quad &\implies \textstyle\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} &&\text{(par dérivation)} \\ &\implies \textstyle\sum_{n\geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} &&\text{(multiplions par } x) \\ &\implies \textstyle\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^2} &&\text{(par dérivation)} \end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n \implies R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty.$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n-1}{n!}x^n &= \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}x^n - \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}x^n - \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = (x-1)\,e^x\end{aligned}$$

3. $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\,nx^{2n+1} \Longrightarrow R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$
On a $\forall\,|x|<1$,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\,x^n = \frac{1}{1+x} \quad\Longrightarrow \textstyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\,nx^{n-1} &= \frac{-1}{(1+x)^2} &&\text{(par dérivation)}\\ \textstyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\,nx^n &= \frac{-x}{(1+x)^2} &&\text{(multiplions par } x)\\ \textstyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\,ny^{2n} &= \frac{-y^2}{(1+y^2)^2} &&\text{(posons } x=y^2)\\ \textstyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\,ny^{2n+1} &= \frac{-y^3}{(1+y^2)^2} &&\text{(multiplions par } y)\end{aligned}$$

4. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^{2n}}{2n+1} \Longrightarrow R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$
On a $\forall\,|x|<1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad&\Longrightarrow \int_0^x\left(\sum_{n\geq 0}t^{2n}\right)dt = \int_0^x\frac{dt}{1-t^2}\\ &\Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\int_0^x t^{2n}dt = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\ \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1} &= \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{(dévisons par } x\neq 0)\end{aligned}$$

Pour $x=0$, on a $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^{2n}}{2n+1} = 1.$

5. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(n+1)\,(n+2)}{n!}x^n \Longrightarrow R = +\infty.$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}x^n &= \sum_{n\geq 0}\frac{n^2-n-2}{n!}x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^n - 2\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \\
& x^2\sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} - 2e^x = (x^2-2)\,e^x.
\end{aligned}$$

Exercise 3.3 *Développer en série entière au voisinage de* 0 *les fonctions :*

$$f_1(x) = (1+x)\,e^{-x} \quad , \qquad f_2(x) = x^3\sqrt{1+2x} \quad , \qquad f_3(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad ,$$
$$f_4(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-3} \quad , \qquad f_5(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt \quad .$$

Solution :

- On a $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \implies e^{-x} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$ alors :

$$\begin{aligned}
(1+x)\,e^{-x} &= (1+x)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1} \\
&= 1 - x + \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n!}x^n + x + \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 2}(-1)^n\,\frac{(1-n)}{n!}x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- On a $\forall\,|x| < \frac{1}{2} : \sqrt{1+2x} = 1 + \sum_{n\geq 1} C_{1/2}^n\,(2x)^n$ où

$$C_{1/2}^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!}$$

alors $\forall\,|x| < \frac{1}{2}$:

$$f_2(x) = x^3\sqrt{1+2x} = x^3\sqrt{1+2x} = x^3 + \sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}x^n$$

- On a $\forall |x| < 1,$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n\end{aligned}$$

- On a $\forall |x| < 3,$

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^2-2x-3} &= \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{x}{3}\right)} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\sum\nolimits_{n\geq 0}\left(\frac{x}{3}\right)^n = -\sum\nolimits_{n\geq 0}\frac{1}{3^{n+1}}x^n.\end{aligned}$$

- On a :

$$f_5'(x) = -xe^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt + 1 = -xf_5(x) + 1.$$

Alors f_5 vérifie l'équation différentielle : $y' + xy = 1.$

On cherche la solution y sous forme d'une série entière :

$$\begin{aligned}y(x) = \sum\nolimits_{n\geq 0} a_n x^n &\Longrightarrow y'(x) = \sum\nolimits_{n\geq 1} na_n x^{n-1} \\ &\Longrightarrow \sum\nolimits_{n\geq 1} na_n x^{n-1} + x\sum\nolimits_{n\geq 0} a_n x^n = 1 \\ &\Longrightarrow \sum\nolimits_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum\nolimits_{n\geq 1} a_{n-1}x^n = 1 \\ &\Longrightarrow a_1 + \sum\nolimits_{n\geq 1}\left[(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right]x^n = 1\end{aligned}$$

donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait :

$$\begin{cases} a_0 = y(0) = 0 \\ a_1 = 1 \\ (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

où pour tout $n \geq 1,$

$$\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{3.5.....(2n+1)} \end{cases}$$

alors :

$$f_5(x) = x + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3.5.....(2n+1)} x^{2n+1} \qquad \text{et } R = +\infty.$$

Exercise 3.4 *: Considérons la série entière suivante :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} x^n$$

1. *Calculer son rayon de convergence.*
2. *Déterminer son domaine de convergence.*
3. *Calculer sa somme.*

Solution : Considérons la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} x^n$$

1. Calcul du rayon de convergence,

$$R = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left| \frac{n+1}{n} . \frac{n+1}{n+2} \right| = 1$$

2. Détermination du domaine de convergence, si

$$x = \pm 1 : \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+1}{n} x^n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} x^n$$

diverge alors le domaine de convergence est $]-1, 1[$.

3. Calcul de la somme, on a :

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \forall |x| < 1$$

alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} x^n = \sum_{n\geq 1} x^n + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{1-x} - x - \ln(1-x), \forall |x| < 1.$$

Exercise 3.5 *Soit S la somme de la série entière :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-n) x^{n+1}}{(n+1)!}$$

1. *Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer $S'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déduire $S(x)$.*
3. *Déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-n)}{(n+1)!}$.*

Solution :

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \frac{(-1)^n (1-n) x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1. Les fonction f_n sont continue sur $\mathbb{R}$. De plus le rayon de convergence est

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(1-n)}{(n+1)!} \frac{(n+2)!}{-n} \right| = +\infty,$$

alors la série converge normalement sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Donc la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Ona,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-n) x^{n+1}}{(n+1)!} \right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-n) x^n}{n!} \\ &= 1 - x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-n) x^n}{n!} = -x + (1+x) e^{-x} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S'(t)\, dt = \int_0^x \left[-t + (1+t) e^{-t}\right] dt \\ &= -\tfrac{x^2}{2} - (2+x) e^{-x} + 2, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Pour $x = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-n)}{(n+1)!} = S(1) = -\frac{1}{2} - 3e^{-1} + 2.$$

Chapitre 4

Séries de $\mathcal{F}$ourier

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une autre famille des séries de fonctions qui est constituée de fonctions trigonométriques : ce sont les séries de $\mathcal{F}$ourier.

Comme nous avons vu au chapitre précédent que la représentation d'une fonction par sa série de Taylor est limitée de deux façons : d'abord, elle ne s'applique qu'aux fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et ensuite, les sommes partielles de la série obtenue ne constituent une approximation de la fonction que dans un voisinage du point autour duquel on la calcule.

La série de Fourier ne souffre pas de ces inconvénients : on peut prescrire à l'avance l'intervalle de convergence et elle permet de représenter des fonctions très générales, présentant même certains types de discontinuités.

Nous verrons que ce type de séries jou un rôle important dans la résolution des équations aux dérivées partielles.

4.1 Notions de base

Définition 4.1 *On dit qu'une fonction f réelle d'une variable réel possède une discontinuité de première espèce en un point x_0, si elle possède une limite finie à droite et une limite à gauche en x_0. On notera :*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) \neq f(x_0 + 0) = \lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} f(x).$$

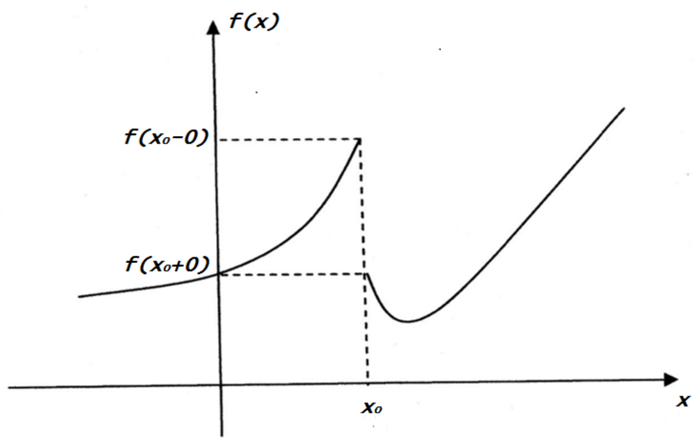

FIG. 4.1 – Discontinuité de $1^{\text{ère}}$ espèce.

Définition 4.2 *Une fonction f et dite continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ donnée si :*

1. *Il existe $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tel que $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, la fonction f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$.*
2. *Les points a_i (pour tout $i = \overline{0, n}$) sont des points de discontinuité de première espèce de la fonction f.*

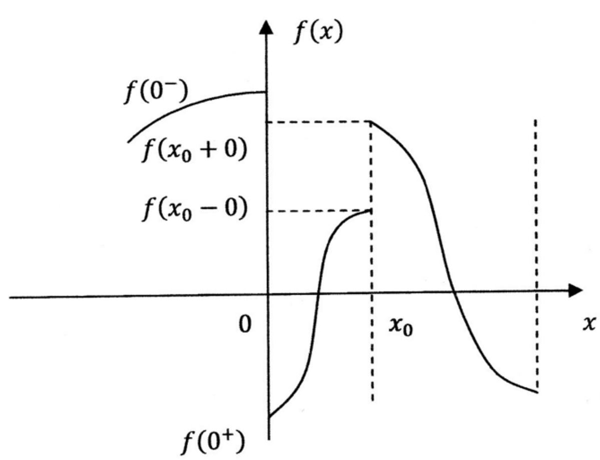

FIG. 4.2 – Fonction continue par morceaux.

Si I est un intervalle quelconque non réduit à un point, alors la fonction f est dite continue par morceaux sur I, si sa restriction à chaque segment $[a, b]$ inclus dans I est continue par morceaux.

Définition 4.3 *Une fonction f à valeurs réelles est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ donnée si :*

1. *Il existe $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tel que $\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.*
2. *Les points a_i (pour tout $i = \overline{0, n}$) sont des points de discontinuité de première espèce de la fonction f et la fonction f'.*

Définition 4.4 *Soit I est un intervalle quelconque non réduit à un point, alors la fonction f est dite $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, si sa restriction à chaque segment $[a, b]$ inclus dans I est continue par morceaux, c-à-d :*

1. *Les point de discontinuités x_0 de f dans tout segment $[a, b]$ sont de première espèce et en nombre fini,*

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) \quad \textit{et} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) \ \textit{existent.}$$

2. *Les limites*

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0} \quad , \quad f'(x_0 + 0) = \lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0}.$$

existes et finies.

Remarque 4.1 *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, alors elle est nécessairement continue par morceaux mais pas nécessairement continue. De plus, le fait d'être de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ne dépend pas de la subdivision (il suffit que celle ci existe).*

En pratique, il suffit de vérifier que le graphe de f n'aille jamais à l'infini et n'admette pas de tangente verticale.

Définition 4.5 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est dite périodique, s'il existe un nombre réel $T \neq 0$, tel que si :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x).$$

Le nombre T est appelé période de f.

Généralement on prend comme période de f la plus petite valeur positive de T.

Remarque 4.2 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T-$périodique, est dite continue par morceaux (resp $\mathcal{C}^1$ par morceaux) si sa restriction à chaque segment $[\alpha, \alpha+T]$ (c'est à dire sur une période) est continue par morceaux (resp $\mathcal{C}^1$ par morceaux).*

Lemme 4.1 *Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et intégrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx.$$

Démonstration. On a

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx,$$

et pour l'intégrale $\int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx$ on pose $x = y + T$, ce qui donne

$$\int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^\alpha f(y+T)\,dy = \int_0^\alpha f(y)\,dy = -\int_\alpha^0 f(y)\,dy.$$

Donc

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\alpha^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx - \int_\alpha^0 f(y)\,dy = \int_0^T f(x)\,dx.$$

■

Propriété 4.1 *Soit* $f : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$*, une fonction intégrable.*

1. *Si* f *est paire alors*
$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\delta} f(x)\,dx.$$
2. *Si* f *est impaire alors*
$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 0.$$

4.2 Séries trigonométriques

4.2.1 Représentation réelle

Définition 4.6 *On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \tag{4.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}, \omega > 0$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *deux suites réelles.*

Le problème est de déterminer l'ensemble Δ tel que la série (4.1) soit convergente pour tout $x \in \Delta$.

Propriété 4.2 *:*

1. *S'il existe un nombre réel* x_0 *tel que la série* (4.1) *converge alors elle converge en tout point* $x_0 + \dfrac{2k\pi}{\omega}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
2. *Si la série* (4.1) *converge dans* $\mathbb{R}$*, alors elle converge vers une fonction* f *périodique de période* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Démonstration. Supposons que la série (4.1) converge en x_0 et posons

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x_0) + b_n \sin(n\omega x_0)\right]$$

On a pour touts $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos\left(n\omega\left(x_0 + \frac{2k\pi}{\omega}\right)\right) = \cos\left(n\omega x_0 + n\omega\frac{2k\pi}{\omega}\right) = \cos\left(n\omega x_0\right)$$
$$\sin\left(n\omega\left(x_0 + \frac{2k\pi}{\omega}\right)\right) = \sin\left(n\omega x_0 + n\omega\frac{2k\pi}{\omega}\right) = \sin\left(n\omega x_0\right)$$

Alors

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos\left(n\omega\left(x_0 + \frac{2k\pi}{\omega}\right)\right) + b_n \sin\left(n\omega\left(x_0 + \frac{2k\pi}{\omega}\right)\right)\right] = f\left(x_0\right).$$

ce qui montre la convergence de la série (4.1) en tout point de la forme $x_0 + \dfrac{2k\pi}{\omega}$,$\forall k \in \mathbb{Z}$. Maintenant si on suppose que la série (4.1) converge dans $\mathbb{R}$, on aura

$$f(x) = f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

ce qui implique que f est $\dfrac{2\pi}{\omega}-$périodique. ■

Remarque 4.3 *Si on prend $T = 2l$ tel que $l = \dfrac{\pi}{\omega}$, alors la série (4.1) s'écrit de la forme*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] \tag{4.2}$$

Proposition 4.1 *La série trigonométrique (4.1) est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ si les séries $\left(\sum a_n\right)$ et $\left(\sum b_n\right)$ sont absolument convergentes*

Démonstration. Le résultat est évident en utilisant le critère de comparaison puisque on a l'inégalité suivante :

$$\left|a_n \cos\left(n\omega x\right) + b_n \sin\left(n\omega x\right)\right| \leq \left|a_n\right| + \left|b_n\right| \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

4.2.2 Représentation complexe

En utilisant les relations d'Euleur suivantes

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad , \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

la série (4.1) prend la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}\right]$$

En posant

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad , \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad , \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

La série (4.1) se représente donc sous la forme

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}\left[c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}\right]$$

Ce que l'on écrit sous forme d'une série double entrée

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \tag{4.3}$$

La série (4.3) est appelée la forme complexe d'une série trigonométrique.

Proposition 4.2 *Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série (4.1) est :*

1. *simplement converegnte sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2k\pi}{\omega}, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. *uniformément convergente sur chaque intervalle* $\left[\frac{2k\pi}{\omega} - \alpha, \frac{2(k+1)\pi}{\omega} - \alpha\right]$ *avec* $0 < \alpha < \frac{\pi}{\omega}$.

De plus sa somme est continue en tout point $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

4.2.3 Calcul des coefficients

Cas réel

Soient la série trigonométrique (4.3) et f sa somme que l'on suppose périodique de $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et dont la convergence est uniforme sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{\omega}\right]$.

Nous intéréssons dans ce paragraphe au calcul des coefficients de a_n et b_n en fonction de f.

On a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right].$$

Donc :

$$f(x)\cos(k\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(k\omega x) + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos(n\omega x)\cos(k\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\cos(k\omega x)\right]$$

$$f(x)\sin(k\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(k\omega x) + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos(n\omega x)\sin(k\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\right]$$

La convergence uniforme nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(k\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \cos(k\omega x)\,dx \\
&+ \sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx\right] \\
\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(k\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \sin(k\omega x)\,dx \\
&+ \sum_{n\geq 1}\left[a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx\right]
\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(k\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx = 0$$

On déduit alors les valeurs des coefficients par :

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(k\omega x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(k\omega x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

en particulier

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) dx.$$

Remarque 4.4 *:*

1. *Si $T = 2l$, alors*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. *Moyennant le lemme 4.1 et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les coefficients de la série trigonométrique peuvent s'écrire*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_\alpha^{\alpha+2l} f(x) \cos(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_\alpha^{\alpha+2l} f(x) \sin(n\omega x)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cas complexe

Considèrons la représentation complexe de la série trigonométrique (4.3), alors si elle converge uniformément vers une fonction f périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$ on a

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

Si on intègre sur $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, on obtient

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\, e^{-ik\omega x} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^{2\pi/\omega} e^{i(n-k)\omega x} dx,$$

or

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{i(n-k)\omega x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \\ 2\pi/\omega & \text{si } n = k \end{cases}$$

Donc les coefficients peut être calculer par la formule

$$c_k = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\, e^{-ik\omega x}dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+(2\pi/\omega)} f(x)\, e^{-ik\omega x}dx \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

4.3 Séries de $\mathcal{F}$ourier

L'idée générale de cette partie consiste à définir la série de $\mathcal{F}$ourier et à représenter des fonctions périodiques par des séries de $\mathcal{F}$ourier.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T = 2l$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

4.3.1 Définition

Définition 4.7 *La série trigonométrique du type (4.2) où*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

s'appelle série de $\mathcal{F}$ourier associée à f, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont les coefficients de $\mathcal{F}$ourier de f.

Remarque 4.5 *:*

1. *Si la fonction f est paire alors*

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f s'écrit sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

2. *Si la fonction f est impaire alors*

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f s'écrit sous la forme

$$\sum_{n \geq 1} \left[b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

4.3.2 Représentation d'une fonction par une série de $\mathcal{F}$ourier

Théorème 4.1 (Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T = 2l$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Démonstration. Ce théorème est admis. ■

Remarque 4.6 *Si la fonction f est continue, $T-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors elle est représentable sur $\mathbb{R}$ par sa série de $\mathcal{F}$ourier, c-à-d*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple 4.1 *Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2, définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & si\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Les conditions de Dirichlet sont vérifiées puisque

1. *Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = k, k \in \mathbb{Z}$ et sont de première espèce car*

$$f(1+0) = f(1) = \frac{1}{2}; f(1-0) = 1$$

2. *La fonction f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :*

$$f'(1-0) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 1}} \frac{f(x) - f(1-0)}{x-1} = 0 \quad , \quad f'(1+0) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1+0)}{x-1} = 1.$$

Alors f est développable en série de $\mathcal{F}$ourier.

Les coefficients de $\mathcal{F}$ourier : on a $l = 1$ alors :

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx = 1$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos(n\pi x)\, dx + \int_1^2 \frac{1}{2} \cos(n\pi x)\, dx = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi^2 n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin(n\pi x)\, dx + \int_1^2 \frac{1}{2} \sin(n\pi x)\, dx = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2\pi n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2\pi n} \sin(n\pi x) \right] = \begin{cases} 1/4 & si\ x = 0 \\ x & si\ 0 < x < 1 \\ 3/4 & si\ x = 1 \\ 1/2 & si\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Remarquons que pour $x = 0$ ona

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2} = 1/4$$

Donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Remarque 4.7 *Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.*

4.3.3 Développement en série de Fourier des fonctions non périodiques

Théorème 4.2 *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et vérifiant les hypothèses suivants :*

1. *$\forall x \in [\alpha, \beta]$, les valeurs $f(x+0), f(x-0)$ existent et finies.*
2. *$\forall x \in [\alpha, \beta]$, les valeurs $f'(x+0), f'(x-0)$ existent et finies.*

Alors :

i/ *Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$ on a :*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) \right]$$

ii/ *Pour α ou β on a :*

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha+0) + f(\beta-0)}{2} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi\alpha}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi\alpha}{\beta - \alpha}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi\beta}{\beta - \alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi\beta}{\beta - \alpha}\right) \right] \end{aligned}$$

Où

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\beta - \alpha}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque 4.8 *Soit $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue est possédant des dérivées $f'(x+0), f'(x-0)$ dans $[0, l]$. Pour développer f en série de $\mathcal{F}$ourier qui contient que des cosinus ou bien des sinus, il suffit de la prologer sur $[-l, l]$ en fonction f_1 paire ou f_2 impaire, par exemple comme suit :*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(-x) & si \ -l \leq x < 0 \\ f(x) & si \ 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad f_2(x) = \begin{cases} -f(-x) & si \ -l \leq x < 0 \\ f(x) & si \ 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

et d'appliquer ensuite à f_1 ou à f_2 le théorème 4.2.

4.3.4 Egalité de Parseval

Théorème 4.3 *Soit f une fonction développable en série de Fourier et périodique de période $T > 0$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)\, dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 .$$

Remarque 4.9 *Si f est de période 2π on a*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f^2(x)\, dx$$

4.4 Exercices

Exercise 4.1 *Etudier la convergence sur $\mathbb{R}$ des séries trigonométriques dont les coefficients sont les suivants :*

1. $a_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n^2 \ln\left(\sqrt{n} + 1\right)}.$

2. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$, $\quad b_n = \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$.

3. $a_n = 0$, $\quad b_n = \dfrac{n+1}{n^2 - \ln(n)}$.

4. $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad b_n = 0$.

Solution :

1. Le cas $a_n = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^n$, $\quad b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(\sqrt{n}+1)}$.

   (a) On a $\left|\left(\dfrac{-1}{5}\right)^n\right| = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^n$ et la série $\sum \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ est convergente, puisque c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{5} < 1$, alors la série $\sum \left(\dfrac{-1}{5}\right)^n$ converge absolument.

   (b) On a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(\sqrt{n}+1)}\right| = \dfrac{1}{n^2 \ln(\sqrt{n}+1)} \sim \dfrac{1}{n^2 \ln(\sqrt{n})}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^2 \ln(\sqrt{n})}$ est convergente, puisque c'est une série de Bertrand ($\alpha = 2 > 1$), alors par équivalence la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln(\sqrt{n}+1)}$ est absolument convergente.

   Donc d'après la proposition 4.1, la série trigonométrique converge sur $\mathbb{R}$.

2. Le cas $a_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$, $\quad b_n = \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$.

   (a) La série $\sum (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$ converge absoluement, car d'après D'alembert on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\frac{n!}{n^3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

   (b) $\left|\ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)\right| \sim \dfrac{1}{n^3}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge d'après Riemann ($\alpha = 3 > 1$), alors par équivalence la série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$ converge absolument.

   Donc d'après la proposition 4.1, la série trigonométrique converge sur $\mathbb{R}$.

3. Le cas $a_n = 0$, $\quad b_n = \dfrac{n+1}{n^2 - \ln(n)}$.

   On a la suite (b_n) est décroissante, car si on pose :

$$\forall x \geq 1 : f(x) = \frac{x+1}{x^2 - \ln x} \implies f'(x) = -\frac{x^2 + 2x + 1 + \dfrac{1}{x} + \ln x}{(x^2 - \ln x)^2} \leq 0.$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2-\ln(n)} = 0$$

Alors d'après la proposition 4.2, la série trigonométrique converge sur $\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{2k\pi}{\omega}, \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Pour $x=\frac{2k\pi}{\omega}, \forall k\in\mathbb{Z}$, on a la série devient

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^2-\ln(n)} \sin(2kn\pi) = 0, \qquad \text{converge.}$$

Donc la série trigonométrique converge sur $\mathbb{R}$.

4. Le cas $a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = 0$

   La suite (a_n) est décroissante et converge vers zéro (évident), alors d'après la proposition 4.2, la série trigonométrique converge sur $\mathbb{R}\diagdown\left\{\frac{2k\pi}{\omega}, \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$ et diverge pour $x = \frac{2k\pi}{\omega}, \forall k\in\mathbb{Z}$, puisque on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\cos(2kn\pi) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}.$$

Exercise 4.2 *Soit k et n deux entiers dans $\mathbb{N}$. Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx \quad , \qquad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx \quad , \qquad \int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx.$$

Solution :

1. $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+k)x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(n-k)x\,dx$$

$$= \begin{cases} \left.\frac{\sin(n+k)x}{2(n+k)}\right|_0^{2\pi} + \left.\frac{\sin(n-k)x}{2(n-k)}\right|_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n\neq k \\ \left.\frac{\sin(2n)x}{2(2n)}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx = \pi & \text{si } n = k \end{cases}$$

2. $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(kx)\,dx = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(n+k)x - \cos(n-k)x\right]dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+k)\,xdx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-k)\,xdx$$

$$= \begin{cases} \left.\frac{-\sin(n+k)\,x}{2(n+k)}\right|_0^{2\pi} + \left.\frac{\sin(n-k)\,x}{2(n-k)}\right|_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq k \\ \left.\frac{-\sin(2n)\,x}{2(2n)}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx = \pi & \text{si } n = k \end{cases}$$

3. $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(n+k)\,x - \sin(n-k)\,x\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+k)\,xdx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n-k)\,xdx$$

$$= \begin{cases} \left.\frac{-\cos(n+k)\,x}{2(n+k)}\right|_0^{2\pi} + \left.\frac{\cos(n-k)\,x}{2(n-k)}\right|_0^{2\pi} = 0 & \text{si } n \neq k \\ \left.\frac{-\cos(2n)\,x}{2(2n)}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 0dx = 0 & \text{si } n = k \end{cases}$$

Exercise 4.3 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodique et $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les coefficients de la série de $\mathcal{F}$ourier associée.*

1. *Montrer que :*
   - *Si f est paire alors $b_n(f) = 0, \forall n > 0$.*
   - *Si f est impaire alors $a_n(f) = 0, \forall n \geq 0$.*
2. *Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour chaque cas ci-dessous :*
   (a) $f(x) = |x|$ *sur* $[-\pi, \pi]$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ -\pi \leq x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Solution :

1. On a
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{et } a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
   - Si f est paire alors la fonction $f \sin$ est impaire puisque
$$f(-x)\sin(-x) = -f(x)\sin x,$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0 \implies b_n(f) = 0.$$

- Si f est impaire paire alors la fonction $f\cos$ est impaire puisque

$$f(-x)\cos(-x) = -f(x)\cos x,$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \implies a_n(f) = 0.$$

2. Calcule de $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

   (a) Il est facile de voir que la fonction f est paire, de sorte que les cœfficients b_n sont tous nuls, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

   (b) La fonction f étant impaire, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Exercise 4.4 *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & si\ 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer la série de $\mathcal{F}$ourier associée à la fonction f.

Solution : Calcul des coefficients de $\mathcal{F}$ourier :

La fonction f est paire alors

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 2\left[\int\limits_0^{1/2} dx + \int\limits_{1/2}^{1} -dx\right] = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int\limits_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left[\int\limits_0^{1/2}\cos(n\pi x)\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} -\cos(n\pi x)\,dx\right] \\ &= \frac{4\sin n\pi/2}{n\pi} = \begin{cases} 0 \quad \text{si } n = 2k \\ \dfrac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} \quad \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

alors la série de $\mathcal{F}$ourier associée à f est

$$4\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\pi/2}{n\pi}\cos(n\pi x) = 4\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos((2k+1)\pi x)$$

Exercise 4.5 *Soit f la fonction périodique de période 2π définie par :*

$f(x) = x^2$ pour $0 \leq x < 2\pi$.

1. *Déterminer la série de Fourier de la fonction f.*
2. *Déduire la somme des séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.*

Solution : La fonction f n'est ni paire ni impaire. D'une part,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

et d'autre part, pour $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{4}{n^2},$$

et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx = -\frac{4\pi}{n}.$$

(Le calcul de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ se fait par une double intégration par partie)

Alors la série de Fourier associée à f est

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx).$$

La fonction f vérifie les conditions de Dirichlet donc la série de Fourier associée à f converge sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi^2 & \text{si } x = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si l'on fait $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pour calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$, on applique l'égalité de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^4 dx = \frac{\left(\frac{8\pi^2}{3}\right)^2}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[\left(\frac{4}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{4\pi}{n}\right)^2 \right]$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Exercise 4.6 *Soit l'éqution differentielle*

$$y^{"} + e^{ix} y = 0 \tag{4.4}$$

1. *Montrer que la série trigonométrique* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} e^{inx}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f $2\pi-$*periodique.*

2. *Montrer que la fonction* f *est de classe* C^2 *et qu'elle est solution de l'équation* (4.4).

Solution :

1. On a
$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| \frac{1}{(n!)^2} e^{inx} \right| \leq \frac{1}{(n!)^2},$$
or la série $\sum \frac{1}{(n!)^2}$ est convergente (il suffit d'appliquer D'Alembert), donc la série trigonométrique converge normalement et par conséquent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, $2\pi-$periodique.

2. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : x \to \frac{1}{(n!)^2} e^{inx}$$
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et
$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| f_n'(x) \right| \leq \frac{n}{(n!)^2} \text{ et } \left| f_n''(x) \right| \leq \frac{1}{((n-1)!)^2},$$
or les séries $\sum \frac{n}{(n!)^2}$ et $\sum \frac{1}{((n-1)!)^2}$ sont convergentes (il suffit d'appliquer D'Alembert), donc les séries de fonctions $\sum f_n'$ et $\sum f_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve que $f \in C^2(\mathbb{R})$ et de plus que
$$f''(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(in)^2}{(n!)^2} e^{inx} = \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{((n-1)!)^2} e^{inx}.$$
On en déduit
$$\begin{aligned} f''(x) + e^{ix} f(x) \quad &= \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{((n-1)!)^2} e^{inx} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n!)^2} e^{i(n+1)x} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{-1}{(n!)^2} e^{i(n+1)x} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n!)^2} e^{i(n+1)x} = 0. \end{aligned}$$
La fonction f est donc bien solution de l'équation (4.4).

Chapitre 5

Intégrales impropres

Dans la définition et l'étude de l'intégration aux sens de Riemann, on a toujours considéré des fonctions réelles définies sur des intervalle $[a, b]$ compacts (fermés et bornés). Le but de ce chapitre est de généraliser dans certains cas, la notion d'intégration à des fonctions définies sur un intervalle qui n'est pas un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle d'un des types suivants :

- $[a, b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$.
- $]a, b]$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$.
- $]a, b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Ainsi nous allons rencontrer ici le calcul d'intégrale de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini, soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle.

5.1 Notions de base

On considère un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ qui est ni vide, ni réduit à un point (l'un des types cités plus haut).

Définition 5.1 *Les points incertains sont les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée d'une part, d'autre part soit* $(+\infty)$, *soit* $(-\infty)$.

Définition 5.2 *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle I. On dit que f est localement intégrable sur I, si la restriction de f sur chaque intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta]$ inclus dans I est intégrable aux sens de Riemann, c-à-d : $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \in \mathbb{R}$.*

Exemple 5.1 *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est localement intégrable sur l'intervalle $]1, +\infty[$, puisque :*

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_\alpha^\beta = \ln(\beta-1) - \ln(\alpha-1) \in \mathbb{R}, \quad \forall\, [\alpha, \beta] \subset \left]1, +\infty\right[.$$

Remarque 5.1 *:*

1. *Toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.*
2. *Toute fonction numérique monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.*

5.2 Intégration d'une fonction localement intégrable

5.2.1 Nature d'une intégrale impropre

Définition 5.3 *On considère une fonction f localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ (b est le seul point incertain).*

1. *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente (ou existe) si la fonction*

$$F : x \to \int_a^x f(t)\,dt$$

a une limite finie lorsque x tend vers b, et on pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

2. *Cette limite s'appelle intégrale impropre (où généralisée) de f sur $[a, b[$.*

3. *Si la fonction* $F : x \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *n'a pas de limite finie (ou la limite n'existe pas) lorsque* x *tend vers* b*, on dit que l'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est divergente.*

Définition 5.4 *On considère une fonction* f *localement intégrable sur l'intervalle* $]a, b]$*, avec* $a \in \mathbb{R}$ *ou* $a = -\infty$ *(*a *est le seul point incertain).*

1. *On dit que l'intégrale de* f *sur* $]a, b]$ *est convergente (ou existe) si la fonction*

$$F : x \to \int\limits_x^b f(t)\,dt$$

a une limite finie lorsque x *tend vers* a*, et on pose alors*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \int\limits_x^b f(t)\,dt.$$

2. *On appelle cette limite intégrale impropre (où généralisée) de* f *sur* $]a, b]$.
3. *Si la fonction* $F : x \to \int\limits_x^b f(t)\,dt$ *n'a pas de limite finie (ou la limite n'existe pas) lorsque* x *tend vers* a*, on dit que l'intégrale de* f *sur* $]a, b]$ *est divergente.*

Exemple 5.2 *La fonction* $f : t \mapsto e^{-t}$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $[0, +\infty[$*, alors le seul point incertain est* $+\infty$*. De plus*

$$\int\limits_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \quad \forall x > 0,$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \int\limits_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x}\right) = 1,$$

alors l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt$ *converge et sa valeur est* 1.

Exemple 5.3 *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $]0,1]$*, alors le seul point incertain est* 0*. De plus*

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\left(1-\sqrt{x}\right) \quad \forall x > 0,$$

d'où

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \to 0} 2\left(1-\sqrt{x}\right) = 2,$$

alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *converge et sa valeur est* 2*.*

Exemple 5.4 *La fonction* $f : t \mapsto \sin t$ *est localement intégrable sur l'intervalle* $[0,+\infty[$*, alors le seul point incertain est* $+\infty$*. De plus*

$$\int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x \quad \forall x > 0,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sin t dt = \lim_{x \to +\infty} \left(1-\cos x\right).$$

Cette limite n'existe pas, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t dt$ *diverge.*

Définition 5.5 *On considère une fonction* f *localement intégrable sur l'intervalle* $]a,b[$*, avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *(*a *et* b *sont deux points incertains).*

1. *On dit que l'intégrale de* f *sur* $]a,b[$ *est convergente, si les deux intégrales* $\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\int_c^b f(t)\,dt$ *convergent pour tout point quelconque* c *de l'intervalle* $]a,b[$*.*
2. *On appelle intégrale généralisée de* f *sur* $]a,b[$*, le réel noté* $\int_a^b f(t)\,dt$ *défini par :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Remarque 5.2 *:*

1. *La définition 5.5 est équivalente à*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\,dt.$$

2. *L'égalité* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ *n'est pas toujour vrais.*

   Exemple 5.5 *L'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$ *diverge, puisque l'intégrale* $\int_{0}^{+\infty} \sin t dt$ *diverge (voir l'exemple 5.4). Par contre*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} \sin t dt = \lim_{x\to+\infty}(\cos(-x) - \cos x) = 0.$$

Propriété 5.1 *Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]-a, a[$, avec avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$. Si f est paire ou impaire, alors l'intégrale* $\int_0^a f(t)\,dt$ *converge ssi l'intégrale* $\int_{-a}^{0} f(t)\,dt)$ *converge. De plus :*

1. *Si f est paire et dans le cas de convergence, on a*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,dt.$$

2. *Si f est impaire et dans le cas de convergence, on a*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

Conclusion 1 *Pour étudier l'intégrale de la fonction f sur un intervalle quelconque I, il faut suivre les étapes suivantes :*

1. *Identifier les points incertains.*
2. *Découper l'intervalle d'intégration en des intervalles tel que chaque intervalle ne contienne qu'un seul point incertain, placé à l'une des deux bornes.*

3. *L'intégrale de f sur l'intervalle I converge, ssi toutes les intégrales sur les intervalles du découpage convergent (les choix des points de découpage sont arbitraires).*

5.2.2 Calcul des intégrales impropres

1.2.2.1 Utilisation d'une primitive

Pour étudier la nature de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle I ou pour calculer sa valeur quand elle converge, on utilise fréquemment une primitive de f. Ce procédé a été utilisé au début du chapitre (voir les exemples précédents).

Si la fonction à intégrer f est continue sur $]a, b[$, elle admet donc une primitive F sur $]a, b[$. La convergence de l'intégrale de f sur $]a, b[$ équivaut à l'existence des deux limites

$$F\left(a^{+}\right) = \lim_{x \to a^{+}} F(x) \quad , \quad F\left(b^{-}\right) = \lim_{x \to b^{-}} F(x),$$

et si ces limites existent on a :

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = F\left(b^{-}\right) - F\left(a^{+}\right).$$

1.2.2.2 Formule du changement de variables

Théorème 5.1 *Soient f une fonction continue sur $[a, b[$ et ϕ une bijection continument dérivable sur l'intervalle $[\alpha, \beta[$, à valeurs dans $[a, b[$. Alors les intégrales*

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt \quad et \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(s))\, \phi'(s)\, ds,$$

sont de même nature, et si elles convergent elles sont égales.

Démonstration. La fonction composée $f \circ \phi$ est bien définie sur $[\alpha, \beta[$, alors on a

$$\forall x \in]\alpha, \beta[: \int_{\alpha}^{x} f(\phi(s))\, \phi'(s)\, ds = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t)\, dt.$$

Passant à la limite quand x tend vers β, on obtient :

$$\lim_{x\to\beta}\int_{\alpha}^{x} f(\phi(s))\,\phi'(s)\,ds = \lim_{x\to\beta}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t)\,dt.$$

Si l'un des membres de cette égalité admet une limite quand x tend vers β, il en sera de même de l'autre et on aura

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(s))\,\phi'(s)\,ds = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

■

Exemple 5.6 *La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$ est localement intégrable sur l'intervalle $]0,1]$, alors le seul point incertain est 0. L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ converge puisque, on utilisant le changement de variable $\phi : t \to \phi(t) = s = \sqrt{t}$ on obtient l'intégrale simple $\int_0^1 2\cos(s)^2\,dt$.*

1.2.2.3. Intégration par partie

Théorème 5.2 *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b[$, telles que la fonction produit (fg) admet une limite en b, alors les intégrales*

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt,$$

sont de même nature, et si elles convergent on a

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = \lim_{x\to b}[f(x)\,g(x)] - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Démonstration. On a

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt.$$

Pour tout x dans $]a,b[$, on peut écrire

$$\int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt = [f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)] - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Si chacun des deux termes du second membre de cette égalité admet une limite lorsque x tend vers b, il en sera de même du premier membre. On aura alors

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt = \lim_{x\to b}[f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)] - \lim_{x\to b}\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

■

Exemple 5.7 *La fonction $f : t \to \ln t$ est localement intégrable sur l'intervalle $]0,1]$, alors le seul point incertain est 0. Etudions la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$.*
Si on intégre par partie dans $[x,1]$, pour tout $x \in]0,1[$, on obtient

$$\int_x^1 \ln t dt = [t\ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = x\ln x - (1-x),$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, on en déduit que l'intégrale impropre est convergente et que sa valeur est $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

5.2.3 Propriétés des intégrales impropres

1.2.3.1 Relation de Chasles

Théorème 5.3 *Soient $c \in]a,b[$ et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a,b[$. Alors les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont de même nature et si elles convergent on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Soient $c \in \mathbb{R}$ et x dans $]a, b[$ où $a < c < x$.

Appliquons la relation de Chasles sur $[a, x]$, on obtient

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt.$$

Ainsi, la fonction $F : x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ admette une limite quand $x \to b$, si et seulement si la fonction $x \longrightarrow \int_c^x f(t)\,dt$ admette une limite quand $x \to b$ (puisque $\int_a^c f(t)\,dt$ est une intégrale simple). ■

1.2.3.2 Linéarité des intégrales impropres

L'ensemble des fonctions qui admettant une intégrale impropre convergente sur l'intervalle $[a, b[$ est un sous-espace vectoriel sur $[a, b[$.

Théorème 5.4 *Soient f et g deux fonctions localement intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ et α, β deux réels. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent alors l'intégrale impropres $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$ converge aussi.*
De plus on a

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt &= \lim_{x \to b} \int_a^x (\alpha f + \beta g)(t)\,dt \\
&= \lim_{x \to b} \left[\alpha \int_a^x f(t)\,dt + \beta \int_a^x g(t)\,dt \right] \\
&= \alpha \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt + \beta \lim_{x \to b} \int_a^x g(t)\,dt \\
&= \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.3 *:*

1. *Si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge et l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *diverge alors l'intégrale* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$ *diverge.*
2. *Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *divergent alors on ne peut rien conclure sur la convergente de l'intégrale* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt$*.*

1.2.3.3 Inégalité des intégrales impropres

Théorème 5.5 *Soient f et g deux fonctions localement intégrable sur l'intervalle $[a,b[$. Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *convergent, alors*

$$f \leq g \quad \text{sur } [a,b[\Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$

En particulier

$$f \geq 0 \quad \text{sur } [a,b[\Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq 0$$

Démonstration. En effet

$$f(t) \leq g(t) \quad \forall t \in [a,b[\Longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt \quad \forall x \in]a,b[\,,$$

ce qui donne

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt \leq \lim_{x \to b} \int_a^x g(t)\,dt \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

■

5.3 Convergence des intégrales impropres

5.3.1 Critère de Cauchy pour les intégrales impropres

On considère une fonction f localement intégrable sur l'intervalle $[a,b[$, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Théorème 5.6 *Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ soit convergente, il faut et il suffit que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite b, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\,dt \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

soit convergente. On aura alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} F(x_n).$$

On en déduit le critère de Cauchy pour les intégrales impropres.

Théorème 5.7 (Critère de Cauchy) *L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a,b[\,, \forall x_1, x_2 \in [a,b[\, : x_\epsilon < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| < \epsilon. \tag{5.1}$$

Démonstration.

1. Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors par définition

$$\exists l \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = l,$$

et d'après la définition de la limite, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a,b[\,, \forall x \in [a,b[\, : x_\epsilon < x < b \Longrightarrow |F(x) - l| < \epsilon/2.$$

Pour $x = x_1$ et $x = x_2$, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a,b[\,, \forall x_1, x_2 \in [a,b[\, : x_\epsilon < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow \begin{cases} |F(x_1) - l| < \epsilon/2 \\ |F(x_2) - l| < \epsilon/2 \end{cases}$$

D'autre part,

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| = |F(x_2) - F(x_1)| < |F(x_1) - l| + |F(x_2) - l| < \epsilon,$$

alors la condition (5.1) est satisfaite.

2. On suppose la condition (5.1) est réalisé et on montre que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente. D'après le théorème 5.6, il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b[$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, la suite $(F(x_n))$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

   Par définition, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = b \iff \forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^* : \forall n > n_\epsilon \Longrightarrow x_n > x_\epsilon.$$

   Pour $n = p$ et $n = q$, on a :

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}^*, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q > n_\epsilon \Longrightarrow \begin{cases} x_p > x_\epsilon \\ x_q > x_\epsilon \end{cases}$$

et la conditions (5.1) entrainent alors à :

$$|F(x_p) - F(x_q)| = \left|\int_{x_q}^{x_p} f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

Alors la suite $(F(x_n))$ est une suite de Cauchy, elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. ■

Exemple 5.8 *L'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} e^{t\sin t}dt$ *diverge.*

En effet : soit $n \in \mathbb{N}$, *et soit* $x_n = 2n\pi$ *et* $x'_n = (2n+1)\pi$.

$$\forall t \in [x_n, x'_n] \Longrightarrow t\sin t \geq 0 \Longrightarrow e^{t\sin t} \geq 1,$$

alors

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{t\sin t}dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} dt = \pi,$$

donc

$$\exists\epsilon = \pi > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n = 2n\pi, x_n' = (2n+1)\pi \in [0,+\infty[\ \text{ et } \int_{x_n}^{x_n'} e^{t\sin t}dt \geq \pi.$$

Le critère de Cauchy n'est pas satisfaite ce qui prouve la divergence de l'intégrale.

5.3.2 Condition nécessaire de convergence

Dans le cas d'un intervalle non borné par exemple $[a,+\infty[$ pour a réel, il n'y a pas de relation entre la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ et le fait que f tende ou non vers 0 en $+\infty$. Citons notamment :

- Le fait que f tende vers 0 en $+\infty$, n'entraîne pas la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ (il suffit de considérer la fonction de Riemann $f : t \to \dfrac{1}{t}$).
- Le fait que $\int_a^{+\infty} f$ converge n'entraîne pas que f tende vers 0 en $+\infty$ (voir l'exercice 5.4).
- On tout de même un résultat positif :

Théorème 5.8 *Soit f une fonction uniformément continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente alors f admet une limite nulle en $+\infty$. (la réciproque n'est pas toujour vrais).*

Attention, cette condition nécessaire de convergence n'est valable qu'au voisinage de $+\infty$.

Démonstration. Supposons que la fonction f ne tend pas vers 0 à l'infinie, alors

$$\exists\epsilon > 0, \forall n \geq 0, \exists x_n \geq n \text{ et } |f(x_n)| \geq \epsilon.$$

Si on suppose de plus que f est uniformément continue sur $[0,+\infty[$, pour $\epsilon > 0$:

$$\exists\eta > 0, \forall(x,y) \in [0,+\infty[: |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Alors pour $f(x_n) > 0$, on a

$$t \in [x_n, x_n + \eta] \implies f(t) \geq f(x_n) - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{\epsilon}{2} > 0,$$

et pour $f(x_n) < 0$, on a

$$t \in [x_n, x_n + \eta] \implies f(t) \leq f(x_n) + \frac{\epsilon}{2} \leq -\frac{\epsilon}{2} < 0.$$

Soit $|f(t)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $t \in [x_n, x_n + \eta]$ avec f de signe constant sur $[x_n, x_n + \eta]$ dans tous les cas et :

$$\left| \int_{x_n}^{x_n+\eta} f(t)\, dt \right| = \int_{x_n}^{x_n+\eta} |f(t)|\, dt \geq \frac{\eta\epsilon}{2},$$

de sorte que $F : x \to \int_0^x f(t)\, dt$ ne peut avoir de limite finie à l'infinie et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge. ■

5.4 Intégrales impropres des fonctions à valeurs positives

Dans cette partie, nous considèrons que les fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Les critères de convergence sont aussi valables pour à valeurs négatives sur l'intervalle $[a, b[$, puisque la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ se ramène à celle de $\int_a^b -f(t)\, dt$ où la fonction $(-f)$ est à valeurs positives sur l'intervalle $[a, b[$.

5.4.1 Intégrales de Référence

Théorème 5.9 (Intégrale de Riemann) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, on a :*

1. *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$, avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.*
2. *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$, avec $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$.*

Démonstration. On a

$$\int \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln t & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

et

$$\text{si } \alpha = 1 : \quad \lim_{x\to+\infty} \ln t|_1^x = +\infty.$$

Par la même méthode, on montre le $2^{ème}$ résultat. ■

Théorème 5.10 (Intégrale de Bertrand) *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* f *une fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$, *on a :*

1. *L'intégrale* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ *converge ssi* $\{\alpha > 1, \forall\beta \in \mathbb{R}\}$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.
2. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ *converge ssi* $\{\alpha < 1, \forall\beta \in \mathbb{R}\}$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Démonstration. Voir l'exercice 5.4. ■

5.4.2 Critère de la convergence majorée

Théorème 5.11 *Soit* f *une fonction localement intégrable sur l'intervalle* $[a, b[$ *avec* $b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *L'intégrale* $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si et seulement si la fonction* $F : x \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *est majorée sur* $[a, b[$, *c-à-d*

$$\exists M > 0, \forall x \in]a, b[: \int\limits_a^x f(t)\,dt \leq M.$$

Démonstration. La fonction $F : x \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$ est croissante.

En effet si $a < x_1 < x_2 < b$, on a

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_a^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt = \left[\int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right] - \int\limits_a^{x_1} f(t)\,dt = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0.$$

Alors, si x tend vers b, la fonction F admet une limite finie positive ou bien elle tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de la limite monotone, quand x tend vers b, la fonction F admet une limite finie ssi elle est majorée au voisinage de b (puisque elle est croissante). ■

Remarque 5.4 *Dans le cas ou F n'est pas majorée, elle tend vers $(+\infty)$. Donc l'intégrale est divergente et on écrit $\int_a^b f(t)\,dt = +\infty$.*

Exemple 5.9 *Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$.*
La fonction $f : t \to \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est localement intégrable et à valeurs positives dans l'intervalle $]0, 1]$. On a de plus

$$F(x) = \int\limits_x^1 \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \int\limits_x^1 dt = 1 - x < 1, \quad \forall x \in \left]0, 1\right].$$

Donc l'intégrale I est convergente.

5.4.3 Critère de comparison

Théorème 5.12 *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et vérifiant sur cet intervalle*

$$0 \leq f(t) \leq g(t), \quad \forall t \in [a, b[. \tag{5.2}$$

Alors :

1. *Si l'intégrale $\int\limits_a^b g(t)\,dt$ converge, l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ converge.*
2. *Si l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ diverge, l'intégrale $\int\limits_a^b g(t)\,dt$ diverge.*

Démonstration. On pose

$$\forall x > a : F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad et \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

D'après la propriétés des inégalités entre intégrales, on a

$$0 \leq f(t) \leq g(t), \quad \forall t \in [a, b[\Longrightarrow F(x) \leq G(x), \quad \forall x > a,$$

et puisque les fonctions F et G sont croissantes, on en déduit que :

- Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, la fonction G est majorée, alors la fonction F est majorée, donc l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, la fonction F est n'est pas majorée, alors la fonction G est n'est pas majorée aussi, donc l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

■

Exemple 5.10 *:*

1. *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ *est convergente. En effet :*

$$0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}, \qquad \forall t \geq 1,$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge puisque*

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{t}\Big|_1^x = 1.$$

2. *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{-\ln t}{1+t^2} dt$ *est convergente. En effet :*

$$0 \leq -\frac{\ln t}{1+t^2} \leq -\ln t, \qquad \forall 0 < t \leq 1$$

et l'intégrale $\int_0^1 -\ln t dt$ *converge puisque*

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 -\ln t dt = \lim_{x\to+\infty} -t\ln t + t|_x^1 = -1.$$

Remarque 5.5 *On peut appliquer le critère de comparaison si la condition (5.2) est vérifiée seulement au voisinage de b.*

Corollaire 5.1 *Si on change la condition (5.2) par :*

$$\exists k_1, k_2 > 0 : 0 \leq k_1 f \leq g \leq k_2 f,$$

alors : les intégrales $\int_a^b f(t)\, dt$ *et* $\int_a^b g(t)\, dt$ *sont de même nature.*

5.4.4 Critère d'équivalence

Théorème 5.13 *Soient* f *et* g *deux fonctions positives, localement intégrables sur l'intervalle* $[a, b[$ *avec* $b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$.
Si f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* b $(f \underset{b}{\sim} g)$, *alors : les intégrales* $\int_a^b f(t)\, dt$ *et* $\int_a^b g(t)\, dt$ *sont de même nature.*

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$f \underset{b}{\sim} g \iff \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

alors, il existe un voisinage de b et une fonction ψ définie sur ce voisinage, tels que :

$$f(x) = g(x)(1+\psi(x)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to b}\psi(x) = 0,$$

alors pour

$$\epsilon = 1/2, \exists x_\epsilon, \forall x : x_\epsilon < x < b \Longrightarrow |\psi(x)| < 1/2.$$

D'où

$$(1/2)\, g(x) < f(x) < (3/2)\, g(x)$$

et par comparaison on aura le résultat. ■

Exemple 5.11 *:*

1. *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$ *converge car :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = 1,$$

   et l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge.*

2. *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{tgt}} dt$ *diverge car :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{tgt}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{tgt}} = 1,$$

   et l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ *diverge puisque :*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{t}\Big|_1^x = +\infty.$$

Corollaire 5.2 *Soient f et g deux fonctions positives, localement intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, tel que $g \neq 0$ dans $[a, b[$. Supposons que*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k \in [0, +\infty] \quad \textit{existe.}$$

On a :

1. *Si $0 < k < +\infty$, alors les deux intégrales $\int\limits_a^b f(t)\, dt$ et $\int\limits_a^b g(t)\, dt$ sont de même nature.*

2. *Si $k = 0$, alors la convergence de l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *implique la convergence de l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$.

3. *Si $k = +\infty$, alors la divergence de l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *implique la divergence de l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$.

5.5 Intégrales impropres des fonctions à valeurs de signe quelconque

5.5.1 Convergence absolue

Soit f une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Définition 5.6 *On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente si l'intégrale* $\int_a^b |f(t)|\,dt$ *est convergente.*

Théorème 5.14 *Si l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration. Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente alors par définition l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente, donc la condition de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a, b[\,, \forall x_1, x_2 \in [a, b[: x_\epsilon < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \right| < \epsilon,$$

ce qui implique

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt < \epsilon.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ satisfait le critère de Cauchy, alors elle est convergente. ■

Exemple 5.12 *L'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge absolument, puisque on a*

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \qquad \textit{et} \qquad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad \textit{converge,}$$

alors par comparaison $\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ *converge, et par définition l'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge absolument, ce qui implique qu'elle converge (d'après le théorème précédent).*

Remarque 5.6 *On peut trouver des intégrales impropres convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.*

Théorème 5.15 (Critère d'équivalence pour la convergence absolue) *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle* $[a, b[$ *avec* $b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$.
Supposons que $g \geq 0$ *sur* $[a, b[$ *et que* $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k$ *existe et finie.*
On a :

1. *Si l'intégrale* $\int\limits_{a}^{b} g(t)\, dt$ *converge, alors l'intégrale* $\int\limits_{a}^{b} f(t)\, dt$ *converge absolument, et donc converge.*
2. *Si* $k \neq 0$ *et l'intégrale* $\int\limits_{a}^{b} g(t)\, dt$ *diverge, alors l'intégrale* $\int\limits_{a}^{b} f(t)\, dt$ *diverge.*

Démonstration.

1. On a
$$\lim_{x \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t - b| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{f(t)}{g(t)} - k\right| < \epsilon.$$
Pour
$$\epsilon = 1 : |f(t)| \leq (1 + |k|)\, g(t),$$
alors d'après le corollaire 5.1, on aura le résultat.
2. Si $k \neq 0$, la fonction f est de même signe que k, donc si $\int\limits_{a}^{b} f(t)\, dt$ est convergente, elle est absolument convergente. De plus
$$\lim_{x \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k \iff \lim_{x \to b} \frac{g(t)}{|f(t)|} = \frac{1}{|k|},$$

donc d'après le premier résultat, la convergence de l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ entraine la convergence de $\int_a^b g(t)\, dt$.

■

Proposition 5.1 (Critère de Riemann) *:*

1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, tel que : $\lim_{x \to +\infty} t^{\alpha} f(t) = k$ existe et finie, on a :*

   a) *Si $\alpha > 1$: alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge absolument, donc converge.*

   b) *Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$: alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.*

2. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$, tel que : $\lim_{x \to 0} t^{\alpha} f(t) = k$ existe et finie, on a :*

   c) *Si $\alpha < 1$: alors l'intégrale $\int_0^1 f(t)\, dt$ converge absolument, donc converge.*

   d) *Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$: alors l'intégrale $\int_0^1 f(t)\, dt$ diverge.*

Exemple 5.13 *L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\ln t} dt$ converge, puisque au voisinage de $(+\infty)$ on a*

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 t^{-\ln t} = 0 \qquad (\alpha = 2).$$

5.5.2 Semi-convergence

Définition 5.7 *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est semi-convergente, si elle est convergente mais elle n'est pas absolument convergente.*

Exemple 5.14 *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente car :*

1. *Etude de la convergence absolue : il suffit de montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ ne vérifie pas le critère de Cauchy.*

On a

$$\forall n \geq 2 : \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{n\pi} \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\, dt = \frac{2}{n\pi}.$$

D'où :

$$\int\limits_{(n-1)\pi}^{2n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=n}^{2n} \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{2}{\pi} \frac{n}{2n} = \frac{1}{\pi}.$$

Donc, pour $\epsilon = \frac{1}{\pi}, \forall n \geq 2, \exists x_n = (n-1)\pi, x'_n = 2n\pi \in [1, +\infty[$ *et* $\int\limits_{x_n}^{x'_n} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{\pi}$. *alors le critère de Cauchy n'est pas vérifié et par suite l'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ *diverge.*

2. *Etude de la convergence : En intégrant par partie :*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt - \left. \frac{\cos t}{t} \right|_{1}^{+\infty}$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ *et* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *converge, d'où la convergence de* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

5.5.3 Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales

Le théorème suivant, dû à Abel, est utilisé pour montrer qu'une intégrale impropre (non absolument convergente) est semi-convergente ; sa démonstration repose sur le critère de Cauchy.

Théorème 5.16 *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Si une des deux paires de conditions suivantes (A ou B) est vérifiée*

$$\begin{cases} A1 & \text{L'intégrale } \int\limits_a^b f(t)\, dt \text{ est convergente.} \\ A2 & \text{La fonction } g \text{ est monotone et bornée sur } [a, b[. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B1 & \text{La fonction } F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt \text{ est bornée sur } [a, b[. \\ B2 & \text{La fonction } g \text{ est monotone et possède une limite nulle en } b. \end{cases}$$

alors l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$.

Démonstration. D'après la formule de la moyenne des intégrales :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,g(t)\,dt = g(x_1)\int_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt + g(x_2)\int_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt,$$

où ξ est un point appartenant à l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Supposons que la première paire de conditions (A1,A2) est vérifiée. La fonction g est bornée c-à-d :

$$\exists M > 0; \forall x \in [a, b[: |g(x)| \leq M.$$

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon, x_2 > \xi > x_1 > x_\epsilon : \left|\int_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt\right| \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \left|\int_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Donc

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq |g(x_1)|\left|\int_{x_1}^{\xi} f(t)\,dt\right| + |g(x_2)|\left|\int_{\xi}^{x_2} f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

D'où d'près le critère de Cauchy, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ converge.

Supposons que la deuxième paire de conditions (B1,B2) est vérifiée. La fonction F est bornée c-à-d :

$$\exists N > 0; \forall x \in [a, b[: \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leq N.$$

Ce qui implique

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \leq 2N.$$

De plus

$$\lim_{x\to b} g(x) = 0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x > b - \delta \implies |g(x)| < \frac{\epsilon}{2N},$$

alors de même que précédement on a :

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, g(t)\, dt\right| < \epsilon, \quad \forall x_1, x_2 > b - \delta.$$

D'où en vertu du critère de Cauchy, l'intégrale $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ converge. ∎

Exemple 5.15 *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ *converge* $\forall \alpha > 0.$
En effet : si on applique Abel on trouve :

- $|F(x)| = \left|\int_1^x \cos t dt\right| = |\sin x - \sin 1| \leq 2,$ *bornée.*
- *La fonction* $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ *est décroissante dans* $[1, +\infty[,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{t^\alpha} = 0.$

Remarque 5.7 *Les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ *sont convergentes si* $\alpha > 0$, *et semi convergentes si* $\alpha \in \left]0, 1\right].$

5.5.4 Utilisation du développement asymptotique

Cette méthode est la généralisation du critère d'équivalence dans le cas où à intégrer sont à valeurs de signe quelconque, et elle se repose sur l'étude de l'intégrale du développement asymptotique de la fonction.

Exemple 5.16 *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t^2 + \cos t} - t\right) dt$ *converge, puisque :*

$$\sqrt{t^2 + \cos t} - t = t\left(\sqrt{1 + \frac{\cos t}{t^2}} - 1\right) \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\cos t}{t^2} = 0, .$$

On a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\cos t}{t^2} = 0,$$

alors si on pose $y = \frac{\cos t}{t^2}$ *et on utilise le développement limité de la fonction* $\sqrt{1 + y}$ *au* *voisinage de* 0*, on trouve*

$$\sqrt{1+\frac{\cos t}{t^2}}-1=\frac{\frac{\cos t}{t^2}}{2}-\frac{\left(\frac{\cos t}{t^2}\right)^2}{8}+o\left[\left(\frac{\cos t}{t^2}\right)^2\right].$$

Par suite

$$\sqrt{t^2+\cos t}-t=\frac{\cos t}{2t}-\frac{\cos^2 t}{8t^3}+o\left[\frac{\cos^2 t}{t^3}\right],$$

où

$$o\left[\frac{\cos^2 t}{t^3}\right]=\varepsilon(t) \quad \textit{avec} \quad |\varepsilon(t)|\leq \frac{M}{t^3}.$$

On a

- *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos t}{2t}dt$ *converge d'après le critère d'Abel.*
- *L'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty}\left[-\frac{\cos^2 t}{8t^3}+o\left(\frac{\cos^2 t}{t^3}\right)\right]dt$ *est absolument convergente, puisque*

$$\begin{aligned}\left|-\frac{\cos^2 t}{8t^3}+o\left(\frac{\cos^2 t}{t^3}\right)\right| &\leq \left|\frac{\cos^2 t}{8t^3}\right|+o\left(\frac{\cos^2 t}{t^3}\right)\\ &\leq \frac{1}{8t^3}+\frac{M}{t^3}=\frac{\alpha}{t^3}\end{aligned}$$

5.6 Exercices

Exercise 5.1 *Déterminer la nature et la valeur (dans le cas de convergence) des intégrales suivantes :*

$$\int\limits_0^5\frac{dt}{\sqrt{5-t}},\quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{(1+t^2)}dt,\quad \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}+\ln t-\frac{1}{t}\right)e^{-t}dt,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{0}te^{-t^2}dt,\quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)},$$

Solution :

- La fonction $f : t\longmapsto \frac{1}{\sqrt{5-t}}$ est continue donc localement intégrable sur $[0,5[$, alors le problème de convergence au voisinage de 5 (point incertain). Soit $x \in]0,5[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{5-t}} = -2\sqrt{5-t}\Big|_0^x = -2\sqrt{5-x} + 2\sqrt{5}$$

et

$$\lim_{x \to 5} \left(-2\sqrt{5-x} + 2\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{5}$$

alors l'intégrale $\int\limits_0^5 \frac{dt}{\sqrt{5-t}}$ converge et sa valeur est $2\sqrt{5}$.

- La fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, et paire alors il suffit d'étudier l'intégrabilité de f sur $[0,+\infty[$ où le seul point incertain est $(+\infty)$. Soit $x \in]0,+\infty[$,

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x)$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

alors l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge puis par parité sur $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et sa valeur est π.

- La fonction $f : t \longmapsto \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln t - \frac{1}{t}\right) e^{-t}$ est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Le problème de convergence se pose au voisinage de 0 et $(+\infty)$ alors il faut étudier l'intégrabilité de f sur $]0,c]$ et sur $[c,+\infty[$ pour $c \in]0,+\infty[$.

Soit $x \in]c,+\infty[$,

$$\int\limits_c^x \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln t - \frac{1}{t}\right) e^{-t} dt = \ln\left(1-e^{-t}\right) - e^{-t}\ln t\Big|_c^x = \ln\left(1-e^{-x}\right) - e^{-x}\ln x - \alpha$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(1-e^{-x}\right) - e^{-x}\ln t - \alpha\right) = -\alpha$$

De plus si $x \in]0, c[$,

$$\int_x^c \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln t - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt = \ln\left(1-e^{-t}\right) - e^{-t} \ln t \Big|_x^c = \alpha - \ln\left(1-e^{-x}\right) - e^{-x} \ln x$$

et

$$\lim_{x \to 0} \left(\alpha - \ln\left(1-e^{-x}\right) - e^{-x} \ln x \right) = \alpha$$

alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} + \ln t - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt$ converge et sa valeur est 0.

- La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\arctan t}{(1+t^2)}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$, alors le problème de convergence au voisinage de $(+\infty)$ (point incertain).

Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \left[\arctan(x)\right]^2,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \left[\arctan(x)\right]^2 = \frac{\pi^2}{8},$$

alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)} dt$ converge et sa valeur est $\frac{\pi^2}{8}$.

- La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$, alors le problème de convergence au voisinage de $(+\infty)$ (point incertain).

Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)} &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t+1)} - \int_0^x \frac{dt}{(t+2)} + \tfrac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t+3)} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln 2 + \tfrac{1}{2} \ln(x+3) - \tfrac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(x+3) - \frac{1}{2} \ln 3 \right) = \ln \frac{2}{\sqrt{3}}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$ converge et sa valeur est $\ln \frac{2}{\sqrt{3}}$.

- La fonction $f : t \longmapsto te^{-t^2}$ est continue donc localement intégrable sur $]-\infty, 0]$, alors le problème de convergence au voisinage de $(-\infty)$ (point incertain).

Soit $x \in]-\infty, 0[$,

$$\int_x^0 te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}\left[1 - e^{-x^2}\right]$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}\left[1 - e^{-x^2}\right] = -\frac{1}{2}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt$ converge et sa valeur est $-\frac{1}{2}$.

Exercise 5.2 *Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt, \quad \int_0^1 \frac{t - \tan t}{t^{5/2} \sin t} dt, \quad \int_1^{+\infty} t^{-\ln t} dt, \quad \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + 1/t)}{t + 1 + \sin\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t) - \sin(t)}{t^3} dt,$$

Solution :

1. Le problème de convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ se pose en $(+\infty)$.

   On a

   $$\forall t \geq 1 : \sin t \geq -1 \implies e^{\sin t} \geq e^{-1} \implies \frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{1}{e^{-1} t} \geq 0,$$

   et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge d'après Riemann et par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{-1} t} dt$ diverge, alors par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ diverge.

2. Le problème de convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t - \tan t}{t^{5/2} \sin t} dt$ se pose en 0.

On a

$$0 \leq \frac{t - \tan t}{t^{5/2} \sin t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{t}}$$

et $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge d'après Riemann et par suite $\int\limits_0^1 \frac{dt}{3\sqrt{t}}$ converge, alors par équivalence $\int\limits_0^1 \frac{t - \tan t}{t^{5/2} \sin t} dt$ converge.

3. Le problème de convergence de $\int\limits_1^{+\infty} t^{-\ln t} dt$ se pose en $(+\infty)$.

   On a

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 t^{-\ln t} dt = \lim_{t \to +\infty} e^{-(\ln t)^2 + 2\ln t} = 0$$

   et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, alors d'après le critère de Riemann $\int\limits_1^{+\infty} t^{-\ln t} dt$ converge.

4. Le problème de convergence de $\int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right] \right) dt$ se pose en 0.

   On a

$$\forall t \in [-1, 0[: \frac{1}{t} \leq -1 \text{ et } \left[\frac{1}{t}\right] \leq \frac{1}{t} \leq \left[\frac{1}{t}\right] + 1 \implies 0 \leq \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right] \leq 1,$$

   et $\int\limits_{-1}^{0} dt = 1$ converge, alors $\int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right] \right) dt$ converge.

5. Le problème de convergence de $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + 1/t)}{t^5 + 1 + \sin\sqrt{t}} dt$ se pose en $(+\infty)$.

   On a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t} \implies 0 \leq \frac{\ln(1 + 1/t)}{t^5 + 1 + \sin\sqrt{t}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^6} \qquad \forall t \geq 1,$$

   et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^6}$ converge d'après Riemann, alors par équivalence $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + 1/t)}{t^5 + 1 + \sin\sqrt{t}} dt$ converge.

6. Le problème de convergence de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} dt$ se pose en 0 et en $(+\infty)$.

   On a pour tout $c \in]0, +\infty[$:

(a) Au voisinage de 0 : $\int_0^c \frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt$ converge par équivalence car :

$$0 \leq \frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

(b) Au voisinage de $(+\infty)$: $\int_c^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt$ converge car :

$$0 \leq \frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{3t^{7/6}}$$

et $\int_c^{+\infty} \frac{dt}{3t^{7/6}}$ converge.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

7. Le problème de convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ se pose en (-1) et en $(+1)$.

   La fonction $f : t \to \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ est paire alors il suffit d'étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$.

   On a
$$\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

   et $\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = 2$ donc converge, alors $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ converge, ce qui implique la convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$.

8. Le problème de convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)-\sin(t)}{t^3}dt$ se pose en (0) et en $(+\infty)$.

   On a pour tout $c \in]0,+\infty[$:

(a) Au voisinage de 0 : $\int_0^c \frac{\sin(2t)-\sin(t)}{t^3}dt$ diverge par équivalence car :

$$0 \leq \frac{\sin(2t)-\sin(t)}{t^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et $\int_0^c \frac{dt}{t^2}$ diverge.

(b) Au voisinage de $(+\infty)$: $\left|\frac{\sin(2t)-\sin(t)}{t^3}\right| \leq \frac{2}{t^3}$ et $\int_c^{+\infty} \frac{2}{t^3}dt$ converge, donc $\int_c^{+\infty} \frac{\sin(2t)-\sin(t)}{t^3}dt$ converge absolument par suite converge.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t^3}dt$ diverge.

Exercise 5.3 *En utilisant l'intégration par partie ou le changement de variables, montrer la convergence des intégrales impropres suivantes* $(n \in \mathbb{N})$ *:*

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{1+t^2}, \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt,$$

$$\int_0^1 (\ln t)^n dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}}.$$

Solution :

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} t^2 t^n e^{-t} = 0$, alors d'après le critère de Riemann l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge $\forall n \in \mathbb{N}$.

Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caculons d'abord I_0,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-x}+1\right] = 1.$$

Intégrons I_n par partie,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left[-x^n e^{-x} + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \right] = n I_{n-1}.$$

Nous terminons l'intégration par partie n fois, on obtient :

$$I_n = n\,(n-1)\, I_{n-2} = ... = n! I_0 = n!.$$

- L'intégrale $\int_0^1 (\ln t)^n \, dt$ converge puisque si on utilise le changement de variable $\ln t = -y$

  on obtient l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy$.

De plus

$$\int_0^1 (\ln t)^n \, dt = \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy = n!$$

- Le problème de convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{(1+t)^2}$ se pose en 0 et en$(+\infty)$.

Les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln t dt}{(1+t)^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t dt}{(1+t)^2}$ convergent car :

Au voisinage de 0,

$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

et $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge puisque

$$\int_0^1 \ln(t)\, dt = -1.$$

Au voisinage de $(+\infty)$,

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \sim \frac{1}{t^2 (\ln t)^{-1}}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 (\ln t)^{-1}}$ converge d'après Bertrand.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{(1+t)^2}$ converge.

Par changement de variable $y = \dfrac{1}{t}$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{(1+t)^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln y dy}{(1+y)^2} = -I \implies 2I = 0 \implies I = 0.$$

- Le problème de convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ se pose en 0 et en$(+\infty)$.

Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ convergent car :

Au voisinage de 0, on a

$$0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{0}{\sim} (-2)\ln(t)$$

et $\displaystyle\int_0^1 -2\ln(t)\, dt$ converge.

Au voisinage de $(+\infty)$, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après Riemann.

Intégrant par partie

$$\int \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + \arctan(t)$$

d'où

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4} - x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \arctan(x)\right] = \frac{\pi}{4} - 0$$

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \arctan(x) - \frac{\pi}{4}\right] = \pi - \frac{\pi}{4}$$

alors
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{1} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt + \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \pi.$$

- Le problème de convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$ se pose en $(+\infty)$.

Au voisinage de $(+\infty)$ on a
$$0 \leq \frac{1}{t^3+1} \sim \frac{1}{t^3}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge d'après Riemann alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$ converge par équivalence.

Par changement de variable $y = \dfrac{1}{t}$, on obtient,
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{ydt}{y^3+1},$$

d'où
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1} + \int_0^{+\infty} \frac{tdt}{t^3+1}\right] = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+1} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}}$ converge puisque si on utilise le changement de variable $t = y^2$ on obtient l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2dy}{y^3+1}$.

De plus
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} \frac{2dy}{y^3+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercise 5.4 *Etudier selon la valeur des paramètres la nature des intégrales suivantes (Etudier selon la valeur des paramètres la nature des intégrales suivantes) :*

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx. \qquad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution :

1. Pour tout couple de réels (α, β), la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Etudions la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$ au voisinage de $(+\infty)$.

   - <u>1er cas. Si $\alpha > 1$</u> : il existe $\gamma \in \,]1, \alpha[$, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} = 0$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$ converge, alors d'après le critère de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$ converge.
   - <u>2ème cas. Si $\alpha < 1$</u> : il existe $\gamma \in \,]\alpha, 1[$, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta} = +\infty$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$ diverge, alors d'après le critère de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$ diverge.
   - <u>3ème cas. Si $\alpha = 1$</u> : la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x (\ln(x))^\beta}$ est de la forme $u' u^\beta$, elle admet donc une primitive.

   Pour $\beta \neq 1$, on a

   $$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} = \left[\frac{1}{-\beta + 1} (\ln t)^{-\beta + 1}\right]_2^x = \frac{1}{-\beta + 1} \left[(\ln x)^{-\beta + 1} - (\ln 2)^{-\beta + 1}\right]$$

   si $x \to +\infty$, la fonction F admet une limite finie ssi $\beta > 1$.

   Pour $\beta = 1$, la primitive se calcul un peu différemment

   $$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln|\ln x| - \ln|\ln 2|$$

   et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln|\ln x| - \ln|\ln 2| = +\infty$, donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t \ln t}$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$. Le problème de convergence se pose en 0 et en $(+\infty)$.

(a) en $(+\infty)$, on a $0 \leq \dfrac{\arctan x}{x^\alpha} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^\alpha}$ et $\int^{+\infty} \dfrac{\pi}{2x^\alpha}dx$ converge ssi $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ converge ssi $\alpha > 1$.

(b) en 0, on a $0 \leq \dfrac{\arctan x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ et $\int_0 \dfrac{dx}{x^{\alpha-1}}$ converge ssi $\alpha < 2$, alors $\displaystyle\int_0 \frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ converge ssi $\alpha < 2$.

On conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ converge si $1 < \alpha < 2$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx.$ pb en $(+\infty)$.

(a) Pour $\alpha \geq -1$: au voisinage de $(+\infty)$, on a $x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) \geq x^\alpha \geq 0$.

Comme $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$.

(b) Pour $\alpha < -1$: au voisinage de $(+\infty)$, on a $\ln\left(x + e^{\alpha x}\right) = \ln x + \ln\left(1 + \dfrac{e^{\alpha x}}{x}\right) = \ln x + o(1)$, car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = 0$.

On en déduit que $x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) \underset{\infty}{\sim} x^\alpha \ln x$, on se ramène à une intégrale de Bertrand et comme $\alpha < -1$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$ converge.

Au voisinage de 0, on a $e^{\alpha x} \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x$ et $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$ alors $\ln\left(x + e^{\alpha x}\right) \underset{0}{\sim} \ln(x + 1 + \alpha x) \underset{0}{\sim} x + \alpha x$, et par conséquent $x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) \underset{\infty}{\sim} (1 + \alpha) x^{\alpha+1}$, on se ramène à une intégrale de Riemann converge ssi $\alpha + 1 > -1$, c-à-d l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$ converge ssi $\alpha > -2$.

En conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$ converge ssi $-2 < \alpha < -1$.

Exercise 5.5 *En utilisant le critère de Cauchy démontrer la divergence de l'intégrales*

$$\int_0^{+\infty} e^{t \sin t} dt.$$

Solution : $\exists\epsilon = \pi, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_1 = 2n\pi, x_2 = (2n+1)\pi \in [0, +\infty[$. Soit

$$t \in [2n\pi, (2n+1)\pi] : t\sin t \geq 0 \implies e^{t\sin t} \geq 1 \implies \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{t\sin t} dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} dt = \pi.$$

Alors la condition de Cauchy n'est pas vérifier ce qui implique la divergence de l'intégrale.

Exercise 5.6 *Etudier la convergence absolue et la semi-convergence des intégrales impropres suivantes :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)} dt, \qquad \int_0^{+\infty} e^{t/2}\sin(e^t)\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} dt.$$

Solution :

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)} dt$. Le problème se pose en $(+\infty)$.

   Etude de la convergence absolue : On a

   $$\left|\frac{\sin t}{t(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

   et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t)} dt$ converge absolument et par suite converge (n'est pas semi-convergente).

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{t/2}\sin(e^t)\, dt$. Le problème de convergence se pose en $(+\infty)$.

   (a) Etude de la convergence absolue : On a

   $$\lim_{t\to+\infty} \frac{\left|e^{t/2}\sin(e^t)\right|}{te^{t/2}} = 0,$$

   et $\int_0^{+\infty} te^{t/2} dt$ diverge(d'après le critère de Riemann), alors $\int_0^{+\infty} e^{t/2}\sin(e^t)\, dt$ ne converge pas absolument.

   (b) Etude de la convergence : Si on utilise le changement de variable $e^t = y$ on obtient l'intégrale

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy,$$

qui est convergente d'après Abel, alors $\int_0^{+\infty} e^{t/2} \sin(e^t)\, dt$ converge.

On conclue que $\int_0^{+\infty} e^{t/2} \sin(e^t)\, dt$ est semi convergente.

3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} dt$. Le problème de convergence se pose en $(+\infty)$.

   (a) Etude de la convergence absolue : On a

$$\left| \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right|,$$

   et $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right| dt$ diverge, alors $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} dt$ ne converge pas absolument.

   (b) Etude de la convergence : On a

$$\frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} = 0.$$

   Le développement limité d'ordre 2 de la fonction $\frac{1}{1+y}$ au voisinage de 0 est

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right) \qquad \text{où} \lim_{y \to 0} \frac{o\left(y^2\right)}{y^2} = 0.$$

   Si on pose $y = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$, on trouve

$$\frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \left[1 - \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{2t} + o\left(\frac{\cos^2 t}{t} \right) \right].$$

   Par suite

$$\frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin 2t}{2t} + \frac{\sin t \cos^2 t}{2t^{3/2}} + o\left(\frac{\sin t \cos^2 t}{t^{3/2}} \right),$$

où

$$o\left(\frac{\sin t\cos^2 t}{t^{3/2}}\right) = \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon(t)| \leq \frac{M}{t^{3/2}}.$$

On a

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2t}{2t} dt$ convergent d'après le critère d'Abel.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \left[\frac{\sin t\cos^2 t}{2t^{3/2}} + o\left(\frac{\sin t\cos^2 t}{t^{3/2}}\right)\right] dt$ est absolument convergente, puisque

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin t\cos^2 t}{2t^{3/2}} + o\left(\frac{\sin t\cos^2 t}{t^{3/2}}\right)\right| &\leq \left|\frac{\sin t\cos^2 t}{2t^{3/2}}\right| + \left|o\left(\frac{\sin t\cos^2 t}{t^{3/2}}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{M}{t^{3/2}} = \frac{\alpha}{t^{3/2}}\end{aligned}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge et par suite l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left[\frac{\sin t\cos^2 t}{2t^{3/2}} + o\left(\frac{\sin t\cos^2 t}{t^{3/2}}\right)\right] dt$ converge.

On conclue que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}} dt$ est semi convergente.

Exercise 5.7 *Soit f une fonction décroissante de $[a, +\infty[$ dans IR_+.*

1. *Montrer que si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, alors $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 0$.*
2. *Montrer par un contre exemple que la réciproque est fausse.*

Solution :

1. Supposons que $\lim_{x\to+\infty} tf(t) \neq 0$, alors on peut trouver $\epsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tende vers $+\infty$ et telle que $x_n f(x_n) \geq \epsilon$.

   Alors puisque f est décroissante, on obtient :

   $$\forall x \leq x_n : f(x) \geq f(x_n) \geq \frac{\epsilon}{x_n}.$$

   On intègre alors f entre $x_n/2$ et x_n :

   $$\int_{x_n/2}^{x_n} f(x)\, dx \geq \int_{x_n/2}^{x_n} f(x_n) \geq \left(x_n - \frac{x_n}{2}\right)\frac{\epsilon}{x_n} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors d'après le critère de Cauchy l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

2. La fonction $f : t \to \dfrac{1}{t \ln t}$ est décroissante de $[2, +\infty[$ dans IR_+ et admet une limite nulle quand t tend vers $(+\infty)$ par contre l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln x} dt$ diverge.

Chapitre 6

Fonctions définies par des intégrales impropres

En mathématique et en physique mathématique ,les intégrales dépendant d'un paramètre constituent un outil analytique important, par exemples nous citerons les intégrales d'Euler, les intégrales de type potentiel, etc ...
Dans ce chapitre, on étudiera les propriétés des intégrales impropres dépendant d'un paramètre.
Posons $I = [a, b[$ un intervalle semi ouvert, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et J un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (fini ou non).

6.1 Domaine de définition

Définition 6.1 *Considérons f une fonction de deux variables définie sur $I \times J$, par*

$$\begin{array}{rccc} f: & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

telle que $\lim\limits_{t \to b} f(t,x) = \infty$. L'intégrale $\int\limits_a^b f(t,x)\,dt$ est dite intégrale impropre dépendant du paramètre x.

La première question qui se pose est : quelle est la valeur de x pour que l'intégrale $\int\limits_a^b f(t,x)\,dt$ converge.

Définition 6.2 *Fixon $x \in J$. Si l'application $t \mapsto f(t,x)$ admet une intégrale impropre convergente sur I, alors on peut définir une fonction F sur J par :*

$$F : x \longmapsto \int\limits_a^b f(t,x)\,dt.$$

- *La fonction F s'appelle fonction définie par une intégrale impropre.*
- *L'ensemble de définition de la fonction F est l'ensemble des valeurs de x, pour lequel l'intégrale $\int\limits_a^b f(t,x)\,dt$ soit simple ou intégrale impropre convergente.*

Exemple 6.1 *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F donnée par :*

$$F(x) = \int\limits_0^1 \ln\left(t^2+x^2\right) dt.$$

On a

1. *Pour $x \neq 0$, l'intégrale est une intégrale simple.*
2. *Pour $x = 0$, on a une intégrale impropre avec un problème de convergence en 0. De plus l'intégrale $\int\limits_0^1 \ln t^2 dt$ converge , alors le domaine de définition de F est $\mathbb{R}$.*

6.2 Propriétés

Dans ce chapitre on veut découvrir les propriétés de la fonction F (continuité, intégrabilité, dérivation) à partir de celles de f. Ces propriété permettent, dans cercains cas, de calculer des intégrales impropres.

6.2.1 Continuité

Théorème 6.1 (de continuité) *Considérons f une fonction de deux variables définie sur $[a, b[\times J$, par*

$$f: \begin{array}{ccc} [a, b[\times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (t, x) & \longmapsto & f(t, x) \end{array}$$

telle que $\lim\limits_{t \to b} f(t, x) = \infty$. Supposons que la fonction f est continue par rapport au variable x dans J et continue par morceaux par rapport au variable t dans $[a, b[$. De plus s'il existe une fonction $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ qui admette une intégrale impropre convergente sur $[a, b[$, et vérifie

$$\forall (t, x) \in [a, b[\times J : |f(t, x)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $t \to f(t, x)$ est intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ et la fonction F définie sur J par : $F(x) = \int\limits_a^b f(t, x)\, dt$ est continue sur J.
En particulier on a :

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(t, x)\, dt = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(t, x)\, dt, \qquad \forall x_0 \in J.$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et intégrale généralisée.

Remarque 6.1 *En pratique, la condition que la fonction f est continue par rapport au variable x dans J et continue par morceaux par rapport au variable t dans $[a, b[$ ne se pose presque jamais, par conséquent il serais mieux de supposer la continuité de f sur $[a, b[\times J$.*

Démonstration. L'intégrale impropre de φ est convergente sur $[a, b[$, alors elle vérifie la condition de Cauchy c-à-d

$$\forall \epsilon > 0, \exists b' \in [a, b[: \forall x \in J \implies \int_{b'}^{b} |f(t, x)|\, dt \leq \int_{b'}^{b} \varphi(t)\, dt < \epsilon.$$

Soit $x_0 \in J$ et soit $[\alpha, \beta] \subset J$ un voisinage compact de x_0. Alors

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^{b'} |f(t,x) - f(t,x_0)|\, dt + 2\epsilon.$$

La fonction f est continue sur le compact $[a, b'] \times [\alpha, \beta]$, donc on a

$$\exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \implies |F(x) - F(x_0)| < \frac{\epsilon}{b' - a}.$$

Il en résulte que

$$|x - x_0| < \eta \implies |F(x) - F(x_0)| < 3\epsilon.$$

Ce qui prouve la continuité de F en x_0. ∎

Exemple 6.2 *Soit la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \to & \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{array}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et de plus

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* : \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \text{ converge.}$$

Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.2.2 Intégrabilité

Théorème 6.2 (d'intégration) *Sous les mêmes hypothèses du théorème de continuité on aura :*

$$\forall \alpha, \beta \in J : \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t,x)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t,x)\, dx \right) dt.$$

La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Fubini qui est hors programme.

6.2.3 Dérivabilité

Théorème 6.3 (de dérivation) *Soit f une fonction continue sur $[a,b[\times J$. On suppose que la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ continue sur $[a,b[\times J$. De plus s'il existe deux fonctions $\varphi_1,\varphi_2:[a,b[\to\mathbb{R}_+$ dont leurs intégrales impropres sur $[a,b[$ converge telles que*

$$\forall (t,x)\in[a,b[\times J:|f(t,x)|\leq\varphi_1(t)\ \text{ et }\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leq\varphi_2(t).$$

Alors les intégrables impropres $\int\limits_a^b f(t,x)\,dt$ et $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ sont convergentes sur l'intervalle $[a,b[$ et la fonction F définie sur J par : $F(x)=\int\limits_a^b f(t,x)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et sa dérivée est donnée par

$$F'(x)=\left(\int\limits_a^b f(t,x)\,dt\right)'=\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt.$$

Exemple 6.3 *Soit la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ & (t,x) & \to & \dfrac{e^{-t}\sin xt}{t}\end{array}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ et dérivable par rapport à x et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=e^{-t}\cos xt\ \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}.$$

De plus

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}:\left|\frac{e^{-t}\sin xt}{t}\right|\leq e^{-t}\quad\text{et}\quad\left|e^{-t}\cos xt\right|\leq e^{-t}\quad\text{et}\quad\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}dt\ \text{ converge.}$$

Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin xt}{t} dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par

$$F'(x) = \int_a^b e^{-t}\cos xt dt. \tag{6.1}$$

Si on intègre par partie l'intégrale (6.1) deux fois, on obtient

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

et si on intègre F' entre 0 et x, on obtient

$$F(x) = arctgx.$$

Remarque 6.2 *L'hypothèse de domination de la fonction f ou de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ par une fonction φ sur l'intervalle $[a, b[$ dans les théorèmes précédents sont trés forte. On peut envisager une hypothèse mois forte, c'est la convergence uniforme d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.*

Définition 6.3 (Convergence uniforme) *:*

1. *Si $b \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ est dite uniformément convergente sur J, ssi*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall T > 0 : 0 < T < \delta \implies \sup_{x\in J}\left|\int_{b-T}^{b} f(t,x)\,dt\right| < \epsilon,$$

c-à-d

$$\lim_{T\to 0}\left[\sup_{x\in J}\left|\int_a^b f(t,x)\,dt - \int_a^{b-T} f(t,x)\,dt\right|\right] = 0.$$

2. *Si* $b=+\infty$, *l'intégrale* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(t)\,dt$ *est dite uniformément convergente sur* J, *ssi*

$$\forall\epsilon>0,\exists\eta>0:\forall T>\eta \implies \sup_{x\in J}\left|\int\limits_{T}^{+\infty} f(t,x)\,dt\right|<\epsilon,$$

c-à-d

$$\lim_{T\to+\infty}\left[\sup_{x\in J}\left|\int\limits_{a}^{+\infty} f(t,x)\,dt-\int\limits_{a}^{T} f(t,x)\,dt\right|\right]=0$$

Exemple 6.4 *Pour tout* $x\in[0,1]$, *l'intégrale* $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-xt}dt$ *converge, mais ne converge pas uniformément.*

En effet :

1. $$\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-xt}dt=\lim_{y\to+\infty}\int\limits_{0}^{y} xe^{-xt}dt=\lim_{y\to+\infty}-e^{xy}+1=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ 0 & si\ x=0\\ +\infty & si\ x<0\end{cases}$$

2. *On a*

$$\left|\int\limits_{0}^{T} xe^{-xt}dt\right|=\begin{cases}e^{-Tx} & si\ x>0\\ 0 & si\ x>0\end{cases}$$

alors

$$\lim_{T\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\int\limits_{T}^{+\infty} xe^{-xt}dt\right|=\lim_{T\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}e^{-Tx}=1\neq0.$$

6.3 Fonctions eulériennes

Les fonctions eulériennes jouent un rôle primordial en analyse. dans ce paragraphe nous exposons deux fonctions eulériennes et nous donnons quelques propriétés élèmentaires.

6.3.1 Fonction Gamma Γ

Considérons l'intégrale impropre

$$\int\limits_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \tag{6.2}$$

- On a pour tout $x \in]0, +\infty[$, la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = 0$, ce qui assure la convergence de l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- l'intégrale $\int\limits_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente pour tout $x \in]0, +\infty[$ car :

    1. Si $x \geq 1$, l'intégrale $\int\limits_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

    2. Si $0 < x < 1$, on a $t^{x-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ et $\int\limits_0^1 t^{x-1} dt$ converge.

Alors l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge pour tout $x \in]0, +\infty[$et on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Par conséquent, on peut définir une fonction par l'intégrale impropre (6.2) sur $]0, +\infty[$.

Définition 6.4 *On appelle fonction Γ d'Euler, la fonction :*

$$\begin{array}{rlcl} \Gamma : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{array}$$

Théorème 6.4 *La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.*

Propriété 6.1 *:*

1. $\Gamma(1) = 1$.

2. $\forall x > 0 : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) = n!$.

Démonstration.

1. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}\big|_0^{+\infty} = 1$.

2. Intégrant par partie,

$$\forall x > 0 : \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}}_{\searrow 0} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

3. Par récurrence

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

■

Remarque 6.3 *La fonction Γ apparait donc comme une extension à $\mathbb{R}_+$ de la fonction factorielle.*

6.3.2 Fonction Bêta β

Considérons li'intégrale impropre

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \tag{6.3}$$

- L'intégrale (6.3) converge au voisinage de 0, ssi $x > 0$ puisque

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$$

- L'intégrale (6.3) converge au voisinage de 1, ssi $y > 0$ puisque

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} (1-t)^{y-1}$$

Par conséquent, on peut définir une fonction par l'intégrale impropre (6.3) sur $(]0,+\infty[)^2$.

Définition 6.5 *On appelle fonction β d'Euler, la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} \beta : & (]0,+\infty[)^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \end{array}$$

Propriété 6.2 *:*

1. $\beta\left(1/2,1/2\right)=\pi$.
2. $\forall x,y>0:\beta\left(x,y\right)=\beta\left(y,x\right)$.
3. $\forall x,y>0:\beta\left(x,y\right)=\dfrac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}$.
4. $\forall x>0$, *si* $x\notin\mathbb{Z}:\beta\left(x,1-x\right)=\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(1-x\right)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$.

6.4 Exercices

Exercise 6.1 *On considère l'intégrale impropre suivante :*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(tx\right)}{1+t^2}dt$$

1. *Montrer que cette intégrale définie une fonction* F *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* F *est bornée et paire.*
3. *Montrer que* F *est continue et calculer* $F(0)$.

Solution :

1. Pour montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ il faut prouver que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(tx\right)}{1+t^2}dt$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   On a
   $$\left|\frac{\cos\left(tx\right)}{1+t^2}\right|\leq\frac{1}{1+t^2},\quad\forall x\in\mathbb{R},\forall t\in\left[0,+\infty\right[,$$
   et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ converge, alors par comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\cos\left(tx\right)}{1+t^2}\right|dt$ converge, ce qui implique que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(tx\right)}{1+t^2}dt$ est convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. La fonction F est bornée :
   $$\left|F\left(x\right)\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(tx\right)}{1+t^2}dt\right|\leq\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=arctg\left(t\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

La fonction F est paire :

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos[t(-x)]}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt = F(x).$$

3. On a, la fonction $f : (t,x) \to \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue par rapport à t sur $[0,+\infty[$ et par rapport à x sur $\mathbb{R}$.

   De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,+\infty[: \left|\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ converge,}$$

   alors d'après le théorème de continuité 6.1, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$F(0) = \lim_{x\to 0} F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercise 6.2 *Soit F la fonction définie par :*

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$$

1. *Déterminer le domaine de définition de F.*
2. *Quel est le sens de variation de F.*
3. *Démontrer que F est continue sur son domaine de définition.*
4. *Calculer $F(x) + F(x+1)$ pour $x > 0$.*
5. *Déterminer la limite de F en 0 et en $+\infty$.*

Solution :

1. Le domaine de convergence : la fonction $t \to \dfrac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et en $(+\infty)$, on a :

$$\frac{t^{-x}}{1+t} \underset{\infty}{\sim} \frac{t^{-x}}{t} = \frac{1}{t^{1+x}}$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}}dt$ converge ssi $1+x>1 \quad (x>0)$, alors par équivalence l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$ converge pour tout $x>0$, donc $D_F =]0,+\infty[$.

2. La fonction F est décroissante :

   En effet : soit $x, y \in]0,+\infty[$; tels que $x \leq y$, on a pour tout $t>1$:

$$\ln t \geq 0 \implies x\ln t \leq y \ln t \implies e^{-x\ln t} \geq e^{-y\ln t} \implies t^{-x} \geq t^{-y} \implies \frac{t^{-x}}{1+t} \geq \frac{t^{-y}}{1+t}$$

   et les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-y}}{1+t}dt$ convergent, alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{t^{-y}}{1+t}dt \implies F(x) \geq F(y).$$

3. $\forall \alpha > 0$ et $\forall x \in [\alpha, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{t^{-x}}{1+t}\right| \leq \frac{1}{t^{1+\alpha}} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}}dt \text{ converge.}$$

   On a aussi la fonction $f : (t,x) \to \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue par rapport à t sur $[1,+\infty[$ et par rapport à x sur $]\alpha,+\infty[$, alors d'après le théorème de continuité 6.1, la fonction F est continue sur $]\alpha,+\infty[$ pour tout $\alpha>0$, se qui donne sa continuité sur $]0,+\infty[$.

4. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) + F(x+1) &= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}+t^{-x-1}}{1+t}dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1}\frac{t+1}{1+t}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = -\left.\frac{t^{-x}}{x}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

   (puisque $\lim_{t\to+\infty} -\frac{t^{-x}}{x} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{e^{-x\ln t}}{x} = 0$).

5. La limite de F en 0,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t)|_0^{+\infty} = +\infty.$$

La limite de F en $+\infty$,

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \lim_{x\to +\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Deuxième méthode : on a la fonction F est décroissante et minorée par 0 donc admet une limite finie l en $+\infty$, alors

$$2l = \lim_{x\to +\infty} [F(x) + F(x+1)] = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies l = 0.$$

Exercise 6.3 *On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. *Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Justifier que F est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.*
3. *Calculer $F'(x)$.*
4. *Déduire une expression simplifiée de $F(x)$.*

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ a un problème de convergence en 0 et en $(+\infty)$.
   - Au voisinage de 0 : la fonction $t \to \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est prolongeable par continuité en 0, puisque $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} = x$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ converge.
   - Au voisinage de $(+\infty)$, on a :

$$\forall t \geq 1 : \left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| \leq e^{-t},$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, se qui implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}dt$ converge.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t}dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ce qui justifie que $D_F = \mathbb{R}$.

2. La fonction $f : (t,x) \to \dfrac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[\, \times \mathbb{R}$, et sa fonction dérivée partielle par rapport à x existe où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) : (t,x) \to \cos(xt)\, e^{-t}$$

et continue sur $]0,+\infty[\, \times \mathbb{R}$, de plus

$$\forall (t,x) \in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R} : \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t,x)\right| = \left|\cos(xt)\, e^{-t}\right| \le e^{-t} \qquad \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \text{ converge}\right),$$

alors d'après le théorème de dérivation 6.3, la fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t}dt.$$

3. Intégrant $\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t}dt$ par partie deux fois, on trouve $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. Intégrant F' entre 0 et x, on trouve

$$F(x) - F(0) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = arctgx - arctg0,$$

et puisque $F(0) = 0$, on aura $F(x) = arctgx$.

Exercise 6.4 (Supplémentaire) *Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt$$

1. *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}dt$.*

2. *En déduire que la fonction qui à x associe $F(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$ est constante.*

3. *Conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'Analyse, Tome 1 et 2, édition OPU, [2007].

[2] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, Tome 1, éditon Hertmann collection méthodes. [1980]

[3] J. Dixmier, Mathématiques, Cours du premier cycle, Tome 2, édition Dunod, [1977].

[4] S. Guerre-Delabrière, Suites, séries, intégrales : Cours et exerices corrigés Niveau L2, édition Ellipses, [2009]

[5] J. Lelong Ferrand, Exercices résolus d'analyse, édition Dunod, [1977].

[6] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, édition Dunod, [1978].

[7] G. Monna et R. Morvan, Problèmes de mathématiques, Séries numériques, Séries de fonctions, Séries entières, édition Cepadués, [2008].

[8] A. RAUZY, Mathématique, Cours d'analyse : licence L1 et L2, 1re et 2e année d'université, édition ESKA [2004].

[9] J. Rivaud, Analyse «Séries, équations différentielles» -Exercices avec solutions, édition Vuibert, [1981].

[10] C. Servien, Analyse 3 « Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales », édition Ellipses, [1995].

[11] V. Smirnov, Cours de mathématiques supérieures, Tome 2, éditions Mir [1984].