Cours pédagogique · Travaux pratiques

Optimisation numérique

La descente du gradient 2D

Implémentation vectorielle sous MATLAB

1 Principe théorique et schéma numérique

La descente du gradient est un algorithme d'optimisation itératif utilisé pour trouver un minimum local d'une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$.

1.1 Le vecteur gradient

Pour une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et dérivable, le vecteur gradient en un point (x, y) regroupe ses dérivées partielles premières :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Interprétation géométrique

Le gradient $\nabla f(x, y)$ indique la direction de la plus forte pente *ascendante*. Pour minimiser la fonction, l'algorithme se déplace dans la direction exactement opposée : $-\nabla f(x, y)$.

1.2 Formulation scalaire des mises à jour

À chaque itération k, les coordonnées du point (x_k, y_k) sont corrigées par :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \tag{2}$$

$$y_{k+1} = y_k - \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \tag{3}$$

où $\alpha > 0$ représente le pas d'apprentissage (*learning rate*).

1.3 Formulation vectorielle

En notant $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ le vecteur des variables, l'algorithme se résume à une unique équation vectorielle compacte :

Mise à jour vectorielle

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \alpha \nabla f(\mathbf{X}^{(k)}) \tag{4}$$

Cette écriture vectorielle permet une implémentation directe et élégante dans MATLAB, sans séparer les composantes x et y.

2 Exemple d'application

On considère la fonction parabolique d'essai :

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad \Longrightarrow \quad f(\mathbf{X}) = X_1^2 + 2X_2^2 \tag{5}$$

Le gradient sous forme vectorielle est :

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2X_1 \\ 4X_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Minimum théorique

Le minimum global se situe en $\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $f(\mathbf{X}^*) = 0$.

3 Code MATLAB vectorisé avec visualisation graphique

Le script suivant utilise la formulation vectorielle et affiche à la fois les itérations dans le terminal et la trajectoire de convergence sur les lignes de niveau.

descente_gradient_2d.m

```
clear; clc; close all;

fprintf('============================================================\n');
fprintf('   DESCENTE DU GRADIENT 2D (FORMULATION VECTORIELLE)\n');
fprintf('============================================================\n\n');

% 1. Définition de la fonction et de son gradient vectoriel
f = @(X) X(1)^2 + 2 * X(2)^2;
grad_f = @(X) [2 * X(1); 4 * X(2)];

% 2. Paramètres de l'optimisation
```

```
X = [4; 3];             % Point d'initialisation X0 = (x0, y0)
alpha = 0.1;            % Pas d'apprentissage (learning rate)
n_iter = 20;            % Nombre d'itérations

% Matrice pour conserver l'historique de la trajectoire
history = zeros(2, n_iter + 1);
history(:, 1) = X;

% 3. Boucle itérative (Mise à jour vectorielle)
for k = 1:n_iter
    % Calcul du gradient et mise à jour vectorielle
    X = X - alpha * grad_f(X);

    % Sauvegarde de la position
    history(:, k + 1) = X;
end

% 4. Affichage des résultats finaux
fprintf('Convergence terminée après %d itérations.\n', n_iter);
fprintf('Point final atteint : X = [%.6f, %.6f]\n', X(1), X(2));
fprintf('Valeur minimale f(X) : %.6e\n\n', f(X));

% 5. Visualisation des lignes de niveau et de la trajectoire
[Grid_X, Grid_Y] = meshgrid(-5:0.1:5, -5:0.1:5);
Z = Grid_X.^2 + 2 * Grid_Y.^2;

figure;
contour(Grid_X, Grid_Y, Z, 25, 'LineWidth', 1);
hold on;
plot(history(1, :), history(2, :), 'r-o', ...
     'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r');
plot(0, 0, 'g*', 'MarkerSize', 12, 'LineWidth', 2); % Minimum exact

xlabel('x'); ylabel('y');
title('Descente du Gradient Vectorielle en 2D');
legend('Lignes de niveau de f(x,y)', 'Trajectoire de descente', 'Minimum exact (0,0)');
grid on; colorbar;
```

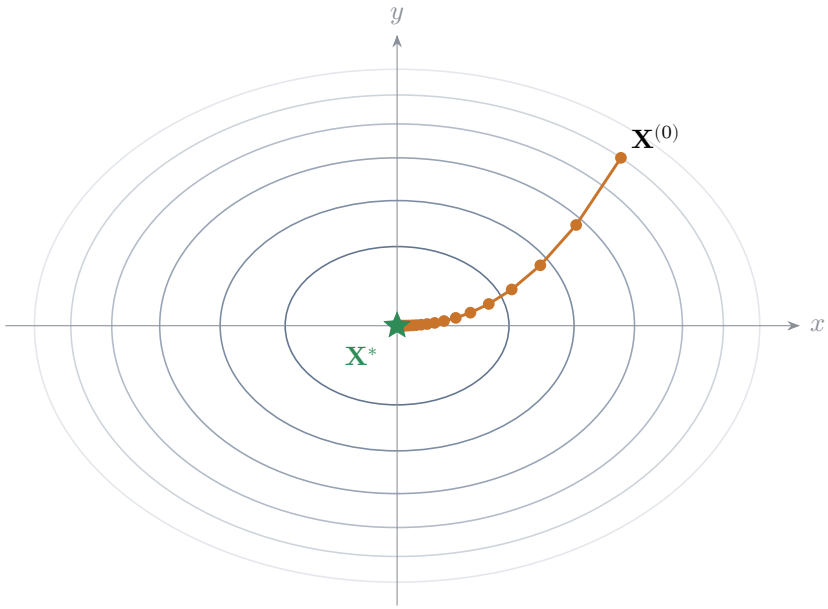


Figure 1. *Lignes de niveau de* $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ *et trajectoire de la descente du gradient pour* $\alpha = 0{,}1$ *depuis* $\mathbf{X}^{(0)} = (4,3)$ *: les itérés valent* $x_k = 4 \cdot 0{,}8^k$ *et* $y_k = 3 \cdot 0{,}6^k$.