

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Mécanique  
Option : Construction Mécanique



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
تخصص: إنشاءات ميكانيكية

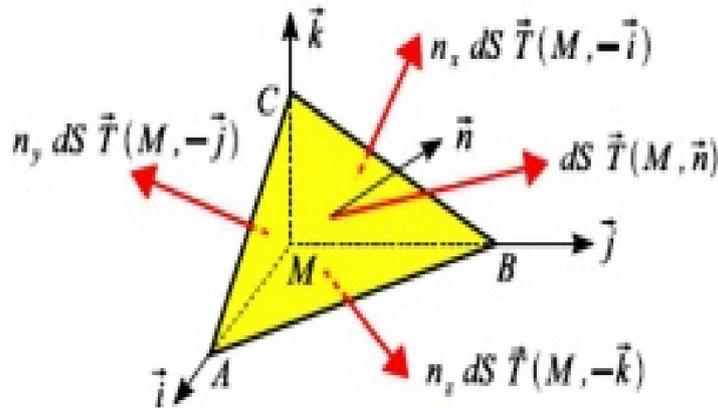
Ouvrage pédagogique  
A l'usage des étudiants de Licence  
Génie mécanique

# Cours Elasticité

Par :

Dr. DJEBLOUN Youcef

Pr. HECINI Mabrouk



# Sommaires

<b>Avant-propos</b>	01
<b>Chapitre I : Introduction, Rappel Mathématique</b>	02
I.1 Définitions de l'élasticité	02
I.2 Pourquoi étudier l'élasticité ?	02
I.2.1 Stabilité et instabilité des structures mécaniques	02
I.2.2 La géométrie est importante	02
I.3 Théorie de l'élasticité	02
I.4 Repère orthonormé direct	03
I.5 Convention de sommation d'Einstein	03
I.6 Symbole de Kronecker	04
I.7 Symbole de Permutation	04
I.8 scalaire et vecteur	04
I.8.1 Opérations sur les vecteurs	04
I.9 Tenseurs	06
I.9.1 Tenseur d'ordre 2	06
I.9.2 Transposé d'un tenseur	07
I.9.3 Tenseurs symétrique et antisymétrique	07
I.10 Matrice associée à un tenseur	07
I.10.1 Théorème	08
I.10.2 Tenseurs particuliers	08
I.11 Opérateur du produit vectoriel	08
I.11.1 Opérateur de projection sur un plan	08
I.11.2 Opérateur de projection sur un axe	09
I.12 Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur	09
I.13 Changement de base orthonormée	11
I.14 Opérateurs différentiels	13
I.14.1 Coordonnées cartésiennes	14
I.14.2 Coordonnées cylindriques	16
I.14.3 Coordonnées sphériques	18
I.15 Autres formules	20

<b>Chapitre II : Tenseurs des Déformations</b>		21
II.1	Introduction	21
II.2	Configuration, vecteur de déplacement	21
II.2.1	Vecteur de déplacement	22
II.3	Tenseur des déformations pures	24
II.3.1	Interprétation des termes élémentaires du taux de déformation	24
II.4	Décomposition de la déformation pure en dilatation $\varepsilon$ et glissement $g$	25
II.5	Déformations et directions principales	26
II.6	Invariants scalaires du tenseur des déformations	27
II.7	Tenseur sphérique et déviateur	27
II.8	Déformation plane	28
<b>Chapitre III : Tenseurs des Contraintes</b>		32
III.1	Actions mécaniques sur un milieu continu	32
III.1.1	Les actions mécaniques extérieures	32
III.1.2	Les actions mécaniques intérieures	33
III.2	Coupure, facette et vecteur contrainte	33
III.3	Tenseur des contraintes (Formule de Cauchy)	34
III.4	Symétrie du tenseur des contraintes	35
III.5	Décomposition de la contrainte en contrainte normale et tangentielle	36
III.6	Equations de l'équilibre	36
III.7	Contraintes principales et directions principales	37
III.8	Invariants scalaires du tenseur des contraintes	37
III.9	Tenseur sphérique et déviateur	38
III.10	Etats de contrainte particuliers	38
III.10.1	Etats sphérique	38
III.10.2	Etats uniaxial	38
III.10.3	Etats de cisaillement pur	38
III.10.4	Etats plan	38
<b>Chapitre IV : Lois de Hooke</b>		42
<b>(Relations contraintes – déformations)</b>		
IV.1	Introduction	42
IV.2	Vecteur contraintes et déformations	42
IV.3	Loi de Hooke généralisée	42
IV.4	Anisotropie et isotropie	44
IV.4.1	Élasticité anisotrope	44
IV.5	Thermo-élasticité linéaire	46

	<b>Chapitre V: Critères de résistance</b>	49
V.1	Critères de limite élastique	49
V.1.1	Critère de Rankine	49
V.1.2	Critère de Tresca	49
V.1.3	Critère de Von Mises	50
	<b>Références Bibliographiques</b>	53

## **Avant-propos**

*Ce polycopié contient des cours de l'élasticité. Il est destiné aux étudiants de licence de génie mécanique.*

*Le présent document a pour objectif de rappeler brièvement les notions essentielles de l'algèbre linéaire, calcul matriciel, calcul différentiel et intégral. Ainsi la Mécanique de la résistance des matériaux, considérées comme des pré-requis dont il est fait abondamment usage tant dans le cours de l'élasticité. Il se focalise sur les tenseurs des contraintes et des déformations ainsi que les lois de Hooke.*

*Cet ouvrage est divisé en cinq chapitres : le premier a été consacré à un rappel de mathématique comportant les outils de bases nécessaires aux développements des différents concepts de l'élasticité. Le deuxième chapitre présente la théorie des déformations. Dans le troisième chapitre nous avons présenté les tenseurs de contraintes des milieux continus. Nous avons aussi présenté dans le quatrième chapitre la relation entre les contraintes et les déformations et les concepts fondamentaux des lois de comportements pour un milieu continu élastique. Pour terminer le cinquième chapitre présente les critères de résistance.*

## Chapitre I : Introduction, Rappel Mathématique

### I.1. Définitions de l'élasticité

En physique, l'élasticité est la propriété d'un matériau solide de retrouver sa forme initiale (forme d'origine) après déformation. On distingue élasticité linéaire et non-linéaire. Dans ce cours : on s'intéresse à l'élasticité linéaire.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation.

### I.2. Pourquoi étudier l'élasticité ?

#### I.2.1. Stabilité et instabilité des structures mécaniques

- Pour la construction de ponts, routes, structures en béton (immeubles ...), forme d'un profilée, taille maximale d'un immeuble, ... ,
- Fibres, tissus synthétiques, ....



Figure. I.1 : Structures en béton

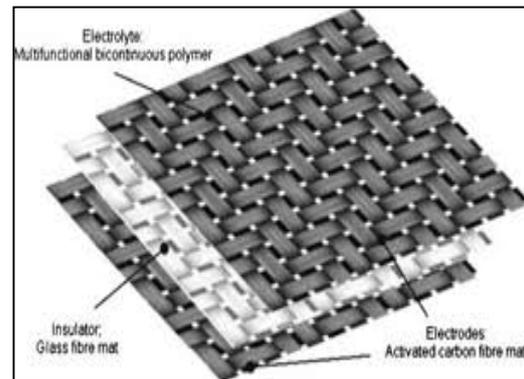


Figure. I.2 : Tissus en fibres synthétique

#### I.2.2. Importance de la géométrie

- Exemple des poutres profilées utilisées dans le bâtiment,
- Exemple du caoutchouc (un élastomère préparé en tubes, en rubans).

### I.3. Théorie de l'élasticité

La théorie de l'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.

Où :

Le déplacement désigne originellement un changement de position.

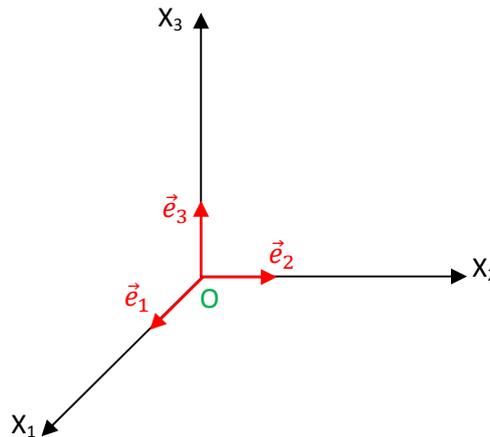
Les déformations sont des variations relatives des longueurs et des angles,

Les contraintes expriment force par unité de surface, sont l'effet de forces extérieurs en chaque point du solide.

#### I.4. Repère orthonormé direct

Le repère  $\{O; x_1, x_2, x_3\}$  est un repère orthonormé direct défini par une base unitaires  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  des axes  $ox_1, ox_2, ox_3$  qui sont égales et perpendiculaires en O.

Base orthonormée : *orthogonale* :  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$  et  $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$   
*normé*:  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$



**Figure. I.3** : Repère orthonormé

Le repère  $\{O; x_1, x_2, x_3\}$  lié au solide reste bien orthonormé et parfaitement défini lorsque le solide se déforme par rapport à lui.

Le choix et la définition précise d'un tel repère indéformable lié à un solide déformable se révéleront très importants dans la théorie de l'élasticité.

#### I.5. Convention de sommation d'Einstein

Dans les calculs en mécanique, on aura souvent à manipuler des expressions de la forme suivante:

$$a_i b_i = \sum_1^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Les indices peuvent être placés en haut ou en bas. Ils sont répétés deux fois. Il ne désigne pas des puissances mais ils représentent la sommation.

Sommation sur plusieurs indices

$$a_j^i b^i c^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^i b^i c^j$$

Exemple :

$$a_j^i b^i c^j = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_j^i b^i c^j$$

$$a_j^i b^i c^j = a_1^1 b^1 c^1 + a_2^2 b^2 c^2 \quad (\text{Sommaton sur l'indice } i)$$

$$= a_1^1 b^1 c^1 + a_2^1 b^1 c^2 + a_1^2 b^2 c^1 + a_2^2 b^2 c^2 \quad (\text{Sommaton sur l'indice } j)$$

### I.6. Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker  $\delta$  est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

### I.7. Symbole de Permutation

Le symbole de permutation  $\varepsilon$  est défini comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3,2,1), (2,1,3) \text{ ou } (1,3,2), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k. \end{cases}$$

### I.8. Scalaire et vecteur

- **Un scalaire** est une grandeur totalement définie par un nombre et une unité. (temps, température, masse, énergie, volume, ... etc)

- **Un vecteur** est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et un module.

#### I.8.1. Opérations sur les vecteurs

Soient deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  définis dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  munit de la base orthonormée  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

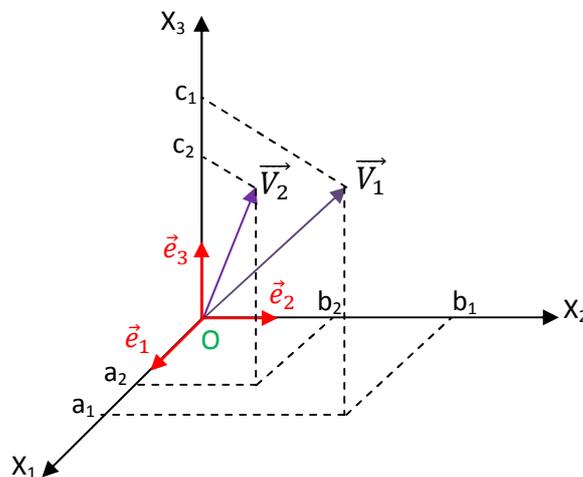


Figure. I.4 : Présentation des vecteurs

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  sont respectivement les composantes des vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  dans la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , tel que :

$$\vec{V}_1 = a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{V}_2 = a_2 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3$$

- Le module d'un vecteur

$$|\vec{V}_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$

- La somme de deux vecteurs

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (a_1 + a_2)\vec{e}_1 + (b_1 + b_2)\vec{e}_2 + (c_1 + c_2)\vec{e}_3$$

- La multiplication par un scalaire

$$\forall \lambda \in R, \quad \lambda \cdot \vec{V}_1 = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda b_1 \vec{e}_2 + \lambda c_1 \vec{e}_3$$

- Produit scalaire donne un scalaire

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$$

- Produit vectoriel donne un vecteur

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{e}_1 - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$$

- Produit tensoriel donne un tenseur

$$T = \vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = (a_1 a_2, a_1 b_2, a_1 c_2, b_1 a_2, b_1 b_2, b_1 c_2, c_1 a_2, c_1 b_2, c_1 c_2)$$

## I.9. Tenseurs

Les tenseurs sont la généralisation des scalaires et des vecteurs. Un tenseur est un mot générique d'entités mathématiques qui désigne une quantité physique. La description d'un tenseur dépend du repère de référence utilisé. Un tenseur  $T$  est un opérateur (application) linéaire sur  $\mathbb{R}^3$  dont les composantes sont définis par rapport à une base.

Ordre	Entité	Dimension	Nbr. composantes	Notation
0	Scalaire	2D 3D	$2^0=1$ $3^0=1$	a
1	Vecteur	2D 3D	$2^1=2$ $3^1=3$	$a_i$
2	Tenseur	2D 3D	$2^2=4$ $3^2=9$	$a_{ij}$
N	Tenseur	2D 3D	$2^n$ $3^n$	$a_{ijk..}$

### I.9.1. Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 (représenté par une matrice) est un ensemble de neuf (09) composantes (repère 3D) définies dans un repère (O;  $X_1, X_2, X_3$ ) est donnée par la formule suivante.

$$T = a_i b_j \vec{E}_{ij} = a_i b_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 t_{ij} \vec{E}_{ij}$$

Où :  $t_{ij}$  sont les composantes de la matrice associée au tenseur  $T$ .

$\vec{E}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  est la base de définition des tenseur d'ordre 2.

Exemple:

Soient deux vecteurs :  $X = (2, 1, 3)$  et  $Y = (-3, 4, -1)$  définis dans la base orthonormée  $\{e_i\}$ .

Effectuer le produit tensoriel  $T = X \otimes Y$  et écrire les composantes  $t_{ij}$  de  $T$  sous forme matricielle.

Solution :

Produit tensoriel

$$\begin{aligned} T = X \otimes Y &= [2 \times (-3), 2 \times 4, 2 \times (-1), 1 \times (-3), 1 \times 4, 1 \times (-1), 3 \times (-3), 3 \times 4, 3 \times (-1)] \\ &= (-6, 8, -2, -3, 4, -1, -9, 12, -3) \end{aligned}$$

Est La matrice associée au tenseur  $T$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -9 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

### I.9.2. Transposé d'un tenseur

On appelle transposé de  $A$  un tenseur noté  ${}^tA$  ou  $A^t$  et tel que :

$$\forall \vec{x}, \vec{x}' \vec{x}' A \vec{x} = \vec{x} A^t \vec{x}'$$

Ou :

$$\forall \vec{x}, \vec{x}' x_i A_{ij} x_j = x_j A_{ji}^t x_i$$

Donc  $A_{ij} = A_{ji}^t$  (permutation des lignes et des colonnes).

**Note:**  $(A^t)^t = A$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### I.9.3. Tenseurs symétrique et antisymétrique

- Un tenseur est symétrique s'il est égal à son transposé :

$$T \text{ symétrique} \Leftrightarrow T = T^t \Leftrightarrow t_{ij} = t_{ji}$$

- Un tenseur est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de son transposé :

$$T \text{ antisymétrique} \Leftrightarrow T = -T^t \Leftrightarrow t_{ij} = -t_{ji}$$

### I.10. Matrice associée à un tenseur

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est une base sur  $\mathbb{R}^3$ ,

Si  $\vec{Y}$  est un vecteur tel que  $\vec{Y} = A\vec{X}$ , alors les composantes de  $\vec{Y}$  sont données par :

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3$$

$$Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3$$

$$Y_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3$$

En utilisant les conventions de sommation où  $i$  est un indice muet

$$Y_j = A_{ji} X_i$$

Et en notation matricielle

$$\{Y\} = [A]\{X\}$$

$[A]$  matrice associée au tenseur  $A$

La matrice  $[A]$  est la représentation d'une application linéaire, dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Cette application est représentée par une matrice  $3 \times 3$ .

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Où :  $a_{ij}$  sont les composantes de la matrice  $A$ .

**I.10.1. Théorème**

Tout tenseur se décompose d'une façon unique en la somme d'un tenseur symétrique et d'un autre antisymétrique.

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2} = A_s + A_a \Rightarrow \begin{cases} A_s = \frac{A + A^t}{2} & \text{est symétrique} \\ A_a = \frac{A - A^t}{2} & \text{est antisymétrique} \end{cases}$$

**I.10.2. Tenseurs particuliers**

- Matrice unitaire I telle que :  $I_{ij} = \delta_{ij}$ ,
- Matrice inverse  $(A)^{-1}$  telle que  $(A).(A)^{-1} = I$ ,
- Matrice orthogonale :  $A^t = (A)^{-1}$ ,
- Trace d'une matrice :  $tr(A) = \delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ .

**I.11. Opérateur du produit vectoriel**

Soient deux vecteurs  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Le produit vectoriel de  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  donne un vecteur appelé pseudo vecteur noté  $(\vec{n} \wedge \vec{u})$  tel que :

$$(\vec{n} \wedge \vec{u}) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2u_3 - n_3u_2 \\ n_3u_1 - n_1u_3 \\ n_1u_2 - n_2u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice antisymétrique  $(*n)$  donné par :

$$(*n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

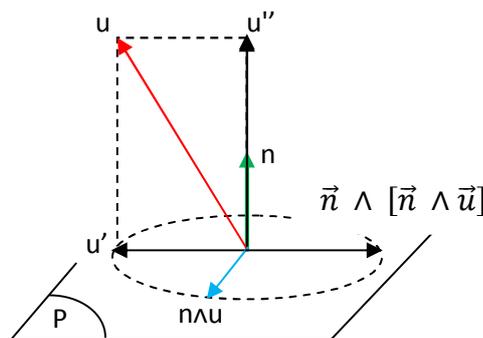
$(*n)$  est la matrice du tenseur produit vectoriel à gauche par  $\vec{n}$ .

**I.11.1. Opérateur de projection sur un plan**

$\vec{n}$  vecteur unitaire normal au plan P

$\vec{u}$  vecteur dans l'espace définit par ses composantes  $u'$  et  $u''$ :

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$$



**Figure. I.5 : Projection d'un vecteur**

$u'$  : composante orthogonale sur le plan P

$u''$  : composante suivant l'axe d'unitaire  $\vec{n}$

D'après le schéma la composante  $\vec{u}'$  est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{u}' = -\vec{n} \wedge [\vec{n} \wedge \vec{u}] \Rightarrow \vec{u}' = -(*n)^2 \vec{u}$$

Où :

$-(*)n^2$  est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur le plan P.

### I.11.2. Opérateur de projection sur un axe

On définit la composante  $\vec{u}''$  par l'expression suivante :

$$\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}' = \vec{u} + (*n)^2 \vec{u} = [I + (*n)^2] \vec{u}$$

$[I + (*n)^2]$  est la matrice de l'opérateur projection orthogonale sur l'axe d'unitaire  $\vec{n}$ .

**Remarque:** si le vecteur  $\vec{n}$  est unitaire ( $|\vec{n}| = 1$ ) alors :  $[I + (*n)^2] = (\vec{n})^t (\vec{n})$

### I.12. Valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur

Dans une transformation linéaire, un vecteur  $\vec{V}$  d'origine (0,0) et d'extrémité  $(x_1, x_2)$  se transforme en vecteur  $\vec{V}'$  d'origine (0,0) et d'extrémité  $(x'_1, x'_2)$ , il subit alors une rotation et un allongement (ou rétrécissement).

La transformation engendre un changement de direction et un changement de module des vecteurs.

Si on veut s'intéresser aux vecteurs qui ne subissent pas de rotation avec la transformation alors on cherche  $\vec{V}'$  qui restent parallèles à  $\vec{V}$ :

$$\vec{V}' // \vec{V} \Leftrightarrow \vec{V}' = \lambda \vec{V}$$

$\lambda$  est une constante scalaire.

En utilisant la transformation :

$$A\vec{V} = \lambda \vec{V}$$

Ce qui donne

$$(A - \lambda I)\vec{V} = \vec{0}$$

Qui possède une solution non triviale  $V \neq 0$  si le déterminant :  $\det(A - \lambda I) = 0$

Les racines de cette équation sont appelées valeurs propres de la matrice A et les vecteurs  $\vec{X}$  correspondant sont appelés vecteurs propres déterminés par la solution de l'équation :

$$(A - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}$$

Note :

Si la matrice A est symétrique alors :

1. Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont réelles,
2. Deux vecteurs propres associés à deux valeurs distinctes sont orthogonaux.

**Exemple :**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les directions propres du tenseur A.

Solution :

soient  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  les valeurs propres de A et  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  les directions propres correspondants.

Valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8-\lambda & 8 & 0 \\ 8 & -8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 12-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$(12 - \lambda)[-(8 - \lambda)(8 + \lambda) - 64] = 0 \Rightarrow (12 - \lambda)(\lambda^2 - 128) = 0$$

$$\lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = 8\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -8\sqrt{2}$$

Directions propres :

- Pour  $\lambda_1 = 12$  :

$$(A - \lambda_1 I)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8-12 & 8 & 0 \\ 8 & -8-12 & 0 \\ 0 & 0 & 12-12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4a_1 + 8b_1 + 0c_1 = 0 \\ 8a_1 - 20b_1 + 0c_1 = 0 \\ 0a_1 + 0b_1 + 0c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \text{ La valeur de } c_1 \text{ est quelconque}$$

$$X_1 \text{ vecteur unitaire} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \Rightarrow c_1^2 = 1$$

$$\text{On prend } c_1 = +1 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Pour  $\lambda_2 = 8\sqrt{2}$  :

$$(A - \lambda_2 I)X_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8-8\sqrt{2} & 8 & 0 \\ 8 & -8-8\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 12-8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (8-8\sqrt{2})a_1 + 8b_1 + 0c_1 = 0 \\ 8a_1 - (8+8\sqrt{2})b_1 + 0c_1 = 0 \\ 0a_1 + 0b_1 + (12-8\sqrt{2})c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = -(1-\sqrt{2})a_2 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$X_2$  vecteur unitaire

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \Rightarrow a_2^2 + (1-\sqrt{2})^2 a_2^2 = 1$$

$$\text{On prend } a_2 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = 0,9239 \quad \text{et} \quad b_2 = 0,3827$$

$$\Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 0,9239 \\ 0,3827 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour  $\lambda_3 = -8\sqrt{2}$  :

$$(A - \lambda_3 I)X_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 + 8\sqrt{2} & 8 & 0 \\ 8 & -8 + 8\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 12 + 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (8 + 8\sqrt{2})a_1 + 8b_1 + 0c_1 = 0 \\ 8a_1 - (8 - 8\sqrt{2})b_1 + 0c_1 = 0 \\ 0a_1 + 0b_1 + (12 + 8\sqrt{2})c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = -(1 + \sqrt{2})a_3 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$X_3$  vecteur unitaire

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \Rightarrow a_3^2 + (1 + \sqrt{2})^2 a_3^2 = 1$$

On prend :  $a_3 = -\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = -0,3827$  pour que la base  $\{X_1, X_2, X_3\}$  soit directe  $\Rightarrow b_3 = 0,9239$

$$\Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -0,3827 \\ 0,9239 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$X_3$  peut être trouvé par la relation :  $\vec{X}_3 = \vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2$ .

$$X_3 = X_1 \wedge X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0,9239 \\ 0,3827 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3827 \\ 0,9239 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### I.13. Changement de base orthonormée

Soient  $\{e_i\}$  la base initiale et  $\{f_j\}$  une nouvelle base telle que :  $\{f_j = P_j^i e_i\}$

P : matrice de passage

Si  $\{f_j\}$  est une base orthonormée alors  $(P^{-1}) = (P^t)$

- **Vecteurs**

$$\vec{x} = x^i e_i = \bar{x}^j f_j \Rightarrow P^t \bar{x} = x$$

$\{f_j\}$  est une base orthonormée  $\Rightarrow \bar{x} = (P^t)^{-1}x = (P^{-1})^{-1}x = Px$

- **Tenseurs**

Dans la base initiale  $Y = A(X)$

Dans la nouvelle base  $\bar{Y} = \bar{A}(\bar{X})$  tel que  $\bar{A} = (P)A(P^{-1})$

#### Exemple 1:

Soient trois vecteurs :  $A = (1, 3, -1)$ ,  $B = (2, -6, 1)$  et  $C = (4, 9, -7)$ .

Calculer les composantes du vecteur  $X = (1, 1, 1)$  sur la nouvelle base  $\{A, B, C\}$ .

#### Solution :

Soit la base  $\{f_j\}$  formée par les trois vecteurs A, B et C

$$X = y_j f_j = x_i e_i = y_1 A + y_2 B + y_3 C = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 9 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow FY = X$$

$$\det(F) = 45$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{\det(F)} = \frac{93}{45} = 2,06,$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{\det(F)} = \frac{12}{45} = 0,26,$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(F)} = \frac{-18}{45} = -0,4.$$

$$\text{Donc : } X = \frac{1}{45} (93 \quad 12 \quad -18)$$

### Exemple 2 :

$$\text{Soit la matrice A telle que : } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit  $\{f_j\}$   $j=1,2,3$  une base orthonormée reliée à la base  $\{e_i\}$   $i=1,2,3$  par la matrice de transformation orthogonale  $[P]$  par  $\{f_j\} = [P]\{e_i\}$  telle que :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du tenseur A dans la base  $\{f_j\}$ .

**Solution :**

Soit la matrice  $\bar{A}$  dans la base  $\{f_j\}$  donnée par la relation suivante :

$$\bar{A} = (P)(A)(P^{-1})$$

Où  $(P^{-1})$  est la matrice inverse de la matrice  $(P)$ .

La base  $\{f_j\}$  est orthonormée ( $|f_i| = 1$  et  $f_i \perp f_j$  si  $i \neq j$ )  $\Rightarrow P^t = P^{-1}$

Donc :

$$\bar{A} = (P)(A)(P^t)$$

Alors :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 28 + 6\sqrt{3} & -6 + 8\sqrt{3} & -4 - 12\sqrt{3} \\ -6 + 8\sqrt{3} & 12 - 6\sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ -4 - 12\sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} & 16 \end{pmatrix}$$

**I.14. Opérateurs différentiels**

- **Dérivée partielle**

On note d'une virgule la dérivée partielle, soit,  $i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

$$u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad v_{,ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{et} \quad w_{,iij} = \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x_i \partial x_j}$$

Les opérateurs exposés dans cette partie seront exprimés dans un repère cartésien orthonormé.

- **Opérateur nabla**

Le nabla  $\nabla$  tire son nom d'une lyre antique qui avait la même forme de triangle pointant vers le bas.

Il s'agit d'un opérateur formel de  $R^3$ .

L'opérateur nabla est un vecteur qui composé par les dérivées partielles de coordonnées

- **Le gradient**

L'opérateur gradient (aussi appelé nabla) transforme un scalaire  $f$  en un vectoriel.

$$\vec{\nabla} f = (\overrightarrow{grad} f) = f_{,i}$$

- **La divergence**

L'opérateur divergence transforme un champ vectoriel  $\vec{V}(V_1, V_2, V_3)$  en un scalaire (aussi le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel  $\vec{V}$ ).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \text{scalaire}$$

- **Le laplacien**

Laplacien d'un scalaire :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = f_{,ii}$$

Laplacien d'un vecteur :

$$\Delta(\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \cdot \vec{V}) = v_{i,jj} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

- **Le rotationnel**

Le produit vectoriel entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel  $\vec{V}$ . Le rotationnel obtenu est lui aussi un champ vectoriel.

### I.14.1. Coordonnées cartésiennes

Les opérateurs exposés dans cette partie seront exprimés dans un repère cartésien orthonormé (O; X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>)

a. Gradient d'une fonction scalaire

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) f = f_{,i} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

b. Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = f_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

c. Divergence d'un vecteur  $\vec{V}$  (défini par ses trois composantes) :

$$v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3) \text{ et } v_3(x_1, x_2, x_3).$$

$$\text{div}(\vec{v}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \cdot (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) = v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

d. Laplacien d'un vecteur

$$\Delta(\vec{v}) = v_{i,jj} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

e. Rotationnel d'un vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

f. Gradient d'un vecteur est un tenseur d'ordre 2

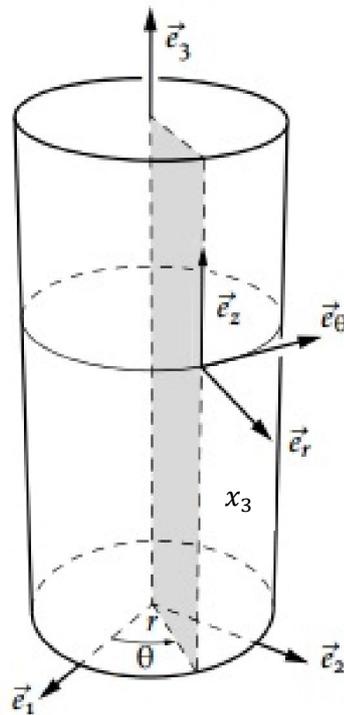
$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

g. Divergence d'un tenseur est un vecteur

$$\text{div} T = T_{ij,j} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

### I.14.2. Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont  $(O ; r, \theta, x_3)$ ,



**Figure. I.6 :** Coordonnées cylindriques

On liés avec les coordonnées cartésiennes par la relation suivante :

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

$$x_3 = x_3$$

La base des coordonnées cylindriques:

$$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_3$$

P la matrice de passage de la base cartésienne a la base cylindrique

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_3 \end{pmatrix} = [P] \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Gradient d'une fonction scalaire  $f(r, \theta, x_3)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

b. Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

c. Divergence d'un vecteur  $\vec{V}$  (défini par ses trois composantes :  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta, x_3) \\ v_\theta(r, \theta, x_3) \\ v_3(r, \theta, x_3) \end{pmatrix}$ )

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

d. Laplacien d'un vecteur

$$\Delta \vec{V} = \left( \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left( \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \Delta v_3 \vec{e}_3$$

e. Rotationnel d'un vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \right) \vec{e}_3$$

f. Gradient d'un vecteur est un tenseur d'ordre 2

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{V}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Tenseur d'ordre deux :

$$A = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{r3} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\theta} & A_{\theta 3} \\ A_{3r} & A_{3\theta} & A_{33} \end{bmatrix}$$

a. Divergence d'un tenseur d'ordre 2

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \left[ \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{rr} - A_{\theta\theta}) + \frac{\partial A_{r3}}{\partial x_3} \right] \vec{e}_r \\ &+ \left( \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} A_{\theta r} + \frac{\partial A_{\theta 3}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial A_{3r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{3\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_{3r} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \right) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

### I.14.3. Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, les coordonnées deviennent :

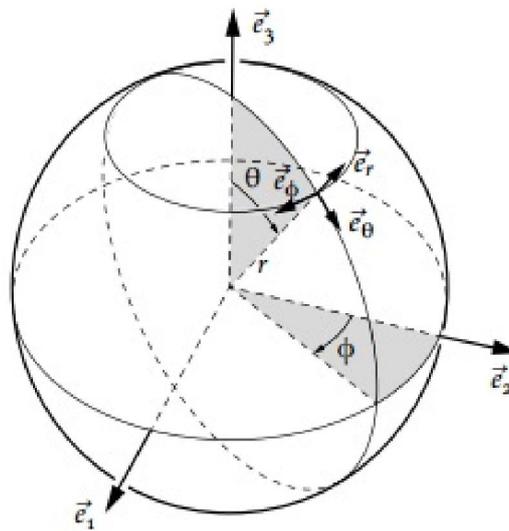


Figure. I.7 : Coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \phi$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

La base des coordonnées sphériques :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \sin \phi \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_\phi = \cos \phi \vec{e}_1 - \sin \phi \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \sin \phi \vec{e}_1 + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3$$

La matrice de passage de la base cartésienne à la base sphérique est donc :

$$P = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

a. Gradient d'une fonction scalaire  $f(r, \phi, \theta)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

b. Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

c. Divergence d'un vecteur  $\vec{V}$  (défini par ses trois composantes :  $\vec{v} = \begin{cases} v_r(r, \phi, \theta) \\ v_\phi(r, \phi, \theta) \\ v_\theta(r, \phi, \theta) \end{cases}$ )

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta v_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r v_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\theta) \right]$$

d. Rotationnel d'un vecteur

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} (r v_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\phi) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) \vec{e}_\phi \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

e. Gradient d'un vecteur est un tenseur d'ordre 2:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{V}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \tan^{-1} \theta & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \tan^{-1} \theta & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \end{bmatrix}$$

Tenseur d'ordre deux :

$$A = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\phi} & A_{r\theta} \\ A_{\phi r} & A_{\phi\phi} & A_{\phi\theta} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\phi} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

a. Divergence d'un tenseur d'ordre 2

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A = & \left[ \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2A_{rr} - A_{\phi\phi} - A_{\theta\theta} + A_{\theta r} \tan^{-1} \theta) \right] \vec{e}_r \\ & + \left[ \frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3A_{\phi r} + A_{\phi\theta} \tan^{-1} \theta) \right] \vec{e}_\phi \\ & + \left[ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (A_{\theta\theta} \tan^{-1} \theta - A_{\phi\theta} \tan^{-1} \theta + 3A_{\theta r}) \right] \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

### I.15. Autres formules

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(u \cdot v) = a \overrightarrow{\operatorname{grad}} b + b \overrightarrow{\operatorname{grad}} a$$

$$\operatorname{div}(a \vec{b}) = a \operatorname{div} \vec{b} + \vec{b} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} a$$

$$\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}) = \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u) = 0 \quad \forall u$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u}$$

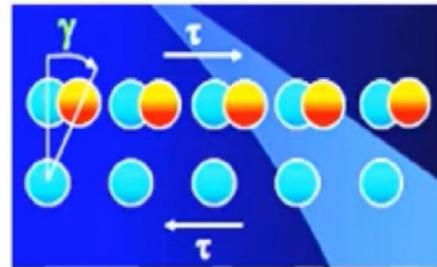
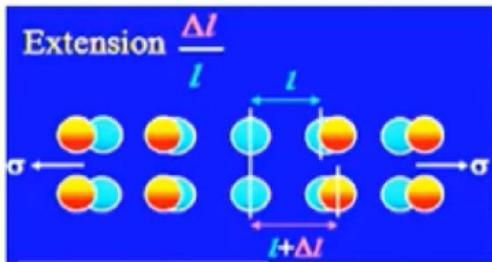
$$\Delta \vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u})$$

## Chapitre II : Tenseurs des Déformations

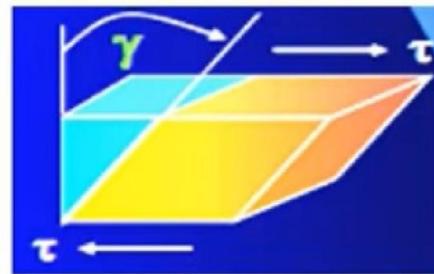
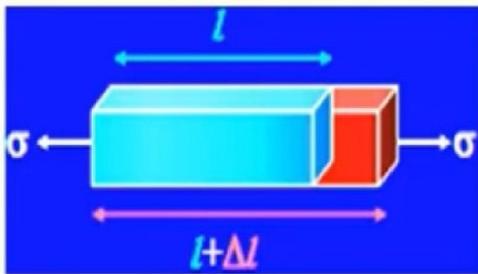
### II.1. Introduction

Un corps est dit déformable si lorsqu'on lui applique des efforts, les distances relatives entre ses particules sont variables au cours du temps (par opposition aux corps rigides).

- A l'échelle microscopique



- A l'échelle macroscopique



Extension  $\frac{\Delta l}{l}$

Glissement  $\gamma$

Figure. II.1 : Déformation d'un corps solide

### II.2. Configuration, vecteur de déplacement

Une propriété essentielle du milieu continu, c'est qu'une fois soumis à des contraintes, les éléments de volumes subissent des changements de position, d'orientation et de forme que nous allons préciser. Considérons dans un référentiel cartésien, la position du point P d'un corps continu avant et après la déformation (déformation infinitésimal).

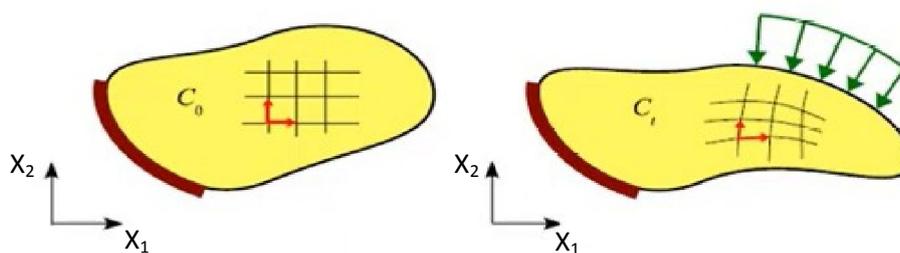


Figure. II.2 : Configuration initiale  $C_0$  et configuration courante  $C_t$

Le volume occupé par le solide à l'instant  $t$  est noté  $C_t$  et appelé configuration courante, la configuration initiale  $C_0$  est la configuration de référence.

### II.2.1. Vecteur de déplacement

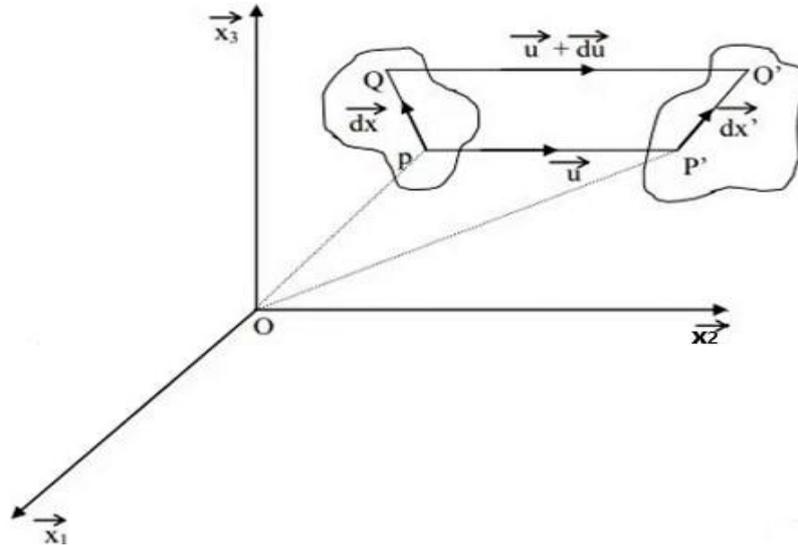


Figure. II.3 : Vecteur de déplacement

Dans l'état initial (0), une particule P de ce domaine occupe la position  $P(x_1, x_2, x_3)$ ; dans l'état final (t), elle occupe la position  $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Soient  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les composantes du vecteur déplacement  $\overrightarrow{PP'}$  de P.

La particule courante Q du domaine élémentaire  $D$  occupe dans l'état (0) et (t) les positions respectives  $Q(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$  et  $Q'$ ; son **vecteur déplacement**  $\overrightarrow{QQ'}$  a pour composantes  $u_1+du_1, u_2+du_2$  et  $u_3+du_3$ .

On a donc les égalités :

$$\overrightarrow{QQ'} \begin{cases} u_1 + du_1 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ u_2 + du_2 = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ u_3 + du_3 = u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{cases}$$

Qui peuvent s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_1 + du_1 \\ u_2 + du_2 \\ u_3 + du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Ou encore, sous forme condensée :

$$\{\overline{QQ'}\} = \{\overline{PP'}\} + [\overline{grad(PP')}] \{\overline{PQ}\}$$

Où :

$[\overline{grad(PP')}]$  désigne le tenseur gradient du vecteur déplacement.

Donc :

$$[\overline{grad(PP')}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

**Remarque :**

Dans le cas des petites déformations, les termes du tenseur  $[\overline{grad(PP')}]$  sont très petits devant 1.

Comme tout tenseur d'ordre deux,  $[\overline{grad(PP')}]$  se décompose en partie symétrique  $\xi$  et partie antisymétrique  $\Omega$  soit :

$$\overline{grad(PP')} = \xi + \Omega \text{ avec } \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} [\overline{grad(PP')} + \overline{grad^t(PP')}] \\ \Omega = \frac{1}{2} [\overline{grad(PP')} - \overline{grad^t(PP')}] \end{cases}$$

Où :

$$\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

et

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Si bien que la formule précédente peut aussi s'écrire :

$$\{\overline{QQ}\} = \{\overline{PP'}\} + [\Omega] \{\overline{PQ}\} + [\xi] \{\overline{PQ}\}$$

D'après l'hypothèse des petits gradients de déplacement, la formule précédente comportant trois termes, nous permet de considérer la transformation d'un domaine entourant P comme la somme de trois transformations.

1. La première transformation est une translation de vecteur  $\overline{PP'} = (u_1, u_2, u_3)$ ;
2. La seconde transformation est une rotation d'angle  $\omega$ , représentée par le tenseur antisymétrique  $\Omega$ , avec  $[\Omega]\{\overline{PQ}\} = \vec{\omega} \wedge \overline{PQ}$  où  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\overline{PQ})$  ;
3. La troisième transformation traduit une déformation pure caractérisée par le tenseur symétrique  $\xi$ .

### II.3. Tenseur des déformations pures

Le tenseur des déformations pures se réduit à :

$$\xi = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Si  $i=j$ ,  $\varepsilon_{ii}$  est appelé taux de déformation linéaire ou linéique :  $\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

Si  $i \neq j$ ,  $\varepsilon_{ij}$  est appelé taux de déformation angulaire :  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

#### II.3.1. Interprétation des termes élémentaires du taux de déformation

##### a. Termes diagonaux

Les termes diagonaux  $\varepsilon_{ii}$  sont les allongements relatifs dans la direction  $i$  (selon l'axe  $i$ ).

Prenons le cas d'un rectangle, ou nous intéressons à la partie de la déformation également parallèle à  $x_1$  et  $x_2$ .

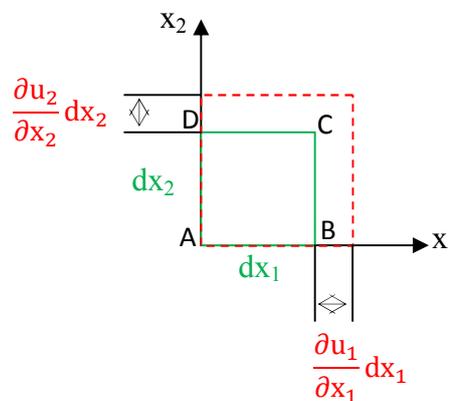


Figure. II.4 : Déformation linéique

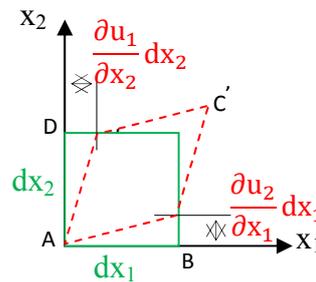
Ou  $u_1$  et  $u_2$  sont les composantes de  $U$  selon les axes  $x_1$  et  $x_2$ , ces allongements sont données comme suit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

**b. Coefficients dus au cisaillement**

Les autres termes  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) sont les angles  $\gamma$ , demi-variations de l'angle droit d'un petit volume de matière cubique avant déformation.

Soit un rectangle ABCD, où [AB] parallèle à  $x_1$  et [AD] est parallèle à  $x_2$ , se transforme en un losange AB'C'D' symétrique selon la première bissectrice du plan.



**Figure. II.5 : Déformation angulaire**

Pour les petites déformations, on a :  $\text{tg}(\gamma) = \gamma$ .

Une rotation n'étant pas une déformation, on peut supposer que les deux angles  $\gamma$  sont égaux, quitte à faire pivoter le losange et ainsi :

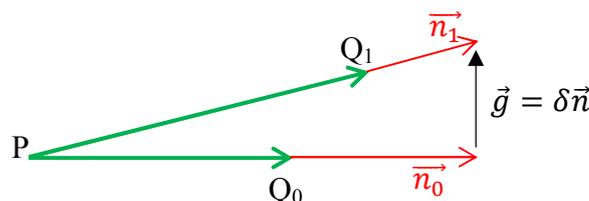
$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{12}$$

Dans le cas général :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

**II.4. Décomposition de la déformation pure en dilatation  $\varepsilon$  et glissement  $g$**

Soit une fibre PQ du domaine D, infiniment délié de longueur  $l$ . au cours de la déformation sa longueur varie de  $l_0$  à  $l_1$  et sa direction change, l'unitaire de son axe passant de  $\vec{n}_0$  à  $\vec{n}_1$ .



**Figure. II.6 : Déformation d'un vecteur unitaire**

On définit pour cette fibre.

- La dilation linéique relative :  $\varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\delta PQ}{PQ}$
- Le vecteur glissement:  $\vec{g} = \vec{n}_1 - \vec{n}_0 = \delta \vec{n}$ , dont le module.

$g$ , nommé taux de glissement, est la mesure en radian de l'angle  $(\vec{n}_0, \vec{n}_1)$ .

On note que  $\varepsilon$  et  $g$  sont des quantités sans dimension petites devant l'unité.

La variation du vecteur  $\overrightarrow{PQ} = PQ\vec{n}$  au cours de la déformation est:

$$\delta \overrightarrow{PQ} = \delta PQ \vec{n} + PQ \delta \vec{n}$$

Soit :

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \varepsilon PQ \vec{n} + PQ \vec{g}$$

En divisant les deux membres par  $PQ$ , compte tenu l'égalité

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_0Q_1} &= \xi \overrightarrow{P_0Q_0} \\ \Rightarrow \xi \overrightarrow{PQ} &= \varepsilon PQ \vec{n} + PQ \vec{g} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\xi \vec{n} = \varepsilon \vec{n} + \vec{g} \quad \text{avec : } \vec{n} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{PQ}$$

Où :

$\varepsilon \vec{n}$  : c'est la projection de  $\xi$  sur  $\vec{n}$  la normale au plan  $\pi$ .

$\vec{g}$  : c'est la projection de  $\xi$  sur le plan  $\pi$ .

D'où sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \varepsilon = \{\vec{n}\}^t \cdot [\xi] \cdot \{\vec{n}\} \text{ dilatation} \\ g = |(*n) \cdot \xi \cdot (\vec{n})| \text{ ou } g = \sqrt{|\xi(n)|^2 - \varepsilon^2} \text{ glissement} \end{cases}$$

## II.5. Déformations et directions principales

Le tenseur des déformations  $\xi$  à est composé de valeurs réelles, il existe alors une base orthonormée

$(\vec{X}_I, \vec{X}_{II}, \vec{X}_{III})$  telle que le tenseur des déformations est une matrice diagonale :

$$\xi = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}_{\{\vec{X}_I, \vec{X}_{II}, \vec{X}_{III}\}}$$

Les directions  $(\vec{X}_I, \vec{X}_{II}, \vec{X}_{III})$  sont appelées directions principales (orthonormées) ;

Les déformations  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$  sont les déformations principales.

Les déformations principales sont les valeurs propres  $\lambda$  du tenseur et les directions propres ses vecteurs propres.

Les valeurs propres  $\lambda$  vérifient l'équation :

$$\det|\xi - \lambda I| = 0$$

Avec  $I$  est la matrice identité.

Les vecteurs propres orientent les directions principales de déformations. Ils sont solutions vectorielles de l'équation :

$$(\xi - \varepsilon_i I)\vec{X}_i = \vec{0}$$

Où  $\varepsilon_i$  est une déformation principale. Naturellement la solution n'est pas unique mais il faut ajouter les conditions suivantes :

1.  $\|\vec{X}_i\| = 1$  ;
2.  $\{\vec{X}_I, \vec{X}_{II}, \vec{X}_{III}\}$  forme un trièdre direct.

## II.6. Invariants scalaires du tenseur des déformations

Les invariants du tenseur des déformations sont les coefficients de l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} \det|\xi - \lambda I| &= 0 \\ \Rightarrow -\lambda^3 + (\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})\lambda^2 - (\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III})\lambda + \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} &= 0 \end{aligned}$$

Comme le nom l'indique, ils sont indépendants du choix de la base de projection du tenseur  $\xi$ , ce sont :

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} = Tr(\xi) \\ E_2 &= \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III} \\ E_3 &= \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} = det(\xi) \end{aligned}$$

## II.7. Tenseur sphérique et déviateur

Dans le repère principal le tenseur sphérique et déviateur sont donnés par la relation suivante :

$$\xi = \xi_s + \xi_d$$

Avec :

$\xi_s = \frac{E_1}{3}I$  et  $(E_1 = Tr(\xi))$  : la partie sphérique de  $\xi$  (Transformation responsable de la dilatation volumique) ;

$\xi_d = \xi - \frac{E_1}{3}I$  : la partie déviateur de  $\xi$  (Transformation de glissement).

## II.8. Déformation plane

- Vecteur de déplacement :

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\u_2 &= u_2(x_1, x_2) \\u_3 &= \text{constant}\end{aligned}$$

- Tenseur de déformation

$$\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tenseur de rotation

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Exercice :

On considère le champ de déplacement  $\vec{U} = \overrightarrow{P_0P_1} = (u_1, u_2, u_3)$  suivant :

$$u_1 = 2x_1 + 4x_2$$

$$u_2 = 2x_1 + 2x_2$$

$$u_3 = x_3$$

1. Déterminer le tenseur  $\overrightarrow{Grad}U$ .
2. Dédire les tenseurs des déformations  $\xi$  et des rotations  $\Omega$  ainsi que le pseudo-vecteur de rotation  $\omega$ .
3. Déterminer les déformations et les directions principales.
4. Tracer la base  $(O X_I X_{II} X_{III})$  dans la base initiale.
5. Déterminer l'allongement unitaire et le glissement relatif dans la direction  $\vec{n}$  faisant un angle de  $60^\circ$  avec l'axe  $ox_1$  et perpendiculaire à l'axe  $ox_3$ .
6. Vérifier les invariants du tenseur des déformations  $E_1$  et  $E_3$ .

### Solution :

$$u_1 = 2x_1 + 4x_2$$

$$u_2 = 2x_1 + 2x_2$$

$$u_3 = x_3$$

1- Le tenseur  $\overrightarrow{Grad}U$  :

$$\overrightarrow{grad}U = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Déterminations

Tenseur des déformations :

$$\xi = \frac{1}{2}(\overrightarrow{grad}U + \overrightarrow{grad}^tU) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenseur des rotations :

$$\Omega = \frac{1}{2}(\overrightarrow{grad}U - \overrightarrow{grad}^tU) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pseudo-vecteur de rotation  $\omega$

$$(* n) = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ D'après cette relation on trouve } \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3- Déterminer les déformations principales et les directions principales.

Déformations principales

$$\det|\xi - \lambda I| = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - (3)^2] = 0$$

$$\text{En trouve : } \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \varepsilon_I = 1 \\ \varepsilon_{II} = 5 \\ \varepsilon_{III} = -1 \end{cases}$$

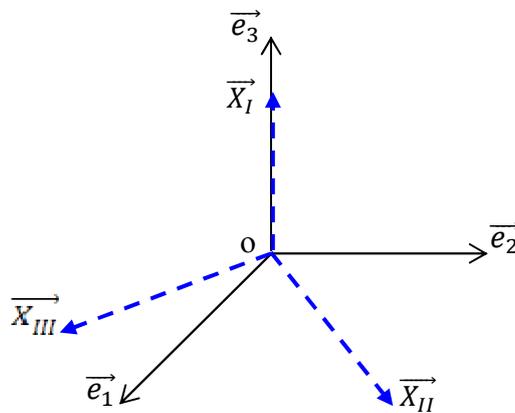
Directions principales

$(\xi - \varepsilon_i I)\vec{X}_i = \vec{0}$  d'après cette relation on trouve :

pour  $\varepsilon_I = 1 \Rightarrow \vec{X}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , pour  $\varepsilon_{II} = 5 \Rightarrow \vec{X}_{II} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  et pour  $\varepsilon_{III} = -1 \Rightarrow \vec{X}_{III} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

4- Tracer la base  $(O X_I X_{II} X_{III})$  dans la base initiale, déterminer les angles  $(\widehat{x_1, X_I})$ ,  $(\widehat{x_1, X_{II}})$ ,  $(\widehat{x_1, X_{III}})$ .

Traçage de la base  $(O \vec{X}_I, \vec{X}_{II}, \vec{X}_{III})$  dans la base initiale  $(O \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



Détermination des angles  $(\widehat{x_1, X_I})$ ,  $(\widehat{x_1, X_{II}})$ ,  $(\widehat{x_1, X_{III}})$ .

1.  $e_1 \cdot X_I = |e_1| \cdot |X_I| \cdot \cos(\widehat{x_1, X_I}) \Rightarrow \cos(\widehat{x_1, X_I}) = \frac{e_1 \cdot X_I}{|e_1| \cdot |X_I|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = 0 \Rightarrow (\widehat{x_1, X_I}) = 90^\circ$

2.  $e_1 \cdot X_{II} = |e_1| \cdot |X_{II}| \cdot \cos(\widehat{x_1, X_{II}}) \Rightarrow \cos(\widehat{x_1, X_{II}}) = \frac{e_1 \cdot X_{II}}{|e_1| \cdot |X_{II}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\widehat{x_1, X_{II}}) = 45^\circ$

3.  $e_1 \cdot X_{III} = |e_1| \cdot |X_{III}| \cdot \cos(\widehat{x_1, X_{III}}) \Rightarrow \cos(\widehat{x_1, X_{III}}) = \frac{e_1 \cdot X_{III}}{|e_1| \cdot |X_{III}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\widehat{x_1, X_{III}}) = 45^\circ$

- 5- Détermination l'allongement unitaire et le glissement relatif dans la direction  $\vec{n}$  faisant un angle de  $60^\circ$  avec l'axe  $ox_1$  et perpendiculaire à l'axe  $ox_3$ .

L'allongement unitaire :

$$\varepsilon_n = \{\vec{n}\}^t [\xi] \{\vec{n}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = 4.598$$

$$\approx 4.6$$

Glissement relatif

$$g = \sqrt{|\xi(n)|^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{23.41 - 21.16} = 1.5$$

- 6- Vérifier les invariants du tenseur des déformations  $E_1$  et  $E_3$ .

$$\bullet E_1 = Tr \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\{o e_1 e_2 e_3\}} = Tr \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\{o X_I X_{II} X_{III}\}} = 5$$

$$E_3 = det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\{o e_1 e_2 e_3\}} = det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\{o X_I X_{II} X_{III}\}} = -5$$

## Chapitre III : Tenseurs des Contraintes

### III. 1. Actions mécaniques sur un milieu continu

On appelle actions mécaniques toutes actions qui se caractérisent par des forces ou des couples, ou bien par des densités linéiques, surfaciques, volumiques ou massiques de force.

On distingue parmi les actions mécaniques : les actions extérieures et les actions intérieures.

#### III.1.1. Les actions mécaniques extérieures

C'est une action mécanique exercée par un objet sur un autre et capable d'imposer une transformation. Ces actions sont de deux types : les actions de contact et les actions à distances.

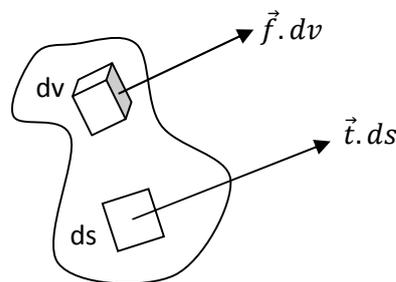


Figure. III.1 : Schéma des actions mécaniques extérieures

#### a. Les actions de contact

Elles s'exercent sur la surface extérieure du milieu sous la forme d'une densité surfacique de force  $\vec{t} \left( \frac{N}{m^2} \right)$ . Sur un élément de surface  $ds$  s'exerce une force élémentaire :

$$\vec{dt} = \vec{t} . ds$$

##### Exemple :

- Pression hydraulique ;
- L'eau sur le parement d'un barrage ;
- Le vent sur la voile d'un bateau.

#### b. Les actions à distance

Elles se caractérisent sur chaque particule ( $dm, dv$ ) par une action proportionnelle à la masse ou le volume de la particule considérée. Sur une particule s'exerce une force élémentaire :

$$\vec{df} = \vec{f} . dv$$

$$\vec{f} : \left( \frac{N}{m^3} \right)$$

##### Exemple :

- Force de pesanteur ;
- Force d'inertie.

**c. Equilibre d'un solide (milieu continu)**

A l'équilibre on a :

La somme des forces est nulle ;

La somme des moments par rapport à un point est nulle.

$$\iint \vec{t} \cdot ds + \iiint \vec{f} \cdot dv = \vec{0}$$

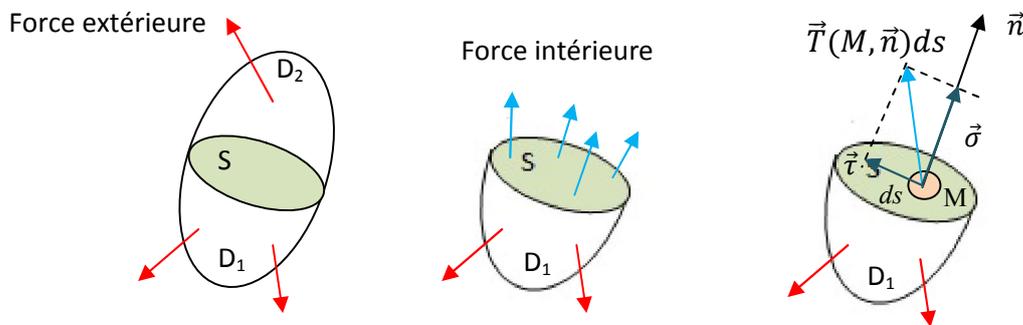
$$\iint \vec{OP} \wedge \vec{t} \cdot ds + \iiint \vec{OP} \wedge \vec{f} \cdot dv = \vec{0}$$

**III.1.2. Les actions mécaniques intérieures**

Ce sont les actions du milieu sur lui-même. Pour les définir autour d'un point  $P(\vec{x}, t)$ , il convient de couper le milieu  $M$  en deux parties (1) et (2) par une surface arbitraire passant par  $P$ .

**III.2. Coupure, facette et vecteur contrainte**

Soit un milieu continu  $D$  constitué de deux parties complémentaires  $D_1$  et  $D_2$  jointe par un plan qu'on appelle « facette de coupe ». Les efforts exercés par  $D_1$  sur  $D_2$  peuvent être représentés par une densité (répartition) surfacique des forces. Cette densité ne dépend que du point considéré et de la normale à la facette de coupe choisie contenant ce point, et elle est représentée par un vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{ds}$  appelé « vecteur contrainte » au point  $M$  dans la direction définie par le vecteur normal  $\vec{n}$ .



**Figure. III.2 :** Coupure et facette  $\vec{n}$  en  $M$

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette:

$$T(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$\sigma_n$  est la contrainte normale et  $\vec{\tau}_n$  est le vecteur cisaillement ou contrainte tangentielle.  $\sigma_n$  est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

Soit un repère orthonormé  $(M, x_1, x_2, x_3)$ ,  $M$  le centre de  $ds$  du plan  $(M, x_1, x_2)$  et  $e_3$  vecteur normal à  $ds$ .

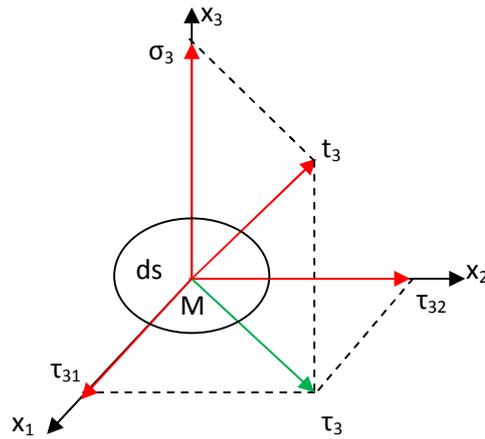


Figure. III.3 : Composantes du vecteur contraintes

$$t_3 \begin{cases} \sigma_3 \\ \tau_3(\text{sur le plan } (x_1, x_2)) \end{cases} \begin{cases} \tau_{31}(\text{suivant } x_1) \\ \tau_{32}(\text{suivant } x_2) \end{cases}$$

On donne le vecteur contrainte comme suit

$$\vec{t}_3 = \begin{pmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Par la même méthode on trouve

$$\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \tau_{21} \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \end{pmatrix} \text{ Pour } ds \text{ du plan } P(x_1, x_3)$$

$$\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} \text{ Pour } ds \text{ du plan } P(x_2, x_3)$$

### III.3. Tenseur des contraintes (Formule de Cauchy)

Prenons sur les axes  $Mx_1$ ,  $Mx_2$  et  $Mx_3$  les points A, B, C sur les parties positives de ces axes et au voisinage de M, puis isolons le tétraèdre de sommets M, A, B, C. Le vecteur  $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$  désigne l'unitaire normal sortant de la facette ABC, d'aire S.

Les facettes MBC, MCA et MAB ont pour unitaires normaux sortants :  $-\vec{x}_1, -\vec{x}_2, -\vec{x}_3$  et pour aires :  $\alpha S, \beta S, \gamma S$  si bien qu'elles sont soumises aux forces de contact :

$$-\vec{t}_1 \alpha S, -\vec{t}_2 \beta S, -\vec{t}_3 \gamma S$$

En tenant des forces de contact à l'équilibre on a :

$$\vec{t} S - \vec{t}_1 \alpha S - \vec{t}_2 \beta S - \vec{t}_3 \gamma S = \vec{0}$$

Ou encore :

$$\vec{t} = \vec{t}_1 \alpha + \vec{t}_2 \beta + \vec{t}_3 \gamma = \alpha \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \tau_{21} \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire, matriciellement :

$$\{\vec{t}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

Ou encore, sous forme condensée :

$$\{\vec{t}\} = [\Sigma]\{\vec{n}\} \text{ Ou } \vec{t} = \Sigma \cdot \vec{n}$$

$\Sigma$  est appelé tenseur des contraintes

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

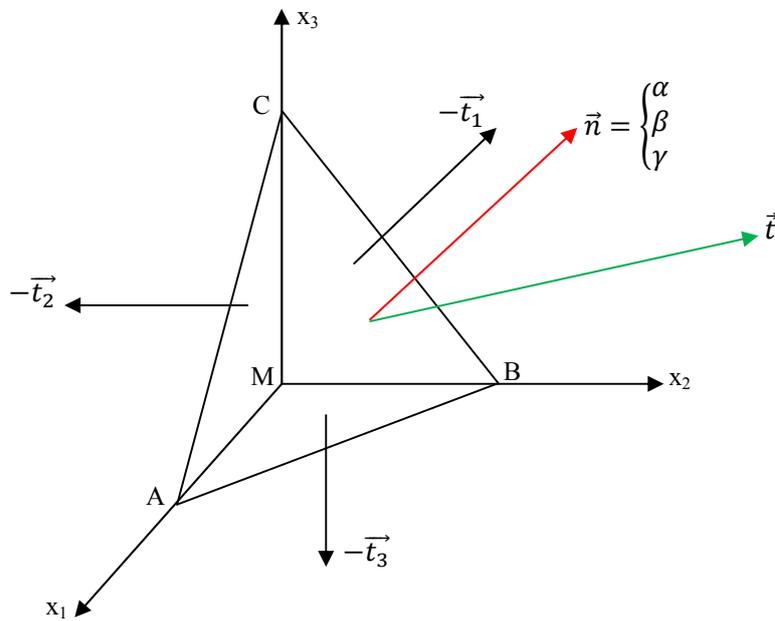


Figure. III.4 : Elément de volume tétraédrique

### III.4. Symétrie du tenseur des contraintes

Soit un pavé élémentaire de centre M, d'arête parallèle aux axes  $Mx_1$ ,  $Mx_2$ ,  $Mx_3$  et de longueurs  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$ .

Le pavé étant infiniment petit, l'équilibre des moments s'écrit en ne considérant que les forces de surface :

$$\begin{aligned} 2b \cdot 4ac \tau_{23} - 2c \cdot 4ab \tau_{32} &= 0 \\ 2c \cdot 4ba \tau_{31} - 2a \cdot 4bc \tau_{13} &= 0 \\ 2a \cdot 4cb \tau_{12} - 2b \cdot 4ca \tau_{21} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{23} = \tau_{32} \\ \tau_{31} = \tau_{13} \\ \tau_{12} = \tau_{21} \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes est symétrique.

Et on obtient finalement le tenseur des contraintes comme suit

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

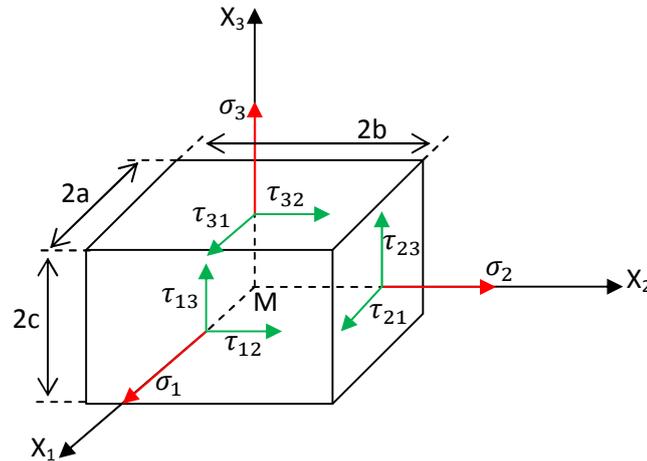


Figure. III.5 : Elément de volume cubique

### III.5. Décomposition de la contrainte en contrainte normale et tangentielle

La connaissance du tenseur des contraintes permet de calculer les composantes du vecteur contrainte dans tous le domaine.

La projection sur l'axe  $\vec{n}$  donne la contrainte normale par la formule suivante :

$$\sigma = \vec{n}^t \cdot \Sigma \vec{n}$$

$$\sigma = \{\vec{n}\}^t [\Sigma] \{\vec{n}\}$$

La projection sur le plan donne la contrainte tangentielle (cisaillement) :

$$\tau = |(* n) \Sigma \vec{n}| = \sqrt{|\Sigma n|^2 - \sigma^2}$$

### III.6. Equations de l'équilibre

On désignant un domaine  $D$ , de frontière  $S$ , inclus dans le solide étudié, l'équilibre des forces appliquées à ce domaine s'écrit:

$$\iint \vec{t} \cdot ds + \iiint \vec{f} \cdot dv = \vec{0}$$

Ou encore, avec  $\vec{t} = \Sigma \vec{n}$  :

$$\iint \Sigma \vec{n} ds + \iiint \vec{f} \cdot dv = \vec{0}$$

Le théorème d'Ostrogradski permet de transformer l'intégrale double (de surface) en intégrale triple (de volume), pour obtenir :

$$\iiint (\vec{f} + \overline{\text{div}} \Sigma) dv = \vec{0}$$

Cette formule devant être vérifiée pour tout domaine  $D$ , on en déduit l'équation vectorielle de l'équilibre local :

$$\vec{f} + \overline{\text{div}} \Sigma = \vec{0}$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes d'un repère cartésienne donne les trois équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} f_{x_1} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ f_{x_2} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ f_{x_3} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

### III.7. Contraintes principales et directions principales

Le tenseur des contraintes  $\Sigma$  étant symétrique, il est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe en point  $M$  un repère orthonormé  $\{M, X_I, X_{II}, X_{III}\}$  au moins, dans lequel la matrice des contraintes est de la forme :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  sont les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  du tenseur  $\Sigma$ , qui peuvent être déterminées par l'équation suivante :

$$\det[\Sigma - \lambda I] = 0$$

Les axes principaux  $MX_I, MX_{II}, MX_{III}$  correspondent aux directions propres de  $\Sigma$ , déterminées par l'équation suivante :

$$(\Sigma - \sigma_i I) \vec{X}_i = \vec{0}$$

### III. 8. Invariants scalaires du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes possède trois invariants  $s_1, s_2, s_3$ , définis mathématiquement comme les coefficients de l'équation caractéristique  $\det(\Sigma - \lambda I) = 0$ . C'est à dire les quantités scalaires:

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{Tr}(\Sigma) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ s_2 &= \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III} \\ s_3 &= \det(\Sigma) = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} \end{aligned}$$

### III. 9. Tenseur sphérique et déviateur

Dans le repère principal le tenseur sphérique et déviateur sont donnés par les relations suivantes:

$$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_d \quad \text{Avec} \quad \Sigma_s = \frac{s_1}{3}I \quad \text{et} \quad (s_1 = \text{Tr}(\Sigma)) : \text{la partie sphérique de } \Sigma$$

$$\Sigma_d = \Sigma - \frac{s_1}{3}I \quad : \text{la partie déviateur de } \Sigma$$

### III.10. Etats de contrainte particuliers

#### III. 10. 1. Etats sphérique

C'est le cas où les trois contraintes principales sont égales :

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{s_1}{3}$$

#### III. 10. 2. Etats uniaxial

C'est le cas où deux contraintes principales sont nulles :

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{III} \neq 0 \quad (\text{traction ou compression})$$

#### III. 10. 3. Etats de cisaillement pur

C'est le cas où toutes les composantes du tenseur des contraintes sont nulles sauf une seule contrainte de cisaillement :

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{12} \neq 0$$

#### III. 10. 4. Etats plan

C'est le cas où  $\sigma_{i3}$  sont nulles et  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  sont indépendantes de  $x_3$ .

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2) \end{cases}$$

#### Exercice 1:

L'état des contraintes en un point M d'un milieu continu est donné par le tenseur :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

1. Calculer les composantes normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau$  du vecteur contrainte agissant sur un

plan de normale  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Que peut-on conclure pour la normale  $n$  et la contrainte  $\sigma_n$ .

2. Déterminer les contraintes principales et les directions principales.
3. Vérifier les invariants des contraintes  $s_1$  et  $s_3$ .
4. Calculer la contrainte moyenne normale et la contrainte tangentielle maximale.

**Solution :**

1. Détermination La contrainte normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau_n$ .

$$\sigma_n = \vec{n}^t \cdot \Sigma \cdot \vec{n}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = \sqrt{|\Sigma n|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\left| \frac{9}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 - 9^2} = 0 \text{ MPa}$$

**Conclusion :** Contrainte tangentielle nulle, donc  $n$  est une direction principale et  $\sigma_n$  est une contrainte principale.

2. Les contraintes et les directions principales.

$$\det(\Sigma - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & 3 \\ 2 & 6 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 68\lambda + 82 = 0$$

En trouve :

$$\begin{cases} \lambda = 9 \\ \lambda = 1.27 \\ \lambda = 4.73 \end{cases}$$

avec  $\lambda_i = \sigma_i$  et  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

Donc :

$$\begin{cases} \sigma_I = 9.00 \text{ MPa} \\ \sigma_{II} = 4.73 \text{ MPa} \\ \sigma_{III} = 1.27 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$(\Sigma - \sigma_i I) \vec{X}_i = \vec{0}$$

$$X_I = [0.57 \quad 0.57 \quad 0.57]$$

$$X_{II} = [0.21 \quad -0.78 \quad 0.57]$$

$$X_{III} = [0.78 \quad -0.21 \quad 0.57]$$

3. Les invariants des contraintes  $s_1$  et  $s_3$ .

$$s_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 15$$

$$s_3 = \det(\Sigma) = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III} = 54.064$$

4. La contrainte moyenne normale et la contrainte tangentielle maximale

$$\sigma_m = \frac{s_1}{3} = \frac{1}{3} Tr(\Sigma) = 5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \sigma_i - \frac{s_1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \tau_1 = \sigma_I - \sigma_m = 9 - 5 = 4 \text{ MPa} \\ \tau_2 = \sigma_{II} - \sigma_m = 4.73 - 5 = -0.27 \text{ MPa} \\ \tau_3 = \sigma_{III} - \sigma_m = 1.27 - 5 = -3.73 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tau_{max} = \tau_1 = 4 \text{ MPa}$$

### Exercice 2 :

La répartition des contraintes dans un corps solide déformable en équilibre statique sans effet des forces de volume est donnée par le tenseur suivant rapporté au repère  $\{0 ; e_1 e_2 e_3\}$  :

$$\sigma = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \text{ MPa, (L'état des contraintes est indépendant de l'axe vertical } ox_3)$$

$ox_3)$

La contrainte agissant au point  $M(0,1)$  sur un plan verticale de normale inclinée de  $45^\circ$  par rapport à  $ox_1$ , est une contrainte de cisaillement pure  $\tau$ .

- Déterminer  $\sigma_{12}(x_1, x_2)$  et donner la valeur de  $\tau$ .

### Solution :

Les équations d'équilibre statique :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad (3)$$

L'équation (1) donne :  $\sigma_{12} = -x_2 + f(x_1)$

Avec l'équation (2) :  $f(x_1) = 2x_1 + cc$  : constante

D'où :

$$\sigma_{12} = 2x_1 - x_2 + c$$

Donc :

$$\sigma = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 + c & 0 \\ 2x_1 - x_2 + c & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} MPa$$

Le tenseur des contraintes au point  $M(0,1)$  :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1 + c & 0 \\ -1 + c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} MPa$$

Le vecteur contrainte au point  $M$  selon  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$T = \Sigma \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 + c & 0 \\ -1 + c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

La composante normale :

$$\sigma_n = \vec{n}^t \cdot \Sigma \vec{n} = \vec{n}^t \cdot \vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c - \frac{3}{2}$$

La contrainte est une contrainte de cisaillement pure :

$$\sigma_n = 0 \quad d'où \quad c = \frac{3}{2} MPa$$

Finalement :  $\sigma_{12} = \tau_{12} = 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}$

La composante tangentielle :

$$\tau_n = \sqrt{|T|^2 - \sigma_n^2}$$

$$\tau_n = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} MPa$$

## Chapitre IV: Lois de Hooke (Relations contraintes – déformations)

### IV.1. Introduction

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée, un comportement élastique linéaire.

### IV.2. Vecteur contraintes et déformations

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point seront représentés par un vecteur à neuf composantes.

La symétrie du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations sont ramène à six nombre de composantes nécessaires pour définir ces tenseurs.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

### IV.3. Loi de Hooke généralisée

Le comportement élastique est caractérisé par une relation linéaire entre contraintes et déformations. Dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle, cette relation s'écrit sous forme indicelle :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \Sigma = C E \end{cases} \quad \text{ou inversement} \quad \begin{cases} \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \\ \varepsilon = S \sigma \end{cases} \quad \text{Avec } S=C^{-1}$$

Où  $C_{ijkl}$  et  $S_{ijkl}$  sont les composantes de deux applications  $C$  et  $S$ , inverses l'une de l'autre, de l'espace des tenseurs symétriques dans lui-même. Ce sont les tenseurs d'élasticité. Souvent  $C$  est appelé tenseur de rigidité et  $S$  tenseur de souplesse. Compte-tenu de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, on doit avoir, par exemple pour  $C$ ,

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

On représente les deux tenseurs d'élasticité sous forme matricielle par 36 composantes (matrice  $6 \times 6$ ).

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix}$$

et

$$S = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1113} & S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2213} & S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3313} & S_{3312} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2313} & S_{2312} \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1313} & S_{1312} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1213} & S_{1212} \end{bmatrix}$$

Nous ferons de plus sur ces applications les deux hypothèses suivantes :

- **Hypothèse thermodynamique** : le tenseur d'élasticité est symétrique

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

- **Hypothèse de stabilité** : le tenseur d'élasticité est défini positif

$$C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \alpha > 0$$

D'après ces hypothèses, les composantes des tenseurs d'élasticité se réduisent à 21 coefficients indépendants. On peut les représenter par une matrice  $6 \times 6$  symétrique.

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & sym & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}$$

et

$$S = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1113} & S_{1112} \\ & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2213} & S_{2212} \\ & & S_{3333} & S_{3323} & S_{3313} & S_{3312} \\ & & & S_{2323} & S_{2313} & S_{2312} \\ & sym & & & S_{1313} & S_{1312} \\ & & & & & S_{1212} \end{bmatrix}$$

Enfin dans le cas général le comportement élastique des matériaux est caractérisé sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

#### IV.4. Anisotropie et isotropie

##### IV.4.1. Élasticité anisotrope

Lorsque le matériau est quelconque et ne présente pas de symétrie élastique, il est dit anisotrope. Un matériau anisotrope est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes. C'est la relation de comportement précédente qui lie les contraintes aux déformations.

Nous allons envisager quelques cas particuliers correspondant aux types d'anisotropie que l'on rencontre le plus fréquemment en mécanique.

##### a- Orthotropie

Dans ce cas il existe trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. Physiquement, cette anisotropie s'applique par exemple aux tôles laminées ou aux matériaux composites renforcés par deux ou trois systèmes de fibres dans des directions perpendiculaires. Le tenseur élastique d'un matériau orthotrope ne fait plus intervenir que neuf coefficients indépendants. Pour écrire ces matrices, on obtient directement la nullité des coefficients  $C_{1112}$ ,  $C_{1113}$ ,  $C_{1123}$ ,  $C_{1213}$ , etc....., et la matrice d'élasticité à la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

L'inverse

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Les composantes de la matrice de rigidité et de souplesse sont déterminées expérimentalement par d'essais de traction et de cisaillement.

**b- Isotropie transverse**

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Les propriétés du matériau isotrope transverse sont déterminées par cinq constantes d'élasticité indépendantes. La matrice des rigidités d'un corps isotrope transverse a donc la structure suivante lorsque l'axe d'isotropie est l'axe 3 :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & & & \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & & & \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & & & \\ & & & C_{2323} & & \\ & & & & C_{2323} & \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & & & \\ S_{1122} & S_{1111} & S_{1133} & & & \\ S_{1133} & S_{1133} & S_{3333} & & & \\ & & & S_{2323} & & \\ & & & & S_{2323} & \\ & & & & & \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

**c- Élasticité isotrope**

Dans le cas isotrope, le nombre de coefficients est réduit à deux par la relation  $C_{2323} = \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122})$ . Il existe plusieurs façons d'exprimer ces coefficients. On peut par exemple choisir ceux de Lamé  $\lambda = \frac{1}{2}(S_{1111} + S_{1122})$  et  $\mu = \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122})$ , ou le module d'Young  $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$  et le coefficient de Poisson  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$  vus dans le cas de l'essai de traction, où la matrice C des coefficients élastiques est égale à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

D'après l'inverse on trouve la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 1 + \nu & & \\ & & & & 1 + \nu & \\ & & & & & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

La loi de comportement élastique linéaire dite loi de Hooke généralisé, s'écrit dans le cas isotrope de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda Tr(\xi)\delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\xi)\delta_{ij} \right)$$

et dans le sens inverse :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} Tr(\Sigma)\delta_{ij}$$

Dans le cas général le comportement élastique isotrope d'un matériau homogène sont défini par le module d'élasticité et le coefficient de Poisson. Quelques valeurs typiques de  $E$  et  $\nu$  sont données dans le tableau suivant :

Matériau	$E$ (MPa)	$\nu$ (/)
Acier inox	203000	0.29
Aluminium	67500	0.34
Cuivre	100000	0.34
Plexiglas	2900	0.4

#### IV.5. Thermo-élasticité linéaire

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de dilater ou rétrécir les dimensions des structures. Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à la variation de température  $\Delta T$ , par le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ :

$$\varepsilon^{th} = \alpha \Delta T I$$

D'une façon plus générale, lors d'une sollicitation dite "thermomécanique", les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations mécaniques, elles même reliées aux contraintes par la loi de comportement du matériau. Dans le cas élastique linéaire isotrope, on obtient une relation entre les déformations et les contraintes sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \left( \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} Tr(\Sigma) \right) \delta_{ij}$$

L'inversion de cette relation nous fournit la loi de comportement dite "thermoélastique" du matériau :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\xi)\delta_{ij} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

**Exercice 1 :**

On considère une plaque d'acier carrée d'arête unité soumise à un chargement tel que le champ des déformations provoquées est uniforme donné par le tenseur :

$$\xi = \begin{bmatrix} 4.2 & 2.5 \\ 2.5 & 3.7 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

Calculer la matrice associée au tenseur des contraintes dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

On donne :  $E = 21000 \text{ N/mm}^2$  et  $\nu = 0.28$

**Solution :**

D'après la relation de comportement d'un matériau homogène isotrope suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\xi) \delta_{ij} \right)$$

En trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\xi) \delta_{11} \right) \\ &= \frac{21000}{1+0.28} \left( 4.8 \cdot 10^{-3} + \frac{0.28}{1-2 \cdot 0.28} (4.2 + 3.7) \cdot 10^{-3} \times 1 \right) = 161,22 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{12} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\xi) \delta_{12} \right) \\ &= \frac{21000}{1+0.28} \left( 2.5 \cdot 10^{-3} + \frac{0.28}{1-2 \cdot 0.28} (4.2 + 3.7) \cdot 10^{-3} \times 0 \right) = 41,01 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\xi) \delta_{22} \right) \\ &= \frac{21000}{1+0.28} \left( 3.7 \cdot 10^{-3} + \frac{0.28}{1-2 \cdot 0.28} (4.2 + 3.7) \cdot 10^{-3} \times 1 \right) = 143,17 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\xi) \delta_{33} \right) = \frac{21000}{1+0.28} \left( 0 + \frac{0.28}{1-2 \cdot 0.28} (4.2 + 3.7) \cdot 10^{-3} \times 1 \right) \\ &= 82,47 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

La matrice associée au tenseur des contraintes sont égales

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 161,22 & 41,01 & 0 \\ 41,01 & 143,17 & 0 \\ 0 & 0 & 82,47 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

**Exercice 2 :**

L'état des contraintes en un point  $M$  d'un milieu continu est donné, dans une base orthonormée, par le tenseur suivant:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} MPa$$

Calculer la matrice associée au tenseur des déformations dans la base principale ( $X_I, X_{II}, X_{III}$ ).

**Solution :**

Détermination les contraintes principales.

$$\det|\Sigma - \lambda I| = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \text{en trouve} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{D'après la condition : } \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 5 \\ \sigma_{II} = 1 \\ \sigma_{III} = -1 \end{cases} MPa$$

Tenseur des contraintes dans la base principale :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} MPa$$

D'après la relation de comportement d'un matériau homogène isotrope suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} Tr(\Sigma)$$

En trouve :

$$\varepsilon_I = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_I - \frac{\nu}{E} Tr(\Sigma) = \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \cdot 5 - \frac{\nu}{E} (5 + 1 - 1) = \frac{5}{E}$$

$$\varepsilon_{II} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{II} - \frac{\nu}{E} Tr(\Sigma) = \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \cdot 1 - \frac{\nu}{E} (5 + 1 - 1) = \frac{1 - 4\nu}{E}$$

$$\varepsilon_{III} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{III} - \frac{\nu}{E} Tr(\Sigma) = \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \cdot (-1) - \frac{\nu}{E} (5 + 1 - 1) = \frac{-1 - 6\nu}{E}$$

La matrice associée au tenseur des déformations sont égales

$$\xi = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 - 6\nu \end{bmatrix}_{\{X_I, X_{II}, X_{III}\}}$$

## Chapitre V: Critères de Résistance

### V.1. Critères de limite élastique

Lors d'un essai de traction ou de compression mono-axial, il est aisé de mettre en évidence un seuil qui s'exprime alors comme une valeur limite de la contrainte (de traction ou de compression).

Pour des états de contrainte plus complexes, la notion de seuil doit être étendue en à un « critère » qui porte non plus sur une seule composante scalaire de contrainte mais sur le tenseur lui-même.

Nous examinons dans ce cours plusieurs critères de limite élastique.

#### V.1.1. Critère de Rankine

C'est un critère d'extension maximale défini par la relation :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|) \leq \sigma_e$$

La quantité  $\sigma_R$  est appelée contrainte équivalente de Rankine ou la contrainte normale maximale.

Lors d'un essai de traction simple, la contrainte principale maximale  $\sigma_I$  est limitée supérieurement par une valeur expérimentale  $\sigma_e^t > 0$  alors que la contrainte principale minimale  $\sigma_{III}$  est limitée inférieurement par une valeur expérimentale  $\sigma_e^c < 0$  déduite d'un essai de compression simple. La contrainte intermédiaire  $\sigma_{II}$  n'est pas prise en considération.

$$\sigma_{III} \geq \sigma_e^c \quad \text{et} \quad \sigma_I \leq \sigma_e^t$$

#### V.1.2. Critère de Tresca

C'est un critère de cisaillement maximal  $\tau_{max}$ : celui-ci est limité par une valeur  $\tau_e = \frac{1}{2}\sigma_e$  déterminée expérimentalement par un essai de torsion pure. On a donc :

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|\} \leq \frac{1}{2}\sigma_e \Rightarrow |\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \sigma_e$$

Ce critère ne prend pas en compte la composante sphérique du tenseur des contraintes. Il est bien adapté aux matériaux à microstructure compacte comme les métaux. Pour décrire le niveau de sollicitation locale du matériau, on peut utiliser le concept de « contrainte équivalente » de Tresca :

$$\sigma_T = \sigma_I - \sigma_{III}$$

Le critère d'élasticité s'exprime alors par :

$$\sigma_T \leq \sigma_e$$

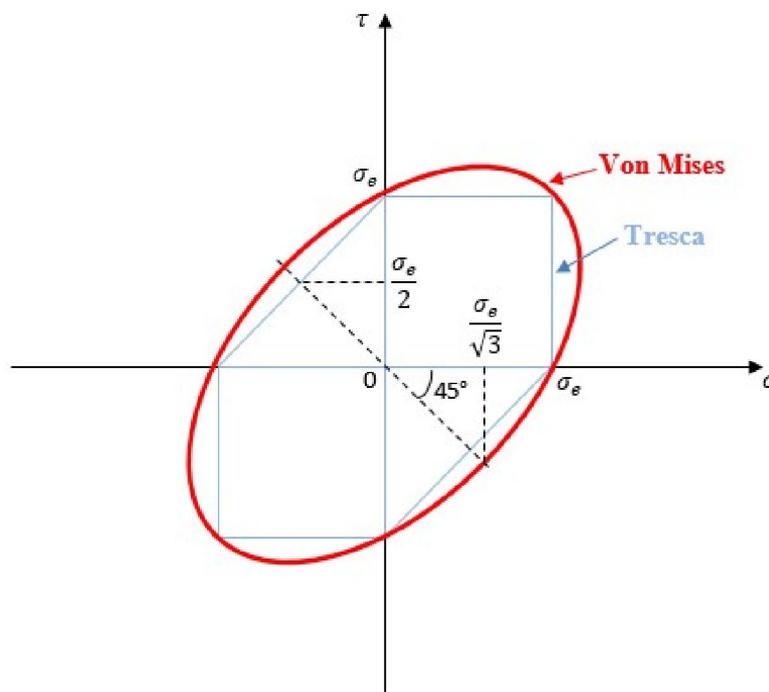
### V.1.3. Critère de Von Mises

C'est un critère souvent employé pour définir la limite élastique des métaux. Le domaine élastique est défini par la relation suivante :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]} \leq \sigma_e$$

Pour exprimer le critère sous la forme :

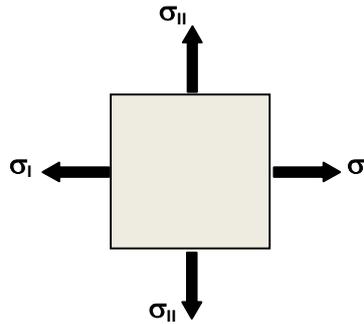
$$\sigma_{VM} \leq \sigma_e$$



**Figure. V.1** : Schéma des critères de résistance

**Exercice :**

Calculer la contrainte moyenne  $\sigma_m$ , le déviateur des contraintes  $\Sigma_d = \Sigma - \sigma_m I$  et la contrainte de Von Mises, la contrainte maximale de Tresca ainsi la contrainte de Rankine en traction biaxiale.

**Solution :*****Traction bi-axiale***

La figure ci-dessus montre un solide en traction biaxiale. Le tenseur contrainte dans la base principale s'écrit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La contrainte moyenne et la contrainte est donnée par :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + 0}{3} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{3}$$

Le déviateur des contraintes est donné par :

$$\Sigma_d = \Sigma - \frac{s_1}{3} I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_I - \sigma_{II} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{II} - \sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_I - \sigma_{II} \end{pmatrix}$$

La contrainte de von Mises est donnée par :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - 0)^2 + (\sigma_I - 0)^2]}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sigma_I^2 - 2\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_I^2]}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [2\sigma_I^2 - 2\sigma_I\sigma_{II} + 2\sigma_{II}^2]}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}]}$$

La contrainte maximale de Tresca est donnée par :

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|\}$$

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - 0|, |\sigma_I - 0|\}$$

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} |\sigma_I|$$

La contrainte de Rankine est donnée par :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|)$$

$$\sigma_R = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |0|)$$

$$\sigma_R = |\sigma_I|$$

## Références Bibliographiques

- [1] Laroze. S. Mécanique des structures, Tome 1, Solides élastiques, plaques et coques, cépaduès éditions, Toulouse, France, 2014.
- [2] Hecini. M. Polycopie mécanique des milieux continus, exercices corrigés avec résumé du cours, université de Biskra, 2015.
- [3] Seghir. A. Cours de mécanique des milieux continus (MMC), Université A. Mira de Béjaia, 2014.
- [4] Debard. Y. Elasticité, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique, 2006.
- [5] Ringot. E. Polycopie de mécanique des milieux continus élasticité linéaire, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, France, 2010.
- [6] Debih. A. Cours Elasticité, Université de M'sila, 2018.
- [7] Florence. E. Elasticité Notes de cours, université de paris, 2017.
- [8] Deghboudj. S. Polycopie de cours, mécanique des milieux continus, cours et applications, université Larbi Tébessi de Tébessa, 2016.
- [9] Nicolas Moës. Mécanique des milieux continus et discrets. Engineering school. École Centrale de Nantes, pp.125. cel-00612360v1, 2011.
- [10] Lecomu. L. Théorie mathématique de l'élasticité, Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, 1929.

*« Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau personne n'y croit sauf lui ! lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat nouveau tout le monde y croit sauf lui ! » [1]*