جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الانسانية والاجتماعية

قسم العلوم الاجتماعية

شعبة الفلسفة

محاضرات في مقياس المنطق الرمزي

موجهة لطلبة السنة الأولى ماستر –فلسفة

إعداد الدكتور: بوعلام معطر

السنة الدراسية: 2021-2022

محتوى المادة حسب عرض التكوين

عنوان الماستر: فلسفة عامة

السداسي: الأول

اسم الوحدة: استكشافية

اسم المادة: المنطق الرياضي

الرصيد: 1

المعامل : 1

أهداف التعليم:

(وصف ما يفترض قد توصل إليه الطالب من كفاءات ومعارف بعد نجاحه في هذه المادة).

. معرفة طبيعة التفكير المنطقي الرياضي

. تطوير ملكة الحكم المنطقي لدى الطالب

. التدريب على صياغة الاحكام النقدية

. نقد النصوص الفلسفية باستعمال اللغة الرمزية

المعارف المسبقة المطلوبة:

(وصف للمعارف المتحصل عليها الطالب مسبقا من أجل المتابعة في هذا التعليم).

. الاطلاع على المنطق الصوري والتحكم في مفاهيم واستدلالات هذا المنطق.

محتوى المادة

1. مدخل الى المنطق الرياضي (التعريف، النشأة، الخصائص...)

2. الحساب الكلاسيكي للقضايا غير المحللة

. تعريف القضايا غير المحللة وأنواعها

. دوال القضايا ودوال الصدق

. إحصاء الروابط المنطقية

3. الأنساق المنطقية الرياضية

. مفهوم نسق المنطق الرياضي

. نماذج من الأنساق المنطقية

طريقة التقييم: امتحان.

المراجع:

1- كريم متى، المنطق الرياضي

2- برتراند رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية

3- محمد ثابت الفندي، اصول المنطق الرمزي

4- محمد محمد قاسم، نظريات المنطق الرمزي

5-روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو إلى راسل

الفصل الأول: مدخل الى المنطق الرياضي

أولا: مفهوم المنطق

إذا تصفحنا تاريخ المنطق فإنّنا نقف على عدّة أسماء اتخذها هذا العلم، نذكر منها على سبيل المثال الأورغانون وهو العنوان الذي تمّ اصطلاحه على مجموع مؤلَّفات أرسطو في المنطق، ومعنى مصطلح أو كلمة الأورغانون هو الآلة، وقد أشار أرسطو إلى هذه التّسمية–حسب عبد الرّحمان بدوي– في مؤلّفه الطُّوبيقا، لكن لم تُستعمل بالتَّحديد للدَّلالة على علم المنطق إلاّ مع الإسكندر الأفروديسي (*Alexandre D'aphrodisies*) [القرنين الثاني والثالث الميلادي][1]. بالإضافة إلى التّحليلات وهو الاسم الذي استعمله أرسطو في كتاباته المنطقية، وكان يقصد بذلك تحليل الفكر إلى عناصره (التّحليلات الأولى والتّحليلات الثانية). أمّا الديالكتيك فهو اصطلاح أفلاطون، وكان موضوعه هو تحليل التّصورات وتركيبها (محاورة السُّفسطائي)، واستخدم شيشرون (*Marcus Tulus Cicéron*) [106ق م - 43ق م] الاسم نفسه للدّلالة على كلّ المنطق. منطق البرهان، ومنطق الاحتمال، وبقي هذا الاستعمال حتّى القرن السابع عشر[2].

إلاّ أنّ الاسم الذي عُرف به هذا العلم بوجه عام فهو علم المنطق (لوجيكيا)، فلا نجده بالمعنى الاصطلاحي للدّلالة على هذا العلم، إلاّ في مؤلَّفات من القرن الأوّل قبل الميلاد وبالضبط عند شيشرون، وذلك جنبا إلى جنب مع كلمة ديالكتيك الموجودة عند أفلاطون. إذن ابتداء من القرن الأوّل قبل الميلاد استعملت الكلمتان علم المنطق وديالكتيك معا للدّلالة على نفس العلم، وهو علم المنطق[3].

وإذا اقتربنا من الكلمة اليونانيّة لوغوس (*Logos*) فإنَّ كلمة المنطق تشير إلى العقل أو البرهان. وتَرِد هذه الكلمة كجزء من أسماء كثيرة، مثل علم الجيولوجيا (*Geology*)، وعلم البيولوجيا (*Biology*)، وعلم النّفس (*Psychology*). وغير ذلك من العلوم، لِيدُل على البحث

1- .بدوي(عبد الرحمن): موسوعة الفلسفة، ج2، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، ط1، 1984م، ص: 473

2- المرجع نفسه، والصفحة نفسها.

3- المرجع نفسه، ص: 474.

المنظَّم وعن القوانين والمبادئ العامَّة التي يتوصَّل إليها هذا العلم أو ذلك طبقا لبعض المعايير العقليَّة والإجراءات التَّجريبية[1].

وتشير كلمة المنطق من ناحية الاشتقاق اللغوي إلى الكلام أو النُّطق، "وأوّل من أطلق اسم المنطق على هذا العلم شُرَّاح أرسطو، ثم شاع استعماله بعد الاسكندر الأفروديسي"[2]. ويذكر علي عبد المعطي محمد أربع اتِّجاهات في تعريف المنطق وهي:

الاتِّجاه الأوَّل يعتبر "المنطق آلة أو صناعة ويقصد منه تلك الفائدة العمليَّة التي تستفاد من تطبيق قواعد المنطق على الأحكام والاستدلالات في العلوم الأخرى"[3]. ويصنِّف ضمن هذا الاتِّجاه تعريفي أبو علي ابن سينا [980م_1037م]، وبورت روايال (*Port-Royal*). لكنَّه لا يوافق على هذا التعريف لأنَّ اعتبار أيّ علم من العلوم ومنها المنطق فنّا يعني ربطه بالجانب العملي التَّطبيقي، بينما العلم في أساسه نظري، ثُمّ يأتي التّطبيق بعد ذلك أو قد لا يأتي. أمّا الاتجاه الثّاني يذهب في رأيه إلى اعتبار "المنطق علم صناعة وعلم نظري في الوقت نفسه"[4]. ومن بين هؤلاء ادموند غوبلو (*Edmond Goblot*) [1858م-1935م] غير أنَّ اجتماع صناعة وعلم، يُعَدُّ تناقضا لأنّ العلم النَّظري هدفه الحقيقة، بغضِّ النّظر عن نفعها وإنّما يأتي التّطبيق مع العلوم التّطبيقيّة. أمّا الاتّجاه الثّالث فينظر إلى المنطق باعتباره "علم معياريّ والمقصود بذلك هو أنّ قوانين المنطق تصبح بمثابة المعايير الثَّابتة التي ينبغي أن يستند إليها كلّ تفكير صحيح"[5]. ويعدّ أبو حامد الغزالي [1059م-1111م] أبرز ممن يمكن تصنيفهم ضمن هذا التوجّه. أمّا الذي أثار مسألة التَّمييز بين العلم النَّظري والعلم المعياري هو الألماني ويليام فونت (*Wilhelm Wundt*) [1832م-1920م] عندما صنّف المنطق والجَمال والأخلاق ضمن العلوم المعياريَّة.

---

[1]- مهران (محمّد): علم المنطق، دار المعارف، القاهرة، 1978م، ص: 17ط2، 2004م، ص: 21.

[2]- صليبا (جميل): المعجم الفلسفي، الجزء الثّاني، دار الكتاب اللبناني، 1982م، ص: 428.

[3]- محمّد علي عبد المعطي: المنطق ومناهج البحث العلمي في العلوم الرياضية والطبيعية، دار المعرفة الجامعيَّة، الإسكندريّة، ط2، 2004، ص: 21.

[4]- المرجع نفسه، ص: 22.

[5]- المرجع نفسه، ص: 23.

وينتهي إلى اتّجاه أخير يُعرِّف المنطق بِأنَّه "علم نظريّ، حيث يعتبر هذا التّعريف من أنسب التّعريفات للمنطق الصُّوري والمنطق الرّمزي على حدٍّ سواء"[1]. ويورد هنا تعريفات الكثير من المناطقة نذكر منهم جيفونز، كينز، هاملتون، هيجل، سوزان استبنغ، جورج بول، إلخ. ومِن هذه الملاحظات ينبغي أن نتَّجِه اتّجاها آخر في تعريف المنطق وذلك بالرُّجوع إلى السِّياق التّاريخي لنشأة هذا العلم، ونختار نماذج من التَّعريفات تخصّ تطوّر المنطق عبر التاريخ:

أما صاحب كتاب التحليلات (أرسطو) فيُعرّف المنطق بأنّه آلة العلم، وموضوعه الحقيقي هو العلم نفسه، أو هو صورة العلم. وينبغي الاشارة هنا إلى أنّ أرسطو لمّا وضع تصنيفه للعلوم ميّز بين ما كان منها علما نظريًّا غايته المعرفة كالفيزيقا والرّياضيات والفلسفة الأولى، وما كان منها عمليّا غايته السّلوك مثل الأخلاق والسّياسة، وما كان منها إنتاجيًّا غايته إنتاج شيء جميل أو مفيد مثل فنّ الشّعر. أما المنطق فلم يذكره ضمن هذه العلوم[2]. ورُبّما كان السّبب عدم اعتباره المنطق علما من العلوم؛ أي جزء من الفلسفة فيعود في نظره إلى أنّ المنطق علم قوانين الفكر بغضّ النّظر عن موضوع أو مادّة ذلك الفكر، فهو يعدّه علما ومدخلا لجميع العلوم وآلة لها على اختلاف أنواعها. إذ أنّ المنطق نوع مِن المعرفة وهو شرط ضروري للولوج إلى أي علم.

ولقد أطلق عليه شُرّاح أرسطو اسم الآلة أو الأورغانـون. وهو العنوان الذي يشير إلى كتب أرسطو المنطقيّة وتشمل كتاب المقولات، وكتاب العبارات، التّحليلات الأولى، التّحليلات الثانية، كتاب الجدل، وكتاب المغالطات، إلا أن ارسطو "لم يطلق اسم المنطق على أبحاثه وإنّما استخدم كلمة التّحليلات؛ أي تحليل التّفكير إلى استدلالات، والاستدلالات إلى أقيسة، والأقيسة إلى عبارات وحدود"[3]. أما ابن سينا فيعتبره آلة إذ يقول: "والعلم الذي

[1]- المرجع نفسه، ص: 24.
[2]- مطر(أميرة حلمي): الفلسفة اليونانية تاريخها ومشكلاتها، دار قباء للطّباعة والنّشر والتّوزيع، القاهرة، ص ص: 251-252.
[3]- المرجع نفسه، ص: 252.

يُطلب ليكون آلة، فقد جرت العادة في هذه البلدان أن يسمى علم (المنطق)، ولعلّ له عند قوم آخرين اسم آخر، لكنّنا نؤثر أن نسمّيه الآن بهذا الاسم المشهور"[1].

كما يعرفه أبو حامد الغزالي بكونه "القانون الذي به يميّز صحيح الحدّ والقياس عن فاسدهما، فيتميَّز العلم اليقيني عمّا ليس يقينيًّا وكأنّه الميزان والمعيار للعلوم كلّها، وكلّ ما لم يوزن بالميزان لم يتميّز فيه الرجحان عن النقصان"[2]. وهو تعريف لا يختلف كثيرا عن تعريف أرسطو، فهو يصف المنطق بالقانون أي أنّه الآلة الصّناعية النّظرية. أمّا تعريف توما الأكويني (*Tomas d'Aquin*) [1225م-1274م] فهو "الصّناعة التي توجِّه عمل العقل ذاته والتي بفضلها يسير الإنسان في عمله العقلي بشكل مُنظّم وسهل وبلا خطأ"[3]. ويعتقد علي سامي النشّار أنّ أوضح تعريف لتعريفات المسيحيين في العصور الوسطى للمنطق، إنّما نجده عند القديس توما الأكويني. أمّا تعريف بورت رويال* للمنطق فهو بمثابة الصّناعة التي يحسن بها الإنسان قيّادة عقله في معرفة الأشياء عند التّعلّم أو التّعليم[4]. ويصفه جول تريكو (*Jules Tricot*) [1863م-1962م] بالتّعريف الرّشيق. ويلاحظ النشّار أنّ أوّل تعريف عند المحدثين هو تعريف بورت رويال، باعتباره "فنّ اكتشاف وفنّ برهنة في الوقت نفسه، حيث نجد خطوة في فهم المنطق وتعريفه، قد نجدها مصرحا بها في المنطق الأرسطي. وإن كانت متضمنة فيه"[5].

---

[1]- ابن سينا (أبو علي): منطق المشرقيين والقصيدة المزدوجة في المنطق، المكتبة السّلفية، القاهرة، 1910، ص: 5.

[2]– الغزالي (أبو حامد): مقاصد الفلاسفة، ص: 6–7.

[3]– تريكو (جول): المنطق الصوري، ص: 22.

* إنّ المنطق المسمّى "منطق بورت رويال" هو كتاب ظهر سنة 1662م لا يحمل اسم مؤلفيه وتحت عنوان: (La *Logique ou L'art de penser*) وهو من تأليف ناسكين من نشاط تلك السُّلطة العليا للمذهب الجنسيني هما أنتوان أرنولد (*Antoine Arnould*) وبيار نيكول (*Pierre Nicole*).

[4]– تريكو (جول): المنطق الصوري، مرجع سابق، ص: 22.

[5]– النشار (علي سامي): المنطق الصّوري منذ أرسطو حتى عصورنا الحاضرة، ص: 10.

أمّا رابييه (*Rabier*) فقد ميَّزَ بين المنطق الصّوري وعلم المناهج، فالمنطق هو علم شروط مطابقة الفكر لذاته وشروط مطابقة الفكر لموضوعاته، التي متى اجتمعت كانت الشّروط الضّروريّة والكافية للصّدق[1].

إنّ الصُّوَر الفكريّة ليست صُوَرا عقليّة خالصة مستقلّة عن الواقع بمختلف مفاهيمه، بل يجب أن تنطبق على الأشياء والوقائع في العالم الخارجي، ومن ثمة فالمنطق ليس علما خالصا، يقول جول تريكو: "إنّ المنطق الصّوري وخلافا لرأي المدرسيِّين الانحطاطيِّين وهاملتن، فإنّه لا يكفي نفسه بنفسه، والحاصل أنّه يجب أن ينطبق على شيء، وأن يكون معمولا من أجل العلم. ولقد أدرك ذلك أرسطو؛ فنظريّته في القياس كما بسطها في (التّحليلات الأولى) ليست سوى عملا تحضيريًّا لنظريّة البرهان والعلم الموجودة في التّحليلات الأخيرة"[2].

ويبدو أنّ التّعريفات السّابقة لم تخرج عن نطاق التّعريف الأرسطي. وربّما كان هذا هو السّبب الذي جعل روبير بلانشي في تأريخه للمنطق يقفز على حقبة تاريخية (أي المرحلة الاسلامية) فعندما اطّلع على شروحات ابن رشد وجدها تصبّ في السياق الأرسطي.

ثانيا: خاصية الصّورية في المنطق

"تُطلق الصّورة في المنطق الرّياضي على الجزء الثّابت في القضيّة، والمادة على الجزء المتغيّر في القضيّة، وبعبارة أخرى؛ الصّورة هي الثّوابت والمادّة هي المتغيّرات في القضايا. فمثلا في القضيّة: كل انسان هو فان. يقال عن (كل) وعن (هو) إنهما ثابتان؛ ويُقال عن (انسان) وعن (فان) أنهما متغيّران، أو الأوّلان هما صورة القضيّة، والأخيران هما مادّة القضيّة"[3].

---

[1]– تريكو (جول): المنطق الصوري، مرجع سابق، ص: 22.

[2]– المرجع نفسه، ص: 25.

[3]– بدوي (عبد الرّحمن): موسوعة الفلسفة، ص: 49.

إنّ المنطق سواء في صورته القديمة، أو في صورته المعاصرة يَتعلّق بصورة الفكر؛ أي بالطّريقة التي نفكّر بها دون النّظر إلى دلالاتها المحسوسة. ويذكر يان لوكاشيفتش (*Jan Lukasiewicz*) [1878م-1956م] عبارتين يقول عن الأولى أنّها مأخوذة من كتاب المنطق (لكينز): يقال عادة إنّ المنطق صوري، من حيث أنّه لا يتعلّق إلاّ بصورة الفكر، أي بالنّحو الذي نفكّر عليه دون نَظَر إلى الموضوعات المعيّنة التي نفكّر فيها والثّانية يقول أنّها مأخوذة من كتاب تاريخ الفلسفة للأب ويكلستون: كثيرا ما يوصف المنطق الأرسطي بأنّه منطق صوري وهذا الوصف ينطبق على منطق أرسطو من حيث هو تحليل لصورة الفكر. ثم يقول: في هذين الاقتباسين عبارة لا أفهمها هي صورة الفكر[1].

فهو يرفض أن يكون المنطق علم قوانين الفكر كما يفهمه المتأثرون بالنّزعة السّيكولوجية، وهي النزعة التي تُعدّ علامة على تراجع المنطق في الفلسفة الحديثة على حدّ تعبيره، وحسبه لا نجد لهذا المفهوم أثرا في كتاب التّحليلات الأولى. وهو الكتاب الذي عرض فيه أرسطو نظريّة القياس. ويقرّر كذلك أنّ المنطق "لا يبحث في كيف يجب أن نفكّر فهذه مهمّة يختصّ بها فنّ يشبه فنّ تقوية الذاكرة. فعلاقة المنطق بالفكر لا تختلف عن علاقة الريّاضيات به"[2]. وعلى هذا الأساس فالمنطق ليس علما معياريّا، فإذا كانت قواعد وقوانين المنطق تُصاغ عادة بصيغة الفعل يجب، فقد نفهم معان كثيرة من هذا الفعل كمعنى الإلزام: كقولنا يجب أن يحترم الطّالب قرار أستاذه. والمعنى الشَّرطي: مثل يجب أن يكون الطّالب مجتهدا إذا أراد النّجاح. فالوجوب هنا مشروط بإرادة النّجاح فقط. والمعنى الصّوري: مثل يجب أن يكون التّالي صادقا في حالة صدق المقدّم في علاقة اللّزوم المادّي، فالوجوب هنا يتعلّق بصورة العلاقة لا بمضمونها لأنّه يخصّ قاعدة اللّزوم فقط (ق←ك).

ويُعدُّ المعنى الأخير للفعل يجب هو المقصود في المنطق، إذ لا يُفهم منه المعنى المعياري. كذلك المنطق لا يتناول الصِّدق من وجهة نظر مبحث القيّم –الذي يهتمّ بطبيعة

[1]– لوكاشيفتش (يان): نظريّة القيّاس الأرسطيّة من وجهة نظر المنطق الصّوري الحديث، ص: 25.

[2]– المرجع نفسه، ص: 26.

القيّم وأصلها وتطوّرها وعلاقاتها بالظّروف الاجتماعيّة والتّاريخيّة- فالمنطق يهتمّ بالصّدق كقيمة بالمعنى الإخباري فقط؛ من حيث مطابقة الأقوال الخبريّة (القضايا البسيطة) للوقائع التي تعبّر عنها. أما بالنّسبة للقضايا المركّبة فصدقها صوري بحت يتحدّد بدلالة القضايا البسيطة من خلال الرّابط المنطقي الذي يربط بينها[1]. إذن فصورة الفكر هي البحث عن العلاقات القائمة بين أجزاء الفكر بغضّ النّظر عن محتوى الأجزاء.

على هذا الأساس فصورة الشّيء تتكوّن من العلاقات الكائنة بين أجزائه، بغضّ النّظر عن مادّة تلك الأجزاء، فنقول عن شكل معيّن إنّه على صورة الهرم، إذا كانت العلاقات بين أجزائه ممّا يجعله على تلك الصّورة الهرميّة مهما تكن مادّته، إذ قد يُصنع الهرم من حجر أو خشب أو ورق أو غير ذلك من المواد. ولو فكّكنا أجزاء السيارة وكوّمناها دون زيادة أو نقصان لما بقيت سيارة كما هي، لأنّها فقدت صورتها حين تغيّرت العلاقات التي كانت تربط بين أجزائها. والمادّة التي تعنينا في بحثنا هي الكلمات وما إليها من رموز، وهنا كذلك تكون صورة الكلام هي العلاقات الكائنة بين الأجزاء، بغضّ النّظر عن تلك الأجزاء نفسها، ولذا فقد تكون الصّورة واحدة في عبارتين مع اختلافهما في اللّفظ والمعنى، مثال ذلك: (العلم نور) و (البحر واسع). فالعلاقات التي تربط جزئي كل من العبارتين، هي علاقة صفة بموصوف، ويمكن الاستعانة بمثال آخر:

- تونس بين الجزائر وليبيا. - الحذاء بين المطرقة والسندان.

فهما مختلفان في اللّفظ والمعنى، ولكنّهما متّحدان في الصّورة لاتّحادهما في العلاقات الكائنة بين أجزائها، ولو استبدلنا بأسماء الأشياء رموزا في العبارة الأولى، مع احتفاظنا بالعلاقة، وجدنا الصّورة متمثّلة في الصّورة الرّمزية: (س بين ق و ك) وهي صيغة رمزيّة تصلح صورة للعبارة الثّانية كذلك.

إذن من خلال الأمثلة التي ذكرناها، أنّنا كلّما أردنا استخراج الصّورة من عبارة معيّنة، استبعدنا ألفاظا واستبقينا أخرى، ومن هذه التي نستبقيها تتألّف الصّورة، ففي عبارة (تونس

[1]- موساوي (أحمد): مدخل جديد إلى المنطق المعاصر، ص: 27-28.

بين الجزائر وليبيا)- مثلا – استبعدنا كلمات: (الجزائر) و (تونس) و (ليبيا) واستبقينا كلمتي (بين) و (و) فلما وضعنا رموزا بدل الكلمات المبعدة نتجت لنا الصورة الآتية: (س) بين(ص) و (ط).

ويمكن الوقوف على الفرق بين هذين النوعين من الألفاظ؛ إن الكلمات المستبعدة عبارة عن أسماء لأشياء في عالم الواقع، لذلك تسمّى بالكلمات الشيئيّة، أما الكلمات الأخرى التي منها تتكوّن صورة العبارة فهي لا تسمّى شيئا في عالم الواقع، إذ ليس في عالم الأشياء شيء اسمه (و)؛ وإنّما نضيف أمثال هذه الكلمات لنربط بها الأسماء الشّيئية في بناء واحد، ولذلك جاز لنا أن نسمّيها بالكلمات البنائيّة، أو بالكلمات المنطقيّة، إذ على الرّغم من أنّها لا تدلّ على شيء في عالم الواقع، إلاّ أنّه يستحيل علينا بناء فكرة بغيرها؛ ولئن كانت الألفاظ الشّيئية من شأن العلوم الأخرى، فالكلمات البنائيّة على وجه التّحديد موضوع المنطق، فهو وحده الذي يحلّل أمثال هذه الكلمات (إذا) و (إما...أو...) و (كل) و (بعض) و (ليس)...إلخ. وهي كلّها كلمات لا يمكن الاستغناء عنها في صياغة كلامنا مع أنّها بذاتها لا تدلّ على مسمَّيات بعينها في عالم الأشياء[1]. إنّ الصّورة المنطقيّة تتعدّد بتعدّد الطّرق التي ترتبط بها الألفاظ والجمل أو القضايا، وتكون دراسة المنطق مُنصبّةً على الشُّروط التي ترتبط بها هذه الصُوَّر دون المكوّنات الفعليّة، ومن هنا جاء وصفه بالصّوريّة[2]. ويعرض بلانشي بعض الأمثلة، ويحاول أن يوضّح من خلالها المقصود بصورة الفكر والصّدق الصّوري:

المثال الأوّل: كلّ مثلّث ذو ثلاثة أضلاع

إذن كلّ ذي ثلاثة أضلاع مثلّث.

المثال الثاني: كلّ مثلّث ذي أربعة أضلاع

إذن فبعض ذي أربعة أضلاع مثلّث.

[1]– جميل (عصام زكريا): المنطق والتّفكير النّاقد، ص: 22–23.

[2]– مهران (محمّد): علم المنطق، مرجع سابق، ص: 27.

نلاحظ هنا أنّ الاستنباط الأوّل غير صحيح رغم صدق مقدّمتيه، وأن الاستنباط الثّاني صحيح رغم كذب مقدّمتيه. إنّ هذا التّمييز بين الاستنباطين ناتج عن مقابلتنا للصّدق المادّي بالصّدق الصّوري، فنقول عن استدلال صحيح إنّه صادق بصورته، بصرف النّظر عن صدق مادّته، أي مضمونه[1]. ويسمّى المنطق صوريّا لأنّه لا يهتمّ إلاّ بهذه الصّورة ولتوضيح الفكرة أكثر نستعين بمثال آخر لبلانشي: ولننظر مرة أخرى في هذا القياس الذي ينسب لأرسطو:

كلّ إنسان فان. وسقراط إنسان. إذن سقراط فان.

من الواضح أنّ صحّة الاستدلال السّابق ليست مرتبطة بالشّخص الذي وقع عليه؛ فإذا صحّ هذا الاستدلال على سقراط فهو يصحّ على كلّ إنسان آخر في كلّ زمان وفي أيّ مكان، ومن هنا يمكننا أن نستبدل اسم سقراط بحرف (س)، يقوم بدور المتغيّر غير المعين، ويمكن أن نضع مكانه أيّ إنسان أيّا كان. ويمكننا كتابة الاستدلال على هذه الصّورة:

كلّ إنسان فان (س) إنسان إذن (س) فان

ولنقم بخطوة ثانيّة. لأنّ صحّة الاستدلال لا تتوقّف على التّصوّرين الموجودين فيه: وهما إنسان وفان. فيمكن استبدالهما بالحرفين الرّمزيين –دون أن يفقد الاستدلال شيئا من قوّته– (هـ) و (و). ونكتب الاستدلال على هذا الشكل:

كلّ هـ – و س – هـ إذن: س – و

بهذا نكون قد استخلصنا الهيكل المنطقي للاستدلال، وذلك بتعريّته تدريجيّا من محتواه، ويبقى صحيحا مهما كانت مادّته، لكون صحّته لا تتوقّف إلاّ على صورة القالب الذي يظلّ ثابتا[2]. فقولنا أنّ المنطق يستهدف صورة الفكر، فهذا مكافئ لقولنا أنّه يستخلص العلاقات التي تربط أجزاء الكلام. والصّورة لا تقتصر على المنطق وحده، وإنّما تشمل كل العلوم، ولكن بدرجات متفاوتة؛ فكلّ قانون علمي هو تجريد لعلاقة لوحظت بين وقائع الطّبيعة، بعد طرح الوقائع الجزئيّة ذاتها التي تمّت ملاحظتها واستخلاص القانون منها، بواسطة الاستقراء

1- *Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, p:* 10.
2- *Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, p:* 10-11

والتّعميم.[1] لذلك فصوريّة أيّ علم تُقاس بمقدار استبعاده للعناصر المادّية؛ إنّ هذا الاستبعاد نجده في المنطق أكثر من أيّ علم آخر؛ فهو الذي يضع المبادئ العامّة للفكر أيّا كان موضوعه. وبذلك فهو علم صوريّ خالص.

لكن –وتجنبا لأي لبس– ينبغي أن نفرّق بين المنطق الصّوري، والمنطق الصّوراني "فالصورة في الحالة الأولى هي وسيلة لتفادي نقائص اللّغة الطّبيعية؛ وبالتالي تبقى درجة الصّورية محدودة فيه. أمّا في المنطق الصّوراني فالصورة تصبح هي الهدف، وبالتالي فهو أكثر صورية من الأوّل"[2]. وبذلك فالصورة عمليّة مشتركة بين المنطق التقليدي والمنطق المعاصر لكونها المحطّة الأولى نحو الصورانية.

ثالثا: المنطق الرياضي وظروف نشأته

1- المنطق الرياضي ومراحل تطوره

من الصعب جدا ايجاد تعريف موحّد للمنطق الرياضي قبل معرفته من الداخل، وهذا من خلال الموضوعات المتعدّدة التي يعالجها، إذْ يشمل المحاولات المتعدّدة التي بُذلت من أجل إصلاح المنطق التّقليدي التي بدأت مع لايبنيز وتُوِّجَت بصدور كتاب راسل–وايتهد (*Principia Mathematica*)، كما يشمل كل الأنساق المنطقية التي ظهرت خلال القرن العشرين والمستمرّة في الظّهور إلى أيامنا. وينقسم المنطق المعاصر بدوره إلى:

أ- المنطق الرياضي الكلاسيكي ويضمّ الأنساق المنطقية القائمة على قيمتي الصّدق والكذب، بالإضافة إلى قبول قانون نفي النّفي كإثبات، والاعتماد على البرهان بالخلف. ويبدأ المنطق الرّياضي في صورته الكلاسيكية مع فريغة، حيث "تعدّ سنة 1879م فترة عظيمة بظهور كتاب فريجه: كتابة التصورات(*Begriffsschrift*). إن هذا الكتاب قد خلّص المنطق

[1]– موساوي (أحمد): مدخل جديد إلى المنطق المعاصر، ص: 32.

[2]– المرجع نفسه، ص: 65.

من اقتران اصطناعي بالرّياضيات، بينما أعدّ في نفس الوقت ترابطا أعمقا بين هذين العلمين"[1].

ب- المنطق اللاكلاسيكي ويشمل كلّ الأنساق المنطقية الثلاثية القيّم، والمتعددة القيم مع امتداداتها المختلفة إلى منطق الجهة ومنطق الأوامر ومنطق الأسئلة ومنطق المعايير إلخ. وتضاف إليها الأنساق المنطقية الثنائية القيمة التي ترفض قانون النّفي المُضاعف في صورته الكلاسيكية؛ بحيث إذا كان صِدق القضيّة يلزم عنه نفي القضيّة الكاذبة فالعكس غير صحيح، أي أنّ نفي القضيّة الكاذبة لا يلزم عنه أنّها صادقة. وينتج عن ذلك بالنسبة إلى البرهنة رفض البرهنة بالخلف وقبول فقط قاعدة الرد إلى الخلف[2].

وقد انطلق المنطق الرّياضي الكلاسيكي في أواخر القرن التاسع عشر، ومن أهم المساهمين فيه فريجه بألمانيا، وبيانو ومدرسته بإيطاليا، وكانت أبرز مرحلة تجسّد المنطق الرّياضي في صورته الكلاسيكية هي صدور كتاب(*Principia Mathematica*) لراسل- وايتهد، وتتميّز هذه المرحلة بِتَكُوّن حساب القضايا، وبروز فكرة الدّالة القضويّة، وعندها أصبح المنطق يظهر في شكل نسق استنتاجي، بالإضافة إلى السّعي إلى التّأسيس المنطقي للرّياضيات[3]. أما المرحلة الثانية فتبدأ حوالي 1920م، أي مع ظهور كتاب فيتجينشتاين (رسالة منطقية فلسفية)، وتتميّز هذه المرحلة بالخصائص الثلاث التالية:

- إقامة الاجراءات الصّورية إذ انتقل المناطقة من البديهيات شبه العينيّة؛ أين تقترب الثّوابت المنطقيّة من معناها الحدسي، إلى المصادرات المُصورنة.

- تطوّر الأبحاث المنطقيّة الشّارحة، إذ لفت انتباه المناطقة إلى ضرورة التّمييز بين مستويين: مستوى المنطق، ومستوى ما حول المنطق أين وقع التّساؤل حول خصائص الحسابات بعد بنائها، (الاتّساق، والاكتمال، والقدرة على البتّ)، بالإضافة إلى التّساؤل حول علاقاتها المتبادلة.

1- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p:* 309.

2- أنظر: موساوي(أحمد)، مدخل جديد إلى المنطق المعاصر، ج1، مرجع سابق، ص ص: 63-64.

3- *Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, op cit, p:* 32.

– تَفَرُّق المنطق الرّياضي الكلاسيكي بظهور الحسابات اللاكلاسيكية مع لوكاشيفتش وبوست، بالإضافة إلى هايتنغ[1].

فبعد الرّكود الذي عرفه المنطق لقرون عدّة، شهد انطلاقة جديدة من خلال محاولة تجاوز المنطق الارسطي، والذي اتّضحت نقائصه بحكم نشأته في أحضان اللّغة الطّبيعية وما تفتقر إليه من دقّة في التّعبير، إضافة إلى اقتصاره على علاقة الحمل لوحدها، ممّا جعله عاجزا عن الإحاطة بكثير من الاستنباطات الأخرى. وفي مقابل ذلك لوحظ أن الدّقة الرياضية بلغتها الرّمزية ونسقها المتماسك تفرض نفسها على جميع العقول. إنّ الخصائص السّابقة للرّياضيات أوقعت المنطق في أيدي الرّياضيين أين حاولوا معالجته على نموذج لغة ومنهج الجبر.

إلاّ أنّ أزمة العلوم بصفة عامّة وأزمة الرّياضيات على وجه الخصوص في النّصف الثّاني من القرن التّاسع عشر، والتي عُرفت بأزمة الأسس فرضت انتقال المنطق إلى مرحلة أخرى؛ حيث تطلّب إعادة النّظر في مبادئ الرّياضيات إلى ملاحظة النُّقص المنطقي الذي تشكو منه منطلقاتها، بدءا بالغموض الذي يكتنف مفهوم العدد، وهو السؤال الذي طرحه برتراند راسل. إنّ تلك الأزمة كانت نقطة التحوّل في تصوّر طبيعة العلاقة بين المنطق والرياضيات، وأسفر البحث حول هذه المسألة إلى بروز ثلاث اتجاهات رئيسية* أهمها المنطقانية.

إنّ الأزمة السابقة فتحت آفاقا جديدة أمام تطوّر المنطق نحو مرحلة اللوجيستيك (مرحلة المنطق الرّياضي الكلاسيكية)، إذ أصبح علما دقيقا يُجاوِر الرّياضيات بل تجاوزها في صوريته.

1- *Ibid. p:* 33.

* مسألة أساس الرياضيات تتنازعها ثلاث اتجاهات: النزعة المنطقانية وترى أن الرّياضيات البحتة يمكن ردّها إلى المنطق. وهو ما ترفضه الحدسانية؛ إذ لا يمكن للمنطق أن يكون أساسا للرياضيات لكونها متطابقة مع الجزء الدّقيق من تفكيرنا. أمّا الصّورانية فتعتقد بإمكانية تجاوز مشكلة النّقائض دون التّضحية بأي شيء من الرياضيات الكلاسيكية.

2- جبر المنطق مع لايبنيز

يُعَرَّف المنطق الجبري (*Algèbre de la logique*) بكونه فرع من المنطق الرياضي قائم على استخدام المناهج الجبرية في دراسة الموضوعات المنطقية-الفئات والقضايا، فالقضيّة تُعبّر من جهة عن فكرة (حكم) وتعبّر من جهة أخرى عن صدق أو عن كذب (ص أو ك) ويدرس المنطق الجبري القضايا من زاوية قيمة الصدق فقط، وتعتبر الأقوال متكافئة إذا كانت لها قيمة الصدق نفسها.[1] ويتّضح بأنّ جبر المنطق يقوم على سحب لغة ومنهج ونسق الجبر -والذي هو مجرد جزء من الرّياضيات- على المنطق، فهذا الأخير حتى ذلك الوقت لازال يستعين باللغة الطبيعية. لكن أين يمكن أن نقف على مساهمة لايبنيز في المنطق الرياضي ؟

إنّ جبر المنطق كما تصوّره لايبنيز أراد أن يستعيض عن التّصورات بتركيبات من الرّموز، وعن القضايا بعلاقات بين الرّموز، وعن الاستدلال بضرب من الحساب من شأنه أن "يقدّم طريقة ناجعة لبرهنة القضايا واكتشاف قضايا جديدة منها"[2]. إنّ الأهداف السّابقة التي رسمها ليبنيتز جعلت مكانته في تاريخ المنطق من الموضوعات التي تحوم حولها الشكوك فيما يخصّ أهميتها، ومدى مساهمتها في المنطق الرّياضي، إذ يكتنفها شيء من اللّبس.

لقد عاش لايبنيز خلال مرحلة قال عنها بوشنسكي (*Bochenski Innocenty Maria*) [من مواليد 1902م ببولندا] "إنّ الفلسفة الأوروبية الحديثة أهملت المنطق الصوري إهمالا كبيرا، حتى لقد سقط في زاوية النّسيان المهين. فلم يكن بين كبار الفلاسفة في الفكر الأوروبي الحديث إلاّ واحدا، هو لايبنيز، كان منطقيا مرموقا، أما الأخرون فكانوا يجهلون أسس المنطق الصّوري نفسه، وكفى على ذلك شاهدا حالة ديكارت و كانط"[3]. وإذا عدنا إلى

---

[1]- روزنتال م- يودين ب : الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص: 497.

[2]- رور (ماري لويز): مبادئ المنطق المعاصر، مرجع سابق، ص: 30.

[3]- بوشنسكي (إينوشنتي ماريا): الفلسفة المعاصرة في أوروبا، ترجمة عزت قرني، المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، 1992م، ص: 39.

العلاقة بين المنطق والرّياضيات فإنّنا نجد بأنّ لايبنيز هو أوّل من أبرز التشابه بينهما، كما أنّ البديهيّات الرّياضية يمكن أن تكون ذات أصول منطقية، "فقد ألحّ على ضرورة البحث عن المفاهيم المنطقية البسيطة التي ترتدّ إليها البديهيات الرّياضية، وبعبارة أخرى البحث عن الأوليات المنطقية التي يمكن بواسطتها تعريف الأوّليات الرّياضية"[1].

أما شولتز(*Heinrich Schulz*)[1884م-1956م] فيقسّم تاريخ المنطق إلى قسمين متمايزين، القسم الأول هو الصورة الكلاسيكية للمنطق الصوري التي تمتدّ من أرسطو إلى الفترة الحالية، وتضمّ كلّ ما ليس مُستوحى من فكرة ليبنيتز حول المنطق الرّياضي، والقسم الثّاني هو الصّورة الحديثة للمنطق الصّوري التي تبدأ مع ليبنيتز، وتضم كل ما هو مستوحى من فكرة ليبنيتز حول المنطق الرياضي عن قصد أو عن غير قصد[2].

أما برتراند راسل فيعترف بعبقرية لايبنيز من جهة، وينكر مساهمته في مجال المنطق الرّياضي من جهة ثانية، إذ أن هذه العبقرية لم يكن لها أثر على المناطقة لأنّه احتفظ بها لنفسه يقول برتراند راسل: "لقد كان يعتقد اعتقادا راسخا في أهمّية المنطق، وقد عمل في المنطق الرياضي عملا كان يمكن أن يكون مُهِمًّا أهميةً كبرى لو نشره، وكان في تلك الحالة يُعتبر مؤسس المنطق الرياضي، الذي كان سَيُعرف لقرن ونصف قبل الزّمن الذي عُرف فيه بالفعل. وقد امتنع عن النّشر لأنّه كان محتفظا بالدّليل على أنّ نظرية أرسطو في القياس كانت باطلة في بعض نقاطها، فلقد جعل احترام أرسطو من المستحيل عليه أن يعتقد في هذا"[3].

إنّ الفكرة نفسها يتبنّاها روبير بلانشي فرغم اعترافه ببعض انجازات لايبنيز؛ والتي سنوضّح بعضا منها فيما بعد، إلاّ أنه لا يُدرجها ضمن المكاسب التي حقّقها المنطق

---

[1]– الجابري (محمد عابد): مدخل إلى فلسفة العلوم– العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي– مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، ص: 104.

2- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p: 189- 190.*

[3]– راسل (برتراند): تاريخ الفلسفة الغربية–الكتاب الثالث، الفلسفة الحديثة– ترجمة محمد فتحي الشنيطي، مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1977م، ص: 152.

المعاصر، فالعلاقة بين المنطق الرّياضي –خاصة في صورته المعاصرة– ومنطق لايبنيز هي مجرّد علاقة سبق لا أكثر. يقول بلانشي: "إذ لا يمكن اعتباره مبتكرا للمنطق الرّياضي الحديث، لأنّ هذا المنطق نشأ من دون الاطلاع على كتاباته المنطقية. بل أن التوجُّه الجديد للمنطق هو الذي لفت انتباه المهتمّين به مثل راسل، أو كوتيرا (*Louis Alexandre Couturat*) [1868م-1914م] إلى أبحاثه. وعند ذلك فقط وقع الاطّلاع على مضمون الكثير من المخطوطات التي لم تُنشر"[1]. إنّ لايبنيز عالم رياضيات لذلك فقد كان ينطلق من مجموعة تصورات قابلة لأن تتركّب تركيبات عديدة حسب علاقات مُعيّنة كالاحتواء، والتّنافي والتشابه. وبعد الانتقال من التّعريفات إلى التّصورات بالاستنتاج، يتعيّن ترجمتها إلى اشارات رياضية. وفي هذا الأمر يعتبره جول تريكو مؤسّسا للمنطق الرّياضي، نظرا لكونه يولي أهميّة مفرطة للّغة الرمزية خاصة في كتابه (الأشكال المنطقية المثبتة برسم الخطوط).

إلا أنّه فيما بعد اقترب من أرسطو بكتابة (نموذج الحساب الكلّي) وهجر الاشارات الرّياضية إلى الاشارات الحرفية حتى إنّه رجع إلى علامة المساواة (=) ولا يحتفظ إلا بالإشارة (+) للدّلالة على الاحتواء، وبالإشارة (–) للدلالة على التنافي، يقول جول تريكو: "إن لايبنيز المتأثّر بالمنطق التّقليدي لم يستطع التّخلي التّام عن التّفسير المفهومي. إذ من الواضح أن التفسير الماصدقي وحده هو الذي يسمح بمعالجة المنطق معالجة العلم الرّياضي، لأنه يقصر نظرته على الجانب الكمّي. إنّ فكرة اللّغة العامة لدى لايبنيز ترتبط بمشروع لغة عقلية عامّة وكذلك بحساب الاحتمالات، وهاتان محاولتان لا تدخلان في نطاق المنطق"[2].

أما التمثيلات الخطية التي حاول بها ليبنيتز تصوير أشكال القيّاس، فيصفها بلانشي بكونها أمور خارجية إلاّ أنّه لم يقع الاعتراض عليها كثيرا، ويمكن تتبّع إعدادها التّدريجي في عدّة محاولات إلى أن ظهرت في (الأشكال المنطقية المثبتة برسم الخطوط)، لقد استعمل في آن واحد تخطيطين أحدهما بالدّوائر والآخر بالمستقيمات. اشتهر أولهما "بدوائر أولر"

[1]-*Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p: 190.*

[2]– تريكو (جول): المنطق الصوري، مرجع سابق، ص: 389.

(*Euler*)، لأن أولر عثر عليه من جديد وأشاعه، ويؤكّد بلانشي باحتوائه على بعض العيوب. أما الثاني فيعتبره صعب للقراءة إلاّ أنّه أكثر نفعا من الأول.

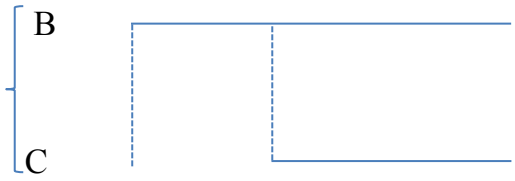
وهذه هي كيفية تمثيل ليبنيتز للأصناف الأربعة من القضايا والتي يعتبرها بلانشي جديرة بالدّخول في قياس. مع اعتبار القضية الجزئية متماهية مع الكلية، فالخطوط الأوّلية ترمز إلى توسع المدارك، والخطوط المنقطعة العمودية تشير إلى علاقات التّضمين أو الطرد، الجزئية أو الكلية بين هذه المدارك ؛ فعندما تقع على الخط الأفقي يكون هناك تضمين وتكون القضية موجبة، وتكون سالبة عندما تقع في الفراغ [1].

U.A. Tout B est C

U.N. Nul B n'est C

P.A. Quelque B est C

P.N. Quelque B n'est pas C



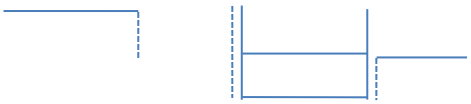
فنرى أنّ هذا التمثل يسمح، خلافا لما يحدث في تقاطع الدّائرتين، بالتّمييز الواضح بين الجزئيتين، وسنلاحظ أنّ ليبنيتز حرص على جعل المخطّطات الكلية السالبة والجزئية الموجبة متقابلة لأنّها تتحوّل فقط، وجعل المخطّطين الأخرين متعاكسين لأنّهما لا يتقبّلان

[1]- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p: 194.*

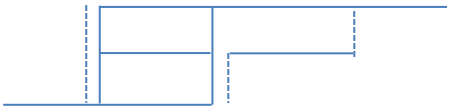
هكذا تحوُّل. وهذه هي مخططات القياسات، حيث أنّ النّتيجة مطبوعة بخطّين مليئين عموديين. وأننا على سبيل المثال نورد فقط الطرق التقليدية الأربع من الشكل الأول[1]:

Barbara	Tout C est B Tout D est C Tout D est B	B C D

Celarent	Nul C n'est B Tout D est C Nul D n'est C	B C D



Darii	Tout C est B Quelque D est C Quelque D est B	B C D



Ferio	Nul C n'est B Quelque D est C Quelque D n'est pas	B C D

هذه هي مساهمات ليبنيتز الرئيسية. ولكن تأمّلاته جديرة بالاهتمام لكونه اعترف بالمصاعب التي يصطدم بها ردّ كل استدلال منتج إلى أشكال المنطق التّقليدية. ويمكن اعتبار لايبنيز فيلسوف التّواصل بين نوعين من المنطق يقول روبير بلانشي "إذا كان هناك مؤلف كان يجب عليه أن يلطِّف فكرة الانقطاع والانفصال الحاد بين المنطق القديم والجديد، فهو بالتّأكيد ليبنيتز فيلسوف الاستمرار، فعلى غرار الطّبيعة فالمنطق كذلك لا يقفز"[2].

[1]- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p: 195.*
[2]- *Ibid, p: 191.*

3- تطوّر جبر المنطق مع جورج بول

لقد ساهم جورج بول* في الدّفع بالمنطق وإخراجه من التأويلات الفلسفية ليضعه بين أيدي الرّياضيين. فبعد الرّكود الذي عرفه طيلة قرون، شهد المنطق انطلاقة جديدة منذ منتصف القرن التّاسع عشر، ساهم فيها الكثير من المناطقة أصحاب التّكوين الرياضي؛ خاصّة جورج بول وأوغوسطوس دي مورغان (*Augustus De Morgan*) [1806م-1871م]، ومع هذا الأخير شهد منطق العلاقات تطوُّرا كبيرا، استنتجه من النُّقص الملاحظ على منطق أرسطو فيما يخصّ اقتصاره على علاقة الحمل، وإهماله لعلاقات أخرى ممّا جعله عاجزا على استيعاب استنباطات أخرى. وقد تطوّر منطق العلاقات فيما بعد مع بيرس (*Peirce Charles Sanders*) [1839م -1914م] وشرودر.

لكنّ أعمال بول هي الجديرة بالاهتمام. لقد استوحى أعماله من الاستدلال الجبري الذي يقوم على الرّموز، "فبعد تصنيفه للرّموز حسب وظيفتها، بحث عن وظائفها في اللغة العادية، بحيث يمكن التّعبير عن هذه الوظائف برموز مماثلة للرّموز الجبرية، (...) فتوصّل إلى إنشاء ضرب خاص من الجبر الذي من حيث هو حساب صوري، لا يرتبط بأي تأويل مُعيّن، إلاّ أنّه يتلقّى مع ذلك تأويلا طبيعيا جدّا عندما نعتبره منطقا للأصناف. ولقد كان المنطق التقليدي هو أيضا منطقا للأصناف، إلاّ أنّ المعالجة الرّياضية التي عالجه بها بول منحته أمانا وسِعَة جعلا منه علما جديدا حقّا"[1].

إنّ الشّكل الجديد الذي ظهر به المنطق في تلك الفترة يُنسب إلى جورج بول. لقد عرض نسقا- كان من وحي الرّياضيات- وعلى الرّغم من "احتوائه على بعض النقائص،

---

* انجليزي من علماء المنطق والرياضيات، كان منذ عام 1849م حتى آخر حياته أستاذا للرياضيات في كلية الملكة في كورك. وقد بسط أوّل مذهب للمنطق الرّياضي عُرف في التاريخ، والذي أصبح معروفا فيما بعد باسم علم المنطق الجبري. وقد حدّدت فكرة المماثلة بين الجبر والمنطق اتّجاه جميع أبحاثه في المنطق التي ترِد في مؤلّفيه الرّئيسيّين: التّحليل الرياضي للمنطق سنة 1847م، وفحص لقوانين الفكر سنة 1854م. كما فحص نظريّة الاحتمال والتّحليل الرّياضي. أنظر: روزنتال – يودين. الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص: 94.

1- *Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, op cit, p: 32.*

فإنّه يقدّم لحل مشاكل منطقية تشمل وتتجاوز المشاكل التي يقف عندها المنطق التّقليدي، ما يمكن أن نسمّيه اليوم اجراءات في البتّ تسمح بحسابات فعّالة، فالتصوّر الجديد للمنطق في نظره لا علاقة له بالفلسفة بدراستها للوجود الواقعي وببحثها عن العلل، فالمنطق ينبغي أن نضمّه للرّياضيات، فهو مثل الهندسة يقوم على حقائق مُصادر عليها ومبرهناته تمّ إنشاؤها حسب النظرية العامة للتّرميز"[1].

هذا ورغم أنّ المنطق الحديث انطلق مع جورج بول الذي كان تأويله الأصلي والأقرب هو اعتباره منطقا للأصناف باعتبار ماصدقها، والذي يتقبّل أيضا تأويلا مقبولا في مقابل بعض الاحتياطات إذا ما نحن اعتبرنا متغيّريه (س) و (ص) لا رمزين لصنفين بل رمزين لقضيتين[2]. إلاّ أنّ منطق جورج بول لا يُمكن ادراجه ضمن المنطق الرياضي "فالمنطق الرياضي في القرن العشرين، والمنطق الرّياضي عند بول ليس شيئا واحدا، بل لا يمكن اعتباره حتى مجرّد تطوير له، وهذا رغم اشتراكهما في توسيعهما لمجال المنطق التقليدي"[3].

لكن يبدو اضافات جورج بول تمثّلت في عودته إلى قواعد المنطق التقليدي وأعاد بنائها حسب متطلّبات الرّياضيات، وبالتّالي فقد انطلق من قواعد غير التي انطلق منها المنطقيون المعاصرون على غرار فريجه وبيانو وراسل كما سنرى لاحقا. أما بالنّسبة للّغة الرّمزية فقد استخدمها جورج بول في حسابه الجبري المنطقي وسعى من خلالها إلى جعل المنطق علما رمزيا. وها هي ذي بعض التفاصيل عن ترميز بول. نضع أن:

1 = كل

وأن 0 = لا شيء

والصّنف الذي تحدّده الصّفة س يكون:

1 س

---

[1]- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, P.P: 269-270.*

[2]– بلانشي(روبير): العقل والخطاب–دفاع عن المنطق الفكري، ترجمة محمود اليعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، ط1، 2010م، ص: 155.

[3]- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p: 270.*

إنها كلّ الكائنات التي تحدّده الصفة س

لكن 1 س= س: ويكون ذلك مثلا هو التصوّر(حيوان). ويحصل التحديد المتزايد في الدّقة بواسطة إدخال صفات جديدة، ص، ع. وعلى سبيل المثال فإن عبارة (حيوان ناطق أبيض) تُكتب هكذا:

س ص ع

وبمقتضى ما يسمّيه بول الخاصيّة التّبديليّة فإنّ ترتيب العوامل عديم الأثر. وعلى هذا يكون:

س ع = ع س. وإذا افترضنا أنّ:

ع = س فإن:

س س = س

$س^2$ = س

وهكذا دواليك.

ويمكننا أيضا أن نفكّر أيضا في عملية الجمع والطرح، فنقول على سبيل المثال:

الفرنسيون والانجليز

الأوربيون ماعدا الانجليز

ونكتب ذلك: س + ص

س – ص

لكن بمقتضى الخاصيّة التّوزيعية فإنّ:

س + ص = ص + س

وكذلك إذا كانت (ع) تمثّل صفة أخص فإننا نكتب: ع(س + ص) = ع س + ع ص، إلخ[1]. ولم يكتف جورج بول باستخدام الرّموز، بل حاول ضبط القواعد التي تسمح بإنشاء الرّموز على غرار المنطق الرّياضي. ويميّز بين قسمين في إطار الحساب المنطقي، وهما معا يؤلّفان ما يطلق عليه جبر المنطق البولي : حساب الفصول وحساب القضايا. ومن

[1]– تريكو(جول): المنطق الصوري، مرجع سابق، ص ص: 390–391.

خلال القسمين تبدو نظرة بول الحسابية على اعتبار أنّه يستخدم علم العدد كنموذج لحسابه المنطقي[1]. وقد وصل بول من أفكاره السابقة؛ والمتمثّلة في السّعي إلى التأسيس لمنطق يقوم على نموذج الجبر إلى معادلات في منطق الأصناف، هي بمثابة قوانين أساسية لهذا المنطق وفيما يلي أهمها:

1- هـ و = و هـ

2- هـ + و = و + هـ

3- ى (هـ+و) =(ى هـ + ى و)

4- ى(هـ-و) = ي هـ- ي و

5- إذا كان هـ=و فإنّ ي هـ = ي و

6- إذا كان هـ=و فإنّ ى+هـ = ى+و

7- إذا كان هـ=و فإنّ هـ-ى =و-ى

8- $هـ^2$ = هـ [(2)].

ويمكن الوقوف على الكثير من النّقائص في هذا النّوع من المنطق "ففي جبر بول نجد بين الصيغة س ص=1 التي تُطابق القضية الكلّية الموجبة، والصيغة س ص=0 التي تطابق القضية الكلّية السالبة، الصيغة س ص= و، حيث تُمثّل (و) صنفا نحن نعرف عنه فقط أنّه وسط بين كلّ شيء ولا شيء. وبالفعل في منطق للأصناف حيث نفس الاندراج (جس = ~كم) ونفي الاخراج (جم = ~كس) يختلطان في التّقاطع (لا = ~كم. ~كس)، فإنّنا لا نرى بوضوح ما هو المكان الذي نخصّصه للقضايا الجزئيّة التّقليديّة (تلك القضايا المُزعجة) كما يصفها (ج. فن)"[3]. ومن جهة أخرى لاحظ بلانشي أنّ جبر المنطق لم يكن محلّ اتفاق بين المناطقة والرياضيين، فإذا كان الرّياضي يهتمّ به من حيث فائدته كحساب، فإنّ المنطقي

1- محمد علي (ماهر عبد القادر): فلسفة العلوم -المنطق الرياضي، ج3، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، 1985م، ص: 23.

2- زيدان (محمود فهمي) : المنطق الرّمزي نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص: 83.

3- بلانشي(روبير): البنيات العقليّة، مصدر سابق، ص: 61.

يذهب إلى أكثر من ذلك؛ إنّه يتتبّع الاجراءات الأوّلية للاستدلال، وفي هذا الصدد يستعرض بلانشي الاختلاف حول هذه النقطة الجوهرية داخل عائلة بيرس "إنّ بيرس الذي بصفته منطقيا كان يتناقش طويلا مع أبيه الرّياضي بنيامين بيرس (*Benjamin Peirce*)، لقد عرّف هذا الأخير الرّياضيات بأنّها العلم الذي يستخلص نتائج ضرورية. وقد عارض ابنه هذا الطّرح؛ فاستخلاص النتائج الضرورية هي مهمة المنطق الاستنتاجي. الذي انفصل فيما بعد تدريجيا عن جبر بول ليأخذ صورة المنطق الرّياضي الحديث والذي سُمّي اللوجيستيقا"[1].

وعلى هذا الأساس يمكن تصنيف مذهب بول ضمن الجبر، أكثر مما يمكن عدّه منطقا في رموزه ومسائله ونتائجه التي تقبل فقط التفسير العددي لقيمتين هما الواحد والصفر (1، 0)، فكان جبرا محدود القيّم العددية. كما أنّ حلّ مسائل الجبر المنطقي كانت تُطبّق فيها قواعد الحساب دون قواعد المنطق وقوانينه، كما أنّ الخلط والازدواج في تفسير منطق وحساب الاحتمالات؛ فتارة يكون بلغة القضايا وتارة بلغة التصورات أو الفئات، دون مراعاة للتّمييز بين المفهوم الرّياضي والمفهوم المنطقي[2]. وفي هذا الصّدد فقد عاب جيفونز (*William Stanley Jevons*) [1835م-1882م] على أستاذه بول حينما حصر المنطق "الذي هو شيء للجميع، شيئا لبعض العارفين بالرّياضيات"[3]. إلاّ أنّ جبر المنطق لم يدم طويلا خاصّة بعد ظهور كتاب أصول الرّياضيات أين أصبح جبر المنطق مقابلا لحساب الفئات والذي هو مجرّد جزء من اللوجيستيقا.

4- أزمة الرياضيات وتداعياتها على المنطق

إنّ الصّلة بين المنطق والرياضيات في ضوء جبر المنطق صلة جزء بكلّ؛ فالمنطق جزء من أجزاء الرّياضة ومجرّد نظريّة من نظريّاتها. وما حدث أنّ الرّياضيات تقدّمت بينما توقّف المنطق بفعل الضربات التي تلقّاها من قبل ديكارت، حيث وصفه بالعقم، ويمتدّ هذا

[1]- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p: 291.*

[2]- سالم (محمد عزيز نظمي): المنطق الصوري والرّياضي-دراسة تحليلية لنظريّة القياس وفلسفة اللّغة، المكتب العربي الحديث، الاسكندريّة، 2003م، ص: 172.

[3]- بلانشي (روبير): العقل والخطاب ، مصدر سابق، ص: 29.

الوصف حتى مع هنري بوانكاري الذي رفض ردّ المفارقات الرّياضية لأسباب منطقية، فالرّياضيون ليسوا بحاجة للمنطق.

إلا أنّ تقدّم الرّياضيات لم يصحبه تقدّم على مستوى لغتها؛ التي أصبحت عاجزة عن تلبية حاجيات الرّياضيات المعاصرة، ويمكن اعتبارها عائقا ابستمولوجيا بالمفهوم الباشلاري فالمعرفة القائمة أصبحت عاجزة عن مواجهة المستجدّات. فهي مشابهة تماما لوضعية المهندس، الذي لا يمكنه الاستمرار في بناء طوابق أخرى على أسس غير قادرة على حمل هذه الطوابق، لذلك ينبغي عليه الانتقال إلى أرضيّة أخرى ويؤسس، حيث ينتقل إلى نمط بنائي آخر مبنيا على أسس أخرى أكثر جاهزية لحمل هذه الطوابق. إنّ هذا النمط أو هذه اللّغة نجدها في المنطق، وهي الفكرة الأساسية التي دافع عنها كلّ من فريجه بيانو وراسل. "فأزمة الأسس التي أثارتها نقائض المجموعات ألزمت الرّياضيين بأن يعودوا هم أيضا إلى مبادئ علمهم، وهذا العمل التّوضيحي هو الذي قام به خاصّة جوتلوب فريغة في ألمانيا، وبرتراند راسل في إنجلترا"[1].

لذلك فالعلاقة بين الرياضيات والمنطق كما عَرَفها جورج بول ستنقلب تحت تأثير مجموعة من الأسباب. فبعد أن سادت الوثوقية العلمانية لحقبة ليست بالقصيرة، ظهرت إلى الوجود حركة مُضادة، تتمثّل في إعادة النظر بشكل جذري في بعض مبادئ ما سيُسمّى بعد ذلك العلم التقليدي. وقد اتّسعت هذه الحركة التي سُمِّيت نقد العلوم، حيث انصبّ هذا النقد في بدايته على طبيعة النّظريات الفيزيائية لِيَمتَدّ فيما بعد إلى مجالات أخرى. "وَكَحَال علم الطبيعة، فإنّ علم الرّياضيات قد انتهى هو الآخر إلى أزمة في نهاية القرن التاسع عشر، (...) وقد ظهرت اكتشافات عديدة في علم الرياضيات في خلال القرن التّاسع عشر، ولكنّ أكثرها تأثيرا من النّاحية الفلسفية كانت الاكتشافات الخاصّة بالهندسة غير الاقليدية، ونظريّة المجموعات التي قام بها جورج كانتور فقد أظهر هذان الاكتشافان أنّ ما كان يُعدّ من قبل،

[1]– بلانشي (روبير): نظرية العلم (الابستمولوجيا)، ترجمة محمود اليعقوبي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ط1، 2004م، ص: 16.

وبغير تردّد، مجرّد افتراضات مسبقة لا يقوم علم الرّياضيات إلاّ عليها، ما هو في الواقع إلاّ قضايا ليست يقينيّة على الاطلاق"[1]. إنّ هذه الاكتشافات قد فرضت على الرّياضيين إعادة النّظر في ما كان يبدو من المفاهيم واضحا أو بديهيا– بالمفهوم التّقليدي للبديهية– وقد ازداد الأمر تعقيدا بظهور المتناقضات "وفيما يخصّ نظريّة المجموعات فقد اكتشف الرّياضيون عند انتهاء القرن التاسع عشر ما يُسمّى بالمتناقضات* (*Antinomie*) أي استنتاجات متناقضة ابتداء من مسلّمات بسيطة وواضحة في الظاهر، رغم كون البراهين المستخدمة صحيحة. وهكذا انتهى الحال إلى تهافت أسس علم الرّياضيات ذاته"[2]. وبذلك يمكن القول أنّ العوامل السابقة دفعت بالمنطق للنّهوض من جديد، ولكن بشكل مغاير لما تصوّره بول ومدرسته.

إنّ محاولات جورج بول المتعلّقة بجبر المنطق، أي تبعيّة المنطق للرّياضيات بترجمته للقضايا القياسية إلى معادلات جبرية، لم يعد لها صدى عند الجميع. إذ تَبَيَّن أنّ العمليّة معكوسة؛ فالرّياضيات هي التي ينبغي أن تُبنى على المنطق، وهو ما استوجب إعادة بناء المنطق من جديد حتى يكون قادرا على صورنة الرّياضيات وذلك بخلق مفاهيم جديدة كالاتّساق، الدّالة. إلخ، وهي مفاهيم أدّت إلى تطوّره. "فالبحث عن أصول الرّياضيات هو الذي ساق الباحثين إلى اكتشاف قوانينها المنطقية، ومن ثمّ إلى إماطة اللّثام عن الطابع الاختياري الحر، الذي يتمّ به بناء الأنساق الاستنتاجية الجديدة في الرّياضيات وفي المنطق نفسه، ومن هنا استبانت طبيعة المعرفة الاستنتاجية التي تتمثّل حقيقتها في الوضع الحُرّ لمفاهيم مُعيّنة وفي تحديد قواعد استعمالها بشرط مراعاة عدم تناقضها"[3].

---

[1]– بوشنسكي (إينوشنتي ماريا): الفلسفة المعاصرة في أوروبا، مرجع سابق، ص: 38.

* المتناقضة أمر أكثر من التّناقض. وذلك لأنّ القضية متى أدّت إلى تناقض، استنتجنا منه أنّ هذه القضية كاذبة، فنستبعدها وتقف الأمور عند هذا الحد. بيد أنّ هذا الكذب إذا أدى بدوره، أو وهو نفس الشيء، إذا أدى نفي القضية الأولى هو الآخر، إلى تناقض أيضا، فإنه عندئذ يجب علينا أن نرفض معا نفي القضية الأولى وإثباتها، وفي هذا خرق لمبدأ العناد بين الصدق والكذب ونبقى هذه المرة في حيرة. أنظر بلانشي (روبير): (الابستمولوجيا)، مصدر سابق، ص: 108.

[2]– بوشنسكي (إينوشنتي ماريا): الفلسفة المعاصرة في أوروبا، مرجع سابق، ص: 39.

[3]– نقلا عن مقدّمة مترجم كتاب: المصادريات، لروبير بلانشي، مصدر سابق، ص: 4.

إنّ نظريّة المجموعات قد فرضت على الجميع إعادة النّظر في ما يسمى بمبادئ العقل، إذ أصبح من الممكن البرهنة على قضية وعلى نقيضها في آن واحد، وهذا يتعارض مع مبدأ عدم التناقض ويوقعنا في ما يُعرف بالمتناقضات. ممّا فتح المجال لظهور اللوجيستيقا* التي رأت بضرورة البحث عن مصدر المشكلة في مستوى أعمق بالصعود القهري حتى إلى المنطق. وكان الشّك يتناول منذئذ كلّ ما كان من قبل يُعتبر مجال البداهة المنطقية. لقد حاول علماء الرّياضيات تجاوز النّقائض عندما اصطدموا بها. "ولكنّ المنطق أية كانت الوسيلة، كان يجد نفسه فيها، وقد أسيئت معاملته إلى حد كبير أو صغير. وقد وجب على نظريّة الأنماط التي قال بها راسل اعتماد أوّليّتين خاليتين من كلّ ضرورة داخلية، الأمر الذي يعني الرّجوع إلى وضع مبادئ غير تحليلية في أصل المنطق بصورة غريبة"[1].

وقد لوحِظ أنّ دقّة الرّياضيات تأخذ منحى تصاعديا كلّما كانت أكثر ارتباطا بالمنطق، فقواعد المنطق بالنسبة للرّياضيات هي تماما نفس قواعد البناء للمعمار. وهو ما دفع راسل إلى القول "إنّ المنطق من وجهة النّظر الواسعة يتميّز بحقيقة أنّ مقدماته يمكن وضعها في أي صورة تنطبق على أي شيء مهما كان، وكلّ الرّياضيات البحتة مبنيّة وفقا للأفكار البدائيّة للمنطق، وكلّ مقدّماتها تُستنتج من البديهيات العامّة للمنطق مثل القياس وغيره من قواعد الاستنباط، ولم يعد ذلك حُلما أو إلهاما. على العكس لقد تمّ إنجازه عبر الجزء الأغلب

---

* وهو مصطلح تواضع عليه السادة إتلسون، لالاند وكوتيرا، وذلك في مؤتمر جنيف (1904م) بلا تفاهم ولا اتصال مسبق على إطلاق اسم منطق رياضي على المنطق الجديد. كما يُطلق هذا اللّفظ أحيانا على النظريات التي تأخذ عل كاهلها ردّ مبادئ الرّياضيات إلى المنطق. لكن ليس وراء ذلك سِوى تداعي أفكار من شأنه خلق التباس. فلا مناص من التّفريق بين المنطق الرّياضي(اللوجيستيك بذاته) وبين نظريات هذا اللّوجيستي أو ذاك. أنظر لالاند(أندريه): موسوعة لالاند الفلسفية، م2، ترجمة خليل أحمد خليل، منشورات عويدات، بيروت–باريس، ط2، 2001م، ص: 750.

وقد عرّب البعض هذا المصطلح باسم المنطقانية للإشارة به إلى أنّ الرّياضيات ليست سوى فرعا من المنطق وُجّهت فيه العناية نحو الكم. أنظر موساوي(أحمد): مكانة المنطق في الفلسفة التحليلية المعاصرة، مرجع سابق، ص: 40.

[1]– بلانشي (روبير): المعقولية في العلم الحديث، ترجمة عادل العوا، منشورات وزارة الثقافة والارشاد القومي، دمشق، 1981م، ص: 93.

والأصعب من الرّياضيات"[1]. وقد مرّت عملية ردّ الرّياضيات إلى أصول منطقية بمرحلتين يمكن أن نطلق على الأولى اسم تحسيب الرّياضيات، وعلى الثانية اسم منطَقَة الرّياضيات، وهي ردّ نظرية الأعداد الطبيعية ومن ثمّ الرّياضيات إلى أصول المنطق البحت.

لقد قام بيانو بأوّل محاولة منظّمة لردّ الرّياضيات إلى نظرية في الأعداد الطّبيعية، أي الأعداد الصحيحة الموجبة، فالأعداد الطبيعية في نظره يمكن اشتقاقها من أفكار أو ثوابت أوّلية ثلاث، ومن بديهيات خمس. وعلى الرّغم من نجاح بيانو في ردّ الرّياضيات إلى نظريّة في الأعداد الطّبيعية فإنّ نظريّته لم تكن وافية بالغرض، لأنّ ثوابته الأوّلية تحتمل عددا غير محدود من التأويلات التي تستوفيها بديهياته[2].

أمّا عمليّة ردّ الأعداد الطّبيعية إلى المنطق فقد دشّنها فريجه، فهو أوّل من عرّف العدد تعريفا منطقيا سنة 1894م، ولكنّ تعريفه ظلّ مطمورا حتى أعاد اكتشافه راسل سنة 1901م، ويقوم تعريف فريجه وراسل للعدد على فكرة تشابه الفئات؛ حيث تكون فئتان أ، ب متشابهتان إذا كانتا مرتبطتين بعلاقة واحد بواحد، أي إذا أمكن إقامة تقابل بين الفئتين بحيث يرتبط كلّ عضو في أ بعضو واحد وواحد فقط في الفئة ب، وكل عضو في الفئة ب يرتبط بعضو واحد وواحد في الفئة أ.[3] ويمكن التّمثيل لذلك بالنسبة للعلاقة الزّوجية في نظام اجتماعي قائم على نظام الزّواج المُوحّد، فيكون عدد الزوجات مساويا لعدد الأزواج.

وفي ضوء التساوي العددي للفئات المتشابهة، يمكن أن ننظر إلى العدد باعتباره فئة الفئات (*Class of classes*) أو باعتباره خاصّية الفئات، فالصفر هو فئة الفئة الخالية، وبتعبير آخر الصفر هو العدد الأصلي للفئة الخالية، والعدد 1 هو فئة كلّ الفئات الأُحادية العضو، والعدد 2 هو فِئة كلّ الأزواج، والعدد 3 هو فئة كلّ الثلاث...إلخ، وبذلك يمكن تعريف العدد كما يلي: عدد أية فئة هو فئة كلّ الفئات المشابهة لها[4]. وتجدر الإشارة إلى أنّ

1- راسل (برتراند): عبادة الانسان الحر، ترجمة محمد قدّوري عمارة، المشروع القومي للتّرجمة، 2005م، ص: 83.

2- متى (كريم): المنطق الرّياضي، مرجع سابق، ص: 298.

3- المرجع نفسه، ص: 301.

4- متى(كريم): المنطق الرّياضي، مرجع سابق، ص: 303.

موضوع أسس الرّياضيات تتنازعه ثلاثة اتجاهات في مقدّمتها المذهب اللوجستيقي لأنّه أسبق تاريخيا في ظهوره، ثمّ لأنّ الخلاف حوله، هو الذي حدّد ظهور المذهبين الآخرين كردود فعل عليه من قبل الرّياضيين، وهما المذهب الأكسيوماتيكي بزعامة ديفيد هلبرت (*David Hilbert*) [1862م-1943م] والمذهب الحدسي بزعامة بروير (*Brouwer*) [1881م-1966م].

إلا أنّ الحضور المنطقي لمشكلة أساس الرّياضيات دفعت بالكثير ممّن كان يُدير ظهره للمنطق، وخاصّة الرّياضيين، إلى إعادة النّظر في أفكارهم، "والأمر يصدق على هلبرت، الذي كان في أوّل الأمر غريبا تماما عن اللوجيستيقا، ليتحوّل إلى مساهم في كتابين رئيسيين في المنطق الرياضي حتى ذلك العصر، وكذلك هو حال هيتينغ (*Arnold Heyting*) [1898م-1980م]، لقد كان من أكبر المعارضين لتجاوزات المنطق بحقوق الحدس العليا، قد انجرّ تدريجيا إلى صياغة أحد الأنساق المنطقية الأصلية على هامش المنطق الرّياضي التّقليدي"[1].

ومن الضروري التّمييز أثناء استعمال كلمة لوجستيقا بين ما يمكن تسميته اللوجيستيقا كمنهج؛ وهي التي تكون في المجال العلمي وهي خاصّية جميع المنطقيين، واللوجستيكا كمذهب وهي تشير إلى فلسفة معينة في المنطق خاصّة بمدرسة من المنطقيين[2]. وإذا كان هذا المصطلح مقبولا إلى حدٍّ بعيد في بداية القرن العشرين، فإنّ ظهور المنطق الجديد أدى إلى نوع من التردّد في استعماله، ويرى بلانشي بضرورة الرّجوع إلى التسمية القديمة وهي المنطق الصوري، وهذا تجنّبا للخلط المستعمل في التّمييز بين المنطق الأرسطي–الذي يُوصف بالصوري– بينما تُطلق صفة الرّمزية على المنطق المعاصر بالرغم من أحقّيته بالصورية.

---

[1]– *Blanché* (*Robert*)*: la logique et son histoire, op cit, p:* 304.

[2]- *Ibid. p:* 307.

الفصل الثاني: المنطق الرياضي الكلاسيكي

أولا: أهم المساهمين فيه

1- فريجه

يمكن تحديد انطلاقة المنطق الرّياضي في صورته الكلاسيكية خلال نهاية القرن التاسع عشر، وقد كانت هذه الانطلاقة مع أعمال جوتلوب فريجه* بألمانيا، وبيانو ومدرسته بإيطاليا، لكي تُتوّج هذه الأعمال بالكتاب المهم "مبادئ الرّياضيات" الذي وضعه ألفرد نورث وايتهد - برتراند راسل بين أعوام 1910م-1913م[1].

وقد سبق وأن أشرنا إلى أنّ المنطق الحديث لم يكن نتيجة لأعمال جورج بول، فالحِقبة العظيمة هي التي تبدأ سنة 1879م مع كتاب فريجه (*Begriffsschrift*) "فقد حرّر هذا الكتاب المنطق من اقتران اصطناعي بالرّياضيات، بينما كان في الآن ذاته يُعدّ علاقة داخلية أعمق فيما بين هذين العلمين"[2]. لقد حمل فريجه الدّعوة في هذا الكتاب إلى الاتجاه اللوجستيقي بكلّ وضوح، حيث تمكّن من خلال اتِّجاهه الجديد في المنطق والرّياضيات معا، من أن يُزوّد أجيال المناطقة والرياضيين بأربعة تصوّرات أساسية:

1- تصوّره لإطار نظريّة حساب القضايا

2- تصوّره لفكرة دالة القضيّة

---

* رياضي ومنطقي وفيلسوف ألماني أدى به بحثه عن مثال لمنهج علمي صَرْف في الرياضيات إلى تجديد عميق في المنطق، وإلى تأسيس المنطق الرياضي الحديث. فإذ لاحظ عدم مطابقة اللّغة الدّارجة، عاد إلى الأخذ بمشروع لايبنيز في بناء لغة رمزية. وهذه اللّغة هي التي أتاحت امكانية حساب القضايا في صورة منظومة استنباطية، وامكانية تحليل البنية الباطنية للقضية بالذّات (مبحث في التّصور، محاكاة حسابية للّغة الشّكلية للفكر الخالص) وبتجاوز فريجه المنطق الأرسطي والأنطولوجيا التي يستمدّ منها دلالته، حلّل القضيّة لا على أساس الموضوع والمحمول، بل على أساس دالّة القضيّة (عبارة منطقية تشتمل على متغيّر واحد أو على عدّة متغيّرات) وحجّتها (حدّ معلوم قابل لأن يحل محل متغيّر في دالّة منطقية). وبحساب الدّلات واستخدام المكمّمات، غدا بالإمكان اكتشاف منطق الأصناف وتأسيسه. وقد فتح فريجه الطريق أيضا بتأمّلاته المنطقية أمام علم الدلالات، بما أجراه من تمييز بين معنى العلامات ودلالتها، وبما مهّده من سبيل أمام التّمييز بين المنطق وما وراء المنطق، وكذلك بين اللّغة وما وراء اللّغة. كما نُدين لفريجه بمعظم المعاني الأساسية للمنطق الحديث. أنظر: طرابيشي (جورج): معجم الفلاسفة، مرجع سابق، ص: 463.

[1]- *Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, op cit, p:* 32.

[2]- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p:* 309.

3- تصوّره لفكرة السّور، بحيث أصبحت -إضافة إلى فكرة دالة القضيّة- تُكوِّن التّصور الأساسي لنظريّة حساب المحمول.

4- التّحليل المنطقي للبرهان عن طريق الاستقراء الرياضي باستخدام فكرة الفصل[1].

إنّ جوتلوب فريغه هو أوّلا وأساسا عالم رياضي، وعليه فحاجات الرياضيات هي التي قادته إلى تجديد المنطق بوقوفه على نقائص المنطق التقليدي، متجاوزا حتى جورج بول؛ فهو لم يعمل على جعل المنطق فرعا من الرياضيات، بل على العكس إلى أن يجعله أساسا لها. وقد صاغ النّظريات المنطقية الأربعة في قالب رمزي دقيق، حيث أدرك أهميّة استعمال اللغة الرّمزية، وفي المقابل لاحظ أنّ الاستدلال الرّياضي لم يكن على درجة عالية من الدّقة نظرا لكونه يستعمل اللّغة الطبيعية بما تحمله من ثغرات منطقية.

وفي حديثه عن مكانة اللّغة الرّمزية عند فريجه يستعرض روبير بلانشي قولا من كتاب (*Begriffsschrift*) "وللحيلولة دون تسرّب أي شيء من الحدس، كان يلزمني أن أبذل باستمرار جهدا حتى لا تشكو سلسلة الاستنادات من أية قطيعة. وفي محاولة تلبية هذا الشّرط لاحظت وجود عقبة ناجمة عن عدم مناسبة اللّغة، ومهما تكن العبارات التي كنت مستعدا لقبولها ثقيلة، فقد أدركت بأنّي عاجزا أكثر فأكثر. إنّ هذا النّقص هو الذي وجّهني نحو فكرة الايديوغرافيا، وهدفه الأوّل هو أن يقدّم لنا المعيار الأكثر ضمانا على صحة سلسلة الاستنباطات"[2].

أما فيما يخصّ موقف فريجه من المنطق التّقليدي فقد لاحظ نقصه وعجزه عن استيعاب الكثير من العلاقات الاستنباطية، إذ تمحورت الأبحاث حول القضيّة الحملية ذات الحدّين (الموضوع والمحمول) بالإضافة إلى الرّابطة. ولم يفرّق بين القضيّة الحمليّة والقضيّة العامّة مثلا، وهذا ما تكفّل به فريجه عندما لاحظ اختلاف صورة القضيتين؛ إنّنا في القضية الحملية نقرّر، أمّا في القضية العامّة مثل قولنا "كل انسان فان" فإنّنا لا نقرّر الوجود لأفراد

1- محمد علي (ماهر عبد القادر): فلسفة العلوم- المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص ص: 56-57.

2- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p:* 311.

الموضوع، بل نكون بصدد الحكم على كلّ أفراد الموضوع بالفناء، ومن ثمّ فالقضية السابقة تكافئ ما يلي: (إذا كان س إنسان فانّ هذا يتضمّن بالضرورة أنّ س فان)، ومن هنا توصّل فريجه إلى نقطتين في غاية الأهمية؛ الأولى أنّ صورة القضيّة العامّة في جوهرها إنّما هي شرطيّة متّصلة، والثّانية أنّ هناك تمييزا حاسما بين التقرير والحكم، وهذا ما جعله يميّز بين محتوى الحكم وتقريره[1].

إنّ العيوب السّابقة دفعت فريجه إلى وضع كل صورة من صور القضايا في لغة الدّالة، لكنّ هذا العمل يتطلّب الاحاطة بالثوابت المنطقية التي تنطوي عليها القضيّة المركّبة. وقد لخّص الدكتور محمود فهمي زيدان بعض انجازات فريجه: "لقد وضع أسس منطق الاستنباط، مما سوف يُسمّى من بعد حساب القضايا. وأدرك ثانيا أنّه بحاجة إلى دراسة جديدة للأسوار التي تنطوي عليها القضايا الكلية والجزئية والوجودية، ومن ثمّ أسّس لِما يسمّى فيما بعد حساب دالات القضايا. أراد ثالثا كتابة كلّ هذه الأنواع من القضايا بعناصرها، من حدود وثوابت وأسوار وقواعد استدلال القضايا بلغة الدّالة وبذلك ارتفع بالمنطق في صوريته إلى حدٍّ بعيد"[2]. ولم يكتف فريجه بالرّمزية بل أراد للمنطق أن يكون نسقا استنباطيا، بانطلاقه من تعريفات ومصادرات بالإضافة إلى اللامعرّفات وقواعد للاستنتاج. أما عناصر النّسق الاستنباطي عنده فهي:

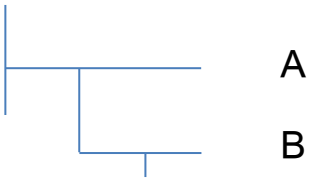
1- الأفكار الأوّليّة وهي الأفكار اللامعرّفة وهي الأكثر وضوحا وبساطة. ويقدّم فريجه فكرتين أوّليّتين هما فكرة السّلب وتعني القول "من الكذب أنّ". بالإضافة إلى فكرة اللزوم ويرمز إليها هكذا:[3]

1- محمد علي (ماهر عبد القادر): فلسفة العلوم- المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص: 58.

2- زيدان (محمود فهمي): المنطق الرّمزي نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص: 143.

3- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p:* 313.

2- كما عرّف فريجه ثوابت الفصل والوصل والمساواة، فدالّة الفصل هي التي تصدق بصدق أحد مفصولاتها على الأقل. وقد رمز لهذه الدّالة بالرمز التالي:



كما عرّف دالة الوصل بأنّها تصدق إذا صدق عنصراها معا، وتكذب إذا كذب أحد عنصريها على الأقل. وعرّف أيضا دالة التكافؤ، وكان يقصد بالتكافؤ المساواة أو علاقة الهوية التي تنشأ بين اسمين أو علامتين قضويّتين، وتصدق قضية التكافؤ عندما يمكن تبادل مواضع عنصريها دون اخلال بالصّدق[1].

3- وعلى غرار الأفكار الأوليّة يتطلّب النّسق الانطلاق من بديهيات، وقد وضع فريجه مجموعات عِدّة في سياقات مختلفة وتتألّف هذه المجموعة من سبع مبادئ:

(1) ق ⊃ (ل ⊃ ق)

$$p \supset (q \supset p)$$

ونقرؤها: القضية ق تتضمّن القضيّة المركّبة "ل تتضمن ق" ، أو: إذا كانت ق صادقة لَزِم أنّه إذا صدقت ل تصدق ق.

(2) [ق⊃(ل ⊃ م)] ⊃ [(ق ⊃ ل) ⊃ (ق ⊃ م)]

$$[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

(3) [ق⊃(ل ⊃ م)] ⊃ [(ل ⊃ (ق ⊃ م)]

$$[p \supset (q \supset r)] \supset [(q \supset (p \supset r)]$$

(4) (ق ⊃ ل) ⊃ (~ل ⊃ ~ق)

1- محمد محمد قاسم: نظريات المنطق الرّمزي-بحث في الحساب التحليلي والمصطلح، دار المعرفة الجامعية، الأزاريطة، ط1، 2002، ص ص: 141-142.

$$(p \supset q) \supset (-q \supset - p)$$

(5) ~~ق ⊃ ق

$$-\,-p \supset p$$

(6) ق ⊃ ~~ق:

$$p \supset -\,-p$$

(7) (هـ) د (هـ) ⊃ د (و):

$$(x)\ f(x) \supset f(y)$$ [1].

إلا أنّ اسهامات جوتلوب فريغه مرّت دون أن ينتبه إليها أحد، وهو ما حدث تقريبا مع مواطنه لايبنيز من قبل، إذ انتظرت ظهور كتاب مبادئ الرياضيات لبرتراند راسل أين أبان على أهمّيتها بعد أن عرض في ملحق كتابه آراء فريغه. يقول روبير بلانشي "وقلّما ذُكرت أعماله في الدّوريات العلمية، ولم يتوصّل إلى الشُّهرة إلا بواسطة راسل سنة 1903م، والذي ثمّنها من جهة، وكشف عن وجود تناقض في النّسق من جهة أخرى، معتبرا نسقه (راسل) هو الذي تمكّن من تجنّب التناقض. وهكذا فإنّ أعمال فريجه قد حجبتها انجازات راسل"[2]. وهو ما يؤكد أنّ المنطق في تطوّر مستمر من عصر لآخر ومن منطقي لآخر ولا يمكن أن يولد كاملا.

وينبغي أن نشير إلى أنّ النقائص التي يتضمّنها نسق فريجه؛ والتي عرضها راسل في ملحق كتابه مبادئ الرياضيات تحت عنوان آراء فريغة في المنطق والحساب، قد اطّلع عليها المناطقة وتَبيّن لهم "أنّ عمله مصاب بعيب أساسي. ويبدو أنّ فريجه شخصيا قد تعرّف إلى ذلك وهو ما يفسّر عدم مواصلة تأليفه الجزء الثالث. وانتهى به المطاف إلى رفض نظرية المجموعات؛ لقد اعتبرها مصدرا لجميع الصعوبات التي كان يصطدم بها واقتنع بأنّ

---

[1]– زيدان (محمود فهمي): المنطق الرّمزي– نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص ص: 155–156.

[2]– *Blanché* (*Robert*)*: la logique et son histoire, op cit, p:* 310.

مشروعه الأوّلي كان وهميا"[1]. لذلك رأى بلانشي أنّ فريجه قد تغيّر موقفه من المشروع الذي رسمه وذلك من خلال تصورّه لتوحيد الرياضيات بعيدا عن المنطق.

2- بيانو

لقد كان تدخّل اللّغة الطّبيعية في الحدود المنطقية عائقا كبيرا بسبب نقائص منطقية في هذه اللّغة، أما المنطق الرّمزي الحديث فقد "تخلّص من الأعراض اللّغوية بأن صنع لنفسه لغته الخاصّة. وهذا ما سمح له بأن يصبح فقط صوريًّا تماما، بل بأن يمعن في الصورانية (*Formalisme*) مستعيضا عن الاستدلال ذاته بحساب على الرّموز"[2]

وعلى هذا الأساس لم تختلف أهداف العالم الرياضي جيوزيبه بيانو* (*Giuseppe Piano*) [1858م-1932م] عن أهداف فريجه، إذ ارتبط استخلاص القوانين المنطقية بلغة رمزية وفقا لمتطلّبات الرياضيات. لقد سعى بيانو إلى التحرّر من اللّغة الطّبيعية، وهذا ما تكفّل به كتاب "الصيغ الرّياضية" (*Formulaires*). لقد أراد بيانو لهذه اللّغة أن تكون ذات طابع عالمي، "لقد كان له-على الأقل في المدى القريب أهمّية أكثر في تاريخ المنطق لأنّ كتابته الرّمزية هي الأكثر يسرا من كتابة فريجه، والتي تعلّم الرّياضيون استعمالها من خلال استخدامها في الـ (*Formulaires*)، وهي -في النّهاية- التي أصبحت بعد إدخال بعض التّعديلات والاضافات من راسل ووايتهد، اللّغة المشتركة في اللوجيستيقا أي المنطق الرّياضي"[3].

1- *Ibid, p:* 321.

2- بلانشي (روبير): الاستدلال، ترجمة محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، ط1، 2009م، ص: 19.

* استحدث نسقا مبتكرا من العلامات يتيح إمكانية عرض مبادئ المنطق ونتائج مختلف فروع الرّياضيات بلغة يقال لها اللّغة المقعّدة تقعيد الرّياضيات (1895م-1905م) وبهذه الصورة قدّم الحساب والهندسة الإسقاطية ، ونظرية المجاميع، وحساب اللامتناهي في الصغر. وقد تأثّر به راسل في مذهبه المنطقي الرمزي في مبادئ الرياضيات. ومن أهم كتاباته "الصيغ الرياضية" (*Formulaires mathématique*) الذي اشترك في إعداده مجموعة من تلامذته فيما بين أعوام "1894م-1908م"، والذي يعرض فيه المفاهيم والمسلّمات الأساسية في أصول الرياضيات، والذي أصبح السّند الأساسي لراسل فيما بعد حين قام بتدوين "أصول الرياضيات، ثمّ "مبادئ الرياضيات بالاشتراك مع وايتهد.
أنظر طرابيشي (جورج) : معجم الفلاسفة، مرجع سابق، ص: 219.

3- *Blanché* (*Robert*)*: la logique et son histoire, op cit, p:* 324.

لقد وضع بيانو طريقة في التنقيط تستعمل فيها النّقاط (.، :، ∴،::، ::.، ...) كفواصل بين القضايا، بحيث نفصل بين قضيّتين يجمعهما رابط، بوضع نقطة على يمين وشمال الرابط الرّئيسي، ويمكن توضيحها بالمقارنة مع التنقيط بالأقواس:

- ق
- ~ق
- ق ∧ ك
- ~ق ← ~ك
- ~(ك ← ك) = ~ .ك ← ك
- ق∧(ك←ك) = ق. ∧ . ك←ك
- (ق∨ك) ← ك = ق∨ك .←ك
- ~(ق∨ك) ↔(ك←ل) = ~ .ق∨ك .↔. ك←ل

إنّ عدد النّقاط يتماشى طرديا مع زيادة عدد القضايا على طرفي الرّابط الرّئيسي، بحيث نضيف نقطة فوق النقطة الأولى ثمّ على يسارها، وهو ما يُمكّننا من تحديد مدى الرّابط الرّئيسي والروابط الثّانوية. وهذه بعض الأمثلة مقارنة مع التّنقيط بالأقواس:

((ق↔ك) ≡ ((ق←ك)∧(ك←ق))

ق↔ك . ≡ . ق←ك. ∧ .ك←ق

[(ق↔ك) ←(ق∧ك)] ← [(ق ↓ ك)∨(ق∧ك))←((ق∧ك)∨(ك↓ق))]

ق↔ك. ←.ق∧ك : ← :. ق ↓ ك .∨. ق∧ك :← : ق∧ك .∨ . ك↓ق

[(ق∨ك) ←(ق∧ك)) ← ((ك ↓ ق))]↔[(ق←(~(ق∧ك)∨(ك↓ق))]

ق∨ك .← . ق∧ك : ← : ك ↓ ق:. ↔:. ق .←: ~ .ق∧ك .∨.ك↓ق

~[(ق∨ك) ←(ق∧ك)) ← ((ك ↓ ق))]↔[(ق←(~(ق∧ك)∨(ك↓ق))]

~ :: ق∨ك .←. ق∧ك : ←: ك ↓ ق :.↔:. ق .←: ~ .ق∧ك .∨. ك↓ق [1]

كما قام بيانو بأوّل محاولة منظّمة لردّ الرياضيات إلى نظريّة في الأعداد الطّبيعية، أي الأعداد الصّحيحة الموجبة المتوالية: 0، 1، 2، 3، 4، ... إلخ.

وقال بأنّ الأعداد الطّبيعية يمكن اشتقاقها من أفكار أو ثوابت أوّلية ثلاث، ومن بديهيات خمس. أمّا الثّوابت فهي: الصّفر، العدد ، وتالي العدد. وقد افترض بيانو هذه الثّوابت، ولذلك لم يجد حاجة إلى تفسيرها.

وأمّا البديهيات الخمس فهي:

(1) الصفر عدد.

(2) تالي العدد عدد.

(3) لا يمكن أن يكون تالي واحد لعدّة أعداد أيًّا كانت؛ أي أنّ للأعداد المختلفة توالي مختلفة.

(4) ليس الصفر تاليا لأي عدد.

(5) إذا كان للصّفر خاصّية وكانت إذا وجدت لأي عدد وجدت أيضا لتاليه فهي موجودة لجميع الأعداد(مبدأ الاستقراء)[2].

1- زيداني (فريد): المدخل إلى المنطق المعاصر -حساب القضايا غير المحللة، دار البصائر للنشر والتوزيع، الجزائر، ط1، 2012م ، ص ص: 81-82 .

2- بلانشي (روبير): المصادريات (الأكسيوماتيك)، مرجع سابق، ص: 39.

* يشار بمصطلح البرانكيبيا إلى كتاب (*Principia Mathematica*) أو (مبادئ الرّياضيات) الذي اشترك في تأليفه كلّ من ألفرد نورث وايتهد وبرتراند راسل. والذي يمثّل عصارة المنطق الرّياضي في صورته الكلاسيكية، فهو تتويج لأعمال فريجه وبيانو وكل من ساهم في تطوير النّظرية المنطقية الحديثة.

ويمكن ايجاز أعمال بيانو التي ساهم بها في تطوّر المنطق الرّياضي في النّقاط الأربعة التالية: أنّه ابتكر مصطلحا رمزيا يتميّز بالسُّهولة والبساطة، وهذا ما يفسّر تأثيره على أصحاب البرانكيبيا* الذين طوّروا نسقهم المنطقي من خلاله، مع العلم أنّ مصطلحه الرّمزي يحتوي على حروف لغويّة تدلّ على الأصناف وأفراد الأصناف والقضايا، وعلامات أخرى ترمز إلى الثّوابت المنطقية[1]. أمّا المساهمة الثانية فتظهر من خلال مخالفته أصحاب جبر المنطق؛ حيث أنّه أعطى تعريفا للصّنف من جهة المفهوم ومن جهة الماصدق؛ إذ ميّز بين عضوية الفرد في صنف، واحتواء الصّنف في آخر، كما ميّز بين الصّنف ذي العضو الواحد وذلك الصّنف في حد ذاته.

كما شارك في التّأسيس لثلاث نظريات في المنطق الرّمزي: حساب القضايا وحساب دالات القضايا وحساب الأصناف؛ فيما يخصّ حساب القضايا وضع القضايا المركّبة، وعلى الخصوص القضايا الشرطية المتّصلة، بالإضافة إلى وضعه الثوابت المنطقية وبعض قوانين هذا الحساب على هيئة رموز لم تكن معروفة من قبل. أمّا عن النّظرية الثانية فقد توصّل بيانو إلى أفكار دالّة القضيّة والسّور الكلّي والسّور الوجودي وبعض قوانين حساب الدّلات. أمّا عن حساب الأصناف فقد تجاوز بيانو الأخطاء المنطقية التي ارتكبها الاتجاه الجبري في المنطق.

أما المساهمة الرّابعة لبيانو فتتمثّل في وضع النظريات المنطقية السابقة الذّكر في نسق استنباطي رمزي، منطلقا من أفكار أوّلية بسيطة وفق مصطلحه الرّمزي، وتتمثّل هذه الأفكار في اللامعرّفات والتّعريفات والمصادرات[2]. لذلك اعتبر روبير بلانشي بأنّ اللّغة الرّمزية لبيانو تُعدّ أكثر انجازاته في تطوير المنطق ونقله من صورته التقليدية إلى الصورة التي استقرّ عليها عند كلّ من راسل- وايتهد "نلاحظ بأنّ اللّغة الرّمزية لبيانو ليست مجرّد تغيير في الكتابة، (أي تغيير شكلي). فأهمّيتها لا تكمن في أنّها مجرّد نقطة الانطلاق للّغة الرّمزية

1- زيدان (محمود فهمي): المنطق الرمزي نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص: 126.

2- المرجع نفسه، ص: 127.

عند راسل، إذ أنّ مؤلّفي كتاب الصيغ الرّياضية الذين بدأوا عملهم بقصد التّعبير الرّمزي عن عمليّات البرهان الرياضي قد طوّروا المنطق، بالإضافة إلى تصحيح أعمال بيرس وشرودر"[1] لذلك يعترف راسل بإنجازات بيانو –كما سنرى– إذ يعتبره منعرجا حاسما في حياته الفكرية بعدما اطّلع على لغته الرّمزية، وعلى أفكاره في محاولة إقامة الرّياضيات على أسس متينة.

3– راسل

إنّ اسهامات راسل* الكبرى في المنطق وبناء على استعراضنا لإنجازات فريجه فإنّ العديد منها مشتركة بينهما مع بعض الفوارق، وتتمثّل في تنظيم مجموع المنطق، والاستعمال المنهجي للكتابة الرّمزية، وعرض المنطق على شكل نسق استنتاجي، بالإضافة إلى تحليل القضيّة إلى دالّة وحجّة مع النتائج المترتّبة على ذلك: توحيد المنطق الحملي ومنطق العلاقات، استعمال الأسوار والتّسوير المتعدّد. ورغم أسبقيّة فريجه يرى روبير بلانشي بأنّه ينبغي القول على وجه الخصوص بأنّ راسل هو الذي أسهم في كلّ تلك الابتكارات[2].

من أهمّ الموضوعات في مجال المنطق والتي اقترن بها اسم راسل هو بيان أساس الرّياضيات، إلاّ أنّه من الممكن الفصل بين المنطقانيّة كنظرية واللوجستيكا كعلم. إنّ الانتقادات التي توجّهت إلى أعمال راسل، قد انصبّت حول الرّد المنطقاني. ورغم قدرة المنتقدين على بيان ما فيها من نقائص، إلا أنّ روبير بلانشي يعتبرها ذات أهمّية، لقد كانت بمثابة الشّرارة التي ألهبت النقاش من أجل تدارك ما تتضمّنه من نقائص، وحتى الذين رفضوا المنطقانية وسلكوا طريقا غيرها، كانت لهم اسهامات في تطور المنطق، لأنّهم إذا

---

[1]- *Blanché* (*Robert*)*: la logique et son histoire, op cit, p:* 313.

* فيلسوف وعالم منطق وشخصية بريطانية، ساهم في تطوّر المنطق الرّياضي الحديث. وأبدى في سن مبكّرة ميله إلى الرّياضيات، وتمرّس في كمبردج بأرفع أشكال المنطق ونظرية العلم، وكانت الأطروحة التي قدّمها لنيل شهادة التبريز(1895م) تحمل عنوان محاولة في أسس الهندسة، ولمّا طالع عام 1898م كتاب المنطق لهيجل ابتعد نهائيا عن فكر هذا الفيلسوف، كما دحض الأفكار التي عرضها برادلي في "الظاهر والواقع"، أصدر سنة 1900م فلسفة لايبنيز، تأثّر بآراء عالم الرياضيات والمنطق الإيطالي بيانو، أصدر عام 1903م مبادئ الرياضيات، وكتب بالتعاون مع وايتهد كتابا يحمل العنوان نفسه ويقع في ثلاثة أجزاء بين أعوام 1910م-1913م، وقد عرض هذا الكتاب الذي يتمتّع بأهمّية أساسية، شكلا جديدا للمنطق الرّياضي، فيه تجاوز لمعنى الصّنف. أنظر جورج طرابيشي، معجم الفلاسفة، مرجع سابق، ص: 317.

2- *Blanché* (*Robert*)*: la logique et son histoire, op cit, p:* 340.

كانوا في أوّل الأمر أرادوا البقاء في ميدان الرياضيات، وهذا شأن زرميلو وبريور، فإنّ خَلَفَهم وجدوا أنفسهم –في نهاية الأمر– منقادين إلى ميدان المنطق، والذين قدّموا فيه مساهمات قيّمة. ويسوق بلانشي شهادة بريور(*Prior*) حيث يقول هذا الأخير: "إنّه لمن السّهل ومن الضروري توجيه انتقادات لنظريات راسل الخاصّة بالمفارقات المنطقية والنحوية، وكذلك أعماله حول المنطق وأساس الرّياضيات، ومع ذلك يبقى راسل أكثر من أي شخص آخر مؤسس المنطق الحديث"[1]. لقد ساهم في إثراء الرّمز إلى المتغيّرات الفردية رغم أسبقية بيرس وفريجه في التّمييز بين الصّنف والعضو فيه، إلا أنّ راسل زاده توضيحا وتطويرا. وفي مجال رموز الثوابت قام راسل بتطوير البحث في الثوابت المنطقية، وإضافة ثوابت منطقية جديدة مثل التكافؤ، وإضافة رموز جديدة في حساب الأصناف وحساب العلاقات.

أمّا على صعيد عناصر النّسق الاستنباطي في المنطق فقد قام راسل رفقة وايتهد بمحاولة أكثر تطوّرا "فالمنطق أصبح يلبس لباس المصادريات، لأنّه كان يظهر بمظهر نسق استنتاجي أبرزت فيه عن قصد حدوده الأوّلية وقضاياه الأوّلية منذ فريجه، ولا سيّما في التركيب الضّخم الذي قام به راسل"[2]. ويُعلّق (ماهر عبد القادر محمد علي) على هذا العمل الضّخم قائلا: "إنّ ظهور البرانكيبيا يُقسّم تاريخ المنطق الرّياضي إلى قسمين: مرحلة ما قبل البرانكيبيا ومرحلة ما بعدها، فالتصورات المنطقية التي تمّ التّعبير عنها باستخدام اللّغة في أصول الرّياضيات، أمكن صياغتها في البرانكيبيا من خلال نسق متكامل"[3].

إنّ المحاولة السّابقة جعلت للنّظريات الأربعة في المنطق الرّمزي(حساب القضايا وحساب المحمول وحساب الأصناف وحساب العلاقات) نسقا واحدا هو نسق حساب القضايا ذاته، كما وضعت لأوّل مرّة الشروط الواجب توافرها في مصادرات أي نسق استنباطي، كما زيد في عدد القوانين المنطقية[4]. ويعتبر حساب القضايا –الذي هو بمثابة هيكل المنطق

---

1 -*Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p:* 340.

2– بلانشي (روبير): الأكسيوماتيك، مصدر سابق، ص: 67.

3– محمد علي (ماهر عبد القادر): المنطق الرّياضي، مرجع سابق، ص: 100.

4– زيدان (محمود فهمي): المنطق الرّمزي نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص: 274.

الرّياضي– من وضع راسل في كتابه الأوّل سنة 1903م حيث يعرض تصوّره المنطقي للقضايا الرّياضية فيقول: "إنّ الرياضيات البحتة هي باب جميع القضايا التي صورتها ق يلزم عنها ك، حيث ق وك قضيتان تشملان على متغيّر واحد أو جملة متغيّرات هي بذاتها في القضيتين ، علما بأن كلا من ق و ك لا تشمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية. والثوابت المنطقية هي كلّ المعاني التي يمكن تعريفها بدلالة اللّزوم"[1].

ويعدّ موضوع حساب القضايا بمثابة نقلة نوعية في مجال المنطق، من منطق الحدود إلى منطق القضايا، فلم تعد الشروط تنحصر في قيام حد أوسط وإلا استحال الاستنتاج، ولا في مراعاة الكم والكيف والسّلب والايجاب، فكلّ العقبات اللّغوية قد تمّ تجاوزها، فالقضايا وحدات، وكلّ وحدة غير مُحلّلة إلى حدود مهما كان طول القضيّة، ومهما اختلفت القضايا فيما بينها وفي معانيها القاموسية، فالمهمّ هو تحديد علاقات تلازم بين قيم الصّدق والكذب التي تُنسب إلى تلك الوحدات أو القضايا[2].

لقد كان راسل نابغة إذ اطّلع على رياضيات اقليدس وهو في سن مبكّرة (كان في الحادية عشر من عمره) وتساءل عن الأسس التي تقوم عليها الهندسة. إنّ تعمّقه في الرياضيات جعله ينفر من تجريبانية جون ستيوارت مل(*John Stuart Mill*)[1806م-1873م]، ومن التّركيب القبلي عند كانط. وفي المقابل لم يُخف راسل تأثّره ببيانو (*Peano*)، لذلك يعتبر سنة 1900م من أبرز وأهمّ السّنوات في حياته الفكريّة؛ لقد كانت المناسبة انعقاد مؤتمر الفلسفة الدّولي بباريس أين تأثّر بالدقّة التي امتاز بها كلّ من بيانو وفريجه أثناء المناقشات. كما وقف راسل على محاولاتهم في اشتقاق الرّياضيات من قضايا ومفاهيم منطقية. إنّ هذا اللّقاء سرعان ما أفرز نتائج ايجابية "وتتمثّل في اكمال أعمال بيانو، وتصحيح أعمال فريجه؛ فمن جهة أصبح علم الحساب مبنيا على أسس ثابتة بعد تعريف حدوده الأوّلية انطلاقا من حدود منطقيّة، وبرهنة قضاياه الأوّلية انطلاقا من قضايا منطقيّة.

1– راسل (برتراند): أصول الرياضيات، ج1، مرجع سابق، ص: 31.

2– الفندي (محمد ثابت): فلسفة الرّياضة، دار النهضة العربية للطباعة والنّشر، بيروت، ط1، 1969م، ص: 137.

أمّا بالنسبة لفريجه فقد كانت نظرية الأنماط بمثابة حصنا منيعا أمام النقائض المنطقية التي كانت ضمن نسقه "[1].

لقد كان في تلك الفترة نسق البرانكيبيا هو المنطق أو النّسق الوحيد، أو ما يسمّيه دوني فرنان بالنّسق النّموذجي. لكن في العشرينيات من القرن الماضي بدأت تتراجع مطلقيّته، فالاتجاه الجديد، والذي يحدّده روبير بلانشي بسنة 1920م "سَيُفكّك الآن المنطق من الداخل. فحدث له ما حدث للهندسة قبل ذلك ببضعة عقود. ومثلما أن الهندسة لم تعد وحيدة بظهور هندسات لا إقليدية، ثم لم تعد حدسية بوضعها في صورة مصادراتية، فإنّ المنطق كذلك تعدّد ولبس لباس المصادريات، وكان لا مناص للمنطق الذي أصبح استنتاجيا من أن يتحوّل هو الأخر في اتجاه مصادريات مجرّدة"[2].

لقد وصف صاحب كتاب رسالة منطقية فلسفية، القوانين المنطقية المردودة إلى عباراتها الرّمزية بأنّها تحصيل حاصل (*Tautologie*)، أي صيغ هي في ذاتها خالية من المحتوى، ولا تحمل معنى، ويلزم عن ذلك: "إنّ ما لا مضمون له ولا معنى، لا يمكن أن يكون لا صادقا ولا كاذبا. وبما أنّ تحصيلات الحاصل فارغة على حدّ سواء، فهي تتحدّث عن نفس الشّيء، أي عن لا شيء، وما لا يقول شيئا لا يمكن أن يذكر حقيقة. ولهذا لا نقول أنّها صادقة، بل إنّها صادقة دائما"[3].

إنّ الصّيغة السابقة تبدو لأوّل وهلة مُحيّرة عندما لا نطّلع على مضمونها، إذ كيف يمكن أن يكون صادقا دائما ما ليس صادقا بمعنى الكلمة، لأنّه فارغ خال من المعنى، لأنّه لا يقول شيئا ؟ ولهذا ينبغي أن ننظر إلى الصّيغة على أنّها صيغة مختصرة تعني أنّه أيا كانت القيم التي نستبدلها بالمتغيّرات، فإنّ القضيّة التي نحصل عليها عندئذ بملء هذه الصّيغة الفارغة، تكون في جميع الحالات صادقة دائما. حتى لو أدى هذا الاستبدال إلى

1- *Blanché (Robert): la logique et son histoire, op cit, p:* 327.

2- بلانشي (روبير): الأكسيوماتيك، مصدر سابق، ص: 68.

3- بلانشي (روبير): الاستدلال، مصدر سابق، ص: 22.

تكذيب هذه القضية الأوّلية الموجودة أو تلك، أو حتى إلى تكذيبها كلّها،[1] إنّ هذه الصّيغ يمكن وصفها بالاستمارة المعدّة سلفا، والتي يُطلب منّا ملؤها، لذلك تكون دوما صادقة، ما دام المخطّط صادقا.

ثانيا: المنطق الرياضي الكلاسيكي وظهور حساب القضايا

1 -القضية proposition:

هي التركيب اللغوي أو القول الجازم الذي يحتمل الصدق أو الكذب "وليس كل قول جازم، إنّما الجازم القول الذيُ وجد فيه الصدق أو الكذب، وليس ذلك بموجود في الأقوال كلها؛ ومثال ذلك "الدعاء" فإنّه قول ولكّن ليس بصادق كاذب"[2].

2-القضية والجملة:

يمكن تمييز القضية في المنطق عن الجملة في اللغة الطبيعية من عدة زوايا. ويمكن توضيح بعضا منها من خلال الامثلة التالية:

أ-الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية.

ب-إذا كانت الشمس مشرقة فالنهار موجود.

ت- ديكارت وابن سينا فيلسوفان.

ث- اليهود والأمريكان متوآدان.

ج-هل المنطق مدخل إلى الفلسفة ؟

ح-راجع دروسك جيدا.

-المثال الأول من زاوية التركيبة النحوية هو مجموعة من الجمل. أما منطقيا فهو قضية واحدة، لأنّ مدلول الجملة منصب على مفهوم واحد هو الجزائر. فالتحليل المنطقي يهتم بالمعنى لتفادي الحشو واللغو، على خلاف التحليل النحوي للغة الذي يركز على المبنى.

1- المصدر نفسه، والصّفحة نفسها.

2- أحمد موساوي: مدخل جديد إلى المنطق المعاصر، ص: 71.

-أما المثال الثاني فهو جملة شرطية، أي مجرّد عبارة واحدة من الناحية النحوية. أما منطقيا فهي تتألف من العبارتين "الشمس مشرقة" و"النهار موجود."

-أما المثال الثالث والرابع فيشتركان في البنية النحوية الواحدة. بينما يختلفان في البنية المنطقية؛ فالعبارة "ديكارت وابن سينا فيلسوفان" تتألف من قضيتين هما "ديكارت فيلسوف" و "ابن سينا فيلسوف"، لأنّ المحمول فيلسوف ميزة تخص كل واحد منهما على الرغم من اشتراكهما فيها. أما العبارة "اليهود والأمريكان متوادّان" فهي جملة واحدة تعّبر عن علاقة بين دولتين وهي علاقة الموّدة.

-أما المثال الخامس والسادس فعلى الرغم من سلامة الجملتين من ناحية المبنى. إلا أنيما ليستا قضيتين من الناحية المنطقية لأنهما ينتميان إلى الجمل الانشائية.

3-أنواع القضايا:

تنقسم القضايا من حيث البساطة والتركيب إلى:

أ- القضية البسيطة أو الذرية Atomic propositions وهي القضية التي تخلو من أي رابط منطقي. مثال "الانسان فان "

ب-القضية المركبة أو الجزيئية Molecular propositions :تصبح القضية مركبة أو جزيئية إذا دخل عليها ربط منطقي. وتنحلّ القضية المركبة إلى قضية أو أكثر تقوم بينها علاقات، تحدّدها أدوات الربط. في اللغة الطبيعية يسميها النحاة باسم حروف المعاني. ومن الأمثلة على ذلك "انشطاين عالم وفيلسوف" "الانسان حي أو ميت"، إنّ أداة الربط في القضية الأولى هي "و" وقد ربطت بين خبرين. ونفس العملية قامت بها" أو" في القضية الثانية.

•تجدر الاشارة إلى أن هذه الروابط لها ما يقابلها في المنطق الرياضي ونسميها بالروابط القضوية، وسنتطرق إليها لاحقا.

• "إنّ أهم ما يمّيز القضية البسيطة عن القضية المركبة هو أنّ القضية البسيطة تنحلّ إلى أجزاء لا يصح وصفها بالصدق أو الكذب. أما أجزاء القضية المركبة

فتصدق أو تكذب".[1] "فأجزاء القضية "الحديد معدن" هي "الحديد" و"معدن" وكل واحد منها لفظ لا يمكن أنْ نقول لقائله إنك صادق أو كاذب.

4-الروابط القضوية

الرابط القضوي هو تلك الأداة التي إذا دخلت على قضية واحدة أو أكثر أدّت إلى قضية مركبة.

أمثلة

-لا تساوي مساحة المثلث مساحة الدائرة التي يُرسم داخلها.

-برتراند راسل رياضي ومنطقي.

-الإنسان حيوان عاقل أو الحيوان العاقل إنسان.

-إذا كانت الشمس مشرقة فالنهار موجود.

-إذا كان العدد زوجيا فيقبل القسمة على اثنين واذا كان يقبل القسمة على اثنين فهو زوجي.

تشترك الأمثلة السابقة في كونها قضايا مركبة نظرا لدخول أداة من أدوات التركيب عليها. بينما تختلف من حيث الصورة ومن ناحية المحتوى. واختلافها عن بعضها من الناحية الصورية راجع إلى اختلاف أداة التركيب.

واذا أسقطنا محتوى قضايا الأمثلة السابقة واكتفينا بما يتبقى منها من أدوات التركيب لحصلنا على ما يلي:

-لا.....

..... -و.....

..... -أو.....

-إذا كان ..... ف.....

-إذا كان..... ف..... واذان كان.....ف.....

1- أحمد موساوي: مرجع سابق، ص: 75.

تسمى كل أداة من الأدوات الواردة في الأمثلة السابقة بالرابط القضوي.

ملاحظة

الروابط السابقة (كوظائف نحوية) لها معانٍ متعّددة:

–فعلى سبيل المثال الأداة "لا" من الجانب النحوي قد تكون (–نافية للجنس: لا طالب في المدرج. –نافية للعطف: نجح علي لا فاطمة. –أنْ تأخذ وظيفة ليس....). وقد تكون للطلب وتسمى لا الناهية (–كأنْ تدخل على المضارع فتجزمه مثل لا تحزن – أو لتقوية المعنى مثل ما منعك أن لا تذهب أي ما منعك أن تذهب).

–أما بالنسبة لـ "و" فلها معانٍ متعّددة من الناحية النحوية فقد تكون (حرف عطف–واو الحال مثل ذهب الطالب وقد غربت الشمس.

الروابط القضوية الأحادية والروابط القضوية الثنائية

رابط النفي: وهو الرابط الأحادي الوحيد. وتوجد أدوات كثيرة تعّبر عنه في اللغة العربية (لا– ما– ليس.(....

واذا كان النفي في اللغة متعّدد ويخضع استعماله لقواعد النحو. فإّنه من الناحية المنطقية نرمز لو بـ~ ويوضع في بداية القضية المنفية مثل ~**ب** في العربية أو **B**~ في اللغة الاجنبية أما قاعدة رابط النفي فهي:

–إذا كانت القضية" **ق** " صادقة فإنّ نفيها ~"**ق**" يكون كاذبا.

–إذا كانت القضية" **ق** " كاذبة فإنّ نفيها ~" **ق**" يكون صادقا.

وهذا يعني أنّ النفي لا يساوي الكذب. والاثبات لا يساوي الصدق.

*وإذا رمزنا إلى قيمة الصدق بـ "1" ورمزنا إلى قيمة الكذب بـ "0" سنحصل على الجدول الصدقي للنفي كما يمي:

ق	~ق	~~ق
1	0	1
0	1	0

رابط الوصل: رابط ثنائي يربط بين قضيتين فيحولهما إلى قضية مركبة.

مثال: القافلة تسير والكلاب تنبح

فإذا رمزنا للقضية: "القافلة تسير" بالمتغير "ق"

ورمزنا للقضية: "الكلاب تنبح" بالمتغير "ك"

ورمزنا لرابط الوصل بـ"∧"

فسنحصل على القضية ق ∧ ك

وتصدق هذه القضة المركبة في حالة واحدة فقط وهي: صدق القضية "ق" وصدق القضية "ك" معا. أي عندما تكون "القافلة تسير" و "الكلاب تنبح" في آن واحد.

وعلى هذا الأساس فقاعدة الوصل هي:

-يصدق الوصل بصدق جميع موصولاته

-يكذب الوصل بكذب إحدى موصولاته

*فإذا رمزنا إلى قيمة الصدق بـ "1" ورمزنا إلى قيمة الكذب بـ "0" سنحصل على الجدول الصدقي للوصل كما يلي:

ق	ك	ق ∧ ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

رابط الفصل غير الاستبعادي (الضعيف): الفصل رابط ثنائي يربط بين قضيتين فيحولهما إلى قضية مركبة.

مثال: "القافلة تسير أو الكلاب تنبح".

فإذا رمزنا للقضية: "القافلة تسير" بالمتغير "ق"

ورمزنا للقضية: "الكلاب تنبح" بالمتغير "ك"

ورمزنا لرابط الوصل بـ"∨"

فسنحصل على القضية (ق ∨ ك)

وتصدق هذه القضية المركبة بصدق أحد أطرافها على الأقل.

وعلى هذا الأساس فقاعدة الفصل هي:

-يصدق الفصل بصدق إحدى مفصولاته.

-يكذب الفصل بكذب جميع مفصولاته.

*فإذا رمزنا إلى قيمة الصدق بـ"1" ورمزنا إلى قيمة الكذب ب"0" سنحصل على الجدول الصدقي للفصل كما يلي:

ق	ك	ق ∨ ك
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

رابط الشرط أو اللزوم

للتعبير عن الشرط في اللغة نستعمل أداة الشرط "إذا.....ف"....

مثال: "إذا طلعت الشمس فالنهار موجود."

ونرمز له في المنطق بـ ←، C، ⊂

فإذا رمزنا للقضية: "طلعت الشمس" بالمتغير "ق"

ورمزنا للقضية: "النهار موجود" بالمتغير "ك"

ورمزنا لرابط الشرط بـ".←"

فسنحصل على القضية (ق← ك)

وتصدق هذه القضية كلما صدق التالي أي صدق القضية "النهار موجود". أو كذب المقدم أي كذب القضية "طلعت الشمس."

وعلى هذا الأساس فقاعدة الشرط هي:

-يصدق الشرط بصدق التالي، أو كذب المقدم.

-يكذب الشرط بصدق المقدم وكذب التالي .

*فإذا رمزنا إلى قيمة الصدق بـ "1" ورمزنا إلى قيمة الكذب بـ "0" سنحصل على الجدول الصدقي للشرط أو قيم صدقه كما يلي:

ق	ك	ق ←ك
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة: إذا كانت بسكرة ولاية امريكية فإنّ اسبانيا دولة افريقية: قضية مركبة صادقة

إذا كان 2+2يساوي واحد فالجزائر دولة أمريكية: قضية مركبة كاذبة

رابط التشارط

نعّبر عنه في اللغة الطبيعية بـ "إذا وفقط إذا....ف..." ونرمز له في المنطق بـ(↔)

مثال: "إذا وفقط إذا كان 1+1=2 فإن الحديد معدن

فإذا رمزنا للقضية: "2=1+1" بالمتغير "ق" ورمزنا للقضية: "الحديد معدن" بالمتغير "ك".

ورمزنا لرابط التشارط بـ ".↔" فسنحصل على القضية (ق↔ ك)

وتصدق هذه القضية في حالتين: -عند صدق القضيتين معا. -وبكذبهما معا.

*واذا رمزنا إلى قيمة الصدق بـ"1" ورمزنا إلى قيمة الكذب بـ"0" سنحصل على الجدول الصدقي للتشارط كما يلي :

ق	ك	ق ↔ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

مدى الرابط:

قد تكون أمامنا قضايا متعددة وروابط كثيرة. وتجنّبا للّبس ينبغي هيكلة القضايا باستخدام علامات الوقف للتّمييز بين الرّوابط الثّانوية والرابط الرّئيسي؛ وقد نلجأ إلى الأقواس، ولبيان التبعية تستعمل الأهلّة المزدوجة والمُثلّثة، وعندما يزداد عددها نغيّر شكلها. ويمكن الاستغناء عن الأقواس كما فعل بيانو وتعويضها بالتنقيط كما سبق وأن ذكرنا، ويمكن الاقتصاد في علامات الوقف بالإشارة إلى النّفي بواسطة خط علوي بمثابة قوسين، وهكذا فإنّ ق∨ك يمكن تمييزها تماما عن ق∨ك. أو بالاتفاق على الدرجات المختلفة لقوّة الرّوابط: الوصل، فالفصل، فالاستلزام، فالتكافؤ. كما تصوّر البولوني لوكاشيفتش نسقا يسمح بإلغاء علامات الوقف[1].

وكلّما زاد عدد القضايا، زاد معه عدد قيم الصّدق، وذلك وفقا للمتتالية الهندسية التّالية:

عدد القضايا: 1، 2، 3، 4، 5...

1- *Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, op cit, p:* 45.

عدد القيم: 2، 4، 8، 16، 32، 64...

ومن أجل تحديد عدد القيم لمجموعة من القضايا، نستعين بالقانون التالي: ($2^{ن}$)؛ بحيث أنّ: – العدد(2) ثابت يمثّل عدد قيم صدق القضيّة في المنطق الثنائي القيمة، وهما اثنتان، الصّدق والكذب. – (ن) متغيّر يمثّل عدد القضايا. وبذلك يصبح بإمكاننا تحديد عدد الحالات الممكنة، فإذا كان عدد القضايا واحدا، فإنّ عدد القيم الذي نحصل عليه هو: $(2)^1$ = 2×1 = 2. أمّا إذا كان عدد القضايا اثنين فإنّ عدد القيم يكون كالآتي: $(2)^2$ = 2×2 = 4. وإذا كانت ثلاثا: $(2)^3$ = 2×2×2 = 8 [1]

5–موضوع حساب القضايا والهدف منه: إنّ حساب القضايا يدرس كيف يكون صدق أو كذب قضية مركبة تابعا لصدق أو كذب القضيتين البسيطتين اللتين تتركّب منهما، فهو يهمل مضمون القضايا، ويصبّ اهتمامه فقط على قيمة صدقها. وهو في صورته التّقليدية لا يقبل بالنسبة إلى القضيّة إلاّ قيمتين ممكنتين من الصدق (ص) والكذب (ك)، ولهذا يُسمّى بالثّنائي القيمة[2].

وتختلف رموز الحساب التّقليدي للقضايا عن رموز الحساب الموجّه وعن رموز الحساب الدّالي، لذلك من الضّروري الاطّلاع عليها:

فالحروف ق، ل، ع، ... ترمز إلى قضايا أيا كانت، ولا نعتبر فيها إلاّ كونها صادقة(ص) أو كاذبة(ك). أما نفي القضيّة(ق) يُكتب (~ق). وبين قضيتين هما (ق) و(ل) فإنّ مختلف الارتباطات تشير إليهما الرّوابط التالية:

العطف: ق ∧ ل "ق و ل" (ق صادقة و ل صادقة).

الرّفض، النّفي المزدوج: ق ↓ ل "لا ق ولا ل" (ق كاذبة و ل كاذبة).

التنافر: ق ا ل "ليس ق و ل معا" (إحدى القضيّتين على الأقل كاذبة).

الفصل: ق∨ل "ق أو ل" حيث "أو" تكون مانعة للخلو (إحدى القضيّتين على الأقل صادقة).

1– أنظر: زيداني(فريد)، المدخل إلى المنطق المعاصر، مرجع سابق، ص ص: 43–44.

2- *Ibid, p:* 35.

العناد: ق w ل "إمّا ق وإمّا ل" حيث تكون (إمّا ... وإمّا) مانعة للجمع وللخلو (إحدى القضيّتين صادقة والأخرى كاذبة).

الاستلزام: ق ⊂ ل "إذا ق فـ ل" (لا يصحّ في آن واحد أن تكون ق صادقة و ل كاذبة)

الاستلزام العكسي: ق ⊃ ل "إذا ل فـ ق"(لا يصح في آن واحد أن تكون ل صادقة و ق كاذبة).

التّكافؤ وهو الاستلزام المتعاكس: ق ≡ ل "إذا وفقط إذا ق فـ ل" (لا يصحّ في آن واحد أن تكون ق صادقة و ل كاذبة، ولا أن تكون ل صادقة و ق كاذبة: فتكون ق و ل صادقتين كلتاهما أو كاذبتين كلتاهما).

وبالنسبة إلى الصّيغ المركّبة، فإنّ استعمال الأقواس يُفهم بسهولة. فلا يلتبس علينا مثلا ق ⊂(ل ∨ ع) بـ (ق ⊂ ل) ∨ ع ففي الحالة الأولى فإنّ ق تستلزم فصل لا عن ع، وفي الثّانية فإنّ الاستلزام ق ⊂ ل مفصول عن ع [1].

إنّ أهم الموضوعات التي عالجها أو اختصّ بها المنطق الرّياضي في صورته الكلاسيكية هي تكوُّن حساب القضايا، وبروز فكرة الدّالة القضوية، وظهور المنطق في صورة نسق استنتاجي، وفي الأخير لم يكتف باستلهام المناهج الرياضية بل أراد أن يكون أساسا للرياضيات نفسها. إنّ المنطق بأجمعه أعاد تنظيم نفسه، وهذا الترتيب الجديد هو الذي أصبح كلاسيكيا[2].

وقد أحدث المنطق الرّياضي تجديدا على مستوى تحليل القضايا، فلم تعد القضيّة الحمليّة هي النّمط الذي ترتدّ إليه سائر القضايا فحسب، بل طرأ تغيير على مستوى فهم القضية ذاته؛ فالعلاقة التي تعبّر عنها القضية التقليدية S est P لم تعد تفهم على أنّها علاقة موضوع بمحمول، بل على أنّها علاقة بين محمولين ذوي موضوعين غير معيّنين.

1- بلانشي (روبير): العقل والخطاب، مصدر سابق، ص ص: 09-10.

2- *Blanché* (*Robert*)*: Introduction à la logique contemporaine, op cit, p:32.*

الهدف من موضوع حساب القضايا:

يهدف موضوع حساب القضايا للوصول إلى صيّغ صادقة دائما، هي نظريات ذلك الحساب باستنباطها من المفاهيم الأوّلية، التي توضع صريحة وواضحة منذ البدء. وكما سبق وأن أشرنا فإنّ فريجه يعتبر "المؤسّس الحقيقي لنظريّة حساب القضايا وواضع نسق استنباطي لها. أما جعل نسق حساب القضايا وحده أساسا للنّظريات الثّلاثة الأخرى فهو من إبداع أصحاب البرانكيبيا"[1].

أمّا إذا انتقلنا إلى مجال التّحليل، فإنّ هذا الأخير لا يَنْصبّ إلاّ على الصورة المنطقية للقضايا المركبة؛ التي تحصل بالجمع بين القضايا البسيطة أو بتحويلها. – فالنفي هو العامل الوحيد الذي يقوم بتحويل القضية، وهو عندما يترجم عبارتي "لا..." أو "ليس صحيحا أن..." فهو يقلب قيّم صدق القضيّة المنطقيّة، وجميع العوامل المنطقية الأخرى هي "روابط" تسمح بالحصول على قضية جديدة بربط قضيتين[2].

1– زيدان (محمود فهمي): المنطق الرّمزي– نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص: 279 .

2– فرنان (دوني): مدخل إلى فلسفة المنطق، ترجمة محمود يعقوبي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ط1، 2006م، ص:18.

الفصل الثالث: الأنساق المنطقية الرياضية

أولا: مفهوم نسق المنطق الرياضي

يعرّف لالاند (*André Lalande*) [1867م-1963م] النّسق بكونه مجموعة أفكار علميّة أو فلسفية متراصّة منطقيا، لكن من حيث النّظر إلى تماسكها بدلا من النّظر إلى حقيقتها، فليس النّسق شيئا آخر سوى ترتيب مختلف أجزاء فن أو علم في راتوب تتآزر فيه كلّها تآزرا مُتبادلا، وحيث تُفسّر الأجزاء الأخيرة بالأجزاء الأولى[1].

ويختلف النّسق المنطقي عن الفلسفي، فإذا كان هذا الأخير يحوي سلسلة من القضايا، لكن هذه السلسلة ليست بالضّرورة ذات طابع استنباطي، كما أنّ النسق الفلسفي يُعبَّر عنه باللّغة الطّبيعية، في مقابل اللّغة الرّمزية والاصطناعية التي تؤلف النّسق المنطقي. فالنّسق المنطقي هو تسلسل مجموعة من القضايا المُصرَّح بها باعتبارها مبادئ أوّلية، والتي نبرهن من خلالها على مجموعة من القضايا الأخرى وفقا لقواعد مُحدّدة. وتُعدّ نظرية إقليدس في الهندسة نسق، بحيث تتألف من مجموعة من الأوّليات وهي البديهيات والمصادرات والتعريفات. لكن المشكل في نسق إقليدس أنّ صاحبه كان يعتقد بمطلقيّة النّتائج التي توصّل إليها.

ومفهوم النّسق المنطقي هو استمرار لما قاله إقليدس، والذي تطوّر هو أنّ النّسق المنطقي نسق رمزي، وبدلا من البديهيات والمصادرات نقول القضايا الأولية، وقبلها توجد لغة النّسق وهي مجموعة الرموز التي نستخدمها في نسق ما. ومن أهمّ خصائص المنطق الرّياضي الكلاسيكي حسب روبير بلانشي هو ظهوره في صورة نسق استنتاجي. "إذ نقول عن علم ما إنّه نسق استنباطي، إذا حوى عددا من التّعريفات والمبادئ والمصادرات الواضحة الصّريحة منذ البدء وبلا برهان، ثمّ انتقل إلى البرهان على قضايا معيّنة بطريق الاستنباط الصّوري المحكم من تلك البدايات، مستعينا بقواعد الاستدلال"[2].

---

[1]– لالاند (أندريه): موسوعة لالاند الفلسفية، ترجمة خليل أحمد خليل، ج3، ص: 1417.

[2]– زيدان (محمود فهمي): المنطق الرّمزي نشأته وتطوّره، مرجع سابق، ص: 24.

شروط النسق المنطقي:

أمّا الشّروط الأساسية التي يجب أن تتوفر في العرض الاستنتاجي لكي يكون دقيقا حقا فهي:

1- يجب التّصريح بالحدود الأوّلية التي نريد أن نعرّف بواسطتها سائر الحدود الأخرى، وتوجد ضرورة لأخذ بعض المفاهيم بدون تعريف(مفاهيم أوّلية). وسنوضّح هذه الضرورة بالمثال التالي: لنأخذ تعريف مفهوم (العدد الأوّلي) وهو (عدد صحيح أكبر من واحد ولا يقبل القسمة على أي عدد صحيح موجب عدا نفسه والعدد واحد). هذا التعريف يربط مفهوم (العدد الأولي) مع مفاهيم أساسية أكثر وهي: (عدد صحيح)، (موجب)، (العدد1)، و(يقبل القسمة). إنّ أي تعريف يربط المفهوم المُعرَّف بمفاهيم أخرى؛ بعض أو جميع هذه المفاهيم الأخرى يجب أن تُعرَّف باستخدام مفاهيم أكثر وهكذا دواليك. ومن الواضح أنّ عملية التعريف يجب أن تتوقّف في مكان ما لتجنّب هذا التراجع اللانهائي أو أن نقضي كل وقتنا معرِّفين مفاهيم أكثر وأكثر ولن نستطيع بناء أية نظرية[1].

2- ينبغي التصريح بالقضايا الأولية التي نريد أن نبرهن بواسطتها سائر القضايا الأخرى. وعلى غرار الحدود الأوّلية فإنّ بناء النّسق الاستنباطي يُحتِّم أيضا عدم الاستمرار ببرهان قضيّة بواسطة قضيّة (أو قضايا) أخرى وهكذا دواليك. ولتجنّب هذا التراجع اللانهائي يجب تَقبُّل قضية(أو قضايا) بدون برهان ونسمّيها البديهيات. إنّ تحديد أيّ القضايا نعتبرها بديهيات هي مسألة اختيارية تخصّ واضع النّسق.

3- أن تكون العلاقات المذكورة بين الحدود الأوّلية، علاقات منطقية خالصة، وأن تبقى مستقلة عن المعنى العيني الذي يمكن أن نعطيه للحدود، فبقدر ابتعادنا عن الدّلالات الحدسية تكون النّتائج يقينية.

4- من الواجب ألاّ تتدخّل في البرهنات إلاّ هذه العلاقات، بقطع النّظر عن معنى الحدود.

---

[1]- الجنابي (أسعد نادر): المنطق الرمزي المعاصر، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، ط1، 2007م، ص: 114.

5- تتّصف الأنساق المنطقيّة بالاتّساق "بحيث لا يمكن البرهنة فيه على إحدى الصيَّغ والصّيغة نفسها مسبوقة بأداة النّفي. لا يمكن البرهنة على القضية ونقيضها داخل النسق الواحد. وأن يكون تامّا: أي بحيث يمكننا مع أي صيغة من صيّغ النّسق ومع الصّيغة نفسها مسبوقة بالنّفي، أن نبرهن إحداهما. والقابليّة للبتّ: بحيث يمكننا في نفس الوضع السّابق، أن نَبُت إن كانت إحدى الصّيغتين قابلة للبتّ فيها. إلخ". [1]

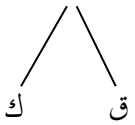
وينصبّ الاتساق على اللامعرفات و المبرهنات.

قواعد النسق الاشتقاقية:

يتم فيها تحليل القضايا المركبة إلى وحداتها الأبسط الوصل يحلل عموديا والفصل يحلل أفقيا.

- قاعدة النفي المضعف: Double Negation ~ ~ق= ق. السلب يعكس القيم الأصلية للقضية.
- قاعدة الوصل: تصدق في حال صدق جزئيها (ق^ك) وتحلل

-
- قاعدة الفصل: تبطل في حال بطلان جزئيها (قvك) وتحلل.



- قاعدة الشرط: تبطل في حال صدق مقدمتها وبطلان نتيجتها (ق←ك) وتحلل

قاعدة التكافؤ: تصدق في حال تماهي جزئيها (ق↔ك)

[1]- بلانشي (روبير): المصادريات (الأكسيوماتيك)، مصدر سابق، ص: 29.

- ك ~ك
- قاعدة سلب الوصل: ~(ق^ك) تحلل ~ق ~ك.
- قاعدة سلب الفصل: ~(قvك)
- ~ق
- |
- ~ك
- قاعدة سلب الشرط: ~ (ق←ك).
- ق
- ~ك
- قاعدة سلب التكافؤ: ~(ق↔ك)
- ق ~ك
- ~ك ق
- نلاحظ مما سبق ما يلي:

1- أن القضايا الأولية الموجبة مثل (ق) والقضايا الأولية السالبة مثل (~ق) ليست قابلة للتحليل تعبر في نسق الشجرة عن أبسط القضايا الممكنة.

2- أن القواعد التسع تستنفد جميع الاحتمالات. فالقضية المركبة إما أن تكون وصلية موجبة أو وصلية سالبة، فصلية موجبة أو فصلية سالبة، شرطية موجبة أو شرطية سالبة، تكافؤية موجبة أو تكافؤية سالبة.

التحليل الشجيري للبرهنة على اتساق النسق:

يعرف مفهوم الاتساق في النسق على النحو التالي: تعد الفئة متسقة إذا- و فقط إذا- كانت شجرتها مفتوحة (أي بها فرع واحد مفتوح على الأقل). وتعد غير متسقة إذا- وفقط إذا- كانت شجرتها مغلقة (أي لم يكن بها أي فرع مفتوح)

الشجرة المغلقة: هي شجرة كل فروعها مغلقة ومز الغلق (x).

الفرع المغلق: هو فرع ترد فيه القضية و نقيضها. مثال :

~ق

(ق∨ك)

ق x ك

الشجرة المفتوحة: هي شجرة بها فرع واحد مفتوح على الأقل.

الفرع المفتوح : يتوفر فيه شرطان:

1- ألا يكون مغلقا (أي ليس به القضية و نقيضها).
2- كل قضية فيه إما أن تكون *- أولية موجبة مثال ق.
- أو أولية سالبة مثال ~ك.
- أو قضية مركبة ثم تحليلها باستعمال قواعد النسق الاشتقاقية.

ثانيا: نماذج من الأنساق المنطقية

1: نسق AN

وهو النسق المنطقي الذي بَسَطه كل من راسل-وايتهد في كتابهما (*Principia Mathematica*)، وهو نسق قائم على حدّين أوَّلِيِّين هما: النّفي "N"، والفصل ورمزه في المدرسة البولونية "A". حيث يقوم هذا النسق على ما يلي:

-أبجديّة النّسق (*Alphabet*) وتتكوّن من رموز المتغيرات القضوية التالية: ق، ك، ل، م ...P,K,R,S

-الحدود الأوّلية (*Primitive termes*) وهما النّفي (~)، والفصل غير الإستبعادي (∨).

-التّعريفات: ويمكن تعريف اللّزوم أو الشّرط كما يلي: $C =_{df} AN$، أي تعريف الشرط بالنّفي والفصل:

ق←ك =تع ~ق∨ك

-البديهيات:

ويختلف عدد البديهيات من نسق لآخر؛ لقد انطلق لوكاشيفتش من ثلاث بديهيات، بينما اقتصر المنطقي الفرنسي نيكود(*Jean Nicod*)[1893م-1924م] في بناء نسقه على مسلّمة واحدة. أمّا راسل فقد أسّس نسقه على خمس مسلّمات، مع العلم أنّ المسلّمة الخامسة برهن عليها لوكاشيفتش بواسطة المسلّمات الأربع الأخرى، وتتمثّل فيما يلي:

1.2 (ق∨ق) ← ق

1.3 ك ← (ق∨ك)

1.4 (ق∨ك) ← (ك∨ق)

1.5 (ق∨(ك∨ل)) ← (ك∨(ق∨ل))

1.6 (ك←ل) ← ((ق ∨ ك)←(ق ∨ ل))

وهي على التّوالي في الرمزية البولونيّة:

1.2 CAppp

1.3 CqApq

1.4 CApqAqp

1.5 CApAqrAqApr

1.6 CCqrCApqAp

-القواعد:

قاعدة الاستبدال : (*Règle de substitution*) رمزها / ، مثلا ق/ ~ق. وتقرأ تبديل ق بنفي ق. فأينما وجدت ق نحل محلّها نفي ق.

قاعدة الفصل (الحذف): ورمزها (ـــ)، أي قاعدة إثبات التّالي أو فصله عن المقدّم.

-الرّموز المساعدة:

وهي رموز تحدّد مجال التّنقيط كالأقواس، والمعقوفات، والحاضنات، وبها نحدّد الرّابط الرّئيسي والرّابط الثّانوي. مثال: (((ق∨ل)←هـ) ← ~(ق∨ل)؛ نلاحظ أنّ حالة التّرتيب

النّسبي لكلّ رابطة تتناسب هنا عكسيّا مع عدد الأقواس التي تحيط به؛ فالرّابط الرّئيسي الذي يقوم عليه القول، لا يقع داخل أي قوس[1].

-رمز قاعدة الاستبدال هو /

-رمز قاعدة تعويض المعرّف هو x .

-رمز المبرهنات: توضع المبرهنة المستنتجة من إحدى البديهيّات بين معقوفتين [....] وتُرقَّم كما يلي: 2.01 ، 2.02 ، 2.03 ، 2.04 ...

-المبرهنات: قبل استعراض المبرهنات في نسق برتراند راسل، نشير إلى الخطوات المتَّبعة في عملية البرهنة ولتكن على القضية: (ق←~ق) ←~ق. إنّ أوّل خطوة هي الانطلاق من المسلّمة الأقرب إليها، وهي (1.2) ، أي القضية (ق∨ق) ← ق، ثم نستبدل بالقضيّة (ق) القضية (~ق)، أي (ق/~ق)، فنتجت القضيّة (~ق∨~ق) ←~ق، ثم استعنّا بالتّعريف 1.01، أي تحويل المقدّم (~ق∨~ق) من الصّيغة الفصليّة إلى الصّيغة الشّرطيّة (ق←~ق)، فنتجت لدينا المبرهنة (ق←~ق) ← ~ق)، وهي القضيّة المطلوب البرهنة عليها. ونعطيها الرقم (2.01) [2].

وهذه بعض المبرهنات المستنتجة من المسلمات المذكورة سابقا اعتمادا على الرّوابط الأوّليّة والمعرّفات، وقواعد هذا النّسق، والمعروضة بشكل صوراني لا مجال فيه للّغة الطّبيعية وما تحمله من غموض:

2.01 (ق←~ق) ← ~ق

1.2 ، ق/~ق،x 1.01 = 2.01

2.02 ك ← (ق← ك)

1.3، ق/~ق،x 1.01 = 2.02

2.03 (ق← ~ك) ← (ك←~ق)

1.4 ، ق/~ق، ك/~ك، x 1.01 =2.03

[1]- Blanché (Robert): Introduction à la logique contemporaine, op cit, p: 44.

[2]- زيداني (فريد): المدخل إلى المنطق المعاصر- حساب القضايا غير المحللة، مرجع سابق، ص: 136.

2.04 (ق ← (ك ←ل) ← (ك←(ق← ل))

1.5، ق/~ق، ك/~ك، x 1.01 =2.04

2.05 (ك ← ل) ← ((ق ← ك) ← (ق ← ل))

1.6، ق/~ق، x 1.01 =2.05

2.06(ق ← ك) ← ((ك← ل) ← (ق ← ل))

2.04 ق/(ك ← ل)، ك/((ق← ك)، ق/ (ق← ل) − 2.05 = 2.06

2.07 ق ← (ق∨ ق)

1.3، ك/ق ، = 2.07.

2.08 (ق←ق)

2.05، ك/(ق∨ق) ، ل/ق =←1.2−←2.07=2.08

2.1(~ق∨ق)

(1) 2.1=1.01x2.08

2: نسق CN

وهو نسق لوكازيفتش Jan Lukasiewicz

اللامعرفات: = ~، ← ، v =تع ~ ←

المعرفات: 4.01 قvك =تع ~ق←ك.

4.02 (ق^ك) = تع ~(ق←~ك).

4.03 (ق^ك) = تع ~ (~قv ~ك).

اللامبرهنات: 4.1 (ق ←ك) ←(ك ←ل) ←(ق ←ل)).

4.2 (~ق←ق)←ق).

4.3 (ق←(~ق←ك).

المبرهنات:

[1]- *Blanché* (*Robert*)*: Introduction à la logique contemporaine, op cit, p. p:* 79-80.

المبرهنة 5.01 (~ق←ك)←ل←(ق←ل)

1- 4.1 (ق←ك)←((ك←ل)←(ق←ل)).

2- الاستبدال: ك/ (~ق←ك).

3- (ق←(~ق←ك)) ← (~ق←ك) ←ل←(ق←ل).

4- قاعدة الحذف: 4.3(ق←(~ق←ك).

5- [(~ق←ك) ←ل←(ق←ل)]. = 2-3. و هو المطلوب.

6- 4.1 ، ك/ (~ق←ك)، . 4.3 .= 5.01

المبرهنة: 5.02 (ق ←ق).

1- المبرهنة 5.01 (~ق←ك)←ل←(ق ←ل).

2- الاستبدال: ك/ق، ل/ق.

3- (~ق←ق)←ق← (ق← ق).

4- 4.2 قاعدة الحذف: (~ق←ق)←ق.

5- 4..3 نحصل (ق← ق). و هو المطلوب.

6- 5.01 ، ك/ق، ل/ق، . 4.2.= 5.02

المبرهنة: 5.03 (~قvق).

1- 5.02 (ق ←ق).

2- بالتعريف: قvك =تع ~ق←ك.

3- (~قvق) و هو المطلوب.

4- 5.02،x 4.01 = 5.03.

المبرهنة: 5.04 (قv~ق).

1- المبرهنة 5.03 (~قvق).

2- الاستبدال: ~ق/ ~ ~ق، ق/~ق.

3- (~ ~قvق~).

4- (قvق~) و هو المطلوب.

5- 5.03، ~ق/~ ~ق، ق/~ق، = 5.04.

المبرهنة: 5.05 ~(ق^~ق).

1- 5.04 (قvق~).

2- بالتعريف: 4.03 (ق^ك) = تع ~ (~قvق ~ك).

3- ~(~ ~قvق~).

4- ~(ق^~ق).

5- 5.04،5.03x = 5.05.

إمكانية البرهنة على مسلمة نسق ما في نسق آخر.

المثال الأول: لا مبرهنة في نسق AN هي مبرهنة في نسق CN.

❖ 1.3 ك ← (قvك).

1- 4.1 (ق← (~ق←ك).

2- الاستبدال: ق/ك. نحصل ك←(~ق←ك).

3- بالتعريف: 4.01 قvك =تع ~ق←ك.

4- ك ←(قvك). و هو المطلوب.

5- 4.3، ق/ك، 4.01x = 1.3 من AN.

المثال الثاني: لامبرهنة في نسق CN هي مبرهنة في AN.

❖ 4.2 (~ق←ق)← ق).

1- 1.2 (قvق)←ق.

2- بالتعريف: ق ←ك =تع ~قvك.

3- (~ق←ق)←ق).

4- 1.2، 1.01 x = 4.2 من CN.

نسق نيكود Système de Nicode

المتغيرات: ق، ك، ل.....

الروابط: ^ن v، ، ←..←→

اللامعرفات: التنافر Incompatibilité

الإثبات ⊢ ، التنافر | ، النفي المزدوج ↓ ....

المعرفات: ~ق =تع ق|ق

ق	~ق	ق | ق
1	0	0
0	1	1

الوصل	التنافر	ليس ق او ليس ك
1	0	0
0	1	0
0	1	0
0	1	1

ق| ك= ~(ق^ك).

ق	ك	ق^ك	ق	ك	ق|ك	|	ق	ك	ق|ك
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

المسلمات : مسلمة واحدة

{ق((كال)}ا{[(را ر)]ا[(را ك)ا((قار)ا(قار))]}

فهر س الموضوعات

المحتوى.....الصفحة
الفصل الأول: مدخل إلى المنطق الرياضي..... 4-30
أولا: مفهوم المنطق.....4
ثانيا: خاصية الصورية في المنطق..... 8
ثالثا: المنطق الرياضي وظروف نشأته 13
1 المنطق الرياضي ومراحل تطوره 13
2 جبر المنطق مع لايبنيز 16
3 تطور جبر المنطق مع جورج بول 21
4 أزمة الرياضيات وتداعياتها على المنطق 25
الفصل الثاني: المنطق الرياضي الكلاسيكي.....31-54
أولا: أهم المساهمين فيه.....31
1 فريجه 31
2 بيانو 36
3 راسل 40
ثانيا: المنطق الرياضي الكلاسيكي وظهور حساب القضايا.....44
1 القضية.....44
2 القضية والجملة 44
3 أنواع القضايا 45
4 الروابط القضوية 46
5 موضوع حساب القضايا والهدف منه 52
الفصل الثالث: الأنساق المنطقية الرياضية.....55-66
أولا: مفهوم نسق المنطق الرياضي..... 55
ثانيا: شروط النسق المنطقي.....56
ثالثا: قواعد النسق الاشتقاقية 57
رابعا: نماذج من الأنساق المنطقية 59